T.C
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIK VE FOURİER SERİLERİNİN $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{r})$ TOPLANABİLMESİ

Semiha TEKİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2018

T.C

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIK VE FOURİER SERİLERİNİN (C,r) TOPLANABİLMESİ

Semiha TEKİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2018

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111313005 numaralı öğrencisi Semiha TEKİN'in hazırladığı **"Olasılık ve Fourier serilerinin (C,r) toplanabilmesi"** başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/05/2018 Çarşamba günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Muammer KULA

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç.Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09/05/18 tarih ve 19-1 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

09/05/18

Prof. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ BOZOK ÜNİVERSİTESİ 1924

İÇİNDEKİLER

OLASILIK VE FOURİER SERİLERİNİN $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{r})$ TOPLANABİLMESİ

Semiha TEKİN

Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2018; Sayfa: 40

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, olasılık ve Fourier serilerinin (C,r) toplanabilmesini incelemektir.

Birinci bölümde, Fourier serilerinin (C,r) toplanabilmesi ile olasılık arasındaki ilişkinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde R durum uzayı ve rasgele ilerleme ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Üçüncü bölümde regüler ve süperregüler fonksiyonlar ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Dördüncü bölümde h - yol işlemleri ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Beşinci bölümde Markov zincirinin Martin çıkış sınırı ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Altıncı bölümde Martin temsil teoremi ve minimal regüler fonksiyonların sınıfı ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Yedinci bölümde R' sınır kararlılığı ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Sekizinci bölümde nonnegatif h - süperregüler fonksiyonların sınır davranışı ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Olasılık, Fourier-Stieltjes serisi, Toplanabilme, Markov zinciri, Regüler fonksiyon, Martin temsil teoremi.

PROBABILITY AND THE $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{r})$ SUMMABILITY OF FOURIER SERIES

Semiha TEKİN

Bozok Universty

Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

2018; Page: 40

Thesis Supervisor: Associate Professor Doctor Abdullah SONMEZOGLU

ABSTRACT

The aim of this study which compose of eight parts, is to investigate probability and the (C, r) summability of Fourier series.

In the first chapter, information about the historical development of the relation ship (C, r)summability of Fourier series and probability is given. In the second chapter, the proof of theorems with respect to the state space R and the random walk is investigated. In the third chapter, the proof of theorems with respect to regular and superregular functions is investigated. In the fourth chapter, the proof of theorems with respect to h -path processes is investigated. In the fifth chapter, the proof of theorems with respect to the Martin exit boundary of the Markov chains investigated. In the sixth chapter, the proof of theorems with respect to Martin representation theorem and the class of minimal regular functions is investigated. In the seventh chapter, the proof of theorems with respect to resolutivity of the boundary$R'$is investigated. In the eighth chapter, the proof of theorems with respect to boundary behavior of nonnegative h - superregular functions is investigated.

Keywords: Probability, Fourier-Stieltjes series, Summability, Markov chain, Regular function, Martin representation theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm danışmanım Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, ayrıca eşim Mehmet Ali KARAKOÇ' a teşekkür ederim.

SEMBOLLER VE KISALTMALARIN LİSTESİ

$S[f]$: f fonksiyonunun Fourier serisi

a_n : Fourier katsayısı

b_n : Fourier katsayısı

$K_n(t)$: Dirichlet çekirdeği

(C, r) : r.mertebeden Cesa'ro toplanabilme

(C^*, r) : (C, r) metodu ile oluşturulan dönüşüm dizisinin toplanabilmesi

$a_n = O(1)$: $\{a_n\}$ dizisinin sınırlı olması

$S(dF)$: dF'nin Fourier-Stieltjes serisi

$f * g$: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu(evrişimi)

1. GİRİŞ

Bir sayılabilir durum uzayında bir geçici Markov zincirinin Martin giriş ve çıkış sınırları olasılıksal ve potansiyel teorik metotların bir kombinasyonunu kullanarak ilk olarak Doob [1] tarafından oluşturulmuştur. Doğrudan olasılıksal yapı daha sonra G. A. Hunt [2] tarafından önemli bir makalede yapıldı. Bu iki çalışma özel örnekler ele almak suretiyle yani özel örnekler göz önüne alarak Markov zincirlerinin genel teorisinin ve Martin sınırlarının açıklanmasında ilginç ve önemli bir problemi ortaya attı. Bu özel örnekler; Martin sınır oluşturma problemi ve özel Markov zincirleri için sunum ve fine (ince) limit teoremleri ile ilgili ispatı gibi daha hassas problem (Doob [1], sayfa 452 ve bu konunun olasılıksal ve potansiyel teorik anlamı için Naim [3]'in tezi) dır. Özel örnekler Lamperti ve Snell[4],Watanabe [5],[6] (fine limit teoremlerini tartışmadı Doob, Snell ve Williamson [7] tarafından tartışılmıştır). Bu çalışma [1]'deki temel sonuçların kısa bir özetini de içerir. Bu çalışmalar dışında özel örnekleri analiz etme ve oluşturma yolunda bir şey yapılmamıştır. Bu çalışmanın amacı Fourier serilerinin (C, r) toplanabilirliği ile doğal bir şekilde ilişkili olan belirli bir Markov zincirini göz önüne alarak bu doğrultuda bir katkı yapmaktır. Dizilerin Cesa'ro toplanabilmesi ve bunların Fourier serilerine uygulamalarının açıklaması için [8]'e bakılabilir. [1], [3] ve [9] aracılığıyla bu işlem potansiyel teorisinin oluşturulması Fourier serilerinin (C, r) toplanmasında görünüşte yeni tip limit teoremlerini sağlar. Bu limit teoremleri izleyen standart terminoloji ile fine (ince) limit teoremleri olarak adlandırılır. Bu çalışmanın 8. bölümünde açıklaması [10]'da bulunan bir Fourier serisinin "fine limit" kavramını bir Fourier serisinin(C^{*}, r)kavramına bağlayan bir teoremin ispatı incelenecektir. Bu çalışmanın esas sonuçlarını özetlemeden önce çoğu Zygmund [8]'den alınan bazı notasyonel düzenlemeleri belirlemek ve bazı tanımları hatırlatmak gerekli ve uygun olacaktır.

Tanım 1.1.F, $(-\pi, \pi)$aralığında sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda $S(dF)$ ile gösterilen dF'nin Fourier-Stieltjes serisi ile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cosntdF(t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sinntdF(t)\, n = 0,1,2, \ldots$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cosnx + b_n sinnx \tag{1.1}$$

formal trigonometrik serisini ifade ederiz. Bu durumda $S(dF)$ Fourier-Stieltjes serisi ile F, $(-\pi, \pi)$aralığında sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun bu durumda [8] den iyi bilindiği gibi (C, r) toplanabilme konusunda $\sigma_n^r(x; dF)$ ile gösterilen $S(dF)$ in n.kısmı toplamı aşağıdaki denklemle verilir.

$$\sigma_n^r(x, dF) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n^r\,(x - t)dF(t) \tag{1.2}$$

burada

$$K_n^r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{n} \frac{A_{n-j}^r}{A_n^r} cosjt, \;\; n \geq 1 \text{ise}$$

$$= \frac{1}{2}, \quad n = 0 \text{ ise} \tag{1.3}$$

ve

$$A_k^r = \binom{k + r}{r} \approx \frac{(k)^r}{\Gamma(r+1)} \tag{1.4}$$

dır. Hatırlayalım ki k ≥ 1 tamsayı, A_0^r=1 ve $\Gamma(r)$ Euler Gamma Fonksiyonu ([8]) olmak üzere yeteri derece büyük k’lar için A_k^ryaklaşık olarak $\frac{k^r}{\Gamma(r+1)}$’e eşittir.

Şimdi aşağıdaki özelliklere sahip $|x|$≤π ve$|y|$≤π şartını sağlayan (x, y) çiftlerinde yani

$$\{(x, y) : |x| \leq \pi, |y| \leq \pi\}$$

bölgesinde Borel ölçülebilir

$$\left(P_{n,n+1}^r(x, y), \quad n = 0,1,2, \ldots\right)$$

fonksiyonlarını arıyoruz.

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_{n+1}^r\,(y - t) P_{n,n+1}^r(x, y)dy = K_n^r(x - t) \tag{1.5}$$

veya denk olarak $(-\pi,\pi)$aralığında sınırlı salınımlı olan bütün F'ler için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{n+1}^{r}(y;dF) P_{n,n+1}^{r}(x,y)dy = \sigma_n^r(x,dF). \tag{1.6}$$

Böyle operatörleri aramamızın sebebi onlar aşağıdaki iki şartı sağladığında

$$P_{n,n+1}^{r}(x,y) \geq 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_{n,n+1}^{r}(x,y)dy = 1, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.8}$$

bu durumda F_n , $(x_k(w),\ 0 \leq k \leq n)$ rasgele değişkenler ile üretilen Borel cismi olmak üzere

$$\left\{\sigma_n^r\big(x_n(w)\big); dF), F_n, \quad n = 0,1,2,\ldots\ldots\right\}$$

martingale olan bu kümeyle bağlantılı olan

$$\left\{P_{n,n+1}^{r}(x,y)\ , \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\right\}$$

ile verilen geçici olasılık yoğunluklu

$$\{x_n(w), \qquad n = 0,1,2,3\ldots\}$$

Markov sürecini oluşturmak olacaktır. Kullandığımız olasılık teorinin kavramlarını ve martingale teorisinin sonuçları Doob [11]'in tezinde bulunabilir. Şimdi her $r \geq 1$ için (1.5), (1.6) ve (1.8)'ı sağlayan

$$\left(P_{n,n+1}^{r}(x,y), \qquad n = 0,1,\ldots\right)$$

her zaman bulunabilir. Fakat G.G. Lorentz ([12]'nin 5-7 sayfaları) tarafından gösterildiği gibi her bir r için (1.7) gerekli olarak başarısız olur. [12]'de her bir $r > 1$ için gösterildiki

$$\left\{P_{n_k n_{k+1}}^{r}(x,y), \qquad k = 0,1,2,\ldots\right\}$$

operatörlerinin uygun alt dizisi için (1.5)-(1.8) geçerli olacak şekilde yeteri derecede hızlı olarak sonsuza giden $\{n_k,\ \ k = 0,1,2,3,\ldots\}$alt dizisini buna rağmen seçemeyiz. Alt dizi F fonksiyonundan bağımsız olarak oluşturulur. Tam olması için şimdi bu teoremin tam ifadesi verilecektir. İspat için [12]'nin 2. Kısmındaki Bölüm 1'e bakılabilir.

Teorem 1.2. ([13]) $r > 1$ olmak üzere herhangi mertebeden (C, r) toplanabilme için $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ tamsayıların alt dizisi ve aşağıda üç şartı sağlayan$\{P_{n_k n_{k+1}}^r\}_{k=0}^{\infty}$operatörlerinin uygun dizisi vardır.

(a) $x, y \in [-\pi, \pi]$için$P_{n_k n_{k+1}}^r(x, y) = 0$

(b) Her $k \geq 0$ için $\int_{-\pi}^{\pi} P_{n_k n_{k+1}}^r(x, y)dy = 1$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} P_{n_k n_{k+1}}^r(x, y) K_{n_{k+1}}^r(y - t)dy = K_{n_k}^r(x - t), \quad k \geq 0$

Buna ek olarak $n_0 = 0$ ve $n_1 = 1$ ve genellikle n_{k+1} aşağıdaki büyüme şartını sağlar.

$$n_{k+1} \geq \frac{n_k + 4n_k^2(r + n_k - 1)^2}{r(r-1)} \tag{1.9}$$

$P_{n_k n_{k+1}}^r(x, y)$fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_{n_k n_{k+1}}^r(x, y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n_k} B_j^r\,[n_k, n_{k+1}]\cos j(x - y)\right] \tag{1.10}$$

burada

$$B_j^r[n_k, n_{k+1}] = \frac{A_{n_k - j}^r / A_{n_k}^r}{A_{n_{k+1}}^r / A_{n_{k+1}}^r}, \quad j = 1, 2, \ldots., n_k\,. \tag{1.11}$$

Gösterilebilir ki$m$ ve $n\,, j$den büyük $n \geq m$ olacak şekilde keyfi sayılarsa (1.11) formülü iyi tanımlıdır. Yani

$$B_j^r[m, n] = \frac{A_{m-j}^r / A_m^r}{A_{n-j}^r / A_n^r}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots m \tag{1.11$'$}$$

dır. Ayrıca

$$P_{m,n}^r(x, y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m} B_j^r\,[m, n]\cos j(x - y)\right], \tag{1.10$'$}$$

dır. Böyle olmakla beraber keyfi m, n tam sayıları için $P^r_{m,n}(x,y) \geq 0$ olduğu şartı doğru değildir. Gerçekten $(1.10')$ ile tanımlanan $P^r_{n,n+1}$ trigonometrik polinomlarının (1.5), (1.6), (1.8) özelliklerini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Fakat yukarda daha önce bahsettiğimiz Lorentz'in teoremine göre (1.7) sağlanmaz. Bu bizi doğal olarak aşağıdaki tanıma götürür.

Tanım 1.3. ([13])Teorem 1.2'nin (a), (b), (c) şartlarını sağlayan (1.10) formunun $\left(P^r_{n_k n_{k+1}}\right)_{k=0}^{\infty}$ pozitif operatörlerinin uygun dizisi varsa $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ alt dizisi kabul edilebilir. Yani $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ uygun alt dizisi olarak adlandırılacaktır. $(1.10')$ formundaki trigonometrik polinomlar için kullanışlı bir eşitlik ifade edeceğiz. Fakat bazı notasyon tanıtacağız.

Eğer f $\in L'[-\pi,\pi]$ ise bu durumda f ve $P^r_{m,n}$ ninkonvolüsyonunu aşağıdaki gibi tanımlarız.

$(1.10')$'nın formu $P^r_{m,n}$ olmak üzere

$$\left(P^r_{m,n} * f\right)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, P^r_{m,n}(t,x)dx. \tag{1.12}$$

Aşağıdaki eşitlik rutin bir hesaplamadan sonra kolayca elde edilir. Eğer $m_0,\ m_1, \dots m_k,\ \ 0 \leq m_0 < \ m_1 < \cdots < m_k$olacak şekilde negatif olmayan sayıların dizisi ise bu durumda

$$P^r_{m_0,m_k} = P^r_{m_0,m_1} * P^r_{m_1,m_2} * \dots * P^r_{m_k,m_{k+1}} \tag{1.13}$$

dır. Not edilmelidir ki bu özdeşlik cebirseldir ve $\{m_j\}_{j=0}^{k}$ dizisinin bir admisible (kabul edilebilir) alt dizinin elemanları olması gerekliliği yoktur. Ancak (1.13) kabul edilebilir alt diziye uygulandığında aşağıdaki faydalı durumu verir.

Teorem 1.4. ([13])Bir kabul edilebilir alt dizinin her alt dizisi kabul edilebilir alt dizidir.

Şimdi bu çalışmanın temel sonuçlarını ifade etmeye hazırız. İşimizin ilk sırası R durum uzayı ve $\{X_{n_k}(w), k \geq 0\}$ ile gösterilen Markov zincirinin geçiş olasılık yoğunlukları (1.10) ile verilen Markov sürecini oluşturmaktır. Bu 2. Bölümde yapılacaktır. Böylece bu random ilerleyiş konusunda regüler (harmonik) fonksiyon kavramını tanımlarız ve bu fonksiyonların aşağıdaki karakterizasyonlarını elde ederiz.

Teorem 1.5. ([13]) $u(n_k, x)$ regüler fonksiyondur $\Leftrightarrow n.(C, r)$ kısmi toplamı $\sigma_{n_k}^r(x) = u(n_k, x)$ özelliğine sahip $\sigma_n^r(x)$ ile gösterilen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cosnx + b_n sinnx$$

trigonometrik serisinin bulunmasıdır. Bu analizi daha ilerleterek aşağıdaki ek sonuçları elde ederiz.

Teorem 1.6. ([13]) Bu random ilerlemenin Martin çıkış sınırı $C(0;1)$, Öklid düzleminde birim diskin çevresi ve minimal pozitif regüler fonksiyonlar(C, r) Kernel (çekirdek)

$$\{K_n^r(x-t) : t \in C(0;1)\}$$

ile verilir.

Martin temsil teoremi Fourier seriler teorisinde [8] klasik aşağıdaki sonuca denk bir sonuç verir.

Teorem 1.7. ([13]) $u(n_k, x)$ pozitif regüler fonksiyonların sınıfı pozitif ölçülü Fourier-Stieltjes serilerin (C, r) toplamlarının sınıfı ile aynıdır, yani eğer $u(n_k, x)$ pozitif regüler fonksiyonsa bu durumda

$$u(n_k, x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n_k}^r (x-t) dF(t)$$

olacak şekilde monoton azalmayan bir F fonksiyonu vardır.

7. ve 8. Bölümde aşağıdakiler üzerine bazı sonuçlar verilecektir.

(1) Dirichlet problemi doğal olarak bu çalışmada tartışılan Markov süreci ile ilişkilidir.

(2) Brelot ([1], [2], [9]) anlamında Martin sınırının kararlılığı.

(3) Fine (ince) topoloji ve uygun fine (ince) limit teoremleri.

Buradan anlaşılacağı gibi 7. ve 8. Bölümde(1), (2) ve (3) üzerine bazı sonuçlar verilecektir. Çoğu büyük kısmı için ispatlar atlanmıştır. Çünkü ayrıntılar Brelot, Doob, Hunt ve Naim ([1], [2], [3], [9]) tarafından önceden daha genel bir şekilde verilmiştir. 8. Bölümde bir fine (ince) limitin olasılıksal kavramı ile [10] da Zygmund tarafından tartışılan (C^*, r)limitinin klasik kavramı birleştirilmiştir. Burada esas sonuç martingale yakınsaklık teoremi ve (C^*, r) kernel (çekirdek) in özel yapısına dayanmaktadır. Bunlara ek olarak genel durumda bilinmeyen minimal yollarlın kutuplara yakınsama oranı üzerinde bir sonuç elde ediyoruz. (Minimal yollar ve özellikleri tartışması için [1]'e bakılabilir).

2. *R* DURUM UZAYI VE RASGELE(RANDOM) İLERLEME

$\{n_k\}$, sabit r.mertebeden$(r > 1)$ Cesaro toplanabilmeye göre kabul edilebilir alt dizi olsun. $P_{01}^r(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} > 0$ olduğundan $n_0 = 1$ ve $n_1 = 1$ seçimini yapabiliriz yani rasgele ilerlemenin ilk adımı (-π,π) aralığında düzgün olarak dağılır. Bu rasgele ilerlemenin gerçekleştiği R durum uzayı aşağıdaki gibidir:

$C(0;r_n)$, $n = 0,1,2,\dots$ ile yarıçapı r_n ve Öklid düzleminde orjin merkezli bir çemberin çevresi gösterilsin.

$r_n = 1 - \frac{1}{n+2}$, $n = 0,1$,…ve $R_n = C(0;r_n)$ olsun. Ayrıca B_n ile R_n in Borel alt cümleleri gösterilsin. Şimdi aşağıdaki tanım yapılabilir.

Tanım 2.1. ([13]) $\{n_k\}$, (C,r) toplanabilmesine ait kabul edilebilir bir alt dizisi olsun. Böylece $\{B_{n_k}, k \geq 0\}$ tarafından üretilen B' Borel cebiri ile $R = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_{n_k}$ tanımlanır.

Öklid düzleminin bünyesel (relatif) topolojisinde verilen bir topolojiyi R üzerinde tanımlarız.

Uyarı 2.2. ([13]) Bu şekilde tanımlanan R nin kesinlikle bahsederken $R(n_k)$ ile yazılması gerekecek şekilde kullanılan alt diziye bağlı olduğu gözlemlenmelidir. Ancak bu bir durumdur. Burada notasyonel farklılıklar gereksiz sorunlara ve karışıklıklara neden olur. Özellikle zaten kullanılan R_{n_k} sembolü konusunda olur. Buna ek olarak bu çalışmada verilen tartışma herhangi bir $n > 1$ sayısı ve herhangi kabul edilebilir dizi için geçerlidir.

Uyarı 2.3. ([13]) Çok hesaplama ile uğraşılacaktır ve alt indisleri ve üst indisleri bir ormanda kaybetmiş gibi olmaktan sakınmak için aşağıdaki düzenlemelerle uyum halinde kullanmayı aşağıda düşünüyoruz.

(1) $\xi \in (-\pi,\pi)$ olmak üzere R nin noktaları $r_{n_k}e^{i\xi}$yerine (k,ξ)ile gösterilecek

(2) Çok kullanışsız olan $P_{n_k n_{k+1}}$ için $p_{k,k+1}(\xi,\eta)$ yazılacaktır.

(3) R_{n_k}içinR_k ve B_{n_k}için B_k

(k, ξ)noktasında$R$ tanım bölgeli u reel değerli fonksiyonun değeri $u(k, \xi)$ ile gösterilir.

Bu çalışmanın kalan kısmı için kabul edilebilir dizi ve r sabit kalacağından n_k alt indisi ile k nın yerini değiştirmek ve r üst indisi ihmal etmek hiçbir karışıklığa neden olmayacaktır.

(4) Orjin merkezli düzlemde ortak merkezli çemberlerin ailesi olarak R nin kabul edilmesi kolay anlaşılma amacına yardımcı olacaktır.

Tanım 2.4. ([13]) Geçici olasılıklı yoğunluklar $p_{m,m+1}(\xi, \eta)$ ile R üzerinde rasgele ilerleme şimdi aşağıdaki yolla tanımlanır:

Eğer $(m, \xi)\epsilon R$ noktasında bulunuyorsak bu durumda (m, ξ) noktasından $A\epsilon B_{m+1}$ Borel cümlesine giden olasılık dağılım

$$\int_A p_{m,m+1}(\xi, \eta) d\eta \tag{2.1}$$

ile verilir. Böylece (m, ξ) noktasında başlayan rasgele ilerleme R nin ardışık R_m halkaları boyunca adım adım dışa doğru ilerler. (m, ξ) noktasından $A\epsilon B_{m+1}$ Borel cümlesine giden olasılık yoğunluk (2.1) ile verilir. Daha formal olarak R durum uzaylı bir Markov süreci şu şekilde tanımlanır:

$$p_{m,m+2}(\xi, \eta) = p_{m,m+1}(\xi, \zeta) * p_{m+1,m+2}(\zeta, \eta)$$

olsun ve tümevarımla $p_{m,m+k}(\xi, \eta)$ ifadesini aşağıdaki gibi tanımlarız.

$$p_{m,m+k}(\xi, \eta) = p_{m,m+k-1}(\xi, \zeta) * p_{m+k-1,m+k}(\zeta, \eta) \tag{2.2}$$

A, $(-\pi, \pi)$ nın bir Borel alt cümlesi olsun.

$$P_{m,k}(\xi, A) = \int_A p_{m,m+k}(\xi, \eta) d\eta \qquad k = 1,2, \dots$$

eşitliğini kuralım.$\xi\epsilon A$ ise $P_{m,0}(\xi, A) = 1$, $\xi \notin A$ ise $P_{m,0}(\xi, A) = 0$şeklinde bir standart sonuç tanımlanabilir ([11], sayfa 86) ki aşağıdaki iki özelliğe sahip olan $(-\pi, \pi)$ durum uzaylı $\{\hat{X}_k(m, \xi)(w), \quad k = 0,1,2, \dots\}$ bir Markov süreci vardır.

(a) $P_r\left[\hat{X}_0(m,\xi)(w)=\xi\right]=1$ (2.3)

ve $k\geq 0$ için olasılığı bir olan yani bir olasılıklı,

(b) $P_r\left[\hat{X}_{k+1}(m,\xi)(w)\in A\middle|\hat{X}_k(m,\xi)(w)\right]=P_{m,k}\left(\hat{X}_k(m,\xi)(w);A\right)$

elde edilir.

Aşağıdaki yolla tanımlanan bu sürecin uzay-zaman versiyonuyla ilgilenilecektir.

$$X_k(m,\xi)(w)=\left(m+k,\hat{X}_k(m,\xi)(w)\right),\qquad k=0,1,2\ldots \tag{2.4}$$

Bu durumda yoğunlukları (2.4) ([1], sayfa 54) ile verilen sabit geçişli olasılıklarla $\{X_k(m,\xi)(w): k\geq 0\}$ R üzerinde bir Markov sürecidir. Gösterim kolaylığı için w ihmal edilecek ve $X_k(m,\xi)(w)$için $X_k(m,\xi)$ yazılacaktır. Bu gösterim kolaylığı standarttır.

3. REGÜLER VE SÜPERREGÜLER FONKSİYONLAR

Tanım 3.1. ([13]) Eğer u, R üzerinde nonnegatif ölçülebilir fonksiyon veya R nin her bir R_k halkasında alttan sınırlı ise (k, ξ) noktasında $p * u$ fonksiyonu

$$(p * u)(k, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{k,k+1}(\xi, \eta)\, u(k+1, \eta) d\eta$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2. ([13]) A, R nin ölçülebilir alt cümlesi olsun. Eğer A üzerinde $u \geq p * u$ ve A üzerinde $p * u$ sonlu ise R_k $(-\infty < u \leq +\infty)$ halkasında alttan sınırlı olan ölçülebilir u fonksiyonuna A üzerinde süperregülerdir denir.

Uyarı 3.3. ([13]) Gözlemlenmelidir ki eğer $(p * u)(k, \xi) < +\infty$ ise bu durumda R_{k+1} üzerinde yoğunluğu $p_{k,k+1}(\xi, \eta) d\eta$ olan ölçüye göre hemen hemen her yerde $|u(k+1, \eta)| < +\infty$ dır. R_{k+1}üzerindekiLebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her yerde $|u(k+1, \eta)| < +\infty$ sonucu çıkar.

Tanım 3.4. ([13]) $-u$, Aüzerinde süperregüler ise u'ya A üzerinde subregular (alt regüler)denir. u ve $-u$ nun her ikisi de A üzerinde superregüler ise bu durumda$u$'ya A üzerinde regülerdir denir. Eğer $A = R$ ise R üzerinde cümlesi kaldırılır ve u, süperregüler, regüler veya subregüler (altregüler) diye adlandırılır.

Teorem 3.5. ([13]) u süperregüler ise ölçülebilir

$$\{X_0(m, \xi), \dots, \qquad X_k(m, \xi)\}$$

rasgele değişkenlere göre F_k en küçük Borel cismini göstermek üzere,

$$\{u[X_k(m, \xi)], F_k, k > 0\}$$

İfadesi Stochastic süreci süper martingaledir(süpermartingalenin tanımı için [11]'de Bölüm 7'ye bakılabilir).

İspat: Aşağıdaki gösterim kolaylık sağlayacaktır. $p^{(2)} * u = p * (p * u)$ tanımlansın ve genelde $p^{(n)} * u = p * (p^{n-1} * u)$ tanımlanır. Bu

$$(p^{(n)} * u)(m, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{m,m+n}(\xi, \eta)\, u(m + n, \eta) d\eta \tag{3.1}$$

eşitliği göstermek için rutin hesaplamadır. Ayrıca u nun süperregüler olması

$$u \geq p * u \geq p^{(2)} * u \geq \cdots \geq p^{(n)} * u$$

olmasını gerektirir ve bu yüzden her n≥ 1 için $\left(p^{(n)} * u\right)(m, \xi) < +\infty$ dır.Şimdi gözlemlemeliyiz ki $E\{u[X_n(m, \xi)]\}$ ile gösterilen $u[X_n(m, \xi)]$ nin beklenen değeri her n≥ 1 için sonludur. Bu kolaylıkla sağlanan aşağıdaki denklemden çıkar.

$$E\{u[X_n(m, \xi)]\} = (p^{(n)} * u)(m, \xi). \tag{3.2}$$

$X_0(m, \xi) = (m, \xi)$ olduğundan $E\{u[X_0(m, \xi)]\}$ sonludur $\Leftrightarrow$ $u(m, \xi)$ sonludur sonucuçıkar. Her bir durumda Markov özelliğinden ([11],sayfa 80)$E\{u[X_n(m, \xi)]|F_{n-1}\} = E\{u[X_n(m, \xi)]|X_{n-1}(m, \xi)\}$

$$= (p * u)(X_{n-1}(m, \xi)) \leq u\left[X_{n-1}(m, \xi)\right).$$

Fakat bu kesinlikle bir Stochastic sürecin supermartingale olma şartıdır. Regüler fonksiyonların önemli bir sınıfı bir $S[dF]$ in $n.(C, r)$kısmı toplamlarıdır. Özel olarak Teorem 3.4'e aşağıdaki önemli sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.6. ([13]) $\sigma_n^r(\xi; dF)$, $S[dF]$ nin $n.$ (C, r)kısmı toplamı olsun.$\{n_k\}$kabul edilebilir dizi olmak üzere

$$u(k, \xi) = \sigma_n^r(\xi, dF)$$

eşitliğini oluşturalım. Bu durumda $u(k, \xi)$, R üzerinde regüler fonksiyondur ve bu yüzden $\{u[X_n(m, \xi)],\ F_n,\ n \geq 0\}$bir martingaledir.

İspat:$p * u = u$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi

$$(p * u)(m, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{m,m+1}(\xi, \eta)\, u(m + 1, \eta) d\eta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} p_{n_m n_{m+1}}(\xi,\eta)\, \sigma^r_{n_{m+1}}(\xi; dF) = \sigma^r_{n_m}(\xi; dF)$$

dır. Son eşitliğin Tanım (1.14) ve (1.6) dan çıkacağı kolaylıkla gösterilebilir. $u(m,\xi) = \sigma^r_{n_m}(\xi, dF)$nin gösterilmesiyle ispat tamamlanır. Bu teoreme cevap biraz zor ve çok daha önemlidir, yani bu teoremin tersi biraz zor ama daha önemlidir.

Teorem 3.7. ([13]) u, R üzerinde nonnegatif regüler fonksiyondur $\Leftrightarrow$

$$\sigma^r_{n_k}(\xi; dF) = u(k,\xi) \tag{3.3}$$

olacak şekilde $(-\pi,\pi)$ üzerinde sınırlı salınımlı azalmayan bir F foksiyonunun var olmasıdır. Diğer bir deyişle negatif olmayan regüler fonksiyonların sınıfı pozitif ölçülü Fourier-Stieltjes serisinin r.Cesaro ortalamalarının sınıfı ile aynıdır.

İspat:u, (3.3) formunda ise bu durumda Sonuç (3.6)'ye göre u regülerdir. Böylece sadece tersini ispatlamamız gerekecektir. Böylece kabul edelim ki u, nonnegatif ve R üzerinde $p * u = u$ olsun.n.kısmı toplamı$S_n(\xi)$ ile gösterilen (1.1) formunda bir formal trigonometrik fonksiyon oluşturalım öyle ki $S_n(\xi)$'e(C,r) toplanabilmeyi uygulayarak $\sigma^r_{n_k}(\xi) = u(k,\xi)$ özelliğine sahip yeni bir $\sigma^r_{n_k}(\xi)$ dizisi oluşsun. Bu yapı sadece u nun nonnegatif olmasına bağlı değildir. Eğer $n.\ (C,r)$ toplamlarınonnegatif olan formal trigonometrik seri dF negatif olmayan ölçü olmak üzere $S(dF)$ ise böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Fakat bu Fourier serilerinde ([8], sayfa 82) klasik bir teoremdir. Şimdi detayları vermek için ilerleyelim. İlk olarak $(p * u)(k,\xi)$ nın n_k .dereceden trigonometrik polinom olduğunu gösterelim. Bu $p_{k,k+1}(\xi,\eta)$ yoğunluğu n_k. derecede bir trigonometrik polinom olduğundan açıktır. u' nun regülerliğinden hemen

$$u(k,\xi) = a_{n_k,0} + \sum_{j=1}^{n_k} a_{n_k,j} \cos j\xi + b_{n_k,j} \sin j\xi \tag{3.4}$$

sonucu çıkar. u nun regülerliği aşağıdaki eşitliği gerektirir:

$$a_{n_k,0} + \sum_{j=1}^{n_k} a_{n_k,j} \cos j\xi + b_{n_k,j} \sin j\xi$$

$$= a_{n_{k+1},0} + \sum_{j=1}^{n_k} B^r_j\, [n_k, n_{k+1}](a_{n_{k+1},j} \cos j\xi + b_{n_{k+1},j} \sin j\xi)$$

$$a_{n_k,0} = a_{n_{k+1},0} = \frac{a_0}{2}, \qquad k = 0,1,2, \ldots,$$

$$\frac{a_{n_k,j}}{a_{n_{k+1},j}} = B_j^r[n_k, n_{k+1}] = \frac{b_{n_k,j}}{b_{n_{k+1},j}}, \qquad k = 0,1,2, \ldots, \quad j = 0,1,2, \ldots, n_k \tag{3.5}$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi (1.11) eşitliğini kullanarak

$$\frac{a_{n_k,j}}{A_{n_k-j}^r / A_{n_k}^r} = \frac{a_{n_{k+1},j}}{A_{n_k+1-j}^r / A_{n_{k+1}}^r} = a_j, \tag{3.6}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{b_{n_k,j}}{A_{n_k-j}^r / A_{n_k}^r} = \frac{b_{n_{k+1},j}}{A_{n_k+1-j}^r / A_{n_{k+1}}^r} = b_j, \qquad k = 0,1,2, \ldots,$$

elde ederiz. Bir rutin hesaplamadan sonra kolaylıkla gösterilir ki $\left(a_j\right)_0^\infty$ ve $\left(b_j\right)_0^\infty$, (3.6) formülü ile u' dan elde edilmek üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^\infty a_j \ cosj\xi + b_j sinj\xi \tag{3.7}$$

formal trigonometrik serisi, (3.7)'nin $n.(C,r)$ kısmi toplamı $\sigma_n^r(\xi)$ olmak üzere $\sigma_{n_k}^r(\xi) = u(k,\xi)$ özelliğine sahiptir. Böylece u regüler fonksiyonların cümlesi ve formal trigonometrik serilerin (C,r) kısmi toplamları arasında birebir uygunluk vardır. Şimdi Fourier serileri teorisinde ([8], sayfa 82) aşağıdaki klasik sonucu hatırlatalım.

Teorem 3.8. ([8]) F azalmayan bir fonksiyon olmak üzere (3.7)'nin $S(dF)$ olması için gerek ve yeter şart $n = 0,1,2, \ldots$ için $\sigma_n^r(\xi; dF) \geq 0$ olmasıdır.

Aslında Zygmund'un aşağıda belirttiği gibi Teorem 3.8 in hipotezi zayıflatılmıştır:

$k \geq 0$ için $\sigma_{n_k}^r(\xi) \geq 0$ olacak şekilde sonsuza giden bir $(n_k)_0^\infty$ alt dizisi vardır.

Şimdi temsili teoremimize göre u'nun hem nonnegatif hem de regüler olması hipotezi $\sigma_{n_k}^r(\xi) \geq 0$ olmasını gerektirir ve bu yüzden $u(k,\xi) = \sigma_{n_k}^r(\xi, dF)$ dır.

Uyarı 3.9. ([13]) Bu teorem 5. Bölümde olasılıksal olarak elde edilecektir.

4. h-YOL İŞLEMLERİ

Aşağıdaki minimum kuralı faydalıdır.

Teorem 4.1. ([13]) h, R üzerinde negatif olmayan regüler bir fonksiyon ve $h(m,\xi) = 0$ olacak şekilde $(m,\xi) \in R$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda h özdeş olarak sıfırdır.

İspat: $0 = u(m,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{m,m+1}(\xi,\eta)\, u(m+1,\eta) d\eta$

dır. Bu yüzden her $\eta \in (-\pi,\pi)$ için $u(m+1,\eta) = 0$ dır. Genel olarak

$$0 = u(m,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{m,m+k}(\xi,\eta)\, u(m+k,\eta) d\eta$$

ve bu yüzden $k = 0,1,2,\ldots$ için u, R_{m+k} üzerinde özdeş olarak sıfırdır. Şimdi yukarıdaki argümenin R_{m+1} üzerinde $u \equiv 0$ ise bu durumda R_m üzerinde $u \equiv 0$ olduğunu da ispatlar ki ve bu yüzden her $k \geq 0$ için R_k üzerinde $u \equiv 0$ dır. Bu ispatı tamamlar.

Kabul edelim ki $h \not\equiv 0$ nonnegatif regüler bir fonksiyon olsun ve Teorem 4.1 ile h'ın asla sıfır olamayacağını kabul edebiliriz. Doob [1]' i izleyerek potansiyel teorinin klasik ve olasılık tartışmasının her ikisinde önemli bir rol olan h-yol kavramını tanımlarız ([1], [2],[3],[9],[14], [15]).

Tanım 4.2. ([13]) R üzerinde $h \not\equiv 0$ nonnegatif regüler fonksiyonsa bu durumda $p_{k,k+1}^{h}$ yeni geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_{k,k+1}^{h}(\xi,\eta) = p_{k,k+1}^{h}(\xi,\eta)\frac{h(k+1,\eta)}{h(k,\xi)}, \qquad k \geq 0$$

$p_{k,k+1}^{h}(\xi,\eta)$ geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu ile (m,ξ) noktasında başlayacak R üzerinde rastgele ilerleme

$$\{X_n^h(m,\xi), \quad n \geq 0\} \tag{4.1}$$

ile gösterilecektir.

Uyarı 4.3. ([13]) (4.1) Markov süreci "h-yol işlemi" olarak adlandırılır ve buna karşılık gelen olasılık yollar h-yollar olarak adlandırılır.

Tanım 4.4. ([13]) A üzerinde $p^h * u$ sonlu ve A üzerinde $u \geq p^h * u$ ise Rnin her bir R_m halkasında alttan sınırlı ölçülebilir olan u fonksiyonuna$R$ nin A alt cümlesi üzerinde h -superregülerdir denir. h -regüler fonksiyonlar ve h -altregüler fonksiyonların uygun tanımları şimdi Tanım 3.4ten açıktır. Detayları ihmal ediyoruz. Teorem 3.5'ın aşağıdaki benzeri teorem kullanışlıdır ve ispatı ihmal edilecektir.

Teorem 4.5. ([13]) $u,\ h$-superregüler fonksiyonsa bu durumda

$$\{u(X_n^h(m,\xi)), F_n, \quad n \geq 0\}$$

süpermartingaledir.

İspatı tanımdan hemen çıkan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.6. ([13])Nonnegatif$v$ fonksiyonu h-süperregülerdir $\Leftrightarrow$ $v = \frac{u}{h}$ olacak şekilde R üzerinde süperregüler u fonksiyonu vardır. Özel olarak $\frac{1}{h}$, h-süperregülerdir.

5. MARKOV ZİNCİRİNİNMARTİN ÇIKIŞ SINIRI

Doob [1]'i izleyerek (2.4) Markov sürecinin Green fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G_{k,m}(\xi,\eta)=\begin{cases}p_{k,m}(\xi,\eta), & m\geq k+1 \text{ ise}\\ 0, & 0\leq m\leq k \text{ ise}\end{cases} \tag{5.1}$$

Diğer bir deyişle, $G_{k,m}(\xi,\eta)$ tam olarak $m-k$ adımda $(k,\xi)\in R_k$ noktasından $(m,\xi)\in R_m$ noktasına giden olasılık yoğunluktur. Martin [16] ve Doob [1] den hareketle $\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)$ Martin çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)=\begin{cases}\frac{G_{k,m}(\xi,\eta)}{G_{0,m}(0,\eta)}, & m\geq k+1 \ ise\\ 0, & 0\leq m\leq k \ ise\end{cases} \tag{5.2}$$

Teorem 5.1. ([13])$m\geq k+1$ için

(a) $G_{k,m}(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n_k}B_j^r\ [n_k,n_m]cosj(\xi-\eta)\right]$

(b) $G_{0,m}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}$

dır.

İspat:(a)'nın ispatı(1.13) ve $(1.10')$ den hemen çıkar.

(b) , (a)'nın özel bir durumudur.

Böylece $\widehat{K}$ için aşağıdaki basit ifade elde edilir.

$$\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)=\begin{cases}2\pi p_{k,m}(\xi,\eta), & m\geq k+1 \text{ ise}\\ 0, & 0\leq m\leq k \text{ ise}\end{cases} \tag{5.3}$$

(2.4) Markov süreci için Martin çıkış sınırı oluşturmak için (5.3)'ün asimptotik bazı sonuçlarına ihtiyaç vardır. Örneğin (1.4)'ü kullanarak doğrudan hesaplamayla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-j}^r}{A_n^r}=1 \tag{5.4}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Bu ve (1.2)'den hemen

$$\lim_{n_m\to\infty} B_j^r[n_k, n_m] = \frac{A_{n_k-j}^r}{A_{n_k}^r} \tag{5.5}$$

sonucu çıkar. Bu sonuçları $G_{k,m}(\xi,\eta)$ için (a) ifadesine uygulayarak ve (1.11)'i kullanarak

$$\lim_{n_m\to\infty} G_{k,m}(\xi,\eta) = \frac{K_{n_k}^r(\xi-\eta)}{\pi} \tag{5.6}$$

elde edilir. Şimdi bu son sonuç oldukça kullanışlıdır. Çünkü sürecin Martin çıkış sınırının belirlenmesi problemi söz konusudur. Özel olarak (m,η) noktasınıR 'deki noktaların bir dizisi olarak düşünürsek düzlemin Öklid topolojiyle R üzerine indirgenen topolojiye göre limit alınmak üzere

$$\lim_{m\to\infty}(m,\eta) = \lim_{n\to\infty} r_{n_m} e^{i\eta} \tag{5.7}$$

Olduğu açıktır. R üzerindeki bu topoloji aşağıdaki metrik tarafından üretilir.

$$d[(k,\xi);\ (m,\eta)] = \left|r_{n_k}e^{i\xi} - r_{n_m}e^{i\eta}\right| \tag{5.8}$$

d metriğine göre R'nin tamlamasının R cümlesine $R' = C(0;1)$ birim diskin çevresi ile eklendiğini göstermek kolaydır.

Teorem 5.2. ([13]) $\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)$ **,** (m,η) nın fonksiyonu olarak $R \cup R'$ cümlesine sürekli bir genişlemeye sahiptir.

$t \in (-\pi,\pi)$ olmak üzere $e^{it} \in C(0;1)$ gösterimiyle

$$\lim_{(m,\eta_m)\to t} \widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta_m) = 2\widehat{K}_{n_k}(\xi - t) \tag{5.9}$$

elde edilir.

İspat: Göstermeliyiz ki $\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)$ **,** n_k. dereceden trigonometrik polinomdur. Bu Teorem 5.1'in (a) hipotezinden hemen çıkar.k ve$m$ sabit tutulmak üzere

$$f_j(m,\eta) = \frac{A_{n_m}^r}{A_{n_m-j}^r}\, cosj(\xi-\eta)$$

olsun. Teorem 5.1'in (a) hipotezi ile$\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)$, $f_j(m,\eta)$nin sonlu lineer birleşimidir bu yüzden ispatı tamamlamak için $\lim_{(m,\eta_m)\to t} f_j\,(m,\eta_m) = f_j(t)$ var ve buna ek olarak $f_j(t)$ nin $C(0;1)$ üzerinde sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. İspat kolaydır. İlk olarak göstermeliyiz ki

$\lim(m,\eta_m) = t \Leftrightarrow m \longrightarrow \infty$ ve $\lim_{m\to\infty} \eta_m = t$ dır. Bu hemen (5.4) ve cosinus fonksiyonunun sürekliliğinden çıkar ki

$$\lim_{m\to\infty} f_j(m,\eta_m) = \ cosj\ (\xi - t) = f_j(t)$$

dır. Bu $f_j(m,\eta)$ nın $R \cup R'$sürekli bir genişlemeye sahip olduğunun ispatlar ve bu yüzden $\widehat{K}_{k,m}(\xi,\eta)$için de öyledir. Ayrıca $R \cup R'$ kompakt metrik uzay olduğundan genişletilmiş fonksiyon $R \cup R'$ de düzgün süreklidir. Önceki tartışma aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Teorem 5.3. ([13]) (2.4) Markov sürecinin Martin çıkış sınırı $C(0;1)$dır.

6. MARTİN TEMSİL TEOREMİ VE MİNİMAL REGÜLER FONKSİYONLARIN SINIFI

Kabul edelim ki v, R üzerinde pozitif regüler bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F_n(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(n,\xi)d\xi$$

supportu (desteği) R_n de bulunan R üzerinde ölçü tanımlayan yoğunluğu $\frac{v(n,\xi)}{2\pi}$ olan monoton azalmayan bir fonksiyondur. $F_n(\pi) = C$ sabit olduğundan $(d\,F_n\,,\ \ n \geq 0)$ lerin R üzerinde düzgün sınırlı olduğu sonucu çıkar. Buna ek olarak v nin regülerliği $k < n$ için

$$\int_{R_n} \widehat{K}_{k,n}(\xi,\eta)dF_n(\eta) = v(k,\xi)$$

olmasını gerektirir. Ayrıca $\widehat{K}$'nın $R \cup R'$ üzerinde düzgün sınırlı olması ve Helly seçim prensibi ile aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$v(k,\xi) = \lim_{n\to\infty}\int_{R_n} \widehat{K}_{k,n}(\xi,\eta)dF_n(\eta) = 2\int_{R'} K_{k,n}^{r}(\xi - t)d\ \ F(t)$$

olacak şekilde supportu (desteği) R' de bulunan bir dF ölçüsü vardır. Böylece sabit faktör hariç olasılık metotları ile Teorem 3.5 oluşturulabilir. Bunu formül olarak aşağıdaki gibi yeniden ifade ederiz.

Teorem 6.1. ([13]) Eğer v, R üzerinde bir pozitif regüler fonksiyonsa bu durumda

$$v(k,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n_k}^{r}(\xi - t)d\ \ F(t)$$

olacak şekilde R' üzerinde bir dFölçüsü vardır.

Şimdi gösterilmelidir ki her $t \in (-\pi,\pi)$ için $K_{n_k}^{r}(\xi - t)$ Martin anlamında ([1],[9], [14])minimal regüler pozitif fonksiyondur.

Teorem 6.2. ([13]) Eğer herhangi bir pozitif regüler$v \leq u$ fonksiyonu için bazı c sabiti için $v = cu$ oluyorsa u pozitif regüler fonksiyonuna minimal pozitif regüler fonksiyon denir.

Minimal pozitif regüler fonksiyonların sınıfını karakterizasyonuna geçmeden önce Fourier-Stieltjes serileri için aşağıdaki teklik teoremine ihtiyaç duyulacaktır.

Teorem 6.3. ([13]) Kabul edelim ki $F, (-\pi, \pi)$ aralığında sınırlı salınımlı monoton artan ve $S(dF)$Fourier-Stieltjes serisine sahip olsun. Ayrıca

$$F_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{t} \sigma_n^r(x; dF)dx$$

olsun. Bu durumda F_n de $(-\pi, \pi)$ aralığında sınırlı salınımlı, monoton artan fonksiyondur. Ayrıca $f, (-\pi, \pi)$aralığında sürekli periyodik bir fonksiyonsa

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dF_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dF(t)$$

dır. YanidF_n ölçüleri dF ölçüsüne zayıf olarak yakınsaktır.

İspat: İntegrasyon sırasının değiştirilmesi üzerine Fubini teoremi ve (1.2) ile

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dF_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi} K_n^r\,(t-x)dF(x)\right]dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^r(x; f)dF(x)$$

elde edilir. Şimdi $r \geq 1$ için iyi bilinen Fejer ([8], sayfa 48)' in teoreminde x de düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^r(x; f) = f(x)$$

dır. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^r(x; f)dF(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dF(x)$$

ve böylece herhangi sürekli f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dF_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dF(t)$$

dır. Bu teoremi ispatlar.

Sonuç6.4. ([13]) Kabul edelim ki$a$ ve b, F nin süreklilik noktaları olmak üzere $a \le x \le b$ için $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^r(x; dF) = 0$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ nin dF ölçüsü sıfırdır.

İspat: Önceki teoremden dolayı dF_n zayıf olarak dF'e yakınsar. Bu yüzden F nin süreklilik noktası olan bütün x noktalarında F_n, F'e yakınsar. Özel olarak

$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$ ve $\lim_{n\to\infty} F_n(b) = F(b)$

dır.

$$F_n(b) - F_n(a) = \int_a^b \sigma_n^r\,(x; dF)dx$$

olduğundan hipotezden $[a, b]$ üzerinde $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^r(x; dF) = 0$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} F_n(b) - F_n(a) = 0 = F(b) - F(a)$

sonucu elde edilir. Bu ispatı sonuçlandırır.

Teorem 6.5. ([13]) Eğer u minimal pozitif regüler fonksiyonsa bu durumda bazı C sabiti ve bazı $t \in R'$ noktaları için

$$u(k, \xi) = CK_n^r(\xi - t)$$

dır.

Uyarı6.6. ([9]) t noktası minimal pozitif regüler fonksiyonun kutup noktası olarak adlandırılır.

İspat: Teorem 6.1den$u$, R üzerinde bir pozitif regüler fonksiyonsa

$$u(k, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n_k}^r\,(\xi - t)dF(t)$$

gösterimi vardır. Göstereceğiz ki u minimal pozitif regüler fonksiyonsa dF ölçüsü tek bir noktada yoğunlaşır. Kabul edelim ki pozitif dF ölçüsününün E_1 ve E_2 kapalı aralık komşuluğunda bulunan $t_1 \neq t_2 \in R'$ şeklinde herhangi iki nokta mevcut olsun. E_1 ve E_2 nin bitiş noktalarının sıfır ölçüye sahip olduğu E_1 ve E_2 nin ayrık olduğu da kabul edilebilir. Şimdi $i = 1,2,3, \ldots$için

$$\int_{E_1} K_{n_k}^{r}(\xi - t)dF(t) < \int_{R'} K_{n_k}^{r}(\xi - t)dF(t)$$

elde edilir, bu yüzden u'nun minimal olması kabulünden dolayı C_i sabitler olmak üzere

$$C_i u(k,\xi) = \int_{E_1} K_{n_k}^{r}(\xi - t)dF(t)$$

elde edilir. Lebesque-Privaloff-Young ([8], sayfa 55-59) klasik teoreminden eğer $(m_{j,}\xi_j)$ ya $t \in E_1$ veya $t \in E_2$ noktalarına yakınsayan noktaların dizisi ise bu durumda

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{u}(m_{j,}\xi_j) = 0$$

sonucu çıkar. Sonuç 6.4'ten E_1 ve E_2 nin dF ölçüleri sıfırdır. E_1 ve E_2 nin dF pozitif ölçülü olması hipotezi ile çelişir.

Belirtilmelidir ki bu argüman 1960-1961 ikinci döneminde İllinous Üniversitesinde potansiyel teori üzerine yayımlanmayan Profesör M.Brelot tarafından kullanılan ders notlarına ait bir argümana benzerdir.

Tersine olarak kabul edelim ki u regüler ve $u(k,\xi) \leq K_{n_k}^{r}(\xi - t)$ olsun. Bu durumda (C,r) çekirdeklerinin ([8], sayfa 48) iyi bilinen özelliğidir ki $t' \neq t, t' \in R'$ noktasına yakınsayan böylesi $(m_{j,}\xi_j)$ dizileri için u sıfıra yakınsar. Yukarıda kullanılan aynı neden gösterir ki

$$u(k,\xi) = \int\limits_{R'} K_{n_k}^{r}(\xi - t)dF(t)$$

olduğundan t noktasında yoğunlaşmış dF ölçüsü elde edilmelidir. Bu minimal pozitif regüler fonksiyonlarının sınıfının $\{K_{n_k}^{r}(\xi - t), t \in (-\pi, \pi)\}$ ile verildiğini gösteriri ki ispat tamamlanmış sonucu çıkar. Bu ispatı bitirir ki minimal regüler fonksiyonların sınıfı

$$\{K_{n_k}^{r}(\xi - t), t \in (-\pi, \pi)\}$$

ile verilir.

7. R' SINIR KARARLILIĞI

Şimdiki bağlamda Dirichlet problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(7.1) Dirichlet Problemi. ([13])

Tanım cümlesi R'olarak verilen sürekli bir f fonksiyonu için sınır değerleri f olan R tanım kümesine sahip bir regüler u fonksiyonu bulunuz.

Brelot [9] tarafından belirtildiği gibi aşağıda formüle edilmiş olan daha genel tipte Dirichlet problemini düşünmek daha doğaldır.

(7.2) Dirichlet Problemi. ([13]) (7.1) deki aynı hipotezleri sağlayan verilmiş f fonksiyonu için sınır değerleri f olan R tanım kümeli bir h-regüler fonksiyonu bulunuz.

(7.2) problemi üzerine elde edilen sonuçları ifade etmek için h -regüler ölçü kavramını tanımlamak gerekir.

Tanım 7.3. ([13]) h,

$$h(k,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n_k}^{r}(\xi - t)dH(t)$$

gösterimiyle R üzerinde pozitif regüler bir fonksiyon olsun. Her $(k,\xi) \in R$ için R' üzerinde h -regüler ölçü olarak adlandırılan olasılık ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu^h[(k,\xi);A] = \int_A \frac{K_{n_k}^{r}(\xi - t)}{h(k,\xi)} dH(t) \tag{7.1}$$

Uyarı 7.4. ([13]) $h = 1$ olduğunda üs kuvvet ihmal edilecektir. Bu arada μ^hın, [9] daki temel çalışmasında Brelot tarafından potansiyel teori içinde tanımlanmış olan klasik h-harmonik ölçüye benzer olmasını araştırmak ilginçtir.

Şimdi (7.2) problemine dönelim. Bu tip bir Dirichlet problemini çözmenin doğal yolu, açıklaması [9] ve [17] de bulunan PWB (Perron-Wiener-Brelot) metodu aracılığıyla yapılır. Bu metodun farklı türünün mevcut bağlamda aşağıdaki sonucu elde etmek için uygulanabileceği [12] de gösterilmiştir.

Teorem 7.5. ([13]) Eğer $f \in L'[\mu^h]$ ise bu durumda f, h-kararlıdır. Yani PWB metodu (7.2) Dirichlet problemine tek bir çözüm verir ve buna ek olarak u çözümü aşağıdaki gösterime sahiptir.

$$u(k,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mu^h\,[(k,\xi);dt] \tag{7.2}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{K_{n_k}^r(\xi - t)}{h(k,\xi)}\,dH(t)$$

Uyarı 7.6. ([13]) Tanım cümlesi R'olan herhangi bir sürekli f fonksiyonu için PWB metodu aracılığıyla f'e karşılık gelen bir tek h-regüler fonksiyon bulunabilir. Bu nedenle R', h-kararlılık olarak isimlendirilir. (7.2) ye bir tek u çözümü veren PWB metodu için f fonksiyonu h-kararlıdır diye isimlendirilir. Brelot ([9],[17]) h-kararlı sınırlı fonksiyonların cümlesini klasik durumda karakterize etmiştir. h-kararlılığın önemli bir sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem 7.7. ([1], [14]) Bütün pozitif regüler h fonksiyonları için R'nınh-kararlılığı h-yolların R' üzerindebir tek noktaya olasılıkla yakınsamasını gerektirir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} X_n^h(m,\xi) = X_\infty^h(m,\xi) \in R'$$

var ve ek olarak

$$P_r[X_\infty^h(m,\xi) \in A] = \mu^h[(m,\xi);A]$$

dır.$h$minimal pozitif regüler fonksiyon olmak üzere (7.7)'i özel duruma uygulayarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 7.8. ([13]) $h(k,\xi) = K_{n_k}^r(\xi - t)$, t kutuplu (yani dH ölçüsü t noktasında yoğunlaşmıştır) minimal pozitif regüler fonksiyon olsun. Bu durumda h-yol süreci olasılıkla tek bir t değerine yakınsar. Bazen bu, t ye yakınsama şartı süreci ile adlandırılır.

İspat: (7.1) ve Teorem 7.7'e göre eğer t, A'nın kapanışı değilse $\mu^h[(m,\xi);A] = 0$ aksi taktirde t yi içeren her kapalı küme için $\mu^h[(m,\xi);A] = 1$ dır. Bu ispatı tamamlar.

Uyarı 7.9. Bu teorem, daha sonra minimal yolların kutuplarına yakınsama oranı üzerinde bir tahminle güçlendirilecektir.

8. NONNEGATİF h-SUPERREGÜLER FONKSİYONLARIN SINIR DAVRANIŞI

Görüldüğü gibi Teorem 7.5 tamamlanmamıştır. Özel olarak eğer f fonksiyonu u nun sınır değeri ise herhangi bir durumda tartışılmayacaktır. İspatsız verilen aşağıdaki sonuçlar Doob ve diğerleri [1], [2],[14], [15],[18] kaynaklarında detaylı bir şekilde tartışılmıştır. Elbette martingale yakınsaklık teoremlerinin ispatı zorluğa dayanır. Yani, bu teoremlerin ispatının zor olduğuna inanılır.

Teorem 8.1. ([13]) $f \in L'[\mu^h]$, PWB^h metodu yardımıyla (7.6) ile verilen u çözümüne sahipse bu durumda bir olasılıkla

$$\lim_{n\to\infty} u[X_n^h(m,\xi)(w)] = f[X_\infty^h(m,\xi)(w)]$$

dır.

Uyarı 8.2. ([13]) Teorem 8.1deki limit Doob[1] ve Naim [3] de gösterildiği gibi (2.4) sürecinin Martin çıkış sınırında fine(ince) topoloji kavramını tanıtmakla olasılıksız bağlamda konulabilir. Şimdi bunun yapılmasına devam edilecektir. Bir çok kısım için ispatlar atlanacaktır.

Teorem 8.3. ([13]) (0-1 Kanunu)

$h,\ t$ kutuplu minimal pozitif regüler ve $E,\ R$ nin ölçülebilir altcümlesi olsun. Bu durumda h-yollar genellikle sıfır veya bir olasılıkla sonsuz olarak E de uzanır. Eğer ilki doğru ise E , t noktasında incedir denir.

Teorem 8.4. ([13]) Eğer $R - E,\ t$ noktasında ince ise E cümlesine, t Martin sınır noktasının fine(ince) komşuluğu denir. Bir $(m,\xi) \in R$ iç noktası için komşuluk sistemi d metriği (5.8) ile tanımlanır. Bu komşuluk sistemi izleyen standart terminoloji, fine topoloji olarak adlandırılan RUR' üzerinde bir topolojiyi tanımlar.

Tanım 8.5. ([13]) Bir v fonksiyonu, hemen hemen her $t \in R'$ için hemen hemen tümü h-regülerμ^h ifade etmek üzere fine topoloji anlamında bir $f(t)$ limitine sahipse bu durumda f, v nin h-fine sınır fonksiyonu olarak adlandırılır.

Teorem 8.6. ([13]) Eğer v nonnegatif h-superregüler fonksiyonsa, bu durumda $v(m,\xi) \geq E\{\,f[X_\infty^h(m,\xi)]\}$

olacak şekilde h-kararlılığı f olan h-fine sınır fonksiyonuna sahiptir. Eşitliği sağlayan şartlar[15] te tartışılmıştır. Olasılık bakış açısından dikkate almak gerekir ki eğer f, v nin h-sınır fonksiyonu ise bu durumda hemen her $t \in R'$ için h-regüler ölçülü bir olasılıklı

$$\lim_{n\to\infty} v[X_n^t(m,\xi)] = f(t) \tag{8.1}$$

dır. Elbette $\{X_n^t(m,\xi), n \geq 0\}$, t ye yakınsamayla şartlandırılmış ve $(m,\xi) \in R$ noktasında başlayan minimal yol sürecidir. Ayrıca not edilmelidir ki (8.1) deki limit (m,ξ) başlangıç noktasından bağımsızdır.

Teorem 8.6daki f, h-fine sınırlı fonksiyonu dikkate değer belli özelliklere sahiptir. Örnek olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 8.7. ([13]) Kabul edelim ki Teorem 8.6 da

$$u(k,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n_k}^r(\xi - t)\,dU(t)$$

olmak üzere v, $\frac{u}{h}$ formunda h-regüler fonksiyon ve h, Tanım 7.3 teki gibi olsun. ac ve s alt indisleri sırasıyla mutlak sürekliliğin reel ve singüler kısmını ifade etmek üzere dH' a göre dU nun Lebesgue ayrışımı $dU = dU_{ac} + dU_s$ olsun. Bu durumda v nin f, h-fine sınır fonksiyonu dH' a göre dU_c nin Radon-Nikodym türevidir yani hemen hemen her $[\mu^h]$ için

$$f = \frac{dU_{ac}}{dH}$$

dır.

Teorem 8.7'e benzer bir limit oran teoremi Doob([19],Teorem 8.4) tarafından elde edildi. O aslında aşağıdaki sonucu ispatladı.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^r(\xi_n; dU)}{\sigma_n^r(\xi_n; dH)} = \frac{dU_{ac}}{dH}(\xi), \quad |\xi_n - \xi| = 0\left(\frac{1}{n}\right) \tag{8.2}$$

Uyarı 8.8. ([13]) Zygmund ([8],Örnek4, sayfa 64)tarafından gösterilmiştir ki yukarıdaki tipten limit teoremleri birim diskte harmonik fonksiyonlar için teğetsel olmayan yakınsaklığa benzerdir. Şimdi (8.2) tipindeki limit teoremlerini bu çalışmada inşa edilen fine topolojiye bağlayan bir teorem ispat edilecektir. Ayrıca Zygmund-Marcinkiewicz [10] un (C^*, r) toplanabilmesi kavramıyla bağlantısı tartışılacaktır. İlk adımımız R nin belli bir alt cümlesinin $t \in R', |t| \leq \pi$ Martin sınır noktasında ince olmadığını ispat etmektir.

Teorem 8.9. ([13]) $I_n(t) = \left\{s: |s-t| < \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha\right\}$

olsun.n_k, $(k,t) \in R_k$noktasında merkezli bir kabul edilebilir alt dizi olmak üzereR_k nın bir alt cümlesi olarak $I_{n_k}(t)$ seçilsin. Bu durumda$0 < \alpha < \frac{r}{1+r}$için

$\bigcup_{k=0}^{\infty} I_{n_k}(t)$, t 'nin bir fine komşuluğudur.

İspat: Göstereceğiz ki $R - \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} I_{n_k}(t)\right)$, t noktasında incedir. Bunu tamamlamak için Zygmund ([8],sayfa 48) de bulunan aşağıdaki eşitsizliği , Teorem 4.5 ve Sonuç 4.6 kullanılacaktır.C, n den bağımsız bir sabit olmak üzere$\frac{1}{n} \leq t \leq \pi$ için

$$K_n^r(t) \leq C_n^{-r} t^{-r-1} \tag{8.3}$$

dır. Bu,$\frac{1}{n} \leq |s-t| \leq \pi$ için (8.10) dan çıkar yani

$$\frac{1}{K_n^r(s-t)} \geq \frac{1}{C} n^r (|s-t|)^{1+r} \tag{8.4}$$

dır. Şimdi $0 < \alpha < 1$için$n^\alpha < n$ veya denk olarak $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$ elde edilir. Bu yüzden $s \notin I_n$ ise$|s-t| \geq \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$

dır. Bu,

$$\frac{1}{K_n^r(s-t)} \geq \frac{1}{C} n^r \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{1+r}, s \notin I_n \tag{8.5}$$

yani

$$\frac{1}{K_n^r(s-t)} \geq \frac{1}{C} n^r (n)^{r-a(1+r)}, s \notin I_n$$

olmasını gerektirir. Şimdi $r - a(1+r) > 0$ yani $0 < a < \frac{r}{1+r}$ olacak şekilde bir a seçerek $s \notin I_n$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{K_n^r(s-t)} = +\infty \qquad (8.6)$$

sonucu çıkar.

$$X_n^t(m,\xi) = (m+n, X_n^t(m,\xi))$$

ile t ye yakınsaması şartlandırılmış minimal yol gösterilecektir. Hatırlanmalıdır ki X_n^t ,(2.4) de kıyaslanan X_n^t nin uzay zaman versiyonudur.

Teorem 4.5 ve Sonuç 4.6 ve martingale yakınsaklık teoremi ile bir bakışta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{K_{n_{k+m}}^r(X_k^t(m,\xi)-t)} \qquad (8.7)$$

mevcut ve bir olasılıkla sonludur. Şimdi eğer genellikle $X_k^t(m,\xi)(w) \notin I_{n_{k+m}}$ sonsuzluksa bu durumda (8.6) dan (8.7) limiti bu yol boyunca mevcut olmaz ve $w$nin bu cümlesi sıfır olasılıklıdır. $0 < a < \frac{r}{1+r}$ olmak üzere bir olasılıklı

$$|X_k^t(m,\xi) - t| = 0(n_{k+m}^{-a}) \qquad (8.8)$$

sonucu çıkar. Bu çalışmada$r > 1$ ve $[0,\infty]$aralığında $\frac{r}{1+r}$ artan olduğundan $a = \frac{1}{2}$ seçilebilir. Elbette r artarken yakınsaklık oranı daha iyi olur. Şimdi bu sonuç, t nin fine komşuluk olup olmaması henüz belli değilken

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} I_{n_k}(t), \qquad \left(I_n(t) = \left\{s: |s-t| < \frac{1}{n}\right\}\right)$$

nın t de ince olmadığı gösterilerek güçlendirilecektir. Bunun için aşağıdaki Lemma gereklidir; olasılık yorumu daha sonra yapılacaktır.

Lemma 8.10. ([13]) $r \geq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_0^{\frac{1}{n}} K_n^r\,(t)dt \geq \frac{1}{\pi} > 0$$

dır.

İspat: $D_k(t)$, $|t| \leq \pi$için

$$D_k(t) = \begin{cases} \frac{sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin(\frac{t}{2})}, & k \geq 1 \\ \frac{1}{2} \quad , & k = 0 \end{cases} \tag{8.9}$$

Dirichlet çekirdeğini göstersin.(C, r)çekirdekformülü ([8], sayfa 48), genellikle

$$K_n^t(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} D_k(t) \tag{8.10}$$

olarak iyi bilinir. Bu yüzden

$$\int_0^{\frac{1}{n}} K_n^r\,(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} \int_0^{\frac{1}{n}} D_k(t)dt \tag{8.11}$$

dır. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{n}} D_k(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{sin\left(k+\frac{1}{2}\right)^t}{2\sin(\frac{t}{2})} dt \;\; \geq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{2k+1}{\pi}\; dt = \frac{2k+1}{n\pi} \tag{8.12}$$

dır. Son eşitsizlik$0 \leq t \leq \frac{1}{n}$, $0 \leq k \leq n$ için

$$D_k(t) \geq \frac{2k+1}{\pi} \tag{8.13}$$

olmasından dolayı hemen çıkar. Bunu görmek için $sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t$ nin ilk maximumunu $\frac{\pi}{2k+1}$ de elde ettiğini ve $[0, \frac{\pi}{2k+1}]$ aralığında konkav fonksiyon olduğunu göstermek gerekir. Not edelim ki $1 \leq k \leq n$ için $\frac{\pi}{2k+1} > \frac{1}{k} \geq 1$ dır. Kolaylıkla gösterilebilir ki $f(t) = \left(\frac{2k+1}{\pi}\right) t$ kirişi $[0, \frac{1}{n}]$ aralığında $sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t$ nın altında uzanır yani $0 \leq t \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{2k+1}$ için

$$sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t \geq \left(k+\frac{1}{2}\right)t$$

dır. Benzer şekilde $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ aralığı üzerinde

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq 2\frac{t}{2} = t$$

dır. Bu yüzden$0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ ve $0 \leq k \leq n$ için

$$D_k(t) \geq \frac{\left(\frac{2k+1}{\pi}\right)t}{t} = \frac{2k+1}{\pi}$$

dır. Bu hemen yani bir bakışta

$$\int_0^{\frac{1}{n}} K_n^r\,(t)dt \geq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2k+1}{n\pi}\right)\frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} \tag{8.14}$$

sonucunu çıkarır. Şimdi bir elementer hesap (8.14) ün sağ tarafının

$$\frac{2}{n\pi}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} - \frac{1}{n\pi} \tag{8.15}$$

ifadesine eşit olduğunu gösterir. Ayrıca (8.15) teki ilk terim,

$S_k = k+1\,,\quad k = 0,1,2,\ldots$ dizisine (C,r) toplanabilmenin uygulanmasıdır. Dönüştürülmüş diziσ_n^kile gösterilsin. Böylece şimdi (8.15),

$$\frac{2}{n\pi}\sigma_n^r - \frac{1}{n\pi} \tag{8.16}$$

şekline dönüşür. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_0^{\frac{1}{n}} K_n^r\,(t)dt \geq \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{\sigma_n^r}{n} \tag{8.17}$$

dır. Şimdi $r \geq 1$ için bu çok iyi bilinen sonuçtur ki ([8], sayfa 43)

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{\sigma_n^r}{n} \geq \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{\sigma_n^1}{n} = \frac{1}{2}$$

dır. Son eşitlik basit hesaplamayla kolaylıkla kontrol edilebilir. (8.17) ile beraber bu gerçek ,Lemmayı açık olarak ispatlar. Lemma 8.10, bir noktada (C,r) toplanabilen ama (C^*,r) toplanamayan bir $f \in L'(-\pi,\pi)$ fonksiyonunun basit bir örneğini oluşturmak için kullanılabilir.

Teorem 8.11. ([13]) $I_{n_k}(t) = \left\{(k,s): |s-t| < \frac{1}{n_k}\right\} \subset R_k$

olmak üzere $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_{n_k}(t)$ cümlesi t noktasında ince değildir.

İspat: R durum uzayının dairesel simetrisinden dolayı bu teoremi sadece $t = 0$ için ispatlamanın gerektiği açıktır. İspata şimdi,

$$\int_{-\frac{1}{n_k}}^{\frac{1}{n_k}} P_{m,k}(\xi,\eta) \frac{K_{n_k}^r(\eta)}{K_{n_m}^r(\xi)} d\eta \tag{8.18}$$

nın minimal yol süreci, (m,ξ) de başlayarak ve $t = 0$ Martin sınır noktasına şartlı yakınsayan $I_{n_k}(0)$ da uzanan bir olasılık olduğunu göstererek başlanabilir. Üstelik (5.1),(5.6) ve integrantın sürekliliğini kullanarak yeteri derece büyük k lar için asimptotik olarak (8.18)' ın

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{n_k}}^{\frac{1}{n_k}} K_{n_k}^r(\eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n_k}} K_{n_k}^r(\eta) d\eta \tag{8.19}$$

ifadesine eşit olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi Lemma 8.10 ile

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_{-\frac{1}{n_k}}^{\frac{1}{n_k}} P_{m,k}(\xi,\eta) \frac{K_{n_k}^r(\eta)}{K_{n_m}^r(\xi)} d\eta \geq \frac{2}{\pi^2} > 0, \tag{8.20}$$

elde edilir ve bu yüzden 0-1 kanunu ile sıfıra şartlı olarak yakınsayan minimal yol genellikle$\bigcup_{k=0}^{\infty} I_{n_k}(0)$sonsuzluğunda uzanır. Bu ispatı sonuçlandırır.

Yukarıdaki sonuçların ışığında aşağıdakileri tanımlamak doğaldır.

Tanım 8.12. ([13]) $E \subseteq R,\ t \in R'$Martin sınır noktasında ince olmasın. Eğer v ,

$\lim_{z\to t, z\in E} v(z) = a$ mevcut olacak şekilde R tanım cümleli bir fonksiyonsa bu durumda a değerine t noktasında v 'nin 'fine yığılma değeri' denir.

Tanım 8.13. ([13]) Kabul edelim ki $\sigma_n^r(t)$, $S[dF]$ olmasına gerek olmayan bir trigonometrik serinin $n.(C,r)$ kısmi toplamı olsun. Eğer herhangi bir $\alpha_n = O(\frac{1}{n})$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^r(t+\alpha_n) = a \tag{8.21}$$

ise bu durumda trigonometrik serisine t noktasında a değerine (C^*, r) toplanabilirdir denir. (C^*, r) toplanabilme kavramının kullanılmasına bir örnek olarak, $f \in L'[-\pi, \pi]$ olmak üzere Lebesgue'nin $S(f)$ nin hemen her yerde (C, r) yakınsaklığı üzerine iyi bilinen aşağıdaki teoremi ([8],sayfa 61, örnek 4) ile güçlendirilebilir.

Teorem 8.14. ([8]) $r > 0$, $f \in L[-\pi, \pi]$ olmak üzere $S(f)$ hemen hemen her yerde f değerine (C^*, r) toplanabilirdir.

Fine (ince) topolojiye göre Teorem 8.14 aşağıdaki gibi yorumlanır.

Teorem 8.15. ([13]) Bir trigonometrik seri t noktasında a değerine (C^*, r) toplana bilirse bu durumda$a$, $u(k, \xi) = \sigma_{n_k}^r(\xi)$ fonksiyonunun fine (ince) yığılma değeridir.

İspat : İspat, Lemma 8.10 ve en son verilen iki tanımın doğrudan sonucudur.

Son olarak Doob[7]'un Fourier serisi üzerine sonucunun yani Teorem 8.8' in fine (ince) limit teoremi olarak yorumlanabileceği not edilebilir.

SONUÇ

Bu çalışmada Fourier serilerinin (C,r) toplanabilmesi ve olasılık arasındaki ilişki incelendi. Olasılık teorisinde önemli yere sahip olan Markov sürecinin toplanabilme teorisindeki etkileri ele alındı. Bu çalışmayla ilgili literatürde yer alan teoremlerin ispatında kullanılan tekniklerde bazı notasyonel düzenlemeler belirlenerek temel tanımlardan yararlanıldı ve hesaplamalarda karışıklıkları önlemek için bazı düzenlemeler yapıldı. Bu çalışmada ispatı incelenen teoremlerin yapıları arasındaki farklılıklar örneklerle gösterildi. Sayılabilir durum uzayında bir Markov sürecinin Martin giriş ve çıkış sınırları olasılık olarak tartışıldı. Fourier serilerinin (C,r) toplanabilmesi ile ilişkili olan Markov zincirini ele alarak çalışmanın amacına ulaşılmaya çalışıldı. Ayrıca potansiyel teorinin oluşturulması sonucundan yararlanarak Fourier serilerinin, (C,r) toplanabilmesinde yeni tip limit teoremlerini sağladığı görüldü. Rasgele ilerlemenin tanımı verilerek, rasgele değişkenler ile oluşturulan Borel cümle ile martingale olma arasındaki bağıntının olasılık yoğunluklu Markov sürecini oluşturması incelendi. Kabul edilebilir (admissible) dizilerin özelliklerinin çalışmadaki teoremlere uygulaması incelendi. Olasılık dağılım ile konvolüsyon arasındaki ilişkinin teoremlerin ispatında sağladığı kolaylıklar gözlemlendi. Regülerlik ve süper regülerlik tanımları verilerek Stochastic sürecin süper martingale olması incelendi. Regüler fonksiyonlar sınıfının en önemlilerinden birisinin Fourier-Stieltjes serisinin $n.(C,r)$ kısmı toplamları olduğu görüldü. Regüler fonksiyonlarla sınırlı salınımlılık arasındaki ilişkiyi veren teoremin ispatı incelendi. h -yol kavramı ile regüler fonksiyon arasındaki ilişki yardımıyla teoremlerin ispatı incelendi. h-regüler, h-süper regüler ve h-alt regüler tanımları yardımıyla süper martingale olma durumu incelendi. h-kararlılık tanımı verilerek önemli bir sonucu ele alındı. Martin temsil teoremi ve minimal regülerlik arasındaki ilişkiler detaylı bir şekilde incelendi. Regüler fonksiyonlar ile trigonometrik seriler arasındaki ilişkiyi veren teorem yardımıyla rasgele ilerlemenin Martin çıkış sınırı, minimal pozitif fonksiyonlar ve çekirdekleri ile oluşturulan Martin temsil teoremine denk olan teorem ifade edildi. Fourier serilerinin (C,r) toplanabilmesi ile olasılık teorisindeki martingale kavramı arasındaki ilişkiler araştırıldı. Dirichlet çekirdeğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerindeki etkisi gösterildi. Dirichlet probleminin çözümü detaylı bir şekilde tartışıldı. Dirichlet probleminin çözümünde kullanılan

PWB metodunun diğer çözüm metotlarına göre sağladığı kolaylıklar gösterildi. Green fonksiyonunun özellikleri yardımıyla çalışmanın esasını oluşturan teoremlerin ispatı incelendi. Fourier-Stieltjes serisi, sınırlı salınımlılık ve sıfır ölçü kavramlarının çalışmada ispatı incelenen teoremlere kattığı anlam tartışıldı. Nonnegatif h-süper regüler fonksiyonların sınır davranışı; PWB ve (0-1 kanunu) metotları yardımıyla incelendi. h -süperregüler, h -fine sınırlılık ve h -kararlılık arasındaki ilişkileri bulunduran teoremlerin ispatı ve arasındaki ilişkiler tartışıldı.Bir Fourier serisinin 'fine limit ' kavramını bir Fourier serisinin (C^*, r) kavramına birleştiren bir teoremin ispatı belli hipotezler yardımıyla incelenerek toplanabilmenin genelleme durumları incelendi.(C^*, r) toplanabilme metodunun oluşturulmasında (C, r) dönüşüm dizisi ile bir sınırlı dizinin kullanılması sonucu yardımıyla, (C^*, r) toplanabilme ile ilgili teoremlerin ispatı ve bazı sonuçları incelendi. Fine limit ve fine Topoloji kavramlarının çalışmadaki önemli etkileri tartışıldı. Bu çalışmadan yararlanarak belli hipotezlerle literatürde olmayan teoremlerin ispatının yapılabileceği sonucuna ulaşıldı.

KAYNAKLAR

1. Doob, J. L., Discrete potential theory and boundaries, J. Math. Mech., 8, 433-458, 1959.

2. Hunt, G. A., Markoff chains and Martin boundaries, Illinois J. Math, 4, 313-340, 1960.

3. Naim, L., Sur le role de la frontiere de R. S. Martin dansla theoire du potentiel, Ann. Inst. Fourier, 7, Grenoble, 1957.

4. Lamperti, J., and Snell, J. L., Martin boundaries for certain Markov chains, J. Math. Soc. Japan, 15, 113-128,1963.

5. Watanabe, T., On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, 33, 39-108, 1960.

6. Watanabe, T., A probabilistic method of Hausdorff moment problem and Laplace-Stieltjes transform, J. Math. Soc. Japan, 12, 192-206, 1960.

7. Doob, J. L., Snell, J. L., and Williamson, R.E., Applications of boundary theory to sums of independent random variables, Contributions to probability and statistics, Stanford Univ. Press, Stanford , Calif., 182-197, 1960.

8. Zygmund, A., Trigonometrical series, Dover, New York, 1955.

9. Brelot, Marcel., Le probleme de Dirichlet, axiomatique et frontiere de Martin, J. Math. Pures Appl., 35, 297-335, 1956.

10. Zygmund, A. And Marcinkiewicz, J., On the behaviour of trigonometric series and power series, Trans. Amer. Math. Soc.,50, 407-453, 1941.

11. Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, New York, 1953 .

12. Rosenkrantz, W. A. , Probability and Fourier series, Thesis, Univ. of Illinois, Urbana Il., 1963,(unpublished)

13. Rosenkrantz, W. A. , Probability and the (C,r) summability of Fourier series, Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 119, p.p 310-332. No : 2, 1965.

14. Doob, J. L., Probability theory and the first boundary value problem, Illinois J. Math., 2, 19-36, 1958.

15. Doob, J. L., Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, Bull. Soc. Math., France, 85, 431-458, 1957.

16. Martin, R. S., Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc.,49, 137-172, 1941.

17. Brelot, Marcel., Elements de la theorie classique du potentiel, Les Cours de Sorbonne,Paris,1959.

18. Doob, J. L., Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. Third Berkeley Symos.Math.Statist.Prob.,Vol.II,pp.49-80,1954-1955, Univ.of California Press, Berkeley,Calif.,1956.

19. Doob, J. L., Relative limit theorems in analysis, J.AnalyseMath.,8, 289-306, 1960-1961.

ÖZGEÇMİŞ

1989 Yılında Yozgat'ta doğan Semiha TEKİN ilköğrenimini; Celal Atik İlköğretim Okulu, lise öğrenimini ise Yozgat Lisesinde tamamlamıştır. 2009 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında tamamlamıştır.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

<u>İletişim Bilgileri :</u>

Adres: Fatih Mahallesi Aydos Sokak Pınar Apt. 37/3 Pursaklar / ANKARA

Telefon: 0553 706 66 06

E-Posta : tekinsemiha@hotmail.com