

**KOZMOLOJİK SABİTLİ
DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nimet Duygu GÜRAN

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

MAYIS 2014

**KOZMOLOJİK SABİTLİ
DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Nimet Duygu GÜRAN
(509111118)**

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR

MAYIS 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509111118 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Nimet Duygu GÜRAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**KOZMOLOJİK SABİTLİ DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU**
Mimar Sinan GSÜ (Misafir Öğretim Üyesi)
İstanbul Teknik Üniversitesi (Emekli)

Yard. Doç. Dr. Tolga BİRKANDAN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **5 Mayıs 2014**
Savunma Tarihi : **30 Mayıs 2014**

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda ve lisans yıllarımdan bu yana bana her konuda destek olan, bilgisi ve tecrübesini benden esirgemeyerek sabırla beni yetiştiren hocam Prof. Dr. Neşe Özdemir'e teşekkür ederim.

Mayıs 2014

Nimet Duygu GÜRAN
(Fizik Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. $\Lambda = 0$ İÇİN DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI	3
2.1 Dönen Silindirik Simetrik Uzaylar İçin Einstein Alan Denklemleri.....	3
2.2 Alan Denklemlerinin Çözümü.....	12
2.2.1 $\mu = 0$ Çözümü	12
2.2.2 $\mu \neq 0$ Çözümü.....	14
3. $\Lambda \neq 0$ İÇİN DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI.....	17
3.1 $k = 0$ İçin Einstein Alan Denklemleri	17
3.1.1 $\mu = 0$ Çözümü	19
3.1.1.1 $c_5 = 0$ çözümü	21
3.1.1.2 $c_5 \neq 0$ çözümü	22
3.2 $k \neq 0$ İçin Einstein Alan Denklemleri	23
3.2.1 $\mu = 0$ Çözümü	29
KAYNAKLAR.....	33
EKLER	35
EK A.1	37
EK A.2	38
EK A.3	40
ÖZGEÇMİŞ	43

KOZMOLOJİK SABİTLİ DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI

ÖZET

Bu çalışmada M.M. Som ve N.O. Santos'un "*Cylindrically Symmetric Stationary Fields in General Relativity* (Genel Görelilikte Durağan Silindirik Simetrik Alanlar)" başlıklı makalesindeki [1] elektromanyetik alana sahip dönen silindirik simetrik denklemlerin çözümlerinin kozmolojik sabitin varlığında genelleştirilmesi incelenmiştir. Bu amaçla, öncelikle kozmolojik sabitin olmadığı durumda literatürde kullanılan yöntemler incelenerek çözümler elde edilmiş, ardından kozmolojik sabit olduğu durumda metrik çözümleri bulunmuştur.

Tezin giriş bölümünde durgun ve dönen silindirik simetrik metrikler genel hatlarıyla ele alınmıştır. Bunun yanı sıra, literatürde daha önce elde edilmiş olan silindirik simetrik metrik çözümleri özetlenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, [1]'de tanımlanan ve iki farklı çözümü verilen, dönen silindirik simetrik elektro-vakum (fon uzayında boşluk elektromanyetik alan denklemlerini sağlayan) alanı temsil eden

$$ds^2 = f(r)dt^2 - e^{2\psi(r)}(dr^2 + dz^2) + 2m(r)d\phi dt - l(r)d\phi^2 \quad (1)$$

metriği kozmolojik sabitin olmadığı durumda ele alınmıştır. Bu metriğe ait elektro-vakum çözümleri için [1]'deki ve [2]'deki yöntemler ayrıntılı olarak incelenmiş ve çözümler elde edilmiştir. Bu yöntemler; T. Lewis'in "*Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields* (Eksensel Simetrik Kütleçekimsel Alan Denklemlerinin Bazı Özel Çözümleri)" başlıklı makalesinde [4] (1) metriğinin boşluk çözümlerini elde etmekte kullandığı ve B.K. Datta ve A.K. Raychaudhuri'nin "*Stationary Electromagnetic Fields in General Relativity* (Genel Görelilikte Durağan Elektromanyetik Alanlar)" başlıklı makalesinde [2], aynı metriğin elektro-vakum çözümlerinin elde edilmesinde kullandığı lineerizasyon yöntemi ve f, l, m arasında $fl + m^2 = r^2$ şeklinde bir bağıntı olduğu varsayımdır.

Üçüncü bölümde, dönen silindirik simetrik madde için kozmolojik sabitli elektro-vakum çözümleri iki farklı uzunluk elemanı için sunulmuştur. Öncelikle ikinci bölümde incelenen ve yukarıda (1) ile verilen metrik ele alınarak özel bir çözüm grubu elde edilmiştir. Diğer yandan, alan denklemleri incelendiğinde, kozmolojik sabit eklenmesinin $fl + m^2 = r^2$ şeklindeki Lewis varsayımını geçersiz kıldığı görülmüştür. Bu nedenle, Lewis varsayımının geçerliliğinin kozmolojik sabit varlığında korunup korunmayacağını incelemek amacıyla silindirik simetrik dönen elektro-vakum uzayı için aşağıda verilen daha genel metrik gözönüne alınmış

$$ds^2 = f(r)dt^2 - e^{2\psi(r)}(e^{2k(r)}dr^2 + dz^2) + 2m(r)d\phi dt - l(r)d\phi^2 \quad (2)$$

ve alan denklemleri elde edilmiştir. Yukarıda verilen uzunluk elemanı, (1)'de verilen uzunluk elemanının dr^2 bileşenine $e^{2k(r)}$ çarpanının eklenerek genelleştirilmiş halidir. Bu genelleştirmenin sonucunda Lewis varsayımının kullanılabileceği gösterilmiş ve bu varsayım kullanılarak özel bir çözüm grubu elde edilmiştir.

Çalışmamızdaki hesapları Mathematica programlama dili ile kontrol ederek kodları ekte daha sonra bu konuda çalışmak isteyenlere yardımcı olması düşüncesiyle verdik. Bu çalışmanın devamında, elde ettiğimiz uzayın eğrilik tekilliklerini ve jeodeziklerini hesaplamayı amaçlamaktayız.

ROTATING CYLINDRICALLY SYMMETRIC ELECTROVACUUM SPACES WITH COSMOLOGICAL CONSTANT

SUMMARY

In the general theory of relativity, solutions of (non)-vacuum Einstein's equations possessing certain symmetries have been studied widely during its journey. In the beginning, static spherical symmetric solutions such as Schwarzschild solution (1916) and Reissner-Nördström (1916-18) black hole solutions were presented and almost 50 years passed to get the rotating black hole solution by R. Kerr (1963). A non-static (FRWL) solution representing homogeneous and isotropic expanding universe was presented by Friedmann (1922-24), Lemaitre (1927), Robertson and Walker (1930-35) which took first attention after Hubbles's observation about expansion of the universe in 1920-30. Today FRWL is the best candidate for explaining the universe consistently with the astrophysical observations.

Regarding observations, homogeneous and isotropic properties of the space direct us to investigate spherical symmetric solutions of the field equations and therefore, in literature, spherical symmetric solutions of Einstein's theory of relativity are the most studied ones. Spaces with cylindrical symmetry which have translational symmetry and rotational symmetry about that axis are paid less attention. Cosmic strings, cylindrical black strings, charged and rotating cosmic string solutions are some examples of these type of metrics having singularity along the symmetry axis.

In this thesis we study electro-vacuum cylindrically symmetric stationary spaces in the presence of cosmological constant. In [1] M.M. Som and N.O. Santos studied electro-vacuum cylindrically symmetric stationary spaces, here we generalize the field equations to include cosmological constant. Following the method given in Lewis [4], Raychaudhuri [2] and [1] we linearize metric components and solve the field equations for electro-vacuum source.

In the first chapter we give definitions of general static and stationary cylindrical symmetric metrics and give some well known examples having these properties that is, all metric components are radial functions only.

In chapter 2, by considering rotating cylindrical space for electro-vacuum source, we give in detail the method used in [1], [4] "Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields" by T. Lewis and [2] "Stationary Electromagnetic Fields in General Relativity" by B.K. Datta ve A.K. Raychaudhuri. In these papers the line element (metric) is given by

$$ds^2 = f(r)dt^2 - e^{2\psi(r)}(dr^2 + dz^2) + 2m(r)d\phi dt - l(r)d\phi^2 \quad (3)$$

with the electro-vacuum source

$$F^{01} = B/\sqrt{-g}, \quad F^{31} = A/\sqrt{-g}$$

where A and B are constants. The metric coefficients, solution of field equations, are found such that satisfying the linearity relation

$$f = am + bl \quad (4)$$

where a, b are constants and hold the property $fl + m^2 = r^2$. Then, we examine the solutions obtained.

Chapter 3 is devoted to find and present new solutions of the field equations considered in chapter 2 including cosmological constant. Here, we first keep all rules of the [1,2,3] and try to solve field equations. We show that if we require $fl + m^2 = r^2$ condition "no solution exists" consistent with the source considered. If we give up $fl + m^2 = r^2$ equality and try to solve field equations we find the relation that f, l and m satisfy: $fl + m^2 = r^{-4}$. Then, the line element becomes

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{3}{\Lambda ar^2} \left(1 + \frac{c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r)}{4a} \right) dt^2 \\ & + 6 \frac{\sqrt{3}}{a\Lambda r^2} \left(1 + \frac{c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r)}{2a} \right) dt d\phi \\ & - \frac{3}{\Lambda r^2} dr^2 - \frac{3}{\Lambda r^2} dz^2 \\ & + \frac{3}{\Lambda r^2} \left(c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r) \right) d\phi^2. \end{aligned} \quad (5)$$

In the second approach, we extend the line element to

$$ds^2 = f(r)dt^2 - e^{2\psi(r)}(e^{2k(r)}dr^2 + dz^2) + 2m(r)d\phi dt - l(r)d\phi^2 \quad (6)$$

with an extra function $k(r)$, so that the field equations become compatible and the system is now solvable. Regarding all other linearity and $fl + m^2 = r^2$ conditions we find a metric solution in the following form

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{r}{4a} \left(4 + c_3 - \frac{c_2}{c\sqrt{3}\Lambda r^{3/2} + \frac{3B^2}{c^2\Lambda r^2}} \right) dt^2 \\ & + r \left(2 + c_3 - \frac{c_2}{c\sqrt{3}\Lambda r^{3/2} + \frac{3B^2}{c^2\Lambda r^2}} \right) dt d\phi \\ & - \frac{3}{4\Lambda r^2} dr^2 - c^2 r dz^2 \\ & + ar \left(c_3 - \frac{c_2}{c\sqrt{3}\Lambda r^{3/2} + \frac{3B^2}{c^2\Lambda r^2}} \right) d\phi^2. \end{aligned} \quad (7)$$

We see that our new found solutions have singularities on the symmetry axis i.e., at $r = 0$, and that the first metric can be written in a conformal factor.

Examining curvature and scalar quantities of new found solutions, and finding their geodesics will be our new research target. Classifications of the spacetimes with

respect to their symmetries is a standard problem in general relativity. Therefore, we hope that we contribute to the literature in this way.

We check all calculations with Mathematica algebraic programme and present related codes in the appendix. We also hope that it will be helpful for the students and readers who are interested in relativity.

1. GİRİŞ

En genel statik silindirik simetrik bir metrik

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Theta} dr^2 - \alpha^2 e^{2\Omega} d\phi^2 - e^{2\Psi} dz^2 \quad (1.1)$$

şeklinde. Burada α sabit, Φ , Θ , Ω ve Ψ koordinat " r "nin fonksiyonlarıdır. Uzayın zamansal ötelemenin dışında z-ekseni boyunca öteleme ve z-ekseni etrafında dönmeye karşı gelen $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ simetrisi bulunmaktadır. Eğer $t \rightarrow t + \omega\phi$ şeklinde dönüşüm yapılırsa

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 + 2e^{2\Phi} \omega d\phi dt - e^{2\Theta} dr^2 - (\alpha^2 e^{2\Omega} - \omega^2 e^{2\Phi}) d\phi^2 - e^{2\Psi} dz^2 \quad (1.2)$$

şeklinde dönen silindirik metriğe karşı gelen uzunluk elemanı elde edilir.

Literatürde silindirik madde dağılımını kendine kaynak kabul eden ve kaynağın dışındaki çözüm 1917 yılında Levi-Civita [3] tarafından aşağıdaki gibi önerilmiştir:

$$ds^2 = -r^{4\sigma} dt^2 + r^{-4\sigma} [r^{8\sigma^2} (dr^2 + dz^2) + b^2 r^2 d\phi^2]. \quad (1.3)$$

1932'de Lewis [4] dönen silindirik simetrik metrik çözümü silindirik maddenin dışı için, $\kappa, \beta_1, \beta_2, \varepsilon$ sabitler ve ω sabit açısal hız olmak üzere,

$$\begin{aligned} ds^2 = & + \kappa^2 (\beta_1^2 r^\varepsilon - \omega^2 \beta_2^2 r^{2-\varepsilon}) dt^2 \\ & + 2\kappa^2 \omega (\beta_2^2 r^{2-\varepsilon} - \beta_1^2 r^\varepsilon) \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} d\phi dt \\ & - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\varepsilon(2-\varepsilon)/2} (dr^2 + dz^2) \\ & - \kappa^2 (\beta_1^{-2} r^{2-\varepsilon} - \omega^2 \beta_2^{-2} r^\varepsilon) d\phi^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

şeklinde elde etmiştir. κ ile ω arasında

$$\kappa = (1 - \omega^2)^{-1/2} \quad (1.5)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

1937'de van Stockum [5] aynı metriği farklı bir yolla bulmuş ve yorumlamıştır.

Kozmolojik sabit varlığında durgun ya da dönen silindire ait metrik örnekleri "Griffiths, Santos"un *A rotating cylinder in an asymptotically locally anti-de Sitter background* [6] ve N.O. Santos'un *Solution of the vacuum Einstein equations with nonzero cosmological constant for a stationary cylindrically symmetrical spacetime* [7] başlıklı makalelerinde verilmiştir. Burada Santos, metriği Lewis yöntemi kullanarak

$$ds^2 = f dt^2 + 2k d\phi dt - e^\mu (dr^2 + dz^2) - l d\phi^2 \quad (1.6)$$

$fl + k^2 = r^2$ şartını sağlayacak şekilde elde etmiştir; burada f , k , μ ve l ; r 'nin fonksiyonudur. Boşluk elektromanyetik alan denklemlerinin $fl + k^2 \neq r^2$ için bir çözümü ise Lemos ve Zanchin [8] tarafından A_μ dört potansiyel, $h(r)$ fonksiyonu

$$h(r) = \frac{2\lambda}{\alpha r}, \quad (1.7)$$

ve $B(r)$ fonksiyonu

$$B(r) = \alpha^2 r^2 - \frac{b}{\alpha r} + \frac{c^2}{\alpha^2 r^2} \quad (1.8)$$

olmak üzere aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -(\gamma^2 B(r) - \omega^2 r^2) dt^2 - \frac{2\gamma\omega}{\alpha^3 r} (b - \frac{c^2}{\alpha r}) d\phi dt \\ & + (\gamma^2 r^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^4} B(r)) d\phi^2 + \frac{1}{B(r)} dr^2 + \alpha^2 r^2 dz^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$A_\mu = -\gamma h(r) \delta_\mu^0 + \frac{\omega}{\alpha^2} h(r) \delta_\mu^2. \quad (1.10)$$

Bu çalışmada N. O. Santos'un [1]'deki elektrovakum çözümünü kozmolojik sabit içerecek şekilde incelemeye çalışacağız.

2. $\Lambda = 0$ İÇİN DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI

2.1 Dönen Silindirik Simetrik Uzaylar İçin Einstein Alan Denklemleri

Dönen silindirik simetrik elektrovakum uzayları için metrik

$$ds^2 = f dt^2 - e^{2\psi}(dr^2 + dz^2) + 2md\phi dt - ld\phi^2 \quad (2.1)$$

şeklinde verilebilir [1]. Burada f, l, m ve ψ , " r " nin fonksiyonlarıdır. Metriğin kovaryant tensör ifadesi ise

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} f(r) & 0 & 0 & m(r) \\ 0 & -e^{2\psi(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2\psi(r)} & 0 \\ m(r) & 0 & 0 & -l(r) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklindedir ve determinantı aşağıdaki gibidir:

$$g = -e^{4\psi}(fl + m^2). \quad (2.3)$$

Metrik kullanılarak elde edilebilecek tek bir bağlantı (connection) tanımlıdır. Bu bağlantı Christoffel sembolü olarak adlandırılır ve formülü aşağıdaki gibidir [9]:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (2.4)$$

Christoffel sembolleri genel koordinat dönüşümleri altında tensör gibi değişmez. Riemann uzayında alt iki indise göre simetriktir:

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a. \quad (2.5)$$

(2.1) ile verilen dönen silindirik simetrik elektrovakum uzaylarına ait Christoffel sembolleri, (2.4) kullanılarak ve (2.5) ile verilen simetri özelliği yardımıyla, " $'$ " r 'ye

göre türevi göstermek üzere aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rt}^t &= \frac{f'l + mm'}{2(fl + m^2)} \\
\Gamma_{\phi r}^t &= \frac{m'l - ml'}{2(fl + m^2)} \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}e^{-2\psi}f' \\
\Gamma_{rr}^r &= \psi' \\
\Gamma_{zz}^r &= -\psi' \\
\Gamma_{\phi t}^r &= \frac{1}{2}e^{-2\psi}m' \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2}e^{-2\psi}l' \\
\Gamma_{zr}^z &= \psi' \\
\Gamma_{tr}^\phi &= \frac{f'm - fm'}{2(fl + m^2)} \\
\Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{fl' + mm'}{2(fl + m^2)}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Kısmî türevin genelleştirmesi olan kovaryant türev ∇_a ve bir manifoldun eğriliğinin ifadesi olan R^a_{bcd} Riemann (eğrilik) tensörü Christoffel sembolleri yardımıyla tanımlanır.

Bir V^b vektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_a V^b = V^b_{;a} = \partial_a V^b + \Gamma_{ad}^b V^d \tag{2.7}$$

şeklindedir [9]. (k, l) formundaki herhangi bir tensörün kovaryant türevi ise aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
\nabla_c T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} &= \partial_c T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} + \Gamma_{cd}^{a_1} T^{da_2 \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} + \Gamma_{cd}^{a_2} T^{b_1 d \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} + \dots \\
&\quad - (\Gamma_{cb_1}^d T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{db_2 \dots b_l} + \Gamma_{cb_2}^d T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{b_1 d \dots b_l} + \dots).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Bir manifoldun eğriliği, $(1, 3)$ formundaki Riemann tensörüyle verilir. Eğrilik tensörü olarak da adlandırılan Riemann tensörü aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e. \tag{2.9}$$

Riemann tensörünün daraltılmasıyla R_{ab} Ricci tensörü elde edilir:

$$R_{ab} = R^c_{acb}. \quad (2.10)$$

Ricci tensörü simetriktir:

$$R_{ab} = R_{ba}. \quad (2.11)$$

Ricci tensörünün izi eğrilik skaleri olarak da adlandırılan R Ricci skalerini verir:

$$R = R^a_a = g^{ab} R_{ab}. \quad (2.12)$$

(2.1) ile tanımlı uzayın Ricci tensörleri

$$R_{tt} = \frac{e^{-2\psi}}{4(fl+m^2)} [-f'^2 l - 2f' mm' + 2fm'^2 + ff'l' + 2f''(fl+m^2)] \quad (2.13)$$

$$R_{rr} = -\psi'' + \frac{\psi' (fl+m^2)'}{2 fl+m^2} + \frac{1}{4(fl+m^2)^2} [(fl+m^2)'^2 \quad (2.14)$$

$$-2(fl+m^2)(fl+m^2)'' + 2(fl+m^2)(f'l' + m'^2)] \quad (2.15)$$

$$R_{zz} = -\psi'' - \psi' \frac{(fl+m^2)'}{2(fl+m^2)} \quad (2.16)$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{e^{-2\psi}}{4(fl+m^2)} [-2lm'^2 - f'll' + 2l'mm' + fl'^2 - 2l''(fl+m^2)] \quad (2.17)$$

$$R_{\phi t} = R_{t\phi} = \frac{e^{-2\psi}}{4(fl+m^2)} [-f'lm' + 2f'l'm - fl'm' + 2m''(fl+m^2)] \quad (2.18)$$

ve Ricci skaleri

$$R = e^{-2\psi} \left[2\psi'' - \frac{f'l' + m'^2}{2(fl+m^2)} + 2 \frac{\sqrt{fl+m^2}''}{\sqrt{fl+m^2}} \right] \quad (2.19)$$

yukarıdaki gibi elde edilmiştir.

Einstein tensörü G_{ab} , uzay-zamanın geometrisinin matematiksel ifadesidir. Ricci tensörü ve Ricci skaleri yardımıyla sırasıyla $(0,2)$ ve $(1,1)$ formlarında

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (2.20)$$

$$G^a_b = R^a_b - \frac{1}{2} R \delta^a_b \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Einstein tensörleri (1, 1) formunda (2.21) kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$G^t_t = e^{-2\psi} \left[-\psi'' + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'l' + mm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right] \quad (2.22)$$

$$G^r_r = e^{-2\psi} \left[-\psi' \frac{(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} - \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} \right] \quad (2.23)$$

$$G^z_z = e^{-2\psi} \left[\psi' \frac{(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{1}{\sqrt{fl + m^2}} \frac{d^2}{dr^2} \left(\sqrt{fl + m^2} \right) \right] \quad (2.24)$$

$$G^\phi_\phi = e^{-2\psi} \left[-\psi'' + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'l' + mm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right] \quad (2.25)$$

$$G^\phi_t = e^{-2\psi} \left[\frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{(m/l)l^2}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right] \quad (2.26)$$

$$G^t_\phi = e^{-2\psi} \left[\frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{(f/m)m^2}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Enerji-momentum tensörleri, F^{ab} elektromanyetik alan tensörleri cinsinden

$$T^a_b = \frac{1}{4\pi} [F^{ak} F_{kb} - \frac{1}{4} \delta_b^a F^{kl} F_{lk}] \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlıdır [10]. (2.28) ifadesinde kullanılan elektromanyetik alan tensörleri antisimetriktr [11]:

$$F^{ab} = -F^{ba} \quad (2.29)$$

$$F_{ab} = -F_{ba}$$

ve kovaryant türevleri

$$F^{ab}_{;b} = \nabla_b F^{ab} = 0 \quad (2.30)$$

$$F_{[ab;c]} \equiv 0 \quad (2.31)$$

özelliklerine sahiptir.

Elektromanyetik alan tensörlerinin antisimetri özelliği ve kovaryant türevlerinin (2.31) özelliği kullanılarak sıfırdan farklı bileşenleri, A ve B herhangi iki fonksiyon olmak üzere

$$F^{\phi r} = -F^{r\phi} = \frac{A}{\sqrt{-g}} \quad (2.32)$$

$$F^{tr} = -F^{rt} = \frac{B}{\sqrt{-g}} \quad (2.33)$$

şeklinde seçilebilir. Elektromanyetik alan tensörlerinin kendi indislerinden herhangi birine göre kovaryant türevi, kovaryant türevin (2.8)'deki formülü kullanılarak Christoffel sembolleri cinsinden yazılabilir ve (2.30) özelliğinden dolayı sıfıra eşittir:

$$\nabla_b F^{ab} = F^{ab}_{;b} = \partial_b F^{ab} + \Gamma_{bd}^a F^{db} + \Gamma_{bd}^b F^{ad} = 0. \quad (2.34)$$

Yukarıda elde edilen formül kullanılarak $\nabla_b F^{ab}$ 'ler hesaplandığında A ve B 'nin r 'ye göre türevlerinin sıfır olduğu görülür:

$$\partial_r A = 0 \quad (2.35)$$

$$\partial_r B = 0. \quad (2.36)$$

Bu nedenle A ve B sabittir.

Enerji momentum tensörleri, (2.28) yardımıyla

$$T^t_t = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{lA^2 + fB^2}{fl + m^2} \quad (2.37)$$

$$T^r_r = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{-lA^2 + 2mAB + fB^2}{fl + m^2} \quad (2.38)$$

$$T^z_z = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{lA^2 - 2mAB - fB^2}{fl + m^2} \quad (2.39)$$

$$T^\phi_\phi = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{-(lA^2 + fB^2)}{fl + m^2} \quad (2.40)$$

$$T^t_\phi = \frac{2e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{-lAB + mB^2}{fl + m^2} \quad (2.41)$$

$$T^\phi_t = \frac{2e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{mA^2 + fAB}{fl + m^2} \quad (2.42)$$

şeklinde elde edilir. Enerji-momentum tensörleri arasında

$$T^t_t = -T^\phi_\phi \quad (2.43)$$

$$T^r_r = -T^z_z \quad (2.44)$$

eşitlikleri olduğu görülür.

Einstein alan denklemi, enerji-momentuma sahip bir kaynağın uzay-zamanın geometrisinde oluşturduğu değişikliğin fiziksel ifadesidir. Einstein alan denklemi (1,1) formunda

$$G^a_b = \kappa T^a_b \quad (2.45)$$

şeklindedir. Burada κ Einstein sabiti olarak adlandırılır. Mutlak değeri $|\kappa| = \frac{8\pi G}{c^4}$ olup işareti Einstein alan denklemleri için belirlenmiş işaret kuralına göre belirlenir (Bkz. Ek A.1). Rölativistik birimlerle çalışıldığında ($G = 1$ ve $c = 1$) ve κ için işaret kuralı uygulandığında $\kappa = +8\pi$ elde edilir ve alan denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G^a_b = 8\pi T^a_b. \quad (2.46)$$

Alan denklemlerine bakıldığında enerji-momentumla uzay geometrisinin doğru orantılı olduğu görülür. Bu nedenle T^a_b 'ler arasındaki (2.43) ve (2.44) denklemlerinde elde edilen bağıntılar G^a_b 'ler için de geçerlidir:

$$G^t_t = -G^\phi_\phi \quad (2.47)$$

$$G^r_r = -G^z_z. \quad (2.48)$$

Başka bir ifadeyle

$$G^t_t + G^\phi_\phi = 0 \quad (2.49)$$

$$G^r_r + G^z_z = 0 \quad (2.50)$$

şeklinde de yazılabilir.

Alan denklemleri, (2.46) yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$-\psi'' + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'l' + mm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) = \frac{fB^2 + lA^2}{fl + m^2} \quad (2.51)$$

$$-\psi' \frac{(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} - \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} = \frac{fB^2 + 2mAB - lA^2}{fl + m^2} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \psi' \frac{(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{1}{\sqrt{fl + m^2}} \frac{d^2}{dr^2} \left(\sqrt{fl + m^2} \right) \\ = -\frac{fB^2 + 2mAB - lA^2}{fl + m^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$-\psi'' + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'l' + mm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) = -\frac{fB^2 + lA^2}{fl + m^2} \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{(m'l - ml')}{\sqrt{fl + m^2}} \right) = 2 \frac{mB^2 - lAB}{fl + m^2} \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'm - fm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) = 2 \frac{mA^2 + fAB}{fl + m^2}. \quad (2.56)$$

Alan denklemlerinin çözümüne geçilmeden önce, Einstein tensörleri arasındaki yukarıda verilen (2.49) ve (2.50) bağıntılarında, (2.22)-(2.27)'de verilen G^a_b 'ler yerleştirilirse aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$-2\psi'' + \frac{f'l' + m'^2}{2(fl + m^2)} - \frac{1}{\sqrt{fl + m^2}} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{fl + m^2}) = 0 \quad (2.57)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{fl + m^2}} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{fl + m^2}) = 0. \quad (2.58)$$

Bu denklemlerden (2.58), (2.57)'de yerleştirildiğinde, ψ'' ile f, l, m fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı olduğu görülür:

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)}. \quad (2.59)$$

Diğer yandan, (2.58) diferansiyel denklemi çözüldüğünde, c_1 ve c_2 integrasyon sabitleri olmak üzere aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$fl + m^2 = (c_1 r + c_2)^2. \quad (2.60)$$

Bu çalışmada, Som ve Santos'un makalesinde kullandıkları gibi [1] $c_1 = 1$ ve $c_2 = 0$ alınarak

$$fl + m^2 = r^2 \quad (2.61)$$

kullanılmıştır.

Alan denklemlerinde (2.59) ve (2.61)'de elde edilen eşitlikler yerleştirildiğinde aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini elde ederiz:

$$- \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{f'l' + mm'}{r} \right] = \frac{fB^2 + lA^2}{r} \quad (2.62)$$

$$- \psi' - r\psi'' = \frac{fB^2 + 2mAB - lA^2}{r} \quad (2.63)$$

$$\psi' + r\psi'' = - \frac{fB^2 + 2mAB - lA^2}{r} \quad (2.64)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{f'l + mm'}{r} \right] = - \frac{fB^2 + lA^2}{r} \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{m'l - ml'}{r} \right] = 2 \frac{mB^2 - lAB}{r} \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{f'm - fm'}{r} \right] = 2 \frac{mA^2 + fAB}{r}. \quad (2.67)$$

Yukarıda elde edilen alan denklemleri incelendiğinde, (2.63) ve (2.64)'ün özdeş olduğu görülür. Bu, (2.47) ve (2.48) 'den elde edilen (2.61) ve (2.59) ifadelerinin alan denklemlerinde yerleştirilmesi sonucudur. Diğer yandan, yine (2.49)'da taraf tarafa toplanmış olan (2.62) ve (2.65) denklemleri bu kez birbirinden çıkartılarak ve (2.61) ile (2.59) ifadeleri de eklenerek elde edilen aşağıdaki denklem sistemi (2.62)-(2.67) denklemlerine eşdeğer bir lineer bağımsız diferansiyel denklem sistemidir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{f'l - fl'}{r} \right] = 4 \frac{fB^2 + lA^2}{r} \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = \frac{lA^2 - 2mAB - fB^2}{r} \quad (2.69)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{m'l - ml'}{r} \right] = \frac{4(mB^2 - lAB)}{r} \quad (2.70)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{f'm - fm'}{r} \right] = \frac{4(mA^2 + fAB)}{r} \quad (2.71)$$

$$fl + m^2 = r^2$$

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)}.$$

Yukarıdaki denklem sisteminin ilk dört denklemi aşağıdaki gibi toparlanıp,

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(f/l)'l^2}{r} \right] = 4 \frac{(lA^2 + fB^2)}{r} \quad (2.72)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(m/l)'l^2}{r} \right] = 4 \frac{(-lAB + mB^2)}{r} \quad (2.73)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(f/m)'m^2}{r} \right] = 4 \frac{(mA^2 + fAB)}{r} \quad (2.74)$$

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = \frac{(lA^2 - 2mAB - fB^2)}{r} \quad (2.75)$$

bu denklemlerde $u = f/l$ ve $v = m/l$ dönüşümleri uygulandığında, (2.61)'de verilen $fl + m^2 = r^2$ eşitliği

$$u + v^2 = \frac{r^2}{l^2} \quad (2.76)$$

şeklinde ve (2.72)-(2.75) denklemleri de aşağıdaki gibi u, v ve r cinsinden yazılabilir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{u'r}{u+v^2} \right] = 4 \frac{(A^2 + uB^2)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.77)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{v'r}{u+v^2} \right] = 4 \frac{(-AB + vB^2)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(v/u)'u^2r}{u+v^2} \right] = -4 \frac{(vA^2 + uAB)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.79)$$

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = \frac{(A^2 - 2vAB - uB^2)}{\sqrt{u+v^2}}. \quad (2.80)$$

Ayrıca, u ve v arasında

$$v = au + b \quad (2.81)$$

şeklinde lineer bir bağıntı olduğu varsayıldığında [2] [1], (2.77)-(2.79) denklem grubundaki denklemlerin

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{u'r}{u+v^2} \right] = 4 \frac{(A^2 + uB^2)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.82)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{au'r}{u+v^2} \right] = 4 \frac{(-AB + vB^2)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.83)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{-bu'r}{u+v^2} \right] = -4 \frac{(vA^2 + uAB)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.84)$$

şeklinde birbirlerinin a ve b sabitleriyle orantılı katları olduğu ve lineer bağımsız denklem sayısının ikiye düştüğü görülür. Bunlardan ilki (2.77) olup diğer lineer bağımsız denklem ise yukarıdaki denklem grubunun sağ taraflarının eşitlenmesiyle elde edilen

$$aA^2 + AB - bB^2 = 0 \quad (2.85)$$

kuadratik denklemdir. Ayrıca (2.81) yerleştirilerek $u + v^2$ ifadesi de u cinsinden kuadratik şekilde yazılabilir:

$$u + v^2 = a^2u^2 + (2ab + 1)u + b^2. \quad (2.86)$$

Yukarıda ifade edilen denklemlerden (2.85) A değişkenine göre 2. derece bir denklem ve (2.86) da u değişkenine göre 2. derece bir denklem olarak ele alınıp diskriminantları hesaplandığında aynı diskriminantı sahip oldukları görülür. Ortak diskriminantları μ^2 ile gösterilecek olursa

$$\mu = \pm \sqrt{1 + 4ab} \quad (2.87)$$

ve bu denklemlerin kökleri

$$A_{1,2} = -\frac{B}{2a}(\mu + 1) \quad (2.88)$$

$$u_1 = -\frac{(\mu - 1)^2}{4a^2} \quad (2.89)$$

$$u_2 = -\frac{(\mu + 1)^2}{4a^2} \quad (2.90)$$

olarak bulunur.

Reel alanlar için $\mu^2 \geq 0$ olmalıdır.

2.2 Alan Denklemlerinin Çözümü

Bir önceki bölümde elde edilen lineer bağımsız denklemler, (2.61) ve (2.59) ile birlikte aşağıda tekrar verilen (2.77), (2.80), (2.85)

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{u'r}{u+v^2} \right] = 4 \frac{(A^2 + uB^2)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.91)$$

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = \frac{(A^2 - 2vAB - uB^2)}{\sqrt{u+v^2}} \quad (2.92)$$

$$aA^2 + AB - bB^2 = 0 \quad (2.93)$$

$$fl + m^2 = r^2 \rightarrow u + v^2 = \frac{r^2}{l^2} \quad (2.94)$$

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} \quad (2.95)$$

denklemleridir. Denklemlerin çözümleri $\mu = 0$ ve $\mu \neq 0$ için iki farklı şekilde elde edilebilir.

2.2.1 $\mu = 0$ Çözümü

Bir önceki bölümde elde edilen $\mu, A_{1,2}, u_1, u_2$ ifadeleri $\mu = 0$ için

$$b = -\frac{1}{4a} \quad (2.96)$$

$$A = -\frac{B}{2a} \quad (2.97)$$

$$u_1 = u_2 = -\frac{1}{4a^2} \quad (2.98)$$

olup, alan denklemlerinde yerleştirildiğinde (2.91)'in ve (2.92)'nin sağ taraflarının sadeleşerek

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{u'r}{(au + \frac{1}{4a})^2} \right] = \frac{4B^2}{a} \quad (2.99)$$

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = 0 \quad (2.100)$$

şeklinde integre edilebilir hale geldiği görülür. Bu denklemlerden birincisinin ilk integrasyonu sonucunda, c_1 integrasyon sabiti olmak üzere aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{u'r}{(au + \frac{1}{4a})^2} = \frac{4B^2}{a}r + c_1. \quad (2.101)$$

Denklem ikinci kez integre edildiğinde, c_2 integrasyon sabiti olmak üzere

$$\frac{1}{au + \frac{1}{4a}} = -4B^2r - c_1 \ln r - c_2 \quad (2.102)$$

u 'yu r 'ye bağlayan ifade elde edilir. Bu ifadenin sağ tarafı $-\xi$ olacak şekilde

$$\xi = 4B^2r + c_1 \ln r + c_2 \quad (2.103)$$

$\xi(r)$ fonksiyonu tanımlanarak u aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u = -\frac{1}{\xi a} - \frac{1}{4a^2}. \quad (2.104)$$

v , (2.81) kullanılarak

$$v = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2a} \quad (2.105)$$

şeklinde elde edilir. Sırasıyla, (2.76) ve $u = f/l$, $u = m/l$ dönüşümleri ve (2.80) kullanılarak, f, l, m fonksiyonları, ξ 'ye bağlı olarak

$$\xi = 4B^2r + c_1 \ln r + c_2 \quad (2.106)$$

$$l = -\xi r \quad (2.107)$$

$$f = \frac{r}{a} \left(1 + \frac{\xi}{4a} \right) \quad (2.108)$$

$$m = r \left(1 + \frac{\xi}{2a} \right) \quad (2.109)$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan, denklem (2.100) integre edilerek ψ fonksiyonu, c_3 ve r_0 integrasyon sabitleri olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\psi = c_3 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right). \quad (2.110)$$

Çözümlerin (2.59) eşitliğini sağlaması gerektiğinden, ψ ifadesindeki integrasyon sabitinin $c_3 = -1/4$ olduğu bulunur. Sonuç olarak, elde edilen çözüm grubu aşağıdaki gibidir:

$$\xi = 4B^2r + c_1 \ln r + c_2 \quad (2.111)$$

$$l = -\xi r \quad (2.112)$$

$$f = \frac{r}{a} \left(1 + \frac{\xi}{4a} \right) \quad (2.113)$$

$$m = r \left(1 + \frac{\xi}{2a} \right) \quad (2.114)$$

$$\psi = -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right). \quad (2.115)$$

Bu sonuçlar metrikte yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{r}{4a^2} (4B^2r - c_1 \ln(r) + 4a + c_2) dt^2 \\ & + \frac{r}{a} (4B^2r - c_1 \ln(r) + 2a + c_2) dt d\phi \\ & - \sqrt{\frac{r_0}{r}} dr^2 - \sqrt{\frac{r_0}{r}} dz^2 \\ & + r (4B^2r - c_1 \ln(r) + c_2) d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.116)$$

uzunluk elemanı yukarıdaki gibi bulunmuştur.

2.2.2 $\mu \neq 0$ Çözümü

Alan denklemlerinden ilki olan (2.91) denkleminin sağ tarafında A 'nın (2.88)'de elde edilen μ cinsinden ifadesi yerleştirilip $u + v^2$ ifadesi de (2.89) ve (2.90)'da elde edilen kökler cinsinden yazıldığında, denklem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{u'r}{u + v^2} \right] &= 4 \frac{(A^2 + uB^2)}{\sqrt{u + v^2}} \\ &= \frac{4B^2}{a} \sqrt{\frac{u - u_2}{u - u_1}} \end{aligned} \quad (2.117)$$

şeklinde u 'ya bağlı şekilde yazılabilir. Bu denklemde,

$$\theta = \int \frac{du}{u + v^2} = \int \frac{du}{a^2(u - u_1)(u - u_2)} \quad (2.118)$$

gibi bir θ dönüşümü uygulanırsa [2] denklemin sol tarafı θ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d}{dr} [r\theta'] = \frac{4B^2}{a} \sqrt{\frac{u - u_2}{u - u_1}}. \quad (2.119)$$

Diğer yandan (2.118) ifadesi integre edilerek k integrasyon sabiti olmak üzere $\theta(u)$ elde edilebilir:

$$\theta(u) = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{1}{k^2} \frac{u - u_1}{u - u_2} \right). \quad (2.120)$$

Yukarıda verilen $\theta(u)$ ifadesindeki $\frac{u-u_1}{u-u_2}$ terimi aşağıdaki gibi θ cinsinden

$$\frac{u - u_1}{u - u_2} = k^2 e^{\mu \theta}. \quad (2.121)$$

şeklinde yazılıp, (2.119)'un sağ tarafında yerleştirilir ve ikinci bir

$$\rho = \ln r \quad (2.122)$$

dönüşümü uygulanırsa, denklem (2.117) aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{d^2 \theta}{d\rho^2} = \frac{4B^2}{ka} e^{\rho - \mu \theta / 2}. \quad (2.123)$$

Bu denklemin çözümü c ve r_0 integrasyon sabitleri olmak üzere

$$e^{\mu \theta} = \frac{16B^4 \mu^2 r^2}{a^2 k^2 c^4} \cosh^4 \left[\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \quad (2.124)$$

şeklindedir.

$$e^{\mu \theta} = \frac{\xi^2}{k^2} \quad (2.125)$$

olacak şekilde bir ξ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanarak,

$$\xi = \frac{4B^2 \mu r}{ac^2} \cosh^2 \left[\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \quad (2.126)$$

f, l, m çözümleri ξ cinsinden

$$f = \frac{1}{2a} r \frac{(1 + \xi^2)}{\xi} - \frac{\mu r}{4a} \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} - \frac{r}{4a\mu} \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} \quad (2.127)$$

$$l = \frac{ar}{\mu} \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} \quad (2.128)$$

$$m = \frac{1}{2} r \frac{(1 + \xi^2)}{\xi} - \frac{r}{2\mu} \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} \quad (2.129)$$

şeklinde elde edilir.

ψ çözümü için, ikinci alan denklemi (2.92)'nin sağ tarafına bakıldığında, (2.93) ile verilen katsayılar denklemi yardımıyla çarpanlarına ayrılabilirdiği görülür:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [r\psi'] &= \frac{(A^2 - 2vAB - uB^2)}{\sqrt{u + v^2}} \\ &= -\frac{(2aA + B)}{B} \cdot \frac{A^2 + uB^2}{\sqrt{u + v^2}} \\ &= \frac{\mu B^2}{a} \cdot \sqrt{\frac{u - u_2}{u - u_1}}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

(2.130) denkleminin sağ tarafında (2.117) ve (2.88) yerleştirilerek

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = \frac{B^2\mu}{a} \cdot \sqrt{\frac{u-u_2}{u-u_1}} \quad (2.131)$$

elde edilen yukarıdaki denklemde de (2.121) yerleştirildiğinde

$$\frac{d}{dr} [r\psi'] = \frac{B^2\mu}{ak} e^{-\mu\theta/2} \quad (2.132)$$

gibi, çözümü (2.124)'te elde edilmiş olan $e^{\mu\theta}$ cinsinden bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu denklem integre edildiğinde ψ fonksiyonu c_1 ve c_2 integrasyon sabitleri olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\psi = \ln \left[c_2 r^{c_1} \cosh \left(\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right]. \quad (2.133)$$

Son olarak, yukarıda (2.127), (2.128), (2.129) ve (2.133) ile verilen ψ, f, l, m çözümleri, (2.126) ile birlikte (2.95)'te yerleştirildiğinde, c_1 'in aşağıdaki değeri alması gerektiği görülür:

$$c_1 = \frac{c^2}{4}. \quad (2.134)$$

Sonuç olarak, (2.1) metriğine ait alan denklemlerinin $\mu \neq 0$ çözüm grubu; (2.126) ile verilen ξ fonksiyonu cinsinden, (2.127), (2.128), (2.129) denklemlerinde verilen f, l, m fonksiyonları ile birlikte aşağıdaki ψ fonksiyonudur:

$$\psi = \ln \left[c_2 r^{c^2/4} \cosh \left(\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right]. \quad (2.135)$$

Yukarıda verilen çözümlerle birlikte ds^2 aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[\frac{B^2(1+\mu)^2}{a^2c^2} r^2 \cosh^2 \left(\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) - \frac{c^2(\mu-1)^2}{8B^2\mu^2 \left(1 + \cosh \left(c \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right)} \right] dt^2 \\ & + \left[\frac{2B^2(1+\mu)}{ac^2} r^2 \left(1 + \cosh \left(c \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{ac^2(\mu-1)}{4B^2\mu^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right] dt d\phi \\ & - \frac{c_2^2}{2} r^{c^2/2} \left(1 + \cosh \left(c \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right) dr^2 \\ & - \frac{c_2^2}{2} r^{c^2/2} \left(1 + \cosh \left(c \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right) dz^2 \\ & + \left[\frac{2B^2}{c^2} r^2 \left(1 + \cosh \left(c \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right) - \frac{a^2c^2}{4B^2\mu^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \right] d\phi^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

3. $\Lambda \neq 0$ İÇİN DÖNEN SİLİNDİRİK SİMETRİK ELEKTROVAKUM UZAYLARI

Bu bölümde, dönen silindirik simetrik elektrovakum uzayların kozmolojik sabit varlığında çözümleri incelenecektir. Öncelikle, bir önceki bölümde kullanılan ve aşağıda tekrar verilen (2.1)

$$ds^2 = f dt^2 - e^{2\psi}(dr^2 + dz^2) + 2md\phi dt - ld\phi^2 \quad (3.1)$$

metriği için çözüm aranmış, ardından, yukarıdaki metriğin dr^2 bileşenine $e^{2k(r)}$ çarpanının eklenmesiyle elde edilen aşağıdaki metriğe ait çözümler elde edilmeye çalışılmıştır;

$$ds^2 = f dt^2 - e^{2\psi}(e^{2k}dr^2 + dz^2) + 2md\phi dt - ld\phi^2. \quad (3.2)$$

İlk metrik, ikinci metriğin $k = 0$ için özel durumudur.

3.1 $k = 0$ İçin Einstein Alan Denklemleri

Kozmolojik sabit varlığında alan denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$G^a_b + \Lambda \delta^a_b = 8\pi T^a_b. \quad (3.3)$$

Bu ifadede, (2.43)'te verilen

$$T^t_t = -T^\phi_\phi$$

$$T^r_r = -T^z_z$$

eşitlikleri yerleştirildiğinde, Einstein tensörleri arasında (2.49) ve (2.50) 'de elde edilen eşitliklerden farklı olarak

$$G^t_t + G^\phi_\phi + 2\Lambda = 0 \quad (3.4)$$

$$G^r_r + G^z_z + 2\Lambda = 0 \quad (3.5)$$

eşitlikleri olduğu görülür.

Einstein tensörleri arasındaki bu bağlantılarda bir önceki bölümde elde edilen ve (2.22)-(2.27) ile verilen G^a_b yerleştirildiğinde aşağıdaki diferansiyel denklemleri verir:

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} \quad (3.6)$$

$$\frac{\sqrt{fl + m^2}''}{\sqrt{fl + m^2}} = 2\Lambda e^{2\psi}. \quad (3.7)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemlerden ikincisine bakıldığında, alan denklemlerinin

$$fl + m^2 = r^2 \quad (3.8)$$

eşitliğini kabul etmediği görülür.

Kozmolojik sabitli alan denklemleri; (2.37)-(2.42) denklemlerinde verilmiş T^a_b enerji-momentum tensörleri, (2.22)-(2.27) ile verilen G^a_b 'ler ile (3.6) ve (3.7)'de elde edilen eşitlikler alan denklemlerinin (3.3)'te verilen ifadesinde yerleştirilerek aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(f'l' + mm')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] - \Lambda \sqrt{fl + m^2} e^{2\psi} = -\frac{(lA^2 + fB^2)}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.9)$$

$$-\frac{d}{dr} \left[\psi' \sqrt{fl + m^2} \right] + \Lambda \sqrt{fl + m^2} e^{2\psi} = \frac{-lA^2 + 2mAB + fB^2}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\psi' \sqrt{fl + m^2} \right] - \Lambda \sqrt{fl + m^2} e^{2\psi} = \frac{lA^2 - 2mAB - fB^2}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(f'l' + mm')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] - \Lambda \sqrt{fl + m^2} e^{2\psi} = \frac{(lA^2 + fB^2)}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(m'l - ml')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] = -2 \frac{(lAB - mB^2)}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(m'f - mf')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] = -2 \frac{(mA^2 + fAB)}{\sqrt{fl + m^2}}. \quad (3.14)$$

Bu denklemler, $\Lambda = 0$ durumu için elde edilen alan denklemleriyle benzerlik göstermektedir. Bu nedenle ilk bölümde takip edilen adımlar kullanılmış, $u = f/l$ ve $v = m/l$ dönüşümleri uygulanmış, u ve v arasında

$$v = au + b \quad (3.15)$$

şeklinde bir lineerlik olduğu kabul edilerek

$$u + v^2 = \frac{fl + m^2}{l^2} \quad (3.16)$$

olmak üzere denklemler elde edilmiştir.

A ve B arasındaki (2.85) bağıntısı ile, $u + v^2$ için (2.76) bağıntılarının değişmediği görülür:

$$aA^2 + AB - bB^2 = 0 \quad (3.17)$$

$$\mu = \pm \sqrt{1 + 4ab} \quad (3.18)$$

$$A_{1,2} = -\frac{B}{2a}(\mu + 1) \quad (3.19)$$

$$au^2 + (2ab + 1)u + b^2 \quad (3.20)$$

$$u_1 = -\frac{(\mu - 1)^2}{4a^2} \quad (3.21)$$

$$u_2 = -\frac{(\mu + 1)^2}{4a^2}. \quad (3.22)$$

Çözülmesi gereken denklem sistemi u ve $\sqrt{fl + m^2}$ cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{u' \sqrt{fl + m^2}}{u + v^2} \right] = 4 \frac{(A^2 + uB^2)}{\sqrt{u + v^2}} \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\psi' \sqrt{fl + m^2} \right] - \Lambda \sqrt{fl + m^2} e^{2\psi} = \frac{(A^2 - 2vAB - uB^2)}{\sqrt{u + v^2}} \quad (3.24)$$

$$\frac{\sqrt{fl + m^2}''}{\sqrt{fl + m^2}} = 2\Lambda e^{2\psi} \quad (3.25)$$

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)}. \quad (3.26)$$

(3.23)-(3.26) denklemlerinin $\mu = 0$ ve $\mu \neq 0$ için iki farklı çözümü vardır.

3.1.1 $\mu = 0$ Çözümü

Daha önce elde edilen μ , $A_{1,2}$, u_1 , u_2 ifadeleri $\mu = 0$ için

$$b = -\frac{1}{4a} \quad (3.27)$$

$$A = -\frac{B}{2a} \quad (3.28)$$

$$u_1 = u_2 = -\frac{1}{4a^2} \quad (3.29)$$

şeklindedir.

(3.23)-(3.26) denklem grubu $\mu = 0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{u' \sqrt{fl+m^2}}{(au + \frac{1}{4a})^2} \right] = \frac{4B^2}{a} \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\psi' \sqrt{fl+m^2} \right] = \Lambda \sqrt{fl+m^2} e^{2\psi} \quad (3.31)$$

$$\sqrt{fl+m^2}'' = 2\Lambda \sqrt{fl+m^2} e^{2\psi} \quad (3.32)$$

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl+m^2)}. \quad (3.33)$$

Yukarıdaki denklemlerden (3.32), denklem (3.31)'de yerleştirilerek elde edilen

$$\frac{1}{2} \sqrt{fl+m^2}'' = \frac{d}{dr} \left[\psi' \sqrt{fl+m^2} \right] \quad (3.34)$$

diferansiyel denklemi integre edildiğinde, ψ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \sqrt{fl+m^2} + \int \frac{c_1 dr}{\sqrt{fl+m^2}} + c_2. \quad (3.35)$$

Diğer yandan, (3.30) denklemi iki kez integre edildiğinde ve bölüm 2.2.1'de olduğu gibi sağ yanı $-\xi$ 'ye eşit olacak şekilde bir ξ

$$\xi = a \left[\int \frac{(\frac{4B^2 r}{a} + c_3)}{\sqrt{fl+m^2}} dr + c_4 \right] \quad (3.36)$$

fonksiyonu tanımlandığında, integral sonucunda

$$\frac{1}{au + \frac{1}{4a}} = -a \left[\int \frac{(\frac{4B^2 r}{a} + c_3)}{\sqrt{fl+m^2}} dr + c_4 \right] = -\xi \quad (3.37)$$

elde edilir. Yine bir önceki bölümde olduğu gibi, yukarıdaki ifade yardımıyla u , v , f , l ve m , ξ fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u = -\frac{1}{\xi a} - \frac{1}{4a^2} \quad (3.38)$$

$$v = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2a} \quad (3.39)$$

$$l = -\xi r \quad (3.40)$$

$$f = \frac{r}{a} \left(1 + \frac{\xi}{4a} \right) \quad (3.41)$$

$$m = r \left(1 + \frac{\xi}{2a} \right). \quad (3.42)$$

Diğer yandan, ψ'' 'in (3.33) ifadesinde f , l ve m yerine (3.38) ile verilen $f(\xi)$, $l(\xi)$ ve $m(\xi)$ yerleştirildiğinde ve yazım kolaylığı açısından

$$h(r) = \sqrt{fl + m^2} \quad (3.43)$$

şeklinde bir h fonksiyonu tanımlanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\psi'' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} = \frac{h'^2}{h^2}. \quad (3.44)$$

ψ' 'nin (3.35) ifadesinde $c_1 = 0$ alınarak iki kez türevi alındığında ise aşağıdaki gibi bir denklem elde edilir:

$$\psi'' = \frac{h''h - h'^2}{2h^2}. \quad (3.45)$$

ψ'' 'in yukarıda elde edilen iki ifadesi birbirine eşitlenerek h fonksiyonu için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$h''h = \frac{3}{2}h'^2. \quad (3.46)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$h = \sqrt{fl + m^2} = \left(\frac{1}{c_5 - c_6 r} \right)^2. \quad (3.47)$$

Bulunan h ifadesi ve ξ fonksiyonunun denklem (3.36)'da verilen ifadesi yardımıyla ξ , aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\xi = c_4 + (6B^2c_5^2 + ac_3c_5^2)r - (8B^2c_5c_6 + ac_3c_5c_6)r^2 + \left(\frac{1}{3}ac_3c_6^2 + 3B^2c_6^2\right)r^3. \quad (3.48)$$

ξ ifadesi alan denklemlerinde yerleştirildiğinde katsayılar $c_5 = 0$ ve $c_5 \neq 0$ için iki farklı çözüm grubu olduğu görülür.

3.1.1.1 $c_5 = 0$ çözümü

Denklem (3.48) ile verilen ξ ve denklem (3.47) ile verilen h fonksiyonları (3.30), (3.31), (3.32) ve (3.33) alan denklemlerinde yerleştirilerek, ve $c_5 = 0$ için $c_6 = -\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ bulunur. Alan denklemlerinin çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$fl + m^2 = h^2 = \frac{9}{\Lambda^2 r^4} \quad (3.49)$$

$$\xi = c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r) \quad (3.50)$$

$$u = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4a^2} \quad (3.51)$$

$$v = -\frac{a}{\xi} - \frac{1}{2a} \quad (3.52)$$

$$l = -\xi \frac{3}{\Lambda r^2} \quad (3.53)$$

$$f = \frac{3}{a\Lambda r^2} \left(1 + \frac{\xi}{4a}\right) \quad (3.54)$$

$$m = \frac{3}{\Lambda r^2} \left(1 + \frac{\xi}{2a}\right) \quad (3.55)$$

$$e^\psi = \sqrt{\frac{3}{\Lambda r^2}}. \quad (3.56)$$

Çözümler metrikte yerleştirildiğinde ds^2 aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{3}{\Lambda ar^2} \left(1 + \frac{c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r)}{4a}\right) dt^2 \\ & + 6\frac{\sqrt{3}}{a\Lambda r^2} \left(1 + \frac{c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r)}{2a}\right) dt d\phi \\ & - \frac{3}{\Lambda r^2} dr^2 \\ & - \frac{3}{\Lambda r^2} dz^2 \\ & + \frac{3}{\Lambda r^2} \left(c_4 + \frac{1}{9}\Lambda r^3(ac_3 + 3B^2r)\right) d\phi^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.1.1.2 $c_5 \neq 0$ çözümü

Alan denklemlerinde, $c_5 \neq 0$ için elde edilen çözümler yerleştirildiğinde ise denklemlerin ancak $B = 0$ için sağlandığı görülmüştür. Bu çalışmada kullanılan elektromanyetik alan tensörü F^{ab} 'lerin tüm bileşenleri A ve B 'ye bağlıdır ve f , l , m arasında lineerlik olduğu varsayımının sonucu olarak A ve B fonksiyonları da bir önceki bölümde denklem (2.88)'de de verildiği gibi

$$A_{1,2} = -\frac{B}{2a}(\mu + 1)$$

şeklinde birbirleriyle orantılıdır. Dolayısıyla, $B = 0$ olması $A = 0$ olması sonucunu doğurur. Bunun sonucu olarak T^b_a 'nin tüm bileşenleri sıfırdır. Özetlemek gerekirse,

elde edilen $c_5 \neq 0$ çözümü bir elektro-vakum çözümü olmayıp, vakum çözümüdür:

$$\xi = c_4 + ac_3c_5^2r - ac_3c_5c_6r^2 + \frac{1}{3}ac_3c_6^2r^3 \quad (3.58)$$

$$u = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4a^2} \quad (3.59)$$

$$v = -\frac{a}{\xi} - \frac{1}{2a} \quad (3.60)$$

$$l = -\xi \frac{3}{\Lambda r^2} \quad (3.61)$$

$$f = \frac{3}{a\Lambda r^2} \left(1 + \frac{\xi}{4a} \right) \quad (3.62)$$

$$m = \frac{3}{\Lambda r^2} \left(1 + \frac{\xi}{2a} \right) \quad (3.63)$$

$$e^\psi = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{c_6}{c_5 - c_6 r}. \quad (3.64)$$

Çözümler metrikte yerleştirildiğinde, aşağıdaki gibi tanımlanan bir $U(r)$ fonksiyonu yardımıyla

$$U(r) = c_4 + ac_3c_5^2r - ac_3c_5c_6r^2 + \frac{1}{3}c_6^2r^3 \quad (3.65)$$

ds^2 aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{12a + 3U(r)}{12a^2(c_5 - c_6r)^2} dt^2 + \frac{6a + 3U(r)}{3a(c_5 - c_6r)^2} dt d\phi \\ & - \frac{3}{\Lambda} \frac{c_6}{c_5 - c_6r} dr^2 - \frac{3}{\Lambda} \frac{c_6}{c_5 - c_6r} dz^2 \\ & + \frac{U(r)}{(c_5 - c_6r)^2} d\phi^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.2 $k \neq 0$ İçin Einstein Alan Denklemleri

Bu bölümde, bir önceki bölümde incelenen metriğin dr^2 bileşenine $e^{2k(r)}$ çarpanı eklenerek elde edilen

$$ds^2 = f dt^2 - e^{2\psi} (e^{2k} dr^2 + dz^2) + 2md\phi dt - ld\phi^2 \quad (3.67)$$

metriği incelenerek $fl + m^2 = r^2$ şeklindeki Lewis yöntemine uygun çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Metriğin determinanı

$$g = -e^{4\psi+2k} (fl + m^2) \quad (3.68)$$

şeklinde olup, Christoffel sembolleri, (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rt}^t &= \frac{f'l + mm'}{2(fl + m^2)} \\
\Gamma_{\phi r}^t &= \frac{m'l - ml'}{2(fl + m^2)} \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}e^{-(k+2\psi)} f' \\
\Gamma_{rr}^r &= \psi' + \frac{k'}{2} \\
\Gamma_{zz}^r &= -e^{-k} \psi' \\
\Gamma_{\phi t}^r &= \frac{1}{2}e^{-(k+2\psi)} m' \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2}e^{-(k+2\psi)} l' \\
\Gamma_{zr}^z &= \psi' \\
\Gamma_{tr}^\phi &= \frac{f'm - fm'}{2(fl + m^2)} \\
\Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{fl' + mm'}{2(fl + m^2)}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

yukarıdaki gibi elde edilmiştir. Christoffel sembolleri kullanılarak ve bir önceki bölümdeki adımlar takip edilerek Ricci skaleri R

$$R = e^{-2(\psi+k)} \left[2\psi'' - 2\psi'k' - \frac{f'l' + m'^2}{2(fl + m^2)} - k' \frac{(fl + m^2)'}{fl + m^2} + 2 \frac{\sqrt{fl + m^2}''}{\sqrt{fl + m^2}} \right] \tag{3.70}$$

ve $(1, 1)$ formunda Einstein tensörleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
G^t_t &= e^{-2(k+\psi)} \left[-\psi'' + k'\psi' + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} + \frac{k'(fl' + mm')}{2(fl + m^2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{fl' + mm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$G^r_r = e^{-2(k+\psi)} \left[-\psi' \frac{(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} - \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} \right] \tag{3.72}$$

$$G^z_z = e^{-2(k+\psi)} \left[(\psi' + k') \frac{(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} - \frac{\sqrt{fl + m^2}''}{\sqrt{fl + m^2}} \right] \tag{3.73}$$

$$G^\phi_\phi = e^{-2(k+\psi)} \left[-\psi'' + k'\psi' + \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} + \frac{k'(f'l + mm')}{2(fl + m^2)} - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'l + mm'}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right] \quad (3.74)$$

$$G^t_\phi = e^{-2(k+\psi)} \left[-k' \frac{(m'l - ml')}{2(fl + m^2)} + \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{(m/l)l^2}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right] \quad (3.75)$$

$$G^\phi_t = e^{-2(k+\psi)} \left[k' \frac{(m'f - mf')}{2(fl + m^2)} - \frac{1}{2\sqrt{fl + m^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{(m/f)f^2}{\sqrt{fl + m^2}} \right) \right]. \quad (3.76)$$

Elektromanyetik alan tensörleri, bir önceki bölümde incelenen (2.1) metriğine ait, (2.32)'de verilen F^{ab} bileşenleriyle aynı bileşenlere sahiptir:

$$\begin{aligned} F^{\phi r} &= -F^{r\phi} = \frac{A}{\sqrt{-g}} \\ F^{tr} &= -F^{rt} = \frac{B}{\sqrt{-g}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Enerji momentum tensörlerinin metriğe eklenen e^{2k} faktöründen etkilenmediği, (2.38)-(2.42) ile aynı olduğu görülür:

$$T^t_t = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{lA^2 + fB^2}{fl + m^2} \quad (3.78)$$

$$T^r_r = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{-lA^2 + 2mAB + fB^2}{fl + m^2} \quad (3.79)$$

$$T^z_z = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{lA^2 - 2mAB - fB^2}{fl + m^2} \quad (3.80)$$

$$T^\phi_\phi = \frac{e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{-(lA^2 + fB^2)}{fl + m^2} \quad (3.81)$$

$$T^t_\phi = \frac{2e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{-lAB + mB^2}{fl + m^2} \quad (3.82)$$

$$T^\phi_t = \frac{2e^{-2\psi}}{8\pi} \frac{mA^2 + fAB}{fl + m^2}. \quad (3.83)$$

Bu nedenle (2.43)'te verilen

$$\begin{aligned} T^t_t &= -T^\phi_\phi \\ T^r_r &= -T^z_z \end{aligned}$$

eşitlikleri bu metrik için de geçerlidir. Kozmolojik sabit varlığında alan denklemleri için (3.3)'te verilen ifade kullanılarak, Einstein tensörleri arasında (2.49) ve (2.50) 'de

elde edilen eşitliklerden farklı olarak

$$G^t_t + G^\phi_\phi + 2\Lambda = 0 \quad (3.84)$$

$$G^r_r + G^z_z + 2\Lambda = 0 \quad (3.85)$$

eşitlikleri olduğu görülür.

Yukarıda elde edilen eşitliklerde, (3.71)-(3.76)'daki Einstein tensörleri yerleştirildiğinde

$$\psi'' - k'\psi' = \frac{f'l' + m'^2}{4(fl + m^2)} \quad (3.86)$$

ve

$$e^{-2(k+\psi)} \left[\frac{k'(fl + m^2)'}{2(fl + m^2)} - \frac{\sqrt{fl + m^2}''}{\sqrt{fl + m^2}} \right] = -2\Lambda \quad (3.87)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden ikincisi, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[e^{-k}\sqrt{fl + m^2}]' = 2\Lambda\sqrt{fl + m^2}e^{k+2\psi}. \quad (3.88)$$

Kozmolojik sabitli alan deklemleri, alan denklemlerinin (3.3) formülünde, (3.71)-(3.76)'da verilen G^a_b tensörleri, (3.78)-(3.83)'te verilen T^a_b tensörleri kullanılarak ve (3.86) ve (3.87)'de elde edilen eşitliklerin de yardımıyla, aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(fl' + mm')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] - \Lambda\sqrt{fl + m^2}e^{k+2\psi} = -e^k \frac{(lA^2 + fB^2)}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.89)$$

$$-\frac{d}{dr} [\psi' e^{-k}\sqrt{fl + m^2}] + \Lambda\sqrt{fl + m^2}e^{k+2\psi} = e^k \frac{-lA^2 + 2mAB + fB^2}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.90)$$

$$\frac{d}{dr} [\psi' e^{-k}\sqrt{fl + m^2}] - \Lambda\sqrt{fl + m^2}e^{k+2\psi} = e^k \frac{lA^2 - 2mAB - fB^2}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.91)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(f'l + mm')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] - \Lambda\sqrt{fl + m^2}e^{k+2\psi} = \frac{e^k(lA^2 + fB^2)}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.92)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(m'l - ml')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] = -2 \frac{e^k(lAB - mB^2)}{\sqrt{fl + m^2}} \quad (3.93)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(m'f - mf')}{2\sqrt{fl + m^2}} \right] = -2 \frac{e^k(mA^2 + fAB)}{\sqrt{fl + m^2}}. \quad (3.94)$$

Yukarıdaki denklemlerden denklem (3.90) ve (3.91)'in aynı olduğu görülür.

Daha önce, $G^t_t + G^\phi_\phi + 2\Lambda = 0$ ve $G^r_r + G^z_z + 2\Lambda = 0$ eşitliklerinden elde edilen elde edilen (3.87) diferansiyel denklemi, bir önceki bölümde $fl + m^2 = r^2$ bağıntısının elde edildiği (2.58) diferansiyel denkleminde eşdeğerdir. Ancak, (2.1) metriğine eklenen e^{2k} çarpanının ve kozmolojik sabit Λ 'nın, $fl + m^2 = r^2$ koşulunu genişlettiği görülür. $fl + m^2$ için r 'ye bağlı genel bir ifade elde edilememekle birlikte, (3.87) eşitliği yardımıyla, $fl + m^2 = r^2$ özel durumunu sağlayan k ve ψ fonksiyonları elde edilerek alan denklemleri çözülecektir. Buna karşın, farklı $fl + m^2$ 'ler için farklı çözüm grupları da elde edilebilir.

Aşağıda,

$$fl + m^2 = r^2 \quad (3.95)$$

yerleştirilerek elde edilen alan denklemleri verilmiştir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(fl' + mm')}{2r} \right] - \Lambda re^{k+2\psi} = -\frac{e^k(lA^2 + fB^2)}{r} \quad (3.96)$$

$$\frac{d}{dr} \left[e^{-k}\psi' r \right] - \Lambda re^{k+2\psi} = \frac{e^k(lA^2 - 2mAB - fB^2)}{r} \quad (3.97)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(f'l + mm')}{2r} \right] - \Lambda re^{k+2\psi} = \frac{e^k(lA^2 + fB^2)}{r} \quad (3.98)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(m'l - ml')}{2r} \right] = -2\frac{e^k(lAB - mB^2)}{r} \quad (3.99)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(m'f - mf')}{2r} \right] = -2\frac{e^k(mA^2 + fAB)}{r}. \quad (3.100)$$

(3.96) - (3.100) denklemlerine bakıldığında $k = 0$ durumu için çözümleri elde edilen alan denklemleriyle benzerlik gösterdikleri görülür. Bu nedenle bölüm 2.2.1'de takip edilen adımlar kullanılarak

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(f/l)'l^2}{r} \right] = 4\frac{(lA^2 + fB^2)}{r} \quad (3.101)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(m/l)'l^2}{r} \right] = 4\frac{(-lAB + mB^2)}{r} \quad (3.102)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k}(m/f)'f^2}{r} \right] = -4\frac{(mA^2 + fAB)}{r} \quad (3.103)$$

$$\frac{d}{dr} \left[e^{-k} \psi' r \right] - \Lambda r e^{k+2\psi} = \frac{e^k (lA^2 - 2mAB - fB^2)}{r} \quad (3.104)$$

$$\psi'' - k' \psi' = \frac{f'l' + m'^2}{4r^2} \quad (3.105)$$

$$\frac{d}{dr} \left[e^{-k} \right] = 2\Lambda r e^{k+2\psi} \quad (3.106)$$

çözülecek olan denklemler yukarıdaki denklem grubudur. İlk üç denklem $k = 0$ denklemleriyle benzerlik gösterdiğinden yine bir önceki bölümde uygulanan $u = f/l$ ve $v = m/l$ dönüşümleri uygulandığında ve u ve v arasında

$$v = au + b \quad (3.107)$$

şeklinde bir lineerlik olduğu kabul edildiğinde,

$$u + v^2 = \frac{r^2}{l^2} \quad (3.108)$$

olmak üzere (3.101)-(3.106) denklemlerine benzer işlemler uygulandığında A ve B arasındaki (2.85) bağıntısı ile, $u + v^2$ için (2.76) bağıntısının değişmediği de göz önüne alınarak

$$aA^2 + AB - bB^2 = 0 \quad (3.109)$$

$$\mu = \pm \sqrt{1 + 4ab} \quad (3.110)$$

$$A_{1,2} = -\frac{B}{2a}(\mu + 1) \quad (3.111)$$

$$au^2 + (2ab + 1)u + b^2 \quad (3.112)$$

$$u_1 = -\frac{(\mu - 1)^2}{4a^2} \quad (3.113)$$

$$u_2 = -\frac{(\mu + 1)^2}{4a^2} \quad (3.114)$$

denklem sistemi u ve r cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dr} \left[e^{-k} \frac{u'r}{u + v^2} \right] = 4 \frac{e^k (A^2 + uB^2)}{\sqrt{u + v^2}} \quad (3.115)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\psi' e^{-k} r \right] - \Lambda r e^{k+2\psi} = \frac{e^k (A^2 - 2vAB - uB^2)}{\sqrt{u + v^2}} \quad (3.116)$$

$$\frac{d}{dr} \left[e^{-k} \right] = 2\Lambda r e^{k+2\psi} \quad (3.117)$$

$$\psi'' - k' \psi' = \frac{f'l' + m'^2}{4r^2} \quad (3.118)$$

(3.115)-(3.118) denklemlerinin $\mu = 0$ ve $\mu \neq 0$ için iki farklı çözümü vardır.

3.2.1 $\mu = 0$ Çözümü

Bir önceki bölümde elde edilen $\mu, A_{1,2}, u_1, u_2$ ifadeleri $\mu = 0$ için

$$b = -\frac{1}{4a} \quad (3.119)$$

$$A = -\frac{B}{2a} \quad (3.120)$$

$$u_1 = u_2 = -\frac{1}{4a^2} \quad (3.121)$$

olup, alan denklemlerinde yerleştirildiğinde (3.115)-(3.118) denklem grubu $\mu = 0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-k} u' r}{(au + \frac{1}{4a})^2} \right] = \frac{4B^2}{a} e^k \quad (3.122)$$

$$\frac{d}{dr} [\psi' e^{-k} r] = \Lambda r e^{k+2\psi} \quad (3.123)$$

$$\frac{d}{dr} [e^{-k}] = 2\Lambda r e^{k+2\psi} \quad (3.124)$$

$$\psi'' - k' \psi' = \frac{f' l' + m'^2}{4r^2}. \quad (3.125)$$

Yukarıdaki denklemlere bakıldığında denklem (3.123) ve denklem (3.124)'ün sağ taraflarının birbirleriyle orantılı olduğu görülür. Bu orantı kullanılarak elde edilen

$$2 \frac{d}{dr} [\psi' e^{-k} r] = \frac{d}{dr} [e^{-k}] \quad (3.126)$$

diferansiyel denklemi çözüldüğünde ψ' ve e^k arasında, c integrasyon sabiti olmak üzere

$$\psi' = \frac{1}{2r} + \frac{c e^k}{2r} \quad (3.127)$$

şeklinde bir bağıntı bulunur. (3.127) ifadesinde $c = 0$ alındığında ψ'

$$\psi' = \frac{1}{2r} \quad (3.128)$$

şeklinde indirgenir ve integre edildiğinde c_1 integrasyon sabiti olmak üzere e^ψ bulunur.

$$e^\psi = c_1 r^{1/2} \quad (3.129)$$

Elde edilen e^Ψ ifadesi denklem (3.124)'te yerleştirilip elde edilen denklem integre edildiğinde c_i 'ler integrasyon sabitleri olmak üzere e^{-k} çözümü bulunur:

$$e^{-k} = \sqrt{\frac{4c_1^2\Lambda}{3}r^3 + c_2}. \quad (3.130)$$

(3.129) ve (3.130) fonksiyonları denklem (3.122)'de yerleştirildiğinde u ve r 'ye bağlı diferansiyel denklem integre edildiğinde çözüm kompleks bir fonksiyon olmaktadır. Ancak alan denklemlerinin çözümlerinin gerçel fonksiyonlar olması gerektiğinden e^k 'nın (3.130) çözümünde $c_2 = 0$ alınarak (3.122)'de yerleştirildiğinde integrasyon sonucu bulunan u fonksiyonu reeldir.

$$\frac{1}{u + \frac{1}{4a^2}} = -\frac{3B^2a}{\Lambda c_1^2}r^{-2} - \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}c_4r^{-3/2} - c_5 \quad (3.131)$$

Bu nedenle e^k fonksiyonu

$$e^k = \frac{1}{2c_1} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} r^{-3/2} \quad (3.132)$$

şeklindedir. Diğer yandan, (3.131)'in sağ yanına

$$\xi = \frac{3B^2a}{c_1^2\Lambda}r^{-2} + \frac{a}{\sqrt{3\Lambda}}\frac{c_2}{c_1}r^{-3/2} + c_3 \quad (3.133)$$

olacak şekilde $-\xi$ denilirse denklem ξ cinsinden yazılarak

$$\frac{1}{u + \frac{1}{4a^2}} = -\xi \quad (3.134)$$

çözümler sırasıyla

$$u = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4a^2} \quad (3.135)$$

$$v = -\frac{a}{\xi} - \frac{1}{2a} \quad (3.136)$$

$$l = -\xi r \quad (3.137)$$

$$f = \frac{r}{a} \left(1 + \frac{\xi}{4a}\right) \quad (3.138)$$

$$m = r \left(1 + \frac{\xi}{2a}\right) \quad (3.139)$$

$$e^k = \frac{1}{2c_1} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} r^{-3/2} \quad (3.140)$$

$$e^\Psi = c_1 \sqrt{r} \quad (3.141)$$

şeklinde ξ cinsinden yazılabilir. Çözümler metriğe yerleştirildiğinde metrik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{r}{4a} \left(4 + c_3 - \frac{c_2}{c\sqrt{3\Lambda}r^{3/2} + \frac{3B^2}{c^2\Lambda r^2}} \right) dt^2 \\
 & + r \left(2 + c_3 - \frac{c_2}{c\sqrt{3\Lambda}r^{3/2} + \frac{3B^2}{c^2\Lambda r^2}} \right) dt d\phi \\
 & - \frac{3}{4\Lambda r^2} dr^2 - c^2 r dz^2 \\
 & + ar \left(c_3 - \frac{c_2}{c\sqrt{3\Lambda}r^{3/2} + \frac{3B^2}{c^2\Lambda r^2}} \right) d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

KAYNAKLAR

- [1] **Som, M.M. ve Santos, N.O.** (1978). Cylindrically Symmetric Stationary Fields in General Relativity, *Revista Brasileira de Física*, **8**(2), 368–375.
- [2] **Datta, B. ve Raychaudhuri, A.** (1968). Stationary Electromagnetic Fields in General Relativity, *J. Math. Phys.*, **9**(10), 1715–1718.
- [3] **Levi-Civita, T.** (1917). *Rend. Acc. Lincei*, **26**(307).
- [4] **Lewis, T.** (1932). Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields, *Proc. R. Soc. Lond.*, **136**(176).
- [5] **van Stockum, W.J.** (1937). *Proc. R. Soc. Edinb.*, **57**, 135–54.
- [6] **Griffiths, J. ve Santos, N.** (2010). A Rotating Cylinder in an Asymptotically Locally Anti-de Sitter Background, *Class. Quantum Grav.*, **27**(125004).
- [7] **Santos, N.** (1993). Solution of the Vacuum Einstein Equations with Nonzero Cosmological Constant for a Stationary Cylindrically Symmetrical Spacetime, *Class. Quantum Grav.*, **10**, 2401–2406.
- [8] **Lemos, J.P. ve Zanchin, V.T.** (1996). Rotating Charged Black Strings and Three-Dimensional Black Holes, *Phys. Rev. D*, **54**(6), 3840–3853.
- [9] **Carroll, S.** (2004). *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley.
- [10] **Hartle, J.B.** (2003). *Gravity - An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley.
- [11] **Tod, K. ve Hughston, L.** (1990). *An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press.
- [12] **Misner, C., Thorne, K. ve Wheeler, J.** (1973). *Gravitation*, W.H. Freeman and Company.
- [13] **Hobson, M., Efstathiou, G. ve Lasenby, A.** (2006). *General Relativity - An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press.

EKLER

EK A.1 : Einstein Alan Denklemleri İçin İşaret Kuralı

EK A.2 : Alan Denklemlerinin Elde Edilmesinde Kullanılan Mathematica Kodu

EK A.3 : Kovaryant Türev İçin Kullanılan Mathematica Kodu

EK A.1

Einstein Alan Denklemleri İçin İşaret Kuralı

Literatürde, Einstein alan denklemlerinin işaretlerinin farklılık gösterdiği görülür. Bu farklılığın sebebi denklemlerin türetilmesinde kullanılan metrik $g_{\mu\nu}$, Riemann tensörü $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ ve Ricci tensörü $R_{\mu\nu}$ ifadelerinin işaretlerinin, yazardan yazara farklılık göstermesidir [12]. Literatürdeki $g_{\mu\nu}, R^\mu_{\alpha\beta\gamma}, R_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$ tanımlarının işaretlerinin tüm farklı kombinasyonları incelenerek (S_1, S_2, S_3) işaretleri cinsinden sınıflandırılabilceği ve aşağıda verilen kurala uydukları görülmüştür [13, p. 193].

$$g_{\mu\nu} = [S_1] \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (\text{A.1})$$

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = [S_2] \left(\Gamma^\mu_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\sigma_{\gamma\alpha} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$G_{\mu\nu} = [S_3] \cdot \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$$R_{\mu\nu} = [S_2][S_3] R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{A.4})$$

Yukarıdaki denklemlere bakıldığında, $T_{\mu\nu}$ 'nin işaretinin $+$ alındığı görülür. Bunun sebebi tüm yazarların $T_{\mu\nu}$ işareti için

$$T_{00} > 0 \quad (\text{A.5})$$

olacak şekilde hemfikir olmalarıdır [12].

Bu çalışmada $(-, +, +)$ kullanılmıştır.

EK A.2

Alan Denklemlerinin Elde Edilmesinde Kullanılan Mathematica Kodu

```

Clear[coord, n, t, r, z, ϕ, g, gg, δ, gcontrevariant, gc, CS, RT, RRT, RS,
  GM, T, TM, F, FC]

n = 4;
coord = {t, r, z, ϕ};

δi,j := IdentityMatrix[n][[i, j]];

g := {{f[r], 0, 0, m[r]}, {0, -e^(2 ψ[r] + 2 KK[r]), 0, 0}, {0, 0, -e^(2 ψ[r]), 0},
  {m[r], 0, 0, -p[r]}};
gcontrevariant := Inverse[g]

gμ,ν := g[[μ, ν]];

gcμ,ν := gcontrevariant[[μ, ν]] ;

gg := Simplify[Det[g]]

CS[i_, j_, k_] := Simplify[ $\sum_{s=1}^n \frac{1}{2} g_{i,s} (\partial_{coord[[j]]} g_{k,s} + \partial_{coord[[k]]} g_{j,s} - \partial_{coord[[s]]} g_{j,k})$ ]

RRT[i_, j_, k_, l_] :=
  Simplify[
    (
      ∂coord[[k]] CS[i, j, l] - ∂coord[[l]] CS[i, j, k] +
       $\sum_{s=1}^n (CS[i, s, k] CS[s, j, l] - CS[s, j, k] CS[i, s, l])$ 
    )
  ]

RTi,j := Simplify[ $\sum_{s=1}^n RRT[s, i, s, j]$ ]

Do[RM[i, j] = Simplify[Sum[RTj,k gck,i, {k, 1, n}]], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
Do[If[RM[i, j] == 0, ,
  Print[StringForm["RM[~,~]-> R~~ = ~", i, j, j, i, RM[i, j]]],
  {i, 1, n}, {j, 1, n}]

RS = Simplify[ $\sum_{s=1}^n \sum_{\rho=1}^n g_{s,\rho} RT_{s,\rho}$ ];

```

```

GM[μ-, ν-] := Simplify[RM[μ, ν] - (1/2) * RS * δμ,ν]

FF := {{0, B/√-gg, 0, 0}, {-B/√-gg, 0, 0, -A/√-gg}, {0, 0, 0, 0},
      {0, A/√-gg, 0, 0}}
(* Fμν *)
FCμ-, ν- := FF[[μ, ν]];
(* Fμν *)

Fμ-, ν- := FullSimplify[Sumλ=1n Sumσ=1n FCλ,σ * gλ,μ * gσ,ν]

TM[μ-, ν-] := FullSimplify[1/(4π) (Suma=1n (FCμ,a * Fa,ν) - Sumb=1n Suma=1n ((1/4) * δμ,ν * FCa,b * Fb,a))]

eq[μ-, ν-] := Simplify[GM[μ, ν] + 8π * TM[μ, ν]]

eqΛ[μ-, ν-] := Simplify[eq[μ, ν] - Λ * δμ,ν]

Do[gci,j = gci,j, {i, 1, n}, {j, 1, n}]

Do[CS[i, j, k] = CS[i, j, k], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]
Do[RRT[i, j, k, l] = RRT[i, j, k, l], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}]
Do[RTi,j = RTi,j, {i, 1, n}, {j, 1, n}]

RS;

Do[GM[i, j] = GM[i, j], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
Do[Fi,j = Fi,j, {i, 1, n}, {j, 1, n}]
Do[TM[i, j] = TM[i, j], {i, 1, n}, {j, 1, n}]

Do[If[TM[i, j] === 0, ,
  Print[StringForm["TM[`,`] -> T`` = `", i, j, j, i, TM[i, j]]],
  {i, 1, n}, {j, 1, n}]
Do[If[GM[i, j] === 0, ,
  Print[StringForm["GM[`,`] -> G`` = `", i, j, j, i, GM[i, j]]],
  {i, 1, n}, {j, 1, n}]

Do[If[TM[i, j] === 0 && GM[i, j] === 0, ,
  Print[StringForm["eq[`,`] -> denk`` : `` = `", i, j, j, i, GM[i, j],
    8π * TM[i, j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]

Do[If[TM[i, j] === 0 && GM[i, j] === 0, ,
  Print[StringForm["eq[`,`] -> denk`` : `` = `", i, j, j, i,
    GM[i, j] - Λ * δi,j, 8π * TM[i, j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]

TimeUsed[]
9.8009

```

EK A.3

Kovaryant Türev İçin Kullanılan Mathematica Kodu

```

Clear[coord, n, t, r, z, ϕ, g, gg, δ, gcontrevariant, gc, CS, RT, RRT,
  RS, GM, Δ]

n = 4;
coord = {t, r, z, ϕ};

δi,j := IdentityMatrix[n][[i, j]];

g := {{f[r], 0, 0, m[r]}, {0, -e^(2 ψ[r]), 0, 0}, {0, 0, -e^(2 ψ[r]), 0},
  {m[r], 0, 0, -p[r]}};
gcontrevariant := Inverse[g]

gμ,ν := g[[μ, ν]];

gcμ,ν := gcontrevariant[[μ, ν]] ;

gg := Simplify[Det[g]]

FF := {{0, B[r]/√-gg, 0, 0}, {-B[r]/√-gg, 0, 0, -A[r]/√-gg},
  {0, 0, 0, 0}, {0, A[r]/√-gg, 0, 0}};

(* CS[i,j,k]= Γijk *)
CS[i_, j_, k_] :=
  Simplify[∑s=1n 1/2 gCi,s (∂coord[[j]] gk,s + ∂coord[[k]] gj,s - ∂coord[[s]] gj,k)]

Do[CS[i, j, k]; If[CS[i, j, k] == 0, ,
  Print[StringForm["CS[~,~,~]-> Γ~~ = ~", i, j, k, j, k, i,
    CS[i, j, k]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}]

```

```

(*covariant derivative  $\nabla_i F^{ij}$  *)

covariantderivativeF[j_] :=
FullSimplify[

$$\sum_{i=1}^n \left( \partial_{\text{coord}[[i]]} FF[[i, j]] + \sum_{s=1}^n CS[i, i, s] * FF[[s, j]] + \right.$$


$$\left. \sum_{s=1}^n CS[j, i, s] * FF[[i, s]] \right)$$

Do[covariantderivativeF[j];
If[covariantderivativeF[j] == 0, ,
Print[StringForm["covariantderivativeF[``]-> ( $\nabla_i F^{i``}$ ) = `` ",
j, j, covariantderivativeF[j]]], {j, 1, n}]

covariantderivativeF[1]-> ( $\nabla_i F^{i1}$ ) = -  $\frac{B'[r]}{\sqrt{e^{4\psi[r]} (m[r]^2 + f[r] p[r])}}$ 

covariantderivativeF[4]-> ( $\nabla_i F^{i4}$ ) = -  $\frac{A'[r]}{\sqrt{e^{4\psi[r]} (m[r]^2 + f[r] p[r])}}$ 

```


ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Nimet Duygu Güran

Doğum Yeri ve Tarihi: İzmit, 07.01.1981

E-Posta: gurann@itu.edu.tr

Lisans: Fizik Mühendisliği, İTÜ