

T.C.  
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER İNTEGRO DİFERANSİYEL FARK  
DENKLEMLERİN BERNOULLİ POLİNOM  
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜL GÖZDE BIÇER

AĞUSTOS 2014

MUĞLA

**T.C.**  
**MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**LİNEER İNTEGRO DİFERANSİYEL FARK**  
**DENKLEMLERİN BERNOLLİ POLİNOM ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÜL GÖZDE BİÇER**

**AĞUSTOS 2014**

**MUĞLA**

**MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**TEZ ONAYI**

**GÜL GÖZDE BİÇER** tarafından hazırlanan **LİNEER İNTEGRO DİFERANSİYEL FARK DENKLEMLERİN BERNOULLİ POLİNOM ÇÖZÜMLERİ** başlıklı tezinin, 05/08/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

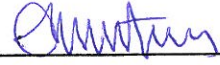
---

**TEZ SINAV JURİSİ**

Doç. Dr. Dursun AYDIN (**Jüri Başkanı**)

İstatistik Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Prof. Dr. Mustafa GÜLSU (**Danışman**)

Matematik Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Doç. Niyazi ŞAHİN (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



---

**ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI**

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

Matematik Anabilim Dalı Başkanı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

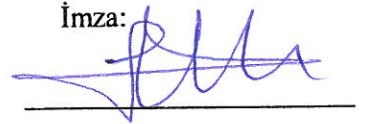
İmza:



Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Savunma Tarihi: 05/08/2014

---

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Gül Gözde BİÇER

05/08/2014



**ÖZET**  
**LİNEER İNTEGRO DİFERANSİYEL FARK DENKLEMLERİN**  
**BERNOULLİ POLİNOM ÇÖZÜMLERİ**

Gül Gözde BİÇER

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Ağustos 2014, 65 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiş ve ikinci bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan kavramlar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, lineer ve integro diferansiyel fark denklemlerini çözmek için "Bernoulli Polinomları'nın Kullanılması" yöntemi sunulmuştur. Dördüncü bölümde sunulan bu yöntem yardımıyla bahsedilen tip denklemler için örnekler çözülmüş, bu örneklerin hata analizleri yapılmıştır. Beşinci bölümde de örneklerin hata analizlerinin incelenmesi ile yöntemin kullanılabilir olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Bernoulli Polinomları, Diferansiyel Denklemler, İntegro-Diferansiyel Denklemler, Fark Denklemleri, İntegro-Diferansiyel Fark Denklemleri, Bernoulli Sıralama Yöntemi

**ABSTRACT**  
**BERNOULLI POLYNOMIAL SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRO  
DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS**

Gül Gözde BİÇER

Master of Science (M.Sc.)  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU  
August 2014, 65 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to introduction and second chapter is necessary definitions which will be needed for later use. Original results are contained third and fourth chapter. In the third chapter, a new method called “Bernoulli Collocation Method” for the Bernoulli polynomial solutions of linear differential, integro-differential, linear differential difference and integro-differential difference equations are presented. In the fourth chapter, examples of these kind of equations are solved, error analysis is done and graphics are drawn. In the fifth chapter we conclude that this method works good.

**Anahtar Kelimeler:** Bernoulli Polynomials, Differential Equations, Integro Differential Equations, Difference Equation, Integro-Differential Difference Equations, Bernoulli Collocation Method

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında bana yol gösteren, katkılarını benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof.Dr. Mustafa GÜLSU'ya, çalışma boyunca bilgi ve yardımlarını eksik etmeyen değerli Öğr.Gör. Yalçın ÖZTÜRK'e ve Arş.Gör. Ayşe ANAPALI'ya, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına, çalışma arkadaşlarıma ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
SEMBOLLER DİZİNİ .....	xi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Tarihi Gelişim .....	1
1.2. Problemin Tanıtılması .....	4
<b>2. KAYNAK ÖZETLERİ .....</b>	<b>5</b>
2.1. Bernoulli Polinomunun Temel Özellikleri.....	5
2.2. Bernoulli Polinomlarının Bağlılıkları.....	7
2.2.1. Türev ve integral bağıntıları .....	7
2.2.2. Fark bağıntıları.....	7
2.2.3. Tamamlayıcı eleman bağıntısı.....	8
2.2.4. Ekleme formülü .....	8
2.2.5. Simetrikler .....	8
2.2.6. Çarpım bağıntıları .....	9
2.2.7. Fourier seri bağıntısı .....	9
2.2.8. Ters dönüşüm bağıntısı .....	9
2.2.9. Falling factorial bağıntısı.....	10
2.2.10. Diğer bağıntılar .....	10
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM .....</b>	<b>11</b>
3.1. Bernoulli Sıralama(collocation) Yöntemi.....	11
3.1.1. Lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri için Bernoulli sıralama yöntemi.....	11
3.1.2. Lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri için Bernoulli sıralama yöntemi .....	18
3.1.3. Lineer diferansiyel fark denklemlerin çözümü için Bernoulli sıralama yöntemi .....	22
3.1.4. Lineer Fredholm integro-diferansiyel fark denklemlerin çözümü için Bernoulli sıralama yöntemi .....	26

3.2. Çözümün Kontrolü ve Hata Hesabı .....	28
<b>4. BULGULAR VE İRDELEME .....</b>	<b>30</b>
4.1. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları.....	30
4.2. Lineer Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları .....	40
4.3. Lineer Diferansiyel Fark Denklemlerin Uygulamaları .....	48
4.4. Lineer Fredholm İntegro-Diferansiyel Fark Denklemlerin Uygulamaları .....	56
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>	<b>62</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>64</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>65</b>

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Örnek 4.1.2'nin nümerik sonuçları.....	35
Çizelge 4.2. Örnek 4.1.3'ün nümerik sonuçları.....	39
Çizelge 4.3. Örnek 4.2.1'ün nümerik sonuçları.....	44
Çizelge 4.4. Örnek 4.2.2'in nümerik sonuçları.....	47
Çizelge 4.5. Örnek 4.3.1'nin nümerik sonuçları.....	52
Çizelge 4.6. Örnek 4.3.2'nin nümerik sonuçları.....	55
Çizelge 4.7. Örnek 4.4.1'in nümerik sonuçları.....	60

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.1.2'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.2. Örnek 4.1.3'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	40
Şekil 4.3. Örnek 4.2.1'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	45
Şekil 4.4. Örnek 4.2.2'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	48
Şekil 4.5. Örnek 4.3.1'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	53
Şekil 4.6. Örnek 4.3.2'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	56
Şekil 4.7. Örnek 4.4.1'in tam çözüm ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	61

## SEMBOLLER DİZİNİ

$K(x, t)$	Fredholm Çekirdek Matrisi
$B_n(x)$	Bernoulli Polinomu
$P_k(x)$	Diferansiyel Denklemin Katsayı Matrisi
$x_i$	Sıralama Noktaları
$N$	Kesme Sınırı
$E(x_i)$	$x_i$ Noktası İçin Hata

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Tarihi Gelişim

Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları, uygulamalı matematiğin birçok alanında, özellikle sayısal çözümlene, fark denklemleri ve toplamların asimtotik analizinde kullanılmaktadır. Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayılarının aynı zamanda istatistik bilminde de birçok önemli ve yararlı uygulamaları vardır. Örneğin stirling yaklaşımı en önemli uygulamalarından biridir.

Bernoulli polinomlarından ilk olarak “Ars Conjectandi” çalışmasında Jakob Bernoulli tarafından bahsedilmiştir. Fakat Polinomlara Bernoulli adını Jakob Bernoulli'nin ölümünden sonra Euler vermiştir.



Jakob Bernoulli(1654 - 1705, Basel)

Bernoulli ailesi, üstün zekâlı soylarının geçmişleri genetikçiler tarafından uzun uzun incelenmiştir. Üç veya dört nesilde sekiz on tane üstün zekâlı matematikçi çıkaran, içlerinden birçoğu hukukta, bilginlikte, sanatta, edebiyatta ve idari alanlarda gerçek bir üstünlük gösteren Bernoulli ailesi gerçekten incelenmeye değerdir.

Bernoulli ailesi, diferansiyel ve integral hesabının gelişmesinde, uygulanmaya konulmasında ve tüm Avrupa'ya yayılmasında en önde yer almışlardır. Gerçekten Bernoulli'ler ile Euler diğerlerini bastırarak integral ve türevi çok ileriye götürmüşlerdir.

Jakob Bernoulli 27 Aralık 1654'te İsviçre'nin Basel kentinde doğmuştur. Annesi Margaretha Bernoulli, babası Nicolaus Bernoulli'dir.

Bernoulli soyunun kurucusu, Basel'in en eski ailelerinden biri ile birleşip büyük bir tüccar olmuştur. Jakob Bernoulli'nin babası Nicolaus Bernoulli de babası ve dedesinin mesleğini devam ettirmiştir. Nicolau Bernoulli, Basel'de Belediye meclisinde ve şehirde önemli birisidir. Jakob Bernoulli'nin annesi de banker ve meclis üyesi önemli bir Basel ailesinin üyesidir. Jakob Bernoulli, Johann(Jean) Bernoulli'nin ağabeyi ve Daniel Bernoulli'nin amcasıdır.

Jakob Bernoulli, ailesi tarafından psikoloji ve din bilimi alanında çalışmaya zorlanmıştır. Jakob Bernoulli buna çok üzülmüş ama yine de Basel Üniversitesi'nden 1671'de mastır derecesiyle psikoloji bölümünden mezun olmuştur ve 1676'da din biliminde de öğrenimini tamamlamıştır. Jakob Bernoulli ailesinin karşı çıkmasına rağmen matematik ve astronomiyle ilgilenmiştir. Jakob Bernoulli'den önce Bernoulli ailesi pek matematikle ilgilenmemiştir ama Jakob Bernoulli'den sonra herkes matematik ve matematiksel fizik ile ilgilenmiştir.

1676'da Din bilimindeki derecesini aldıktan sonra Jakob Bernoulli asistan olarak çalışmak üzere Geneva'ya gitmiştir. Sonra oradan Fransa'ya gidip iki yıl boyunca Malebranche'nin önderliğinde Descartes'in öğrencileriyle çalışmıştır. Daha sonra 1681'de Hollanda'ya gitmiş ve içinde Hudde'nin de olduğu birçok matematikçiyle tanışmıştır. Sonraları çalışmaları matematikçilere ve Avrupadaki bilim adamlarına önderlik etmiştir. Bernoulli, astronomiye de çok ilgi duymuş ve kuyruklu yıldız ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

Jakob Bernoulli, İsviçre'ye geri dönmüş ve 1683'ten itibaren Basel Üniversitesi'nde mekanik alanında ders vermeye başlamıştır. Bu dönemde Descartes'in "Geometrie" adlı çalışmasının da içinde bulunduğu geometri çalışmasına önderlik yapmış, bu çalışmalar sırasında sonsuz küçükler geometrisine ilgi duymaya başlamıştır.

Jakob Bernoulli birçok önemli olayları ilgilendiren matematiksel çalışmaları, genç kardeşi Johann Bernoulli'nin matematik üzerine çalışmaya başlamasından sonra ortaya çıkmıştır. Johann Bernoulli doktordu fakat ağabeyi Jakob Bernoulli tarafından Leibniz'in diferansiyel hesabına çalıştırıldı ve Leibniz'in teorisinin uygulamalarını ilk anlamaya çalışanlar Bernoulli kardeşler olmuştur.

Jakob ve Johann kardeşler benzer problemler üzerinde çalışmışlar. Onlar iki kardeş olmalarına rağmen kısa sürede birbirine rakip olan iş ortaklarına dönüşmüşlerdir.

Jakob Bernoulli, Leibniz tarafından ortaya atılan diferansiyel ve integral hesabının şeklini incelemiştir. Jakob Bernoulli, Newton ve Leibniz'in bıraktığı bu hesabı daha ileri götürerek sonu zor ve önemli uygulamalarına yönlendirenlerin başında gelir. Analitik geometri, olasılıklar kuramı ve değişimler hesabına ait buluşları çok değerlidir. Bu değişimler ile ilgili problemlerin üzerinde daha sonra Euler, Lagrange ve Hamilton da durmuştur. Fermat'ın minimum zaman problemi bu değişimle çözülebilen türlerden biridir. Aslında değişim probleminin doğuşu çok eskidir. Söylentiye göre, Kartaca şehri kurulduğu zaman adam başına bir sabahın bir günde sürebileceği kadar alanda toprak verilmişti. Adamın bir günde süreceği çizginin uzunluğu bilindiğine göre en büyük alanı elde etmek için sabahın izinini şekli ne olmalıdır? Ya da matematiksel bir dille söylersek, çevre uzunlukları aynı olan şekillerden maksimum alanlısı hangisidir? Yanıt, çemberle çevrili bir dairedir. Bu da analizde ünlü maksimum ve minimum problemidir. İşte Jakob bu problemi çözmüş ve genellemiştir. Sikloidin en çabuk iniş eğrisi olduğu Jakob ve Johann kardeşler tarafından 1697'de başka bilginlerle hemen hemen aynı zamanda bulunmuştur. Jakob Bernoulli'nin ölümünden sonra 1713'te içinde Bernoulli polinomları, Bernoulli sayıları ve olasılık kuramının bulunduğu "Ars Conjectandi" adlı büyük eseri yayınlanmıştır.

Jakob Bernoulli, diferansiyel ve integral hesaba ait çalışmasında çok ileri sonuçlar bulmuştur. Leibniz'in yaptığı çalışmalar üzerinde devam ederek zincir eğrisi problemi ile uğraşmıştır.

Bu problem bugün için geçerli olan asma köprüler, telefon telleri ve yüksek gerilim telleri problemidir. O devirde yeni ve zor olan bu problem şimdi oldukça kolay ve uygulaması çok olan mekanik problemidir.

Bernoulli, üzerinde çok çalıştığı ve birçok yönlerini keşfettiği geometrik dönüşümlerin çoğu ile yine kendine benzer şekle giren logaritmik ya da eşit açılı yaya hayran kalmıştır. Mezarına bile bu yayın resminin çizilmesini ve “ Aynı kalarak değişirim. ” yazısının yazılmasını vasiyet etmiş ve 1705 yılında vefat etmiştir.

## 1.2. Problemin Tanıtılması

$m$ . mertebeden değişken katsayılı lineer

$$\sum_{h=0}^J \sum_{k=0}^m P_{hk}(x) y^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = g(x) + \lambda \int_a^b K_f(x,t) y(t) dt \quad (1.1)$$

Fredholm integro-diferansiyel fark denkleminin,  $-\infty < a \leq x, t \leq b < \infty$  aralığında

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \lambda_j, j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (1.2)$$

koşulları altında yaklaşık çözümü incelenecektir. Aranılan çözüm,

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x) \quad (1.3)$$

şeklinde Bernoulli polinomları cinsinden, kesilmiş Bernoulli serisi formunda olacaktır. Bu amaçla diferansiyel, integral ve integro diferansiyel denklemlerin çözümü için verilen Taylor sıralama yöntemi geliştirilerek (Gülsu vd. 2005, Gülsu vd. 2005; Karamete vd. 2002, Sezer vd. 2005, Sezer vd. 1996, Gülsu vd. 2005) “Bernoulli Sıralama Yöntemi” ile (1,1) denklemi (1,2) koşulu altında çözülecektir.

Burada (1.1) denklemi  $\lambda = 0$  için lineer diferansiyel fark denklemi olup,  $P_{hk}(x)$ ,  $g(x)$  ve  $K(x,t)$   $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar ve  $\lambda$  uygun bir sabittir.

## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

### 2.1. Bernoulli Polinomlarının Temel Özellikleri

Bernoulli polinomu, ilk  $n$  tamsayının  $p$ . kuvvetleri toplamını belirten  $(p+1)$ . dereceden bir polinomdur. Bernoulli polinomunun genel ifadesi,

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (2.1)$$

şeklindedir. Bu seri  $|t| < 2\pi$  için yakınsaktır. Üstel fonksiyonların seri açılımından yararlanarak (2.1) denkleminde birkaç tane Bernoulli polinomu bulmak mümkündür.

$$\begin{aligned} e^{xt} &= \frac{e^t - 1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \\ &= 1 + \frac{xt}{1!} + \frac{x^2 t^2}{2!} + \frac{x^3 t^3}{3!} + C \\ &= \left( \frac{1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + D - 1}{t} \right) \left( B_0(x) + B_1(x) \frac{t}{1!} + B_2(x) \frac{t^2}{2!} + B_3(x) \frac{t^3}{3!} + E \right) \\ &= \left( 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + D \right) \left( B_0(x) + B_1(x) \frac{t}{1!} + B_2(x) \frac{t^2}{2!} + B_3(x) \frac{t^3}{3!} + E \right) \\ &= B_0(x) + \left[ \frac{B_1(x)}{1!} + \frac{B_0(x)}{2!} \right] t + \left[ \frac{B_2(x)}{2!} + \frac{B_1(x)}{2!1!} + \frac{B_0(x)}{3!} \right] t^2 \\ &\quad + \left[ \frac{B_3(x)}{3!} + \frac{B_2(x)}{2!2!} + \frac{B_1(x)}{3!1!} + \frac{B_0(x)}{4!} \right] t^3 + D \end{aligned}$$

Burada  $t$  nin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$B_0(x) = 1$$

$$\frac{B_1(x)}{1!} + \frac{B_0(x)}{2!} = x \Rightarrow B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{B_2(x)}{2!} + \frac{B_1(x)}{2!1!} + \frac{B_0(x)}{3!} = \frac{x^2}{2!} \Rightarrow B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\frac{B_3(x)}{3!} + \frac{B_2(x)}{2!2!} + \frac{B_1(x)}{3!1!} + \frac{B_0(x)}{4!} = \frac{x^3}{3!} \Rightarrow B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k} \quad (2.2)$$

şeklinde Bernoulli polinomları elde edilir. Burada  $b_k = B_k = B_k(0)$  , Bernoulli sayılarıdır.

## 2.2. Bernoulli Polinomlarının Bağlıları

### 2.2.1. Türev ve integral bağıntıları

(2.2) ifadesinde her iki tarafın diferansiyeli alınırsa,

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) b_k x^{n-k-1} = n B_{n-1}(x) \quad (2.3)$$

ifadesi elde edilir. Böyle devam edilirse,

$$\frac{d^p}{dx^p} B_n(x) = \frac{n!}{(n-p)!} B_{n-p}(x)$$

elde edilir. (2.3) ifadesinde  $n$  yerine  $(n+1)$  konulup integral alınırsa

$$\int_a^x B_n(y)dy = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)] \quad (2.4)$$

ifadesi elde edilir.

### 2.2.2. Fark bağıntıları

Bernoulli polinomları için fark bağıntıları

$$\begin{aligned} B_0(x+1) &= B_0(x) \\ B_1(x+1) &= B_1(x) + 1 \\ B_n(x+1) &= B_n(x) + nx^{n-1}, \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. (2.1) ifadesinde  $x$  yerine  $(x+1)$  alınırsa,

$$\frac{te^{(x+1)t}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} t^n \quad \text{ve} \quad te^{xt} + \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(x)$$

elde edilir.  $t^n$ 'in katsayıları karşılaştırılırsa,

$$B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$$

bağıntısı elde edilir.

### 2.2.3. Tamamlayıcı eleman bağıntısı

Bernoulli polinomları için tamamlayıcı eleman bağıntısı

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

şeklinde verilir. (2.1) ifadesinde  $x$  yerine  $(1-x)$  yazılırsa,

$$\frac{te^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^n \Rightarrow$$

$$\frac{-te^{-xt}}{e^{-t} - 1} = \frac{-te^{-xt}}{\frac{1}{e^t} - 1} = \frac{-te^{-xt}e^t}{1 - e^t} = \frac{-te^{(1-x)t}}{-(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-t)^n$$

elde edilir.  $t^n$ 'in katsayıları karşılaştırıldığında istenilen ifade elde edilir.

#### 2.2.4. Ekleme formülü

Bernoulli polinomları için ekleme formülü

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$$

şeklinde verilir.

#### 2.2.5. Simetriler

Bernoulli polinomları için simetri bağıntıları

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

$$(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}$$

şeklinde gerçekleşir.

#### 2.2.6. Çarpım bağıntıları

Bernoulli polinomları için çarpım bağıntıları

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{n=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{n}{m}\right)$$

$$\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} B_{n+m}, \quad m, n \geq 1$$

şeklindedir.

### 2.2.7. Fourier seri bağıntısı

Bernoulli polinomları için Fourier seri gösterimi

$$B_n(x) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}$$

şeklinde verilir.

### 2.2.8. Ters dönüşüm bağıntısı

Bernoulli polinomları için ters dönüşüm bağıntısı

$$x^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x)$$

şeklinde verilir.

### 2.2.9. Falling factorial bağıntısı

$$B_{n+1} = B_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_{k+1}$$

Burada  $B_n = B_n(0)$  Bernoulli sayısı,  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S(n, k)$  (İkinci Tip Stirling Sayısı)

$$(x)_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (B_{k+1}(x) - B_{k+1}), \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = s(n, k) \text{ (Birinci Tip Stirling Sayısı)}$$

dır.

### 2.2.10. Diğer bağıntılar

Bernoulli polinomları için aşağıdaki bağıntılar geçerlenirler.

$$1) \int_0^1 B_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2) B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

$$3) B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{1-n}) B_n(0)$$

$$4) \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n$$

$$5) B_{2n}(x) = 2(-1)^{n+1} (2n)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi mx)}{(2\pi m)^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ ve } 0 \leq x \leq 1$$

$$6) B_{2n}(x) = 2(-1)^{n+1} (2n-1)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{(2\pi m)^{2n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ ve } 0 \leq x \leq 1$$

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Bernoulli Sıralama (Collocation) Yöntemi

##### 3.1.1. Lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri için Bernoulli sıralama yöntemi

Değişken katsayılı  $m$ . mertebeden lineer

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x), -\infty < a < x < b < \infty \quad (3.1)$$

diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b) = \lambda_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

koşulları altında

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x) \quad (3.3)$$

şeklinde kesilmiş (sonlu) Bernoulli serisi formunda bir yaklaşık çözümünün var olduğu kabul edilsin. Bu çözüm

$$[y(x)] = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (3.4)$$

matris formunda yazılabilir. Burada  $\mathbf{B}(x)$  ve  $\mathbf{A}$  matrisleri sırasıyla

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \ B_1(x) \ B_2(x) \ \cdots \ B_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. (3.4) matris formu

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \ i = 0,1,\dots,N$$

sıralama noktalarında

$$[y(x_i)] = \mathbf{B}(x_i)\mathbf{A}, \ i = 0,1,\dots,N$$

biçimindedir. Bölüm (2.1) de bulunan

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$$

özelliğinden yararlanılarak Bernoulli polinomları

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}$$

şeklinde matris formuna dönüştürülebilir. Burada  $\mathbf{X}(x)$  ve  $\mathbf{S}$  matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{X}(x) = [x^0 \ x^1 \ x^2 \ \cdots \ x^N]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}b_0 & \binom{1}{1}b_1 & \binom{2}{2}b_2 & \cdots & \binom{N}{N}b_N \\ 0 & \binom{1}{0}b_0 & \binom{2}{1}b_1 & \cdots & \binom{N}{N-1}b_{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0}b_0 & \cdots & \binom{N}{N-2}b_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{0}b_0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $b_n = B_n(0)$ , Bernoulli sayılarıdır.  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  ise

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \left[ \left( (x)^0 \right)^{(k)} \quad \left( (x)^1 \right)^{(k)} \quad \left( (x)^2 \right)^{(k)} \quad \cdots \quad \left( (x)^N \right)^{(k)} \right]$$

olarak tanımlanır.

$k = 0$  için,

$$\mathbf{X}(x) = [x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad \cdots \quad x^N]$$

$k = 1$  için,

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = [0 \quad 1 \quad 2x \quad \cdots \quad Nx^{N-1}]$$

ifadesi elde edilir ve

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}$$

olarak matris formunda olduğu açıkça görülür. Burada

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  in matris formu ise,

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = (\mathbf{X}(x)\mathbf{M})\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^2$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k \tag{3.6}$$

olarak ifade edilir.

(3.2) 'de ifade edilen matris formunun  $k$  . mertebeden türevi ise

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{B}^k(x)\mathbf{A} \tag{3.7}$$

şeklindedir.

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}$$

ifadesinden yararlanılarak

$$\mathbf{B}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{S}$$

şeklinde yazılabilir.  $\mathbf{B}^{(k)}(x)$  (3.7)'de yerine yazılırsa

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{S}\mathbf{A} \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.4) ile verilen ifade (3.8)'de yerine yazılırsa

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{S}\mathbf{A} \tag{3.9}$$

elde edilir.

$x = x_i$  için (3.1) diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) y^{(k)}(x_i) = g(x_i), i = 0,1,2,\dots,N \quad (3.10)$$

biçimini alır. (3.10) ile verilen denklem matris sistemine dönüştürülerek

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{G} \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_k(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklindedir.

(3.9)'de ifade edilen denklem  $x = x_i$  için

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (3.13)$$

biçimini alır. Bu ifade genelleştirilerek

$$\mathbf{Y}^{(k)}(x) = \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (3.14)$$

matrisi elde edilir. Burada

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ X(x_2) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (x_0)^1 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^N \\ 1 & (x_1)^1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^N \\ 1 & (x_2)^1 & (x_2)^2 & \cdots & (x_2)^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_N)^1 & (x_N)^2 & \cdots & (x_N)^N \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklindedir.

(3.14), (3.11)' de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.16)$$

temel matris denklemi elde edilir. (3.16) denkleminde

$$\mathbf{W} = [w_{ij}] = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X}^k \mathbf{M} \mathbf{S}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

şeklindedir. (3.16) denklemi aynı zamanda

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edilebilen  $(N+1)$  denklem  $(N+1)$  bilinmeyenden oluşan (3.17) cebirsel sistemine dönüştürülebilir. (3.17) denkleminin arttırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & \mathbf{g}(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & \mathbf{g}(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & \cdots & w_{2N} & ; & \mathbf{g}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & \mathbf{g}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

biçimindedir. Bölüm (3.1.1)'de verilen

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

koşul denkleminde (3.13)de tanımlanan ifadeler kullanılarak

$$y^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$y^{(k)}(b) = \mathbf{X}(b) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A}$$

koşullar için matris gösterimleri bulunur. Bunlar yerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{M}^k \mathbf{S} = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \cdots \quad u_{jN}] = [\lambda_j]$$

olmak üzere, bu matris sistemi  $j = 0, 1, \dots, m-1$  için

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = [\lambda_j]$$

veya arttırılmış matris formunda

$$\tilde{\mathbf{U}}_j = [\mathbf{U}_j; \lambda_j] = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \cdots \quad u_{jN}; \lambda_j]$$

olarak yazılır. O halde koşullar ile ilgili arttırılmış matris;

$$[\mathbf{U}_j; \lambda_j] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} & ; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-10} & u_{m-11} & u_{m-12} & \cdots & u_{m-1N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ile tanımlanır. Şimdi (3.17) cebirsel sisteminde son  $m$  satır silinerek koşullarla ilgili arttırılmış matris yerine yazılırsa

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m0} & w_{N-m1} & \cdots & w_{N-mN} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-10} & u_{m-11} & \cdots & u_{m-1N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu arttırılmış matris

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.19)$$

formunda matris denkleminin dönüştürülebilir.

Burada  $rank\tilde{\mathbf{W}} = rank[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$  yani  $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$  ise (3.19) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

şeklindedir. .(  $\det(\tilde{\mathbf{W}}) = 0$  ise (3.19) matris denkleminin çözümü yoktur veya sonsuz çözümü vardır.) Böylece (3.19)'dan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

bilinmeyen Bernoulli katsayılarından oluşan sütun matrisi tek olarak bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.1) diferansiyel denklemi tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$[y(x)] = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}$$

veya

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

şeklinde Bernoulli polinom çözümü olarak ifade edilir.

### 3.1.2. Linear Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için Bernoulli sıralama yöntemi

Fredholm integro-diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt, \quad a \leq x, t \leq b < \infty, \quad (3.20)$$

veya kısaca

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda I(x) \quad (3.21)$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$I(x) = \int_a^b K(x,t) y(t) dt \quad (3.22)$$

olarak tanımlanır.

$$y(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}$$

denklemini  $t$  değişkeni için

$$y(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{A} \quad (3.23)$$

dır. Maclaurin açılımından

$$K(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{K}_t\mathbf{X}^T(t), \quad \mathbf{K}_t = [k_{ij}^t], \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

ve Bernoulli açılımından

$$K(x,t) = \mathbf{B}(x)\mathbf{K}_f\mathbf{B}^T(x), \quad \mathbf{K}_f = [k_{ij}^f], \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.24)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{K}_t\mathbf{X}^T(t) = \mathbf{B}(x)\mathbf{K}_f\mathbf{B}^T(t)$$

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{K}_t\mathbf{X}^T(t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\mathbf{K}_f\mathbf{X}^T(t)\mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{S}\mathbf{K}_f\mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}_t(\mathbf{S}^T)^{-1}$$

elde edilir. (3.23) ve (3.24)'deki denklemler (3.22)'de yerlerine konulursa

$$\mathbf{I}(x) = \int_a^b \mathbf{B}(x)\mathbf{K}_f\mathbf{B}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{A}dt = \mathbf{B}(x)\mathbf{K}_f\mathbf{Q}\mathbf{A} \quad (3.25)$$

biçimini alır. Burada

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \mathbf{B}^T(t)\mathbf{B}(t)dt$$

şeklindedir.

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \mathbf{B}^T(t)\mathbf{B}(t)dt = \int_a^b \mathbf{S}^T\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{S}dt = \mathbf{S}^T \underbrace{\left[ \int_a^b \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)dt \right]}_{\mathbf{H}} \mathbf{S} \quad (3.26)$$

ve

$$\mathbf{H} = \int_a^b \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)dt = [h_{ij}] = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}, i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.27)$$

formülü ile  $\mathbf{H}$  matrisini hesaplayabiliriz. (3.27) ifadesi (3.26)'da yerine konulursa

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^T\mathbf{H}\mathbf{S}$$

elde edilir. (3.25) denkleminde

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}$$

ifadesi yerine konularak, (3.22) denklemi

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\mathbf{K}_f\mathbf{Q}\mathbf{A} \quad (3.28)$$

şeklinde matris formuna dönüştürülebilir.

$x = x_i$  sıralama noktaları ile (3.21) denklemi

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i)y^{(k)}(x_i) = g(x_i) + \lambda I(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklindedir.

Bu Fredholm integro-diferansiyel denkleminin matris formu, bölüm (3.1.1)'de  $\mathbf{P}_k, \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{M}$  matrisleri kullanılarak (3.1) denklemini (3.11)'de matris haline getirdiğimiz gibi benzer işlemler yapılarak

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x)\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{G} + \lambda\mathbf{I} \quad (3.29)$$

haline gelir. Bölüm (3.1.1)'den

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{B}^{(k)}(x)\mathbf{A} = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (3.30)$$

ifadesi ile (3.28) ve (3.30) denklemleri (3.29)'de yerine konursa

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k\mathbf{X}\mathbf{M}^k\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{G} + \lambda(\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{K}_f\mathbf{Q}\mathbf{A})$$

$$\underbrace{\left( \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k\mathbf{X}\mathbf{M}^k\mathbf{S} - \lambda(\mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{K}_f\mathbf{Q}) \right)}_{\mathbf{W}_f}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

temel matris denklemi elde edilir. Bu denklem

$$\mathbf{W}_f \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

cebirsel sistemine dönüştürülür ve bölüm (3.1.1)'de belirtildiği gibi koşullar yerine konularak, bu matris denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}_f \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.31)$$

arttırılmış matrise dönüştürülebilir. Burada  $rank \tilde{\mathbf{W}}_f = rank [\tilde{\mathbf{W}}_f; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$  ise yani  $\det(\tilde{\mathbf{W}}_f) \neq 0$  ise (3.31) denkleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}}_f)^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.32)$$

şeklindedir. ( $\det(\tilde{\mathbf{W}}_f) = 0$  ise (3.31) denkleminin çözümü yoktur veya parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.) Bu şekilde (3.32) denkleminde bilinmeyen Bernoulli katsayılarının oluşturduğu  $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$  sütun matrisi bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.20) Fredholm integro-diferansiyel denklemi tek çözüme sahip olur ve bu çözüm

$$[y(x)] = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}$$

veya

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

şeklinde ifade edilen Bernoulli polinom çözümüdür.

### 3.1.3. Lineer diferansiyel fark denklemlerinin çözümü için Bernoulli sıralama yöntemi

Değişken katsayılı  $m$  . mertebeden lineer diferansiyel fark denklemleri

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m P_{hk}(x) y^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = g(x) \quad (3.33)$$

şeklinde gösterilir. Burada denklemin matris formunu  $x = \alpha_{hk}x + \beta_{hk}$  eşitliği ve (3.7) uyarınca  $y(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}$  ifadesinden yararlanılarak

$$y^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = \mathbf{B}^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk})\mathbf{A} \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mathbf{B}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{S}$$

olduğundan

$$\mathbf{B}^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = \mathbf{X}^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk})\mathbf{S} \quad (3.35)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = [x^0 \quad x^1 \quad \dots \quad x^N]$$

olduğundan

$$\mathbf{X}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = [1 \quad (\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) \quad (\alpha_{hk}x + \beta_{hk})^2 \quad \dots \quad (\alpha_{hk}x + \beta_{hk})^N] \quad (3.36)$$

olarak tanımlanır. (3.5) matrisi (3.33) denkleminde  $\alpha_{hk}$  ve  $\beta_{hk}$  değişkenlerine bağlıdır. O halde

$$\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_{hk}^0 \beta_{hk}^0 & \binom{1}{0} \alpha_{hk}^0 \beta_{hk}^1 & \binom{2}{0} \alpha_{hk}^0 \beta_{hk}^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_{hk}^0 \beta_{hk}^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_{hk}^1 \beta_{hk}^0 & \binom{2}{1} \alpha_{hk}^1 \beta_{hk}^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_{hk}^1 \beta_{hk}^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_{hk}^2 \beta_{hk}^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_{hk}^2 \beta_{hk}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_{hk}^N \beta_{hk}^0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Olarak yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{X}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \quad (3.38)$$

eşitliği bulunur.

$x = \alpha_{hk}x + \beta_{hk}$  ve (3.6) denkleminde

$$\mathbf{X}^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk})\mathbf{M}^k \quad (3.39)$$

bulunur. (3.35) ve (3.39) denklemleri kullanılarak

$$\mathbf{B}^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk})\mathbf{M}^k\mathbf{S} \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.34) ve (3.40) denklemleri kullanılarak

$$y^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk})\mathbf{M}^k\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (3.41)$$

Elde edilir.  $x = x_i$  için

$$y^{(k)}(\alpha_{hk}x_i + \beta_{hk}) = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk})\mathbf{M}^k\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

ve (3.33) denklemi

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m P_{hk}(x_i) y^{(k)}(\alpha_{hk}x_i + \beta_{hk}) = g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.42)$$

biçimini alır. (3.41) ve (3.42) denklemlerinden ifadenin matris gösterimi

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{hk} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.43)$$

Şeklindedir. Buradan denklemin çözümü

$$\mathbf{W}_c = [w_{ij}] = \sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{hk} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \quad , \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

Şeklinde ifade edilir. (3.17) denkleminde koşullar ve (3.13) denklemindeki eşitlikler yerlerine yazılırsa denklem

$$\mathbf{W}_c \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

cebirsel sistemi şeklini alır. Bölüm (3.1.1)'de bulunan koşullar yerine konularak

$$\tilde{\mathbf{W}}_c \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.44)$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Burada  $\text{rank} \tilde{\mathbf{W}}_c = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}_c; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$  ise, yani  $\det(\tilde{\mathbf{W}}_c) \neq 0$  ise (3.44) matris dekleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}}_c)^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.45)$$

şeklindedir. ( $\det(\tilde{\mathbf{W}}_c) = 0$  ise (3.44) matris dekleminin çözümü yoktur veya sonsuz çözümü vardır.) Bu şekilde (3.45) denkleminde, bilinmeyen

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

Bernoulli katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.33)  $m$ . mertebeden lineer diferansiyel fark denklemi tek çözüme sahip olur ve bu çözüm

$$[y(x)] = \mathbf{B}(x) \mathbf{A}$$

veya

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

şeklinde ifade edilen Bernoulli polinom çözümdür.

### 3.1.4 Lineer Fredholm integro-diferansiyel fark denklemlerinin çözümü için Bernoulli sıralama yöntemi

Fredholm integro-diferansiyel fark denklemi kısaca

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m P_{hk}(x) y^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = g(x) + \lambda \int_a^b K_f(x,t) y(t) dt \quad (3.46)$$

şeklinde gösterilir. Fredholm integro-diferansiyel fark denleminde, (3.29) ve (3.43) ifadeleri yerine konularak  $x = x_i$ ,  $i = 0,1,2,\dots,N$  sıralama noktalarında

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{hk} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} + \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q} \mathbf{A})$$

temel matris denklemi elde edilir. Bu denklem ile

$$\underbrace{\left( \sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{hk} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \mathbf{M}^k \mathbf{S} - \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}) \right)}_{\mathbf{W}_{cf}} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

temel matris denklemi elde edilir. Bu denklem

$$\mathbf{W}_{cf} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

cebirsel sistemine dönüştürülür ve bölüm (3.1.1)'de ifade edildiği gibi koşullar yerine konularak, bu matris denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}_{cf} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.47)$$

şeklinde yeni arttırılmış matrise dönüştürülebilir. Burada

$rank \tilde{\mathbf{W}}_{cf} = rank[\tilde{\mathbf{W}}_{cf}, \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$  ise yani  $\det(\tilde{\mathbf{W}}_{cf}) \neq 0$  ise (3.47) matris

denkleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}}_{cf})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.48)$$

şeklinde ifade edilir. ( $\det(\tilde{\mathbf{W}}_{cf}) = 0$  ise (3.47) matris denkleminin çözümü yoktur

veya sonsuz çözümü vardır.) Bu şekilde (3.48) denkleminde, bilinmeyen

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

Bernoulli katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.46) Fredholm integro-diferansiyel fark denklemini tek çözüme sahip olur ve bu çözüm

$$[y(x)] = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}$$

veya

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x) \quad (3.49)$$

şeklinde ifade edilen Bernoulli polinom çözümüdür.

### 3.2 Çözümün Kontrolü Ve Hata Hesabı

(3.49)'daki kesilmiş Bernoulli serisi (3.46) denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan bulunan  $y(x)$  çözüm fonksiyonu (3.46) da yerine yazıldığında denklemini yaklaşık olarak sağlamalıdır. Bu durumda her  $x = x_i, i = 0,1,2,\dots,N$  için

$$E(x_i) = \left| \sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m P_{hk}(x_i) y^{(k)} (\alpha_{hk} x_i + \beta_{hk}) - g(x_i) - \lambda \int_a^b K_f(x_i, t) y(t) dt \right| \cong 0$$

veya

$$E(x_i) \leq 10^{-k_i} (k_i) \text{ (herhangi bir pozitif tamsayı)}$$

olmalıdır. Eğer maksimum  $(10^{-k_i}) = 10^{-k}$  (k herhangi bir pozitif tamsayı) önceden belirlenirse,  $N$  kesme sınırı  $x_i$  noktalarının her birindeki  $E(x_i)$  değeri, alınan  $10^{-k}$  dan küçük oluncaya kadar artırılır. Diğer yandan hata fonksiyonu

$$E(x) = \sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m P_{hk}(x) y^{(k)} (\alpha_{hk} x + \beta_{hk}) - g(x) - \lambda \int_a^b K_f(x, t) y(t) dt$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer bu fonksiyonun grafiği  $N$  kesme sınırı artarken

$x$ -eksenine yaklaşıyorsa çözümün hatası asimptotik olarak sifira yaklaşıyor demektir.

## 4. BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde, çalışmada sunulan “Bernoulli Sıralama Yöntemi” nin kullanılabilirliğini göstermek için  $m$ . mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin, Fredholm integro diferansiyel denklemlerin,  $m$ . mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel fark denklemlerin ve Fredholm integro-diferansiyel fark denklemlerin örnekleri incelenmiştir. Örneklerdeki denklemleri incelemek için MAPLE 17 ve MATLAB (R2013a) programları kullanılmıştır. Bu programlar kullanılarak yeterince farklı  $N$  değeri için tam çözüme yaklaşılmaya çalışılmış ve elde edilen sonuçların karşılaştırılması grafiklerde gösterilmiştir. Ayrıca bulunan yaklaşık çözümler ile tam çözüm arasındaki durum hata analizleri yapılarak tablolar yardımı ile sunulmuştur.

### 4.1. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

**Örnek 4.1.1.** (Gülsu, 2014), İkinci mertebeden sabit katsayılı,

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2x + 5, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.1)$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemini

$$y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad (4.2)$$

koşulları altında

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x) \quad (4.3)$$

$N = 3$  için Bernoulli sıralama yöntemi ile çözümünü araştıralım. Burada (4.1) denkleminin tam çözümü  $y_{tam}(x) = x + 1$  'dir.  $N = 3$  için (4.3)

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x) \quad \text{olur.}$$

Burada sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

için  $\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$  dir.

$$P_0(x) = 2, P_1(x) = 3, P_2(x) = 1, g(x) = 2x + 5$$

olmak üzere (3.1) diferansiyel denkleminin temel matris denklemini (3.1.1)'den

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklindedir. (3.1) diferansiyel denkleminin mertebesi  $m = 2$  olduğundan bu denklem aşağıdaki gibi  $m = 2$  'ye kadar açılırsa

$$\left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{X} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{M} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{M}^2 \right\} \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{X} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{M} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{M}^2 \right\} \mathbf{S}$$

için denklem (3.1)

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.5)$$

şeklinde olur. Buradaki  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{G}$  matrislerini (3.3), (3.12), (3.15) bağıntılarından

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17/3 \\ 19/3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bulunan bu matrisler (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2/3 & -3/2 & ; & 5 \\ 2 & 8/3 & 8/9 & -77/54 & ; & 17/3 \\ 2 & 10/3 & 26/9 & 23/54 & ; & 19/3 \\ 2 & 4 & 16/3 & 9/2 & ; & 7 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar kullanılarak bulunan arttırılmış matrisi (3.18)'den

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 & ; & \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

olarak bulunur. (4.6) matrisinin son iki satırı silinip yerine (4.7) koşul matrisi yazılırsa arttırılmış matrisin son hali

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2/3 & -3/2 & ; & 5 \\ 2 & 8/3 & 8/9 & -77/54 & ; & 17/3 \\ 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

elde edilmiş olur.  $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$  olduğundan (4.8)'in diğer bir ifadesi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2/3 & -3/2 \\ 2 & 8/3 & 8/9 & -77/54 \\ 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 17/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemden

$$\mathbf{A} = [3/2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

Bernoulli katsayılar matrisi bulunur. Böylece bu katsayılar (4.3)'de yerine yazılarak, örnek 4.1.1'deki problemin  $N = 3$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x)$$

$$y(x) = \frac{3}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 + 0$$

olarak elde edilir. Buradan

$$y(x) = x + 1$$

olacak şekilde (4.1) denkleminin tam çözümü elde edilir.

**Örnek 4.1.2.** (Gülsu, 2008) Değişken katsayılı,

$$y''(x) + xy(x) = \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{6}x^4, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.9)$$

homojen olmayan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini

$$y(0) = 1, y'(0) = -1 \quad (4.10)$$

koşulları altında  $N = 5, 8, 12$  için sonlu Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim. Burada  $N = 5$  için Bernoulli seri çözümünü bulmak için sıralama noktaları (4.4) bağıntısı ile aşağıdaki gibi buluruz

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{4}{5}, \quad x_5 = 1 \right\}$$

Bu örnek için gerekli olan fonksiyonlar denklem (3.15)'den

$$P_0(x) = x, \quad P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{6}x^4$$

Bu fonksiyonların matris formları  $N = 5$  için (3.12) denklemini uygulayalım. Bu matrislere önceki örneğe benzer işlemler uygulanırsa temel matris denklemini elde edilir. Buradaki  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{G}$  matrisleri

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/125 \\ -32/938 \\ -189/125 \\ -128/313 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 1024/3125 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & -1/30 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bulunan bu matrisler (4.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 1/5 & -3/50 & 1501/750 & -1119/625 & 1471/18750 & 14926/15625 & ; & -3/12500 \\ 2/5 & -1/25 & 739/375 & -369/625 & -8159/9375 & 7414/15625 & ; & -32/9375 \\ 3/5 & 3/50 & 489/250 & 366/625 & -5409/6250 & -7371/15625 & ; & -189/12500 \\ 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & -1/30 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/6 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilmiş olur. Buradan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19/40 \\ -13/12 \\ -1/12 \\ -1/651878216409788 \\ 1/12 \\ -1/603983172929043 \end{bmatrix}$$

Bernoulli katsayı matrisi bulunur. Böylece bu katsayılar (4.3)'de yerine yazılarak, örnek 4.1.2'deki problemin  $N = 5$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) + a_4 B_4(x) + a_5 B_5(x)$$

$$y(x) = 0.9999999992 - (0.9999999996)x + (0.1043299 \cdot 10^{-12})x^2 - (0.1666666667)x^3 + (0.8333333358)x^4 - (0.1655675267 \cdot 10^{-9})x^5$$

olacak şekilde tam çözümü  $y_{tam}(x) = 1 - x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$  olan (4.9) denkleminin yaklaşık çözümü elde edilir. Bernoulli çözüm yöntemiyle  $N = 8$  için yaklaşık çözümü araştıralım. Aynı adımlar uygulanarak Bernoulli katsayı matrisi elde edilir. Buradan bulunan değerler (4.3) denkleminde yerine yazılır. Böylece

$$y(x) = 1 - x - (0.1666666670)x^3 + (0.8333333496)x^4 - (0.3397772643 \cdot 10^{-8})x^5 \\ + (0.2927108559 \cdot 10^{-8})x^6 - (0.511330969 \cdot 10^{-9})x^7 \\ - (0.3639294278 \cdot 10^{-9})x^8$$

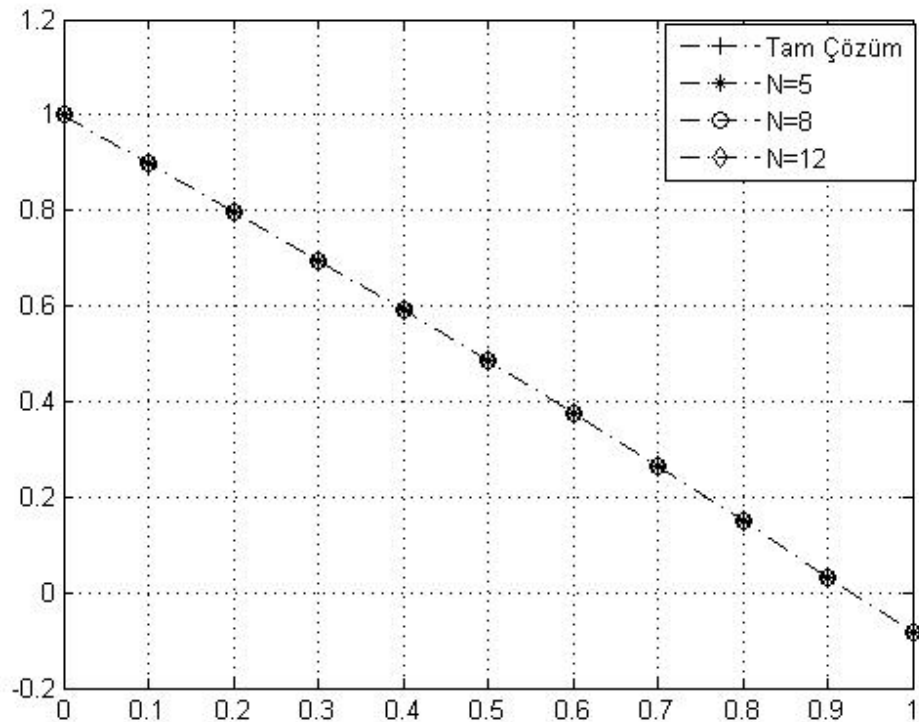
olacak şekilde  $N = 8$  için yaklaşık çözümü elde edilir. Aynı şekilde  $N = 12$  için yaklaşık çözüm

$$y(x) = (0.9999999999) - x + (0.1 \cdot 10^{-12})x^2 - (0.1666666768)x^3 \\ + (0.08333350076)x^4 - (0.130839208 \cdot 10^{-5})x^5 \\ + (0.60169514 \cdot 10^{-5})x^6 - (0.00001757787106)x^7 \\ + (0.00003357111709)x^8 - (0.00004182387263)x^9 \\ + (0.00003278052631)x^{10} - (0.00001468326930)x^{11} \\ + (0.2867878238 \cdot 10^{-5})x^{12}$$

olarak bulunur. Çizelge 4.1.'de belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli Sıralama Yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların nümerik sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.1.'de tam çözüm,  $N = 5, 8$  ve  $12$  için yaklaşık çözümleri gösterilmiştir.

Çizelge 4.1.  $N = 5$ ,  $N = 8$ ,  $N = 12$ , için Örnek 4.1.2. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli	Mutlak	Bernoulli	Mutlak	Bernoulli	Mutlak
		Sıralama	Hata	Sıralama	Hata	Sıralama	Hata
		Yöntemi	$E(x_i)$	Yöntemi	$E(x_i)$	Yöntemi	$E(x_i)$
		$N = 5$	$N_e = 5$	$N = 8$	$N_e = 8$	$N = 12$	$N_e = 12$
0.0	1.000000	0.999999	0.80E-14	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
0.1	0.899842	0.899842	0.80E-14	0.899842	0.10E-14	0.899842	0.10E-14
0.2	0.798800	0.798800	0.70E-14	0.798800	0.000000	0.798800	0.000000
0.3	0.696175	0.696175	0.70E-14	0.696175	0.000000	0.696175	0.000000
0.4	0.591467	0.591467	0.60E-14	0.591467	0.10E-14	0.591467	0.10E-14
0.5	0.484375	0.484375	0.60E-14	0.484375	0.000000	0.484375	0.000000
0.6	0.374800	0.374800	0.60E-14	0.374800	0.000000	0.374800	0.000000
0.7	0.262842	0.262842	0.40E-14	0.262842	0.10E-14	0.262842	0.000000
0.8	0.148800	0.148800	0.50E-14	0.148800	0.000000	0.148800	0.000000
0.9	0.033175	0.033175	0.34E-14	0.033175	0.000000	0.033175	0.10E-14
1.0	-0.08333	-0.08333	0.32E-14	-0.08333	0.37E-14	-0.08333	0.37E-14



Şekil 4.1. Örnek4.1.2.'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

**Örnek 4.1.3.** (İlhan, 2011) Değişken katsayılı,

$$y''(x) + y(x) = 3 \cos^2 x, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.11)$$

homojen olmayan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini

$$y(0) = 1, y'(0) = -1 \quad (4.12)$$

koşulları altında  $N = 6, 8, 12$  için sonlu Bernoulli Sıralama Yöntemi ile çözelim. Bu örnekte yöntem için Bernoulli polinomlarını kullanalım. Burada  $N = 6$  için (3.3) Bernoulli seri çözümünü bulmak için sıralama noktalarını, (3.4) bağıntısı ile aşağıdaki gibi buluruz.

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{6}, x_4 = \frac{4}{6}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = 1 \right\}$$

Bu örnek için gerekli olan fonksiyonlar denklem (3.10)'dan

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 0, P_2(x) = 1, g(x) = 3 \cos^2 x$$

elde edilir. Bu fonksiyonların matris formları  $N = 6$  için önceki örneklerdekine benzer şekilde elde edilir. Bu matris formlarına önceki örneklerdekine benzer işlemler uygulanılarak temel matris denklemi elde edilir. Elde edilen bu temel matris denklemi önceki örneklerdeki gibi çözümlenerek Bernoulli katsayılar matrisi bulunur. Bu katsayılar (4.3)'de yerine yazılarak, örnek 4.1.3'deki problemin  $N = 6$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) + a_4 B_4(x) + a_5 B_5(x) + a_6 B_6(x)$$

$$y(x) = 1 - x + (0.9999999999)x^2 + (0.1674938035)x^3 \\ - (0.3382692560)x^4 + (0.0028860382)x^5 + (0.03473964173)x^6$$

olacak şekilde tam çözümü  $y_{tam}(x) = \sin^2 x - \sin x + 1$  olan (4.11) denkleminin  $N = 6$  için yaklaşık çözümü elde edilir. Bernoulli çözüm yöntemiyle  $N = 8$  için yaklaşık çözümü aynı adımlar uygulanarak,

$$y(x) = 1 - (0.999999999)x + x^2 + (0.1666527805)x^3 - (0.33319959488)x^4 \\ - (0.00890638349)x^5 + (0.04575515640)x^6 - (0.001406119668)x^7 \\ - (0.002295766058)x^8$$

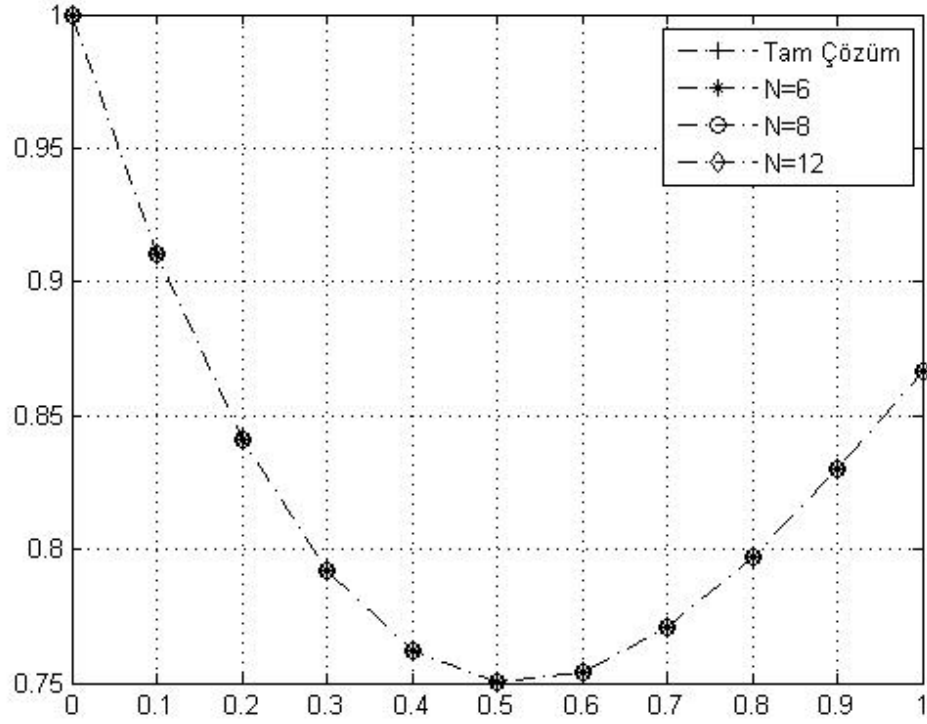
olacak şekilde bulunur. Aynı şekilde  $N = 12$  için yaklaşım çözüm,

$$y(x) = 1 - x + x^2 + (0.1666666582)x^3 - (0.3333332668)x^4 \\ - (0.00833333870)x^5 + (0.04444236663)x^6 \\ + (0.0002101425672)x^7 - (0.003207254671)x^8 \\ - (0.00005010440170)x^9 + (0.0000907763084)x^{10} \\ - (0.00002595068172)x^{11} - (0.9707725229 \cdot 10^{-5})x^{12}$$

olarak bulunur. Çizelge 4.2.'de belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli Sıralama Yöntemi ile edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların nümerik sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.2.'de tam çözüm,  $N = 6, 8$  ve  $12$  için yaklaşık çözümleri gösterilmiştir.

**Çizelge 4.2.**  $N = 6$ ,  $N = 8$   $N = 12$ , için Örnek 4.1.3. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli		Bernoulli		Bernoulli	
		Sıralama	Mutlak	Sıralama	Mutlak	Sıralama	Mutlak
		Yöntemi	Hata	Yöntemi	Hata	Yöntemi	Hata
	$y(x_i)$	$E(x_i)$	$y(x_i)$	$E(x_i)$	$y(x_i)$	$E(x_i)$	
	$N = 6$	$N_e = 6$	$N = 8$	$N_e = 8$	$N = 12$	$N_e = 12$	
0.0	1.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.999999	0.10E-14
0.1	0.910133	0.910134	0.436E-6	0.910133	0.507E-8	0.910133	0.13E-12
0.2	0.840800	0.840802	0.169E-5	0.840800	0.149E-7	0.840800	0.30E-12
0.3	0.791812	0.791815	0.270E-5	0.791812	0.226E-7	0.791812	0.45E-12
0.4	0.762228	0.762232	0.345E-5	0.762228	0.312E-7	0.762228	0.61E-12
0.5	0.750423	0.750423	0.458E-5	0.750423	0.388E-7	0.750423	0.76E-12
0.6	0.754179	0.754179	0.555E-5	0.754179	0.464E-7	0.754179	0.90E-12
0.7	0.770799	0.770799	0.533E-5	0.770799	0.540E-7	0.770799	0.10E-11
0.8	0.797244	0.797244	0.105E-4	0.797244	0.549E-7	0.797244	0.12E-11
0.9	0.830274	0.830274	0.566E-4	0.830274	0.274E-6	0.830274	0.18E-11
1.0	0.866602	0.866602	0.247E-3	0.866602	0.236E-5	0.866602	0.56E-10



Şekil 4.2. Örnek4.1.3.'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

## 4.2. Linear Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

**Örnek 4.2.1** Değişken katsayılı lineer,

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xty(t)dt, 0 \leq x, t \leq 1 \quad (4.13)$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0 \quad (4.14)$$

koşulları altında Bernoulli Sıralama Yöntemi ile çözelim. Bu örnekte yöntem için Bernoulli polinomlarını kullanalım. Burada  $N = 3$  için Bernoulli seri çözümünü bulmak için sıralama noktalarını, (3.4) bağıntısı ile aşağıdaki gibi buluruz.

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1 \right\}$$

Burada,

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = 0, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3}x$$

şeklinde olup (3.20) ifadesindeki  $K(x, t)$  ve  $\lambda$  değerleri

$$K(x, t) = xt, \quad \lambda = 1$$

olduğundan, bölüm (3.1.2)'den ve (4.13) denkleminin matris formu,

$$\underbrace{\left( \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{S} - \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}) \right)}_{\mathbf{W}_f} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklindedir. İntegro-diferansiyel denklemin mertebesi  $m = 2$  olduğundan bu denklem aşağıdaki gibi  $m = 2$ 'ye kadar açılırsa,

$$\underbrace{\left( \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{S} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{M} \mathbf{S} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{M}^2 \mathbf{S} - \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}) \right)}_{\mathbf{W}_f} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\mathbf{W}_f = \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{S} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{M} \mathbf{S} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{M}^2 \mathbf{S} - \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q})$$

için denklem

$$\mathbf{W}_f \mathbf{A} = \mathbf{G} \Rightarrow [\mathbf{W}_f; \mathbf{G}] \tag{4.15}$$

şeklindedir.  $\lambda = 1$  ve  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{K}_f, \mathbf{Q}, \mathbf{G}$  matrisleri bölüm (3.1.2)'den yararlanılarak hesaplandığında,

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & -1/120 \\ 0 & 0 & 1/180 & 0 \\ 0 & -1/120 & 0 & 1/840 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8/9 \\ 7/9 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisler ve  $\lambda = 1$  (4.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$[\mathbf{W}_f; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 1 \\ -1/6 & 35/36 & -1/3 & -49/299 & ; & 8/9 \\ -1/3 & 17/18 & 1/3 & 29/180 & ; & 7/9 \\ -1/2 & 11/12 & 1 & 61/120 & ; & 2/3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşul kullanılarak bulunan arttırılmış matris (3.18)'den

$$\mathbf{U}_0 = [1 \quad -1/2 \quad 1/6 \quad 0 \quad ; \quad 0] \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.16) denkleminin son satırı silinip yerine (4.17) koşul matrisi yazılırsa arttırılmış matrisin son hali

$$[\tilde{\mathbf{W}}_f; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 1 \\ -1/6 & 35/36 & -1/3 & -49/299 & ; & 8/9 \\ -1/3 & 17/18 & 1/3 & 29/180 & ; & 7/9 \\ 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

elde edilmiş olur.  $\det(\tilde{\mathbf{W}}_f) \neq 0$  olduğundan (4.18)'den

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/1334062 \\ -1/133324 \end{bmatrix}$$

Bernoulli katsayı matrisi bulunur. Böylece katsayılar (3.15)'de yerine yazılarak, örnek 4.2.1'deki problemin  $N = 3$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x)$$

$$y(x) = (0.1249999993 \cdot 10^{-11}) + x + (0.1200000001 \cdot 10^{-9})x^2 - (0.7500000005 \cdot 10^{-10})x^3$$

olarak bulunur. Bu işlemler  $N = 7$  için yapıldığında, (4.13) probleminin  $N = 7$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = (-0.129196188810 \cdot 10^{-9}) + x - (0.1719369201 \cdot 10^{-8})x^2 \\ + (0.1680382281 \cdot 10^{-7})x^3 - (0.6113259736 \cdot 10^{-7})x^4 + (0.1054105526 \cdot 10^{-6})x^5 \\ - (0.8753643869 \cdot 10^{-7})x^6 + (0.2824508881 \cdot 10^{-7})x^7$$

olacak şekilde bulunur. Aynı şekilde  $N = 10$  için yaklaşık çözüm,

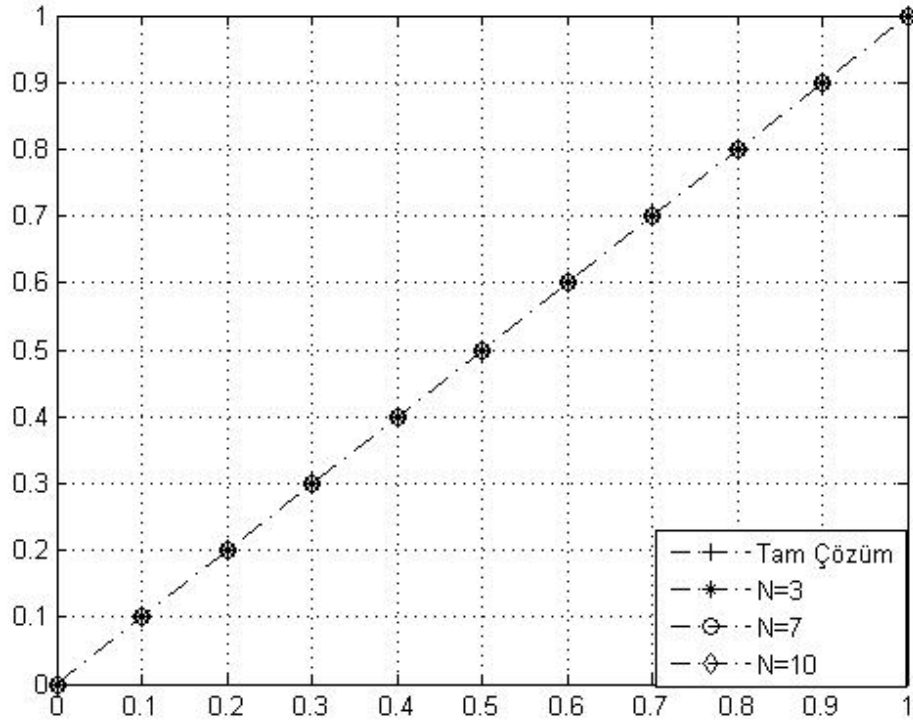
$$y(x) = x$$

olarak bulunur. (4.13)'deki denklemin tam çözümü  $y_{tam}(x) = x$  şeklindedir. Çizelge 4.3.'de belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli Sıralama Yöntemi ile edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların nümerik sonuçları karşılaştırılmıştır.

Şekil 4.3.'de tam çözüm,  $N = 3, 7$  ve  $10$  için yaklaşık çözümleri gösterilmiştir.

**Çizelge 4.3.**  $N = 3$ ,  $N = 7$   $N = 10$ , için Örnek 4.2.1. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli		Bernoulli		Bernoulli	
		Sıralama Yöntemi $y(x_i)$ $N = 3$	Mutlak Hata $E(x_i)$ $N_e = 3$	Sıralama Yöntemi $y(x_i)$ $N = 7$	Mutlak Hata $E(x_i)$ $N_e = 7$	Sıralama Yöntemi $y(x_i)$ $N = 10$	Mutlak Hata $E(x_i)$ $N_e = 10$
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.100000	0.100000	0.000000	0.100000	0.000000	0.100000	0.000000
0.2	0.200000	0.200000	0.000000	0.199999	0.10E-14	0.200000	0.000000
0.3	0.300000	0.300000	0.000000	0.299999	0.10E-14	0.300000	0.000000
0.4	0.400000	0.400000	0.000000	0.399999	0.20E-14	0.400000	0.000000
0.5	0.500000	0.500000	0.000000	0.499999	0.30E-14	0.500000	0.000000
0.6	0.600000	0.600000	0.000000	0.599999	0.40E-14	0.600000	0.000000
0.7	0.700000	0.700000	0.10E-14	0.699999	0.50E-14	0.700000	0.000000
0.8	0.800000	0.800000	0.10E-14	0.799999	0.50E-14	0.800000	0.000000
0.9	0.900000	0.900000	0.000000	0.899999	0.60E-14	0.900000	0.000000
1.0	1.000000	0.999999	0.10E-14	0.999999	0.50E-14	1.000000	0.000000



Şekil 4.3. Örnek4.2.1.'in tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

### Örnek 4.2.2.

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) - \int_0^1 y(t)dt = e^x - e + e^{-1} \quad (4.19)$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemini

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (4.20)$$

koşullarında Bernoulli sıralama yöntemiyle çözelim. Bernoulli polinom çözümü

$N = 5$  için (4.4) bağıntısı ile sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{4}{5}, \quad x_5 = 1 \right\}$$

şeklinde verilir. Burada

$$P_0(x) = x, P_1(x) = -x, P_2(x) = 1, g(x) = e^x - e + e^{-1}$$

şeklinde olup (3.20) ifadesindeki  $K_f(x, t)$  ve  $\lambda$  değerleri

$$K_f(x, t) = 1, \lambda = 1$$

olduğundan, bu fonksiyonların matris formları önceki örnekte uygulanan yöntemler kullanılarak elde edilir. Bu matrislere önceki örnekteki benzer işlemler uygulanarak temel matris denklemi elde edilir. Elde edilen bu temel matris denklemi önceki örnekteki gibi çözümlenerek Bernoulli katsayılar matrisi bulunur. Bu katsayılar (4.3)'de yerine yazılarak, örnek 4.2.2'deki problemin  $N = 5$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) + a_4 B_4(x) + a_5 B_5(x)$$

$$y(x) = (0.9999999997) + (0.9999999997)x + (0.4990779099)x^2 \\ + (0.1670962312)x^3 + (0.0395990008)x^4 + (0.0113406672)x^5$$

Bu işlemler  $N = 8$  için yapıldığında (4.19) probleminin  $N = 8$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = 0.9999999998 + (0.9999999999)x + (0.5000052936)x^2 + (0.1666665404)x^3 \\ + (0.04166878410)x^4 + (0.008327649979)x^5 \\ + (0.001401880571)x^6 + (0.0001813757715)x^7 \\ + (0.00003627395912)x^8$$

Bu işlemler  $N = 12$  için yapıldığında (4.19) probleminin  $N = 12$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

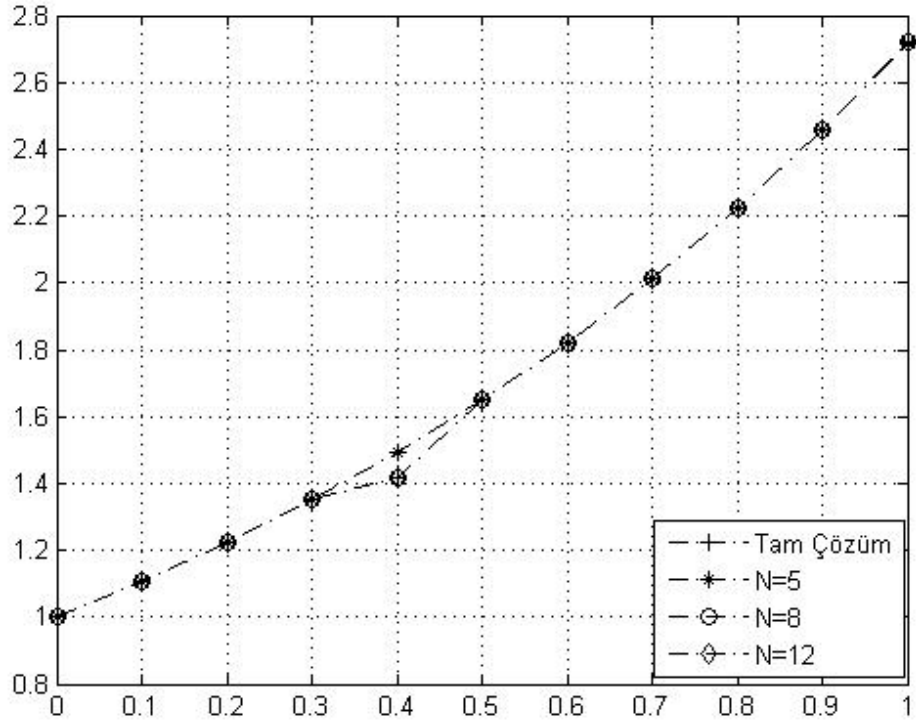
$$\begin{aligned}
y(x) = & 1.000000001 + (0.9999999997)x + (0.5000685183)x^2 \\
& + (0.1666666201)x^3 + (0.04167892608)x^4 \\
& + (0.008322966429)x^5 + (0.001423402288)x^6 \\
& + (0.0000997515162)x^7 + (0.0002128161765)x^8 \\
& - (0.0002295540832)x^9 + (0.0001792441510)x^{10} \\
& - (0.00007811992253)x^{11} + (0.00001477016406)x^{12}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.19)'daki denklemin tam çözümü  $y_{tam}(x) = e^x$  şeklindedir.

Çizelge 4.4.'de belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli Sıralama Yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların nümerik sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.4.'de tam çözüm,  $N = 5, 8$  ve  $N = 12$  için yaklaşık çözümleri gösterilmiştir.

**Çizelge 4.4.**  $N = 5$ ,  $N = 8$ ,  $N = 12$ , için Örnek 4.2.2. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli		Bernoulli		Bernoulli	
		Sıralama	Mutlak	Sıralama	Mutlak	Sıralama	Mutlak
		Yöntemi	Hata	Yöntemi	Hata	Yöntemi	Hata
	$y(x_i)$	$E(x_i)$	$y(x_i)$	$E(x_i)$	$y(x_i)$	$E(x_i)$	
	$N = 5$	$N_e = 5$	$N = 8$	$N_e = 8$	$N = 12$	$N_e = 12$	
0.0	1.000000	0.999999	0.40E-14	0.999999	0.10E-14	0.999999	0.80E-14
0.1	1.105171	1.105162	0.897E-5	1.105171	0.529E-7	1.105171	0.38E-10
0.2	1.221403	1.221367	0.359E-4	1.221403	0.213E-6	1.221403	0.144E-9
0.3	1.349859	1.349777	0.819E-4	1.349859	0.482E-6	1.349859	0.326E-9
0.4	1.419825	1.491676	0.148E-3	1.419826	0.865E-6	1.419825	0.586E-9
0.5	1.648721	1.648486	0.235E-3	1.648723	0.137E-5	1.648721	0.927E-9
0.6	1.822119	1.821775	0.344E-3	1.822121	0.199E-5	1.822119	0.135E-8
0.7	2.013753	2.013276	0.477E-3	2.013756	0.277E-5	2.013753	0.187E-8
0.8	2.225541	2.224899	0.642E-3	2.225545	0.368E-5	2.225541	0.249E-8
0.9	2.459603	2.458744	0.859E-3	2.459608	0.474E-5	2.459603	0.321E-8
1.0	2.718282	2.717114	0.117E-2	2.718288	0.596E-5	2.718282	0.404E-8



Şekil 4.4. Örnek4.2.2.'in tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

### 4.3. Lineer Diferansiyel Fark Denklemlerin Uygulamaları

**Örnek 4.3.1.** (Gürbüz, Gülsu, Sezer, 2011) İkinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel fark denklemi

$$x^2 y''(x) + y'(x) - y(x+1) = x^2 + 7, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.21)$$

başlangıç koşulları,

$$y(0) = -8, \quad y'(0) = 0 \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlıdır. Denklemin tam çözümü  $y_{tam}(x) = x^2 - 8$  şeklindedir. Bu denklemi Bernoulli Sıralama Yöntemiyle çözelim. Bernoulli Polinom çözümü  $N = 3$  için

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x)$$

şeklinde ifade edilir. (4.4) bağıntısı ile sıralama noktaları,

$$\{x_0 = 0, \quad x_1 = 1/3, \quad x_2 = 2/3, \quad x_3 = 1\}$$

şeklinde verilir. Burada,

$$P_{00}(x) = 0, \quad P_{01}(x) = 1, \quad P_{02}(x) = x^2, \quad P_{11}(x) = -1, \quad g(x) = x^2 + 7$$

olmak üzere (3.43)'den (4.21) denkleminin matris formu

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{hk} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \mathbf{M}^k \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.23)$$

şeklindedir. Denklemin mertebesi  $m = 2$  ve  $L = 2$  olduğundan bu denklem aşağıdaki gibi  $m = 2$  ve  $L = 2$ 'ye kadar açılırsa

$$\{\mathbf{P}_{00} \mathbf{X} + \mathbf{P}_{01} \mathbf{X} \mathbf{M} + \mathbf{P}_{02} \mathbf{X} \mathbf{M}^2 + \mathbf{P}_{11} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11})\} \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{W}_c = \{\mathbf{P}_{00} \mathbf{X} + \mathbf{P}_{01} \mathbf{X} \mathbf{M} + \mathbf{P}_{02} \mathbf{X} \mathbf{M}^2 + \mathbf{P}_{11} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11})\} \mathbf{S}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{W}_c \mathbf{A} = \mathbf{G} \Rightarrow [\tilde{\mathbf{W}}_c; \tilde{\mathbf{G}}] \quad (4.25)$$

elde edilir.  $\mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk})$  matrisi (3.37) ile tanımlanmıştır. Burada (4.21)'de  $\alpha_{11} = 1$  ve  $\beta_{11} = 1$  olarak verilmiştir. Böylece  $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{02}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11}), \mathbf{G}$  matrisleri bölüm (3.1.3)'den yararlanılarak hesaplandığında

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 \\ 64/9 \\ 67/9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada matrisler (4.21)'de yerine yazılırsa

$$[\mathbf{W}_c; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & -7/6 & 1/2 & ; & 7 \\ -1 & 1/6 & -8/11 & -11/17 & ; & 64/9 \\ -1 & -1/6 & -1/18 & -54/53 & ; & 67/9 \\ -1 & -1/2 & -5/6 & 1/2 & ; & 8 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar kullanılarak bulunan arttırılmış matris (3.18)'den

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 & ; & \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

koşul matrisi bulunur. Başlangıç koşulları arttırılmış matriste yerine yazılırsa

$$[\tilde{\mathbf{W}}_c; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & -7/6 & 1/2 & ; & 7 \\ -1 & 1/6 & -8/11 & -11/17 & ; & 64/9 \\ 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

elde edilmiş olur.  $\det(\tilde{\mathbf{W}}_c) \neq 0$  ve (4.28)'den

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -23/3 \\ 1 \\ 1 \\ -1/400 \end{bmatrix}$$

Bernoulli katsayı matrisi bulunur. Böylece bu katsayılar (4.25)'de yerine yazılarak, örnek 4.3.1'deki problemin çözümü  $N = 3$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x)$$

$$y(x) = -8 + x^2 - (0.2519999999 \cdot 10^{-9})x^3$$

olacak şekilde (4.21) denkleminin yaklaşık çözümü bulunur. Aynı adımlar  $N = 8$  için uygulanırsa örnek 4.3.1'deki problemin Bernoulli polinomları cinsinden yaklaşık çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) + a_4 B_4(x) + a_5 B_5(x) \\ + a_6 B_6(x) + a_7 B_7(x) + a_8 B_8(x)$$

$$y(x) = -8 + (0.9999999997)x^2 + (0.6932845503 \cdot 10^{-10})x^3 - (0.1009030806 \cdot 10^{-9})x^4 \\ + (0.9565579311 \cdot 10^{-10})x^5 - (0.7898768350 \cdot 10^{-10})x^6 \\ + (0.3658209411 \cdot 10^{-10})x^7 - (0.8208153577 \cdot 10^{-11})x^8$$

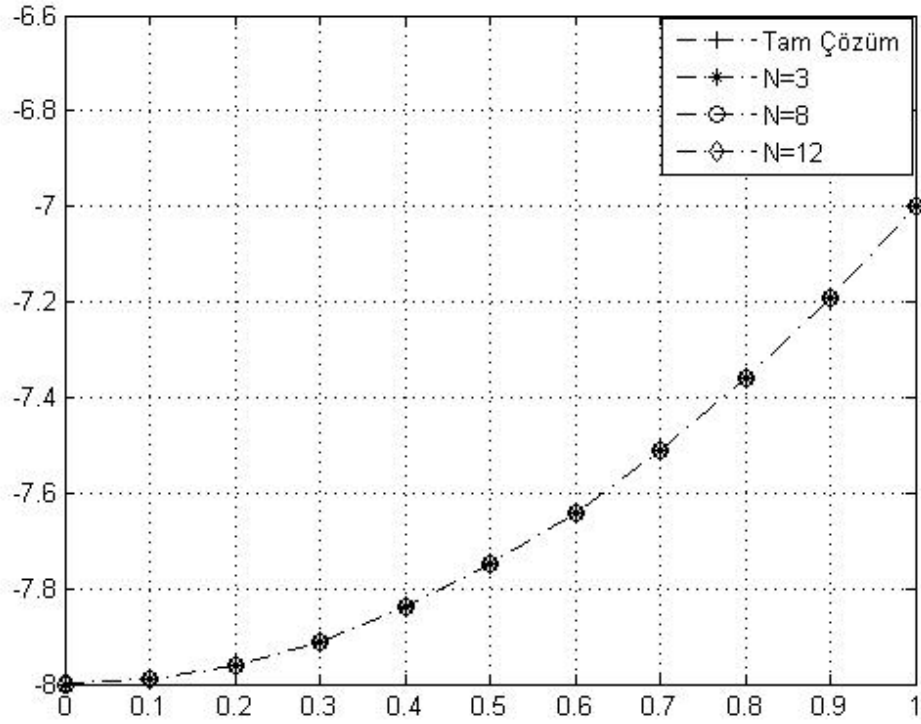
şeklinde bulunur. Aynı adımlar  $N = 12$  için uygulanırsa örnek 4.3.1'deki problemin Bernoulli polinomları cinsinden yaklaşık çözümü,

$$\begin{aligned}
y(x) = & (-7.999999999) - (0.37976 \cdot 10^{-9})x + (1.000000042)x^2 \\
& + (0.462177847 \cdot 10^{-5})x^3 - (0.0000185228439)x^4 \\
& + (0.0000819021568)x^5 - (0.0002643726689)x^6 \\
& + (0.0005333579262)x^7 - (0.0007137385343)x^8 \\
& + (0.0006315337964)x^9 - (0.0003458552864)x^{10} \\
& + (0.0001040210747)x^{11} - (0.00001298968600)x^{12}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Çizelge 4.5.'de belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli Sıralama Yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların nümerik sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.5.'de tam çözüm,  $N = 3, 8$  ve  $12$  için yaklaşık çözümleri gösterilmiştir.

**Çizelge 4.5.**  $N = 3$ ,  $N = 8$   $N = 12$ , için Örnek 4.3.1. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli Sıralama Yöntemi		Bernoulli Sıralama Yöntemi		Bernoulli Sıralama Yöntemi	
		Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata
		$y(x_i)$	$E(x_i)$	$y(x_i)$	$E(x_i)$	$y(x_i)$	$E(x_i)$
		$N = 3$	$N_e = 3$	$N = 8$	$N_e = 8$	$N = 12$	$N_e = 12$
0.0	-8.00000	-8.00000	0.000000	-8.00000	0.000000	-7.99999	0.100E-8
0.1	-7.99000	-7.99000	0.000000	-7.99000	0.000000	-7.98999	0.475E-8
0.2	-7.96000	-7.96000	0.000000	-7.96000	0.000000	-7.95999	0.250E-7
0.3	-7.91000	-7.91000	0.000000	-7.91000	0.000000	-7.90999	0.779E-7
0.4	-7.84000	-7.84000	0.000000	-7.84000	0.000000	-7.83999	0.243E-6
0.5	-7.75000	-7.75000	0.000000	-7.75000	0.000000	-7.74999	0.887E-6
0.6	-7.64000	-7.64000	0.000000	-7.64000	0.000000	-7.63999	0.324E-5
0.7	-7.51000	-7.51000	0.000000	-7.51000	0.000000	-7.50999	0.106E-4
0.8	-7.36000	-7.36000	0.000000	-7.36000	0.000000	-7.35999	0.303E-4
0.9	-7.19000	-7.19000	0.000000	-7.19000	0.000000	-7.18999	0.777E-4
1.0	-7.00000	-7.00000	0.000000	-7.00000	0.000000	-6.99982	0.180E-3



Şekil 4.5. Örnek4.3.1.'in tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

**Örnek 4.3.2.** (Gürbüz, Gülsu, Sezer, 2011) İkinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel fark denklemi

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) + y(x+1) = e^{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.29)$$

başlangıç koşulları

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlıdır. Denklemin tam çözümü  $y_{tam}(x) = e^x$  şeklindedir. Bu denklemi Bernoulli sıralama yöntemiyle çözelim. Bernoulli polinom çözümü  $N = 5$  için (4.4) bağıntısı ile sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{4}{5}, \quad x_5 = 1 \right\}$$

şeklinde verilir. Burada

$$P_{00}(x) = -2, P_{01}(x) = 1, P_{02}(x) = 1, P_{11}(x) = 1, g(x) = e^{x+1}$$

şeklindedir.  $S(\alpha_{hk}, \beta_{hk})$  matrisi (3.37) ile tanımlanmıştır. Burada  $\alpha_{11} = 1$  ve  $\beta_{11} = 1$  olarak verilmiştir. Böylece fonksiyonların matris formları önceki örnekte uygulanan yöntemler kullanılarak elde edilir. Bu matrislere önceki örnekteki benzer işlemler uygulanarak temel matris denklemleri elde edilir. Elde edilen bu temel matris denklemleri önceki örnekteki gibi çözümlenerek Bernoulli katsayılar matrisi bulunur. Bu katsayılar (4.3)'de yerine yazılarak, örnek 4.3.2'deki problemin  $N = 5$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) + a_4 B_4(x) + a_5 B_5(x)$$

$$y(x) = (0.9999999996) + (1.0000000001)x + (0.4999002245)x^2 \\ + (0.1670465403)x^3 + (0.03892569580)x^4 + (0.01260891797)x^5$$

olarak bulunur. Bu işlemler  $N = 8$  için yapıldığında (4.29) probleminin  $N = 8$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = 1 + (0.9999999998)x + (0.5000003561)x^2 + (0.1666671560)x^3 \\ + (0.04166855472)x^4 + (0.008324920186)x^5 \\ + (0.001405193058)x^6 + (0.0001744701236)x^7 \\ + (0.00004046511390)x^8$$

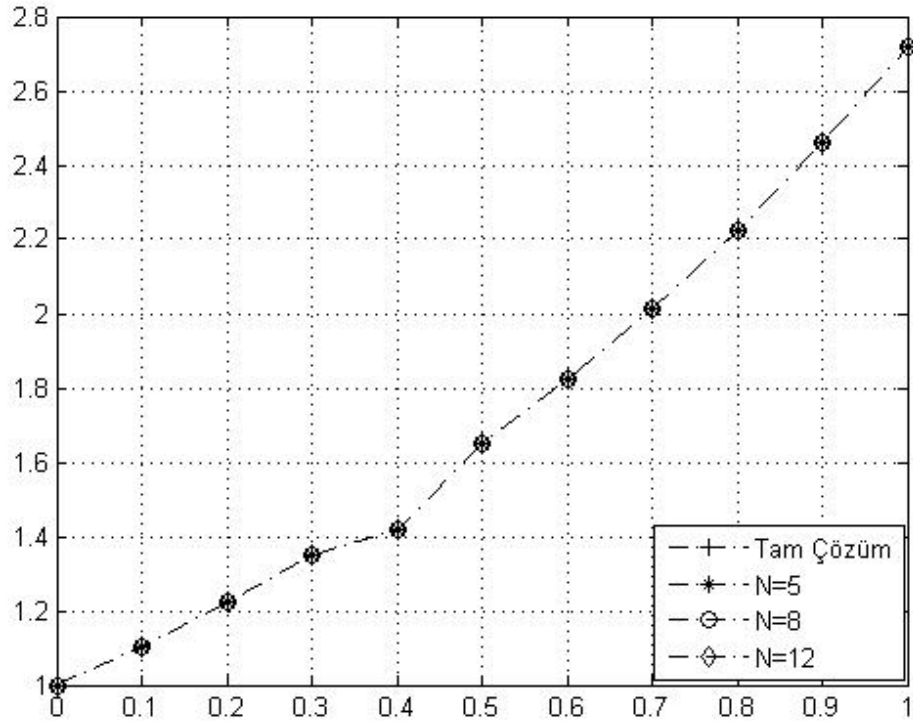
olarak bulunur. Bu işlemler  $N = 12$  için yapıldığında (4.29) probleminin  $N = 12$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$\begin{aligned}
y(x) = & 1.000000001 + (0.9999999993)x + (0.4999849962)x^2 \\
& + (0.1666482430)x^3 + (0.04166826333)x^4 \\
& + (0.008401388781)x^5 + (0.001336203784)x^6 \\
& + (0.0005102921392)x^7 - (0.0005696636079)x^8 \\
& + (0.0006886401510)x^9 - (0.0005602664734)x^{10} \\
& + (0.0002431741907)x^{11} - (0.00003943615964)x^{12}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Çizelge 4.6.'da belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli Sıralama Yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların nümerik sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.6.'de tam çözüm,  $N = 5, 8$  ve  $N = 12$  için yaklaşık çözümleri gösterilmiştir.

**Çizelge 4.6.**  $N = 5$ ,  $N = 8$   $N = 12$ , için Örnek 4.3.2. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli Sıralama Yöntemi		Bernoulli Sıralama Yöntemi		Bernoulli Sıralama Yöntemi	
		Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata	Mutlak Hata
		$E(x_i)$	$E(x_i)$	$E(x_i)$	$E(x_i)$	$E(x_i)$	$E(x_i)$
		$N = 5$	$N_e = 5$	$N = 8$	$N_e = 8$	$N = 12$	$N_e = 12$
0.0	1.000000	1.000000	0.10E-18	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.105171	1.105170	0.851E-6	1.105171	0.413E-8	1.105171	0.12E-11
0.2	1.221403	1.221399	0.406E-5	1.221403	0.191E-7	1.221403	0.73E-11
0.3	1.349859	1.349847	0.116E-4	1.349859	0.475E-7	1.349859	0.22E-10
0.4	1.419825	1.419800	0.241E-4	1.419825	0.873E-7	1.419825	0.49E-10
0.5	1.648721	1.648683	0.385E-4	1.648721	0.128E-6	1.648721	0.89E-10
0.6	1.822119	1.822071	0.474E-4	1.822119	0.149E-6	1.822119	0.135E-9
0.7	2.013753	2.013713	0.394E-4	2.013753	0.113E-6	2.013753	0.170E-9
0.8	2.225541	2.225540	0.130E-5	2.225541	0.224E-7	2.225541	0.163E-9
0.9	2.459603	2.459681	0.776E-4	2.459603	0.295E-6	2.459603	0.73E-10
1.0	2.718282	2.718481	0.200E-3	2.718281	0.706E-6	2.718282	0.142E-9



Şekil 4.6. Örnek4.3.2.'in tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

#### 4.4. Lineer Fredholm İntegro-Diferansiyel Fark Denklemlerin Uygulamaları

**Örnek 4.4.1.** (Gülsu, Öztürk, Sezer, 2010)

$$\begin{aligned}
 (x+4)^2 y''(x) - (x+4)y'(x) + y(x-1) - y'(x-1) &= \ln(x+3) - \frac{1}{x+3} \\
 + 3 \ln(3) - 5 \ln(5) + \int_{-1}^1 y(t) dt & \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Fredholm integro-diferansiyel fark denklemini,

$$y(0) = \ln(4), \quad y'(0) = \frac{1}{4} \quad (4.32)$$

koşullarında Bernoulli sıralama yöntemiyle çözelim. Denkleminizin tam çözümü  $y_{tam}(x) = \ln(x+4)$ . Bernoulli polinom çözümü  $N = 3$  için

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x)$$

şeklinde ifade edilir. (4.4) bağıntısı ile sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, \quad x_1 = 1/3, \quad x_2 = 2/3, \quad x_3 = 1\}$$

şeklinde verilir. Burada,

$$P_{00}(x) = 0, \quad P_{01}(x) = -(x+4), \quad P_{02}(x) = (x+4)^2, \quad P_{11}(x) = 1, \quad P_{22}(x) = -1,$$

$$g(x) = \ln(x+3) - \frac{1}{x+3} + 3 \ln(3) - 5 \ln(5), \quad \alpha_{11} = 1, \quad \beta_{11} = -1, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \beta_{22} = -1$$

şeklinde olup (3.20) ifadesinden  $K_f(x, t)$  ve  $\lambda$  değerleri

$$K_f(x, t) = 1, \quad \lambda = 1$$

olduğundan, bölüm (3.1.4)'den (3.46) denkleminin matris formu,

$$\underbrace{\left( \sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{hk} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{hk}, \beta_{hk}) \mathbf{M}^k \mathbf{S} - \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}) \right)}_{\mathbf{W}_{cf}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.33)$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{cf} = & \mathbf{P}_{00} \mathbf{X} \mathbf{S} + \mathbf{P}_{01} \mathbf{X} \mathbf{M} \mathbf{S} + \mathbf{P}_{02} \mathbf{X} \mathbf{M}^2 \mathbf{S} + \mathbf{P}_{11} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11}) \mathbf{S} \\ & + \mathbf{P}_{22} \mathbf{X} \mathbf{M} \mathbf{S}(\alpha_{22}, \beta_{22}) \mathbf{S} - \lambda (\mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\mathbf{W}_{cf} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Rightarrow [\mathbf{W}_{cf}; \mathbf{G}] \quad (4.35)$$

şeklinde dir. Burada  $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{02}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11}), \mathbf{S}(\alpha_{22}, \beta_{22}), \mathbf{K}_f, \mathbf{Q}, \mathbf{G}$  matrisleri bölüm (3.1.4)'den yararlanılarak hesaplandığında

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{02} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 94/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 109/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}(\alpha_{11}, \beta_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}(\alpha_{22}, \beta_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 7/6 & -7/6 & 37/30 \\ 1 & -7/6 & 121/90 & -3/2 \\ -1 & 37/30 & -3/2 & 184/105 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -279/70 \\ -277/72 \\ -257/69 \\ -535/148 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada matrisler (4.21)'de yerine yazılırsa,

$$[\mathbf{W}_{cf}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & -11/2 & 241/6 & -117/2 & ; & -279/70 \\ -1 & -11/2 & 749/18 & -599/27 & ; & -277/72 \\ -1 & -11/2 & 779/18 & 662/31 & ; & -257/69 \\ -1 & -11/2 & 271/6 & 73 & ; & -535/148 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Koşullar kullanılarak bulunan arttırılmış matris (3.18)'den,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 & ; & \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & \ln(4) \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 1/4 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

olarak bulunur. (4.36) matrisinin son iki satırı silinip yerine (4.37) koşul matrisi yazılırsa arttırılmış matrisin son hali,

$$[\tilde{\mathbf{W}}_{cf}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -1 & -11/2 & 241/6 & -117/2 & ; & -279/70 \\ -1 & -11/2 & 749/18 & -599/27 & ; & -277/72 \\ 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & ; & \ln(4) \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & ; & 1/4 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

elde edilmiş olur. Burada  $\det(\tilde{\mathbf{W}}_{cf}) \neq 0$  olduğundan

$$\mathbf{A} = [374/249 \quad 23/103 \quad -6/247 \quad 37/7732]^T$$

Bernoulli katsayılar matrisi bulunur. Böylece bu katsayılar (4.35)'de yerine yazılarak, örnek 4.4.1'deki problemin  $N = 3$  için Bernoulli polinomları cinsinden çözümü,

$$y(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x)$$

$$y(x) = (1.386294361) + (0.25)x - (0.03147486168)x^2 + (0.004785614533)x^3$$

şeklinde bulunur. Aynı adımlar  $N = 8$  için uygulanırsa örnek 4.4.1.'deki problemin  $N = 8$  için Bernoulli polinomları cinsinden yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = & 1.386294362 + (0.25)x - (0.03124981336)x^2 + (0.005208517014)x^3 \\ & - (0.00097757993440)x^4 + (0.0001968365655)x^5 \\ & - (0.00004161207904)x^6 + (0.8458051133 \cdot 10^{-5})x^7 \\ & - (0.1151194823 \cdot 10^{-5})x^8 \end{aligned}$$

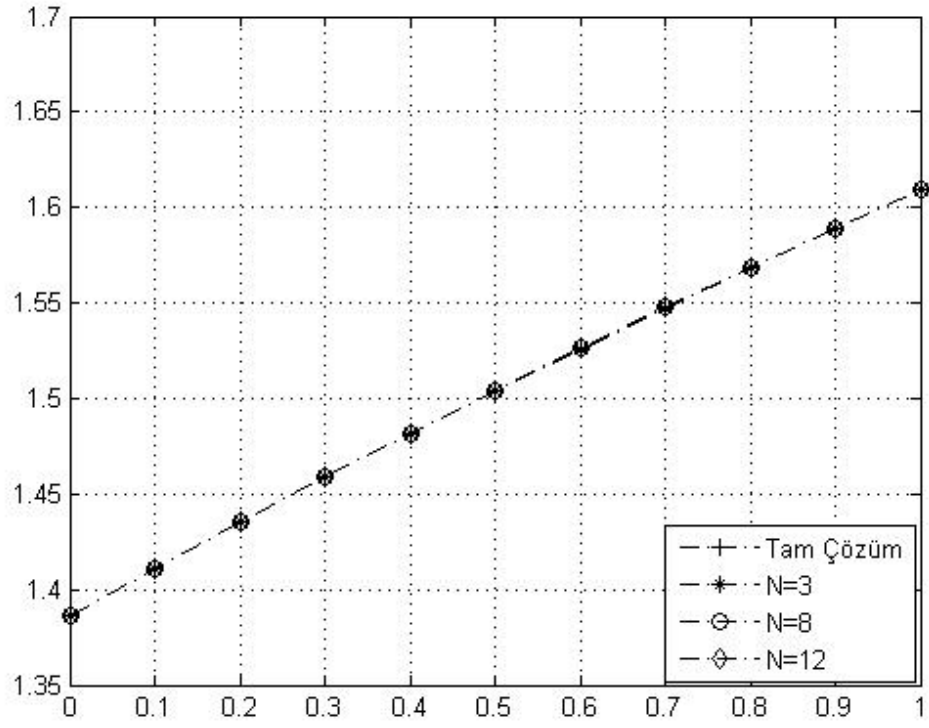
şeklinde bulunur. Aynı adımlar  $N = 12$  için uygulanırsa örnek 4.4.1.'deki problemin  $N = 12$  için Bernoulli polinomları cinsinden yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
y(x) = & 1.386294361 + (0.2500000001)x - (0.03125395849)x^2 \\
& + (0.005220094402)x^3 - (0.0009920544850)x^4 \\
& + (0.0002016875930)x^5 - (0.00003042924016)x^6 \\
& - (0.00001067560645)x^7 + (0.00001235418569)x^8 \\
& - (0.239971715 \cdot 10^{-5})x^9 - (0.3713907255 \cdot 10^{-5})x^{10} \\
& + (0.3039324211 \cdot 10^{-5})x^{11} - (0.7575351195 \cdot 10^{-6})x^{12}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Çizelge 4.7.'de belirli  $N$  değerleri için uygulanan Bernoulli sıralama yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve mutlak hataların numeric sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.7.'de tam çözüm,  $N = 3, 8$  ve  $N = 12$  için yaklaşık çözümler gösterilmiştir.

Çizelge 4.7.  $N = 3$ ,  $N = 8$ ,  $N = 12$ , için Örnek 4.4.1. nin nümerik sonuçları

$x$	Tam Çözüm	Bernoulli Sıralama Yöntemi		Bernoulli Sıralama Yöntemi		Bernoulli Sıralama Yöntemi	
		$N = 3$	$N_e = 3$	$N = 8$	$N_e = 8$	$N = 12$	$N_e = 12$
0.0	1.386294	1.386294	0.000000	1.386294	0.000000	1.386294	0.000000
0.1	1.410987	1.410984	0.258E-5	1.410987	0.194E-8	1.410987	0.67E-10
0.2	1.435085	1.435074	0.109E-4	1.435085	0.767E-8	1.435085	0.260E-9
0.3	1.458615	1.458591	0.242E-4	1.458615	0.165E-7	1.458615	0.579E-9
0.4	1.481605	1.481564	0.399E-4	1.481605	0.273E-7	1.481605	0.902E-9
0.5	1.504077	1.504024	0.535E-4	1.504077	0.394E-7	1.504077	0.129E-8
0.6	1.526056	1.525997	0.592E-4	1.526056	0.521E-7	1.526056	0.170E-8
0.7	1.547563	1.547513	0.494E-4	1.547563	0.652E-7	1.547563	0.212E-8
0.8	1.568616	1.568601	0.152E-4	1.568616	0.784E-7	1.568616	0.255E-8
0.9	1.589235	1.589288	0.532E-4	1.589235	0.917E-7	1.589235	0.298E-8
1.0	1.609438	1.609605	0.167E-3	1.609438	0.104E-6	1.609438	0.341E-8



Şekil 4.7. Örnek4.4.1.'in tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer diferansiyel ve integro-diferansiyel fark denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasının zor olduğu durumlarda yaklaşık çözümlere ihtiyaç duyulur. Buna bağlı olarak, çalışmanın üçüncü bölümünde tam çözümlerin ve yaklaşık çözümlerin bulunması Bernoulli sıralama yöntemiyle sunulmuştur.

$(-\infty, \infty)$  aralığında tanımlı Bernoulli polinomlarına dayalı olan bu yöntem, istenilen herhangi bir lineer diferansiyel veya integro-diferansiyel fark denklemlerine  $-\infty < a \leq x, t \leq b < \infty$  aralığında bulunan keyfi bir  $a \leq x, t \leq b$  aralığında uygulanabilir.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde ise lineer diferansiyel denklemleri, Fredholm integro-diferansiyel denklemleri, lineer diferansiyel fark denklemleri, Fredholm integro-diferansiyel fark denklemleri Bernoulli sıralama yöntemi ile çözülmüştür. Bu yöntemeye dayalı olarak tam çözümler veya farklı  $N$  değerleri için yaklaşık çözümler bulunarak ilgili örnekler çözülmüştür. Çözülen örnekler için tam çözüm ve farklı  $N$  değerleri için bulunan çözümlerin grafikleri çizilmiş ve hata analizleri yapılmıştır. Bu grafiklerde çoğunlukla bu çözümlerin  $N$  kesme sınırı yeterince arttırıldığında tam çözüme daha iyi yaklaşıldığı görülmüştür. Böylece örneklerin sonunda çizilen grafiklerden ve hata analizlerinden de görüldüğü üzere yöntemin iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Farklı  $N$  değerleri için bilgisayar programları hazırlanarak, değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer diferansiyel, diferansiyel fark veya integro-diferansiyel fark denklemlerin çözümlerinin hızlı ve hatasız bir şekilde bulunması kullanılan yöntemin sağladığı bir diğer fayda olarak açıkça sunulmuştur.

Değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer diferansiyel, diferansiyel fark ve integro-diferansiyel fark denklemlerinin çözümü için sunulan bu yöntem bir adım ileriye gidilerek  $-\infty < a \leq x, t \leq b < \infty$  aralığında tanımlanan

$$\sum_{h=0}^L \sum_{k=0}^m P_{hk}(x) y^{(k)}(\alpha_{hk}x + \beta_{hk}) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b K_f(x,t) y(t) dt + \lambda_2 \int_a^x K_v(x,t) y(t) dt$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

koşulları altında lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel fark denklemlerinin çözümünü

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

Bernoulli serisi formunda elde etmek için kullanılabilir.

## KAYNAKLAR

- Arfken, G.B., Weber H.J., (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*, Academic, Amerika Birleşik Devletleri, 933s.
- Anapalı, A., (2013), *Kesirli İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 80s
- Bozkurt, G., (2011), *Linear İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Polinom Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 115s
- Elyaydi, S.N., (2005) *An introduction to difference equations* Springer, Amerika Birleşik Devletleri, 539s.
- Gülsu, M. ve Sezer, M. (2005) Approximations to the solution of linear Fredholm integro differential-difference equation of high order, *J Franklin Institute*, 343: 720-737.
- Gülsu, M. ve Sezer, M. (2005) A method for the approximate solution of the high-order linear difference equations in terms of Taylor polynomials. *Int J Comput Math*, 82, 5: 629–642.
- Gülsu, M., Öztürk, Y. ve Sezer, M. (2005) A new collocation method for solution of mixed linear integro-differential-difference equations, *Appl Math Comp*, 216: 2183-2198.
- İlhan, Ö., (2012) *Linear İntegral ve İntegro – Diferansiyel Denklemlerin Morgan-Voyce Polinom Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 123s.
- Karamete, A. ve Sezer, M. (2002) A Taylor collocation method for the solution of linear integrodifferential equations, *Int J Comput Math*, 79: 987–1000.
- Sezer, M. ve Gülsu, M. (2005) Polynomial solution of the most general linear Fredholm integrodifferential-difference equation by means of Taylor matrix

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Ad Soyadı : Gül Gözde BİÇER  
Uyruk : T.C.  
Doğum Yeri ve Tarihi: MUĞLA-1988  
E-posta : gulgozdebicer@hotmail.com

### Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Muğla Anadolu Lisesi	2006
Lisans	Muğla Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2014

### İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
Eylül 2012 – Haziran 2013	Özel Yücelen Anadolu Sağlık Meslek Lisesi	Matematik Öğretmeni
Ocak 2014 – Nisan 2014	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

### Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma	X		
Anlama		X	
Okuma		X	