

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

Kod No : 10.0600.0000.045

36038

KUANTUM MEKANİĞİNDE YARIKLASİK YAKLAŞIM

(YÜKSEK LİSANS ÇALIŞMASI)

HAZIRLAYAN

Murat GERÇEKLIOĞLU

Bu tez ,

Prof. Dr. Ali KULİEV (Jüri Başkanı)

Prof. Dr. Hüseyin ERBİL

Doç. Dr. Doğan DEMİRHAN' dan

oluşan jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir

BORNOVA - İZMİR

1994

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında kendisinden gördüğüm yardım, sabır ve anlayıştan dolayı muhterem hocam, Prof.Dr.H.Hüseyin Erbil'e müteşekkirim.

Ayrıca, içinde bulunduğumuz kısıtlı imkanlara rağmen bizlere, fiziğin çağdaş kavramlarını mümkün olan en iyi şekilde aktarmaya çalışan, teşvik eden tüm hocalarıma özellikle Doç.Dr.Fevzi Büyükkılıç'a ve Doç.Dr. Doğan Demirhan'a bu vesile ile teşekkürlerimi iletmek isterim. Tezin yazılması sırasında büyük yardımı dokunan aziz dostum Ar.Gör. Serhat F. Özeren'e ve şekilleri itina ile çizen teknisyen Fatma Tümer'e de teşekkür borçluyum.

ÖNSÖZ

Kuantum mekaniğinde Schrödinger denklemini çözmek için kullanılan yöntemler ayrı bir çalışma sahası teşkil edecek kadar geniştir. Bu yöntemler arasında özel bir konuma sahip olan yarıklasik yaklaşıma (WKB) teorik fizikte kuantum mekaniğinden gravitasyon teorilerine kadar pek çok alanda , bazen değişik isimler altında , çok sık rastlanmaktadır. Yarıklasik yaklaşım ile komütatif olmayan bir cebirden komütatif bir cebre geçiş bölgesinde (klasik limit) çalışılmaktadır. Elde edilen sonuçlar kuantum mekaniksel özellikler gösterdiği gibi klasik mekaniğe göre incelenen makroskopik sistemlerin özelliklerini de göstermektedir. Bu ilginç yöntem bu çalışmada genel olarak ele alınarak tek kuyulu potansiyeller için tamlığı (adi ve süpersimetrik halde) tartışılmıştır ve amaca uygun olmadığı için ileri düzeydeki hemen her kuantum mekaniği kitabında bulunabilecek fiziksel orjini ve özel uygulamaları ile ilgilenilmemiştir. Matematiksel bir yaklaşımla , sözkonusu edilen potansiyellerin kuantum mekaniğindeki yeri ve fonksiyonu üzerinde durulmamış, bunun yerine matematiksel özellikleri ile ilgilenilmiştir.

Bu çalışmada konular şöyle sıralanmıştır: Birinci bölümde WKB ve genelleştirilmiş formunun türetilmesi verilmiştir. İkinci bölümde kısaca süpersimetrik kuantum mekaniği tanıtılarak süpersimetrik WKB (SWKB) yaklaşımı sunulmuş ve tamlığı üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde ise Fröman ve Fröman (FF) teorisi dahilinde kuantumlanma koşulunu türetmek için kullanılan teknik tanıtılarak bu tekniğin süpersimetrik hamiltonyene genişletilmesi incelenmiştir. Bu yolla elde edilen bağıntılar kullanılarak tek kuyulu potansiyeller için gözlenen tamlığın nedeni tartışılarak adi ve süpersimetrik harmonik osilatörün tamlığının nasıl ispatlanabileceği gösterilmiştir.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

BÖLÜM 1. WKB YAKLAŞIMI

Sayfa No

1.1 WKB Yaklaşımı _ _ _ _ _ 3

1.2 Genelleştirilmiş WKB Formülü _ _ _ _ _ 5

BÖLÜM 2. SÜPERSİMETRİK WKB (SWKB) YAKLAŞIMI

2.1 Süpersimetrik Kuantum Mekaniği _ _ _ _ _ 9

2.2 SWKB Formülü _ _ _ _ _ 12

BÖLÜM 3. FRÖMAN VE FRÖMAN TEORİSİ KUANTUMLANMA KOŞULLARI

3.1 Fröman ve Fröman Tekniği _ _ _ _ _ 18

3.2 Fröman ve Fröman Formunda SWKB Kuantumlanma Koşulu _ _ _ _ _ 25

3.3 Harmonik Osilatörün Tamlığı _ _ _ _ _ 29

EK : F MATRİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE ROSEN-MORSE POTANSİYELİNİN TAMLIĞI _ _ _ _ _ 31

SONUÇ _ _ _ _ _ 42

ÖZET _ _ _ _ _ 43

SUMMARY _ _ _ _ _ 43

LİTERATÜR LİSTESİ _ _ _ _ _ 44

ŞEKİL LİSTESİ :

Sayfa No :

Şekil. 1: Tek Kuyulu Potansiyeller için Kullanılan Fazlar	14
Şekil. 2: Tek Kuyulu Potansiyeller için Yapılan Dal Kesiti	21
Şekil. 3: Harmonik Osilatör için Seçilen Integral Yolu	30
EK Şekil.1: Rosen-Morse Potansiyeli için Yapılan Dal Kesiti	36
EK Şekil. 2: Rosen-Morse Potansiyeli için Seçilen Integral Yolu	39

ABSTRAKT

Bu çalışmada , WKB yaklaşımının ve Matematiksel Fiziğin güncel problemlerinden biri olan SWKB yaklaşımının tamlığı Fröman ve Fröman tekniğine bağlı kalarak incelendi .Bu tekniğin tek kuyulu potansiyeller için süpersimetrik hale genişletilmesi üzerinde duruldu .

ABSTRACT

In this work , conditions for the exactness of the WKB approximation and also for the exactness the SWKB approximation which is one of the recent problems in Mathematical Physics has been investigated using the Fröman and Fröman technique. Extention of this technique to the supersymetric case for the single-well potentials has been examined .

GİRİŞ

Kuantum mekaniğine göre fiziksel bir sistemi betimleyen Schödinger denklemini çözmek , genelde , kolay bir iş değildir. Kolayca çözülemediğinde çözmek için, potansiyelin tabiatına göre en çok kullanılan yöntemler pertürbasyon,varyasyon ve yarıklasik (WKB) yaklaşımıdır. Yarıklasik yaklaşım denen klasik mekanikle kuantum mekaniği arasındaki ilişkiyi veren bu yöntem , 1920'li yıllardan itibaren iyi bilinip kullanılmaktadır.Gerçekte asimtotik bir temsil olan WKB yaklaşımı ,kuantum mekaniği dışında başka alanlara da (örneğin optik dalga klavuzları teorisi) uygulanmış ve iyi sonuçlar elde edilmiştir.Bu konudaki önemli bir gelişme N.Fröman ve P.O.Fröman tarafından esas olarak bir matrisin elemanlarını hesaplamaya dayanan bir teorinin yapılmasıdır.Fröman ve Fröman (FF) geliştirdikleri teoride asimtotik seriler yerine diferansiyel denklemin tam bir çözümü olan yakınsak bir seri açılım kullandılar. FF teorisinin genel yönetime göre bazı üstünlükleri şöyle sıralanabilir :

WKB yönteminde matematiksel problemlerden biri denklemin çözümü olan fonksiyonun klasik olarak izinli bölgeden klasik olarak yasak bölgeye veya bunun tam tersi durumda nasıl sürdürüleceğidir. Ancak , literatürde bu konuya netlik kazandırılmamıştır . İlişki (connection) formüllerinin tek yönlü tabiatı da hiç vurgulanmamıştır [10,12]. Kuantum mekaniği üzerine yazılmış pek çok kitapta ilişki formülleri her iki yönde de kullanılmıştır. Örneğin potansiyel engeli probleminde sonuçlar sadece karışık ve önemsiz terimler ihtiva etmekle kalmamış,bazen ciddi zorluklar bile görülebilmektedir [12]. Değinilen bu problemler FF tarafından çözüme kavuşturulmuştur [3,4,5].

Konuyla ilgili literatürde , karmaşık düzlemde iyi tanımlı olduğu bölgelerdeki WKB tipi yaklaşık çözümlerin varlığı için tesis edilmiş koşullarla ilgili pek çok çalışma vardır [8,9,11].Bu koşulları yerine getirmek için yazarlar, sadece ilk terimleri WKB

formüllerini veren asimtotik açılımları kullanmıştır.Böylece ortaya çıkan hatalar,belirli olmayan,aslında gerekli olan, O-sembolleri cinsinden ifade edilmiştir[8].Fakat FF tarafından yakınsak bir seri kullanılarak bu hataların üst sınırları belirlenmiştir.

FF geliştirdikleri teori çerçevesinde WKB yaklaşımı için bir kuantumlanma koşulu ve teorilerini kullanarak harmonik osilatör için kuantumlanma koşulunun tamlığını (exactness) ispatladılar.Önceden WKB kuantumlanma koşulu küçük bir düzeltme yapılırsa Coulomb ve üç boyutlu izotropik harmonik osilatör için tam enerji değerlerinin elde edilebileceği biliniyordu.Langer genel halde, radyal problemler için bu düzeltmeyi yaptı [10].Daha sonra 1968' de C. Rosenzweig ve J.B. Krieger bazı önemli potansiyellerin tamlığını FF teorisi dahilinde ispatladılar [15].İşte bu çalışmanın ana konusu , son zamanlarda Comtet ve arkadaşları tarafından geliştirilen süpersimetrik kuantumlanma koşulunun FF teorisine bağlı kalarak tamlik koşullarını incelemektir.

BÖLÜM 1. WKB YAKLAŞIMI

1.1 WKB Yaklaşımı

Belirli bir $V(x)$ potansiyeline sahip, tek parçacıklı bir sistemin Schrödinger denklemi ($2m=1$ alınarak)

$$\hat{H}\Psi = [\hat{P}^2 + V(x)] = E\Psi \quad (1.1)$$

şeklinde dir. (1.1) Denklemi , karşılığı olan klasik sistemin çözümlerinden yararlanarak yaklaşık olarak çözülebilir. Klasik denkleme de Broglie'nin maddenin dalga tabiatına ait düşüncesi uygulanırsa klasik limitte (kısa dalga boyu), parçacığın dalga fonksiyonu, $S(x)$ aksiyonu olmak üzere ,

$$\Psi \approx \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x)\right) \quad (1.2)$$

formunda olması gerekir[10]. Bu dalga fonksiyonu ile başlayarak (1.1) denkleminin çözümü için iyi bir yaklaşım yapılabilir. (1.2) ifadesi (1.1)'de yerine koyulursa,

$$-S'^2 + i\hbar S'' + E - V(x) = 0 \quad (1.3)$$

elde edilir ve yarıklasik yaklaşım yapmanın esprisi S' 'yi $\hbar$ 'nin kuvvet serisine açmaktır;

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i}S_1 + O(\hbar^2) \quad (1.4)$$

(1.4) , (1.3)'te koyulup $O(\hbar^0)$ terimleri alınır ,

$$(S'_0)^2 = E - V(x) = P^2 \quad (1.5)$$

bulunur . Benzer şekilde $O(\hbar^1)$ terimleri alınır (1.5) kullanılarak,

$$S_1 = -\frac{1}{4} \ln(|E - V|) \quad (1.6)$$

bulunur. Böylece yaklaşık ψ dalga fonksiyonu için ,

$$\Psi = \frac{C_{\pm}}{\sqrt{|P(x)|}} \exp(\pm \frac{i}{\hbar} \int^x P(u) du) \quad (1.7)$$

değeri elde edilir.

Bu yaklaşım metodunun birçok uygulama alanı vardır.Örneğin kuantum mekaniğinde,hamiltonyenin bağlı hallerininin yaklaşık enerji özdeğerlerini bulmak için kullanılabilir.En basit örnek tek kuyulu potansiyeldir.Klasik dönme noktaları a ve b ise , $V(a)=V(b)=E$ olur.Bu noktalarda dalga fonksiyonu karşılaştırılır ve standart bir hesapla;

$$\int_a^b P(x) dx = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \quad (1.8)$$

kuantumlanma koşulu elde edilir.(1.8) Bohr-Sommerle kuantumlanma koşulunun tek boyutlu benzeridir.Gerçekte (1.7) ψ dalga fonksiyonu ,

$$(\frac{d^2}{dx^2} + P^2 + \frac{3P'^2}{4P^2} - \frac{P''}{2P}) \Psi = 0$$

diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.Bu ifade (1.7) ψ dalga fonksiyonunun ve enerji kuantumlanma koşulunun,

$$\frac{P'}{P} \sim 0 \quad , \quad \frac{P''}{P} \sim 0 \quad (1.9)$$

olduğunda iyi bir yaklaşım olduğunu gösterir . Bu durum potansiyel yavaşça değiştiğinde ve E büyük olduğunda meydana gelir [10].WKB kuantumlanma koşulu harmonik osilatör halinde tüm n'ler için tam sonuç verir. Bu potansiyelin (1.9) koşulunu ihlal etmesi beklenmeyen bir sonuçtur. Görüldüğü gibi doğrudan matematiksel bir bakış açısı ile kuantumlanma koşulunun tamlığını anlamak mümkün değildir.

1.2 Genelleştirilmiş WKB Formülü

Gerçekte Shrödinger denklemi reel özdeğerli (H hermitik) bir Strum-Lioville denklemdir ve Strum-Lioville denklemleri için iyi bilinen bir teoreme göre farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar farklı sayıda düğümlere sahiptir[13]. Tek boyutlu Strum-Lioville operatörünün spektrumunda hiçbir dejenerlik yoktur ve temel halde hiçbir düğümü olmadığı için , özfonksiyonlar, tamamen düğüm sayıları yardımı ile $n = 0, 1, 2, \dots$ sınıflandırılabilir [13] .Bu şöyle gerçekleştirilebilir : Schrödinger denklemi ,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + Q^2 \right) \Psi = 0 \quad (1.10)$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse bu denklem ikinci mertebedir ve genelde Ψ iki bağımsız çözümün lineer kombinasyonu olacaktır. $\hat{H}$ hermitik olduğundan Q^2 reel bir fonksiyon olduğu için (1.10)'nun karmaşık eşleniği alındığında Ψ^* 'ın da (1.10)'nun bir çözümü olduğu görülür.

Şimdi C sabit, $M(x)$ ve $N(x)$ reel fonksiyonlar ise Ψ dalga fonksiyonu,

$$\Psi = C \exp(iM + N)$$

formunda alınıp (1.10)'da yerine koyulursa,

$$(iM' + N')^2 + (iM'' + N'') + Q^2 = 0 \quad (1.11)$$

elde edilir. Ψ^* için de aynı şey yapılırsa ,

$$(-iM' + N')^2 + (-iM'' + N'') + Q^2 = 0 \quad (1.12)$$

bulunur. (1.11)'den (1.12) çıkarılırsa ,

$$2MN' + M' = 0 \quad (1.13)$$

denkleminde ulaşılır. (1.13) integre edilirse Ψ için,

$$\Psi = \frac{C}{\sqrt{|M|}} \exp(iM)$$

ifadesine ulaşılır. Toplam çözüm ise,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{|M|}} [C_1 \exp(iM) + C_2 \exp(-iM)] \quad (1.14)$$

olur. Elde edilen (1.14) Ψ dalga fonksiyonunun WKB dalga fonksiyonlarına benzediği görülüyor. Fakat dikkat edilirse bulunan bu ifade sadece $\hat{H}$ 'nin hermitikliğinin bir sonucudur. (1.14) ifadesinde $M'=q$ alınırsa ve (1.10)'da yerine yazılırsa,

$$\frac{3}{4} \left(\frac{q'}{q} \right)^2 - \frac{q''}{2q} - q^2 + Q^2 = 0 \quad (1.15)$$

bulunur. Eğer,

$$q^2 = Q^2$$

alınırsa, iyi bir yaklaşımla bulunan dalga fonksiyonu tam olarak WKB dalga fonksiyonu olur. Açıkça görüldüğü gibi bağlı halleri elde ederken $Q^2 > 0$ için Ψ sinüsoidal $Q^2 < 0$ için ise eksponansiyel artan veya azalandır. C_1 ve C_2 dalga fonksiyonunun normalizasyonu ve sınır koşulları ile bulunabilir. Şimdi Ψ 'nin kaçtane sıfırı olacağı bulunabilir. $\psi(x) = 0$ yapan sıfır noktalarında parçacık bulunma olasılığı da sıfır olur; $\psi \cdot \psi^* = 0$ koşulu ,

$$\tan(2f) = \frac{(C_1 C_2^* + C_1^* C_2)}{(C_1 C_2^* - C_1^* C_2)}$$

ise ,

$$\sin(2M + 2f) = - \frac{|C_1|^2 + |C_2|^2}{\sqrt{2(C_1^2 C_2^{*2} + C_1^{*2} C_2^2)}}$$

şekline getirilebilir.(1.16)'nın her iki tarafının arcsinüsü alınırsa, 2Δ bir faz kayması olmak üzere ,

$$2M + 2f = 2\Delta + 2\pi j \quad (1.17)$$

ifadesine ulaşılır. (1.17)'de;

$$M = \int_a^x q \, dx$$

ve j , a ve x arasındaki düğüm sayısı (fonksiyonun sıfırları) 'dır. O halde,

$$\Delta - f = \mu$$

kısaltması yapılarak,

$$\int_a^x q \, dx = n\pi + \mu \quad (1.18)$$

bölünür. (1.18) tam kuantumlanma koşuludur , fakat μ özdeğerin bir fonksiyonudur, ayrıca (1.15) denkleminin tam çözümünü bulmak çok zor olduğu için (1.18) ifadesi özdeğer spektrumunu bulmak için kullanılamaz [7]. (1.18) ifadesine bakılırsa n 'nin küçük değerlerinde

$$\int_a^x q \, dx$$

ile tanımlı faz integralinin değeri büyük ölçüde μ 'ye bağlı olacaktır .Ancak n 'nin büyük değerlerinde,

$$\int_a^x q \, dx \approx n\pi$$

şeklinde yazılabilir. Büyük n'lerdeki bu tamlik Bohr korespondans ilkesinin bir örneğidir. Elde edilen sonuca göre, herhangi bir yarıklasik yaklaşımda böyle bir uyuşmanın olması beklenir.



BÖLÜM 2. SÜPERSİMETRİK WKB (SWKB) YAKLAŞIMI

Bu bölümde kısaca süpersimetri kavramı üzerinde durularak süpersimetrik kuantum mekaniği ve operatörleri tanımlanacaktır. Bunun ardından SWKB dalga fonksiyonları ve kuantumlanma koşulunun türetilmesi verildikten sonra SWKB kuantumlanma koşulunun tamlığı tartışılacaktır.

2.1. Süpersimetrik Kuantum Mekaniği

Kuantum alan teorisinde, simetri dönüşümleri önceleri sadece bozon sistemleri veya sadece fermiyon sistemlerinin kendi aralarında yapılabiliyordu. 1970'li yılların başında J.Weese ve B.Zumino ile birlikte bazı Rus teorisyenler, adı alan teorilerinin invaryans özelliklerine sahip ve fermiyonik operatörlere göre ek (süper) bir simetrisi daha olan yeni bir alan teorisinin yapılabileceğini keşfettiler [16]. Bu gelişmenin ardından gelen çalışmalarla Süpersimetri, bozonlar ve fermiyonlar arasındaki dönüşümleri üreten bir simetri olarak kuantum alan teorisindeki yerini almış oldu. 1981'de E. Witten süpersimetri kavramını kuantum mekaniğine aktardı [17].

Süpersimetrik kuantum mekaniksel bir sistemi betimleyen hamiltonyen operatörü, Φ süperpotansiyel ise şu formdadır :

$$\hat{H}_{\pm} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \Phi^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(x) \quad (2.1)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x) \quad (2.2)$$

Burada, süpersimetrik hamiltonyenin kuantum alan teorisinin tekniklerinin kullanılarak elde edilişi bu çalışmanın amacının dışında olduğu için, direkt olarak tanımlandı. Şimdi de şu operatörler tanımlanırsa;

$$\hat{B}^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\partial}{\partial x} + \Phi(x) \quad ; \quad \hat{B} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\partial}{\partial x} + \Phi(x) \quad (2.3)$$

(2.3) operatörleri yardımı ile (2.1)'deki hamiltonyenler şöyledir :

$$\hat{H}_+ = \hat{B}\hat{B}^+ \quad \hat{H}_- = \hat{B}^+\hat{B}$$

Şimdi,

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{Q}^+ = \begin{bmatrix} 0 & B^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

operatörlerini girdirerek iki bileşenli bu sistem tanımlanabilir ve süpersimetrik hamiltonyen,

$$\hat{H} = \{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} = \begin{bmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

şeklini alır. Burada $\hat{Q}$ ve $\hat{Q}^+$,

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{Q}^+] = 0 \quad (2.5)$$

ile korunumlu (süper) yüklerdir. $\hat{H}$ 'nin ,

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (2.6)$$

özdeğer denklemini sağlayan Ψ ,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^{(+)} \\ \Psi^{(-)} \end{bmatrix}$$

sütun vektörle tanımlanabilir. (2.3) ve (2.6) deklemlerinden ,

$$\hat{B}^+ \Psi^{(-)} = \sqrt{E} \Psi^{(+)}$$

$$\hat{B} \Psi^{(+)} = \sqrt{E} \Psi^{(-)}$$

bulunur. (2.1)'deki hamiltonyene "Hamiltonyenin temel hal temsili" denir. Bu form çok özel görünmektedir fakat temel hal dalga fonksiyonu bilinen her tek boyutlu hamiltonyen bu forma getirilebilir. Buna ilk defa E. Gozzi tarafından işaret edildi: Temel hal enerjisi E_0 tek boyutlu herhangi bir $\hat{H}$ hamiltonyeninin

potansiyel enerji terimi , Ψ_0 temel dalga fonksiyonunun fonksiyonu (süperpotansiyel) olarak yeniden yazılabilir ve ,

$$\hat{H}_- \equiv \hat{H} - E_0 \quad ; \quad \hat{H}_- \Psi_0 = 0$$

ise Φ süperpotansiyeli ,

$$\Phi(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left[\frac{\Psi'_0(x)}{\Psi_0(x)} \right]$$

şeklinde ifade edilebilir [6].Yukarıda verilen bağıntıların geçerli olduğu alanın lagranjiyeni ise , $x(t)$ bozonik , $\Psi(t)$ fermiyonik bileşen ϕ , x 'in bir fonksiyonu ve $\phi' = df/dx$ olmak üzere şu şekilde ifade edilebilir :

$$L = \frac{1}{4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \phi^2 + \frac{1}{2} i [\bar{\Psi} \left(\frac{d\Psi}{dt} \right) - \left(\frac{d\bar{\Psi}}{dt} \right) \Psi] - \phi [\bar{\Psi}, \Psi]$$

L 'yi invaryant bırakan süpersimetri dönüşümleri ise,

$$\begin{aligned} x \rightarrow x' &= x - 2i(\bar{\epsilon}\bar{\Psi} - \Psi\epsilon) \\ \Psi \rightarrow \Psi' &= \Psi + \bar{\epsilon} \left(\frac{dx}{dt} - 2i\phi \right) \end{aligned}$$

formundadır.

Grup teorisi diliyle kısaca belirtmek gerekirse süpersimetrik kuantum mekaniği ,(2.4) ve (2.5) cebirlerinin (2.3) lineer diferansiyel operatörleri yardımı ile yapılan bir realizasyonudur.

Son olarak şu da belirtilmelidir ki; Comtet ve arkadaşlarına göre (2.1) ile verilen hamiltonyende, $\hbar\phi'$ terimi , perturbatif olarak bir fermiyon "loop" integralinden gelir , bir $O(\hbar)$ etkisidir. Oysa ϕ^2 terimi bir $O(\hbar^0)$ etkisidir. İşte bu durum , onları , bir sonraki paragrafta anlatılacak olan bir yarıklasik yaklaşım yapmaya sevketmiştir [1].

2.2 SWKB Formülü

Bir önceki bölümde belirtildiği gibi ,

$$\hat{H}_{\pm} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \Phi^2 \pm \hbar \Phi'$$

ile belirli $\hat{H}_+$ ve $\hat{H}_-$ 'nin spektrumları $E = 0$ hali hariç özdeşdir. Burada $\hat{H}_-$ ile çalışılacak ancak aynı hesaplar $\hat{H}_+$ içinde yapılabilir. Eğer işlem yapılacak hamiltonyen $\tilde{H}$ enerjili $\tilde{H}$ ise ve Ψ_0 temel haline sahip ise o halde $\hat{H}_- \Psi_0 = 0$ olan $\hat{H}_- \equiv \tilde{H} - \tilde{E}_0$ şeklindeki yeni bir hamiltonyen düşünelim. Şimdi $2m=1$ ise ,

$$\tilde{H} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

yazarak, $\hat{H}$, Φ ve $\hat{H} \equiv \hat{H}_-$ gösterimi ile ,

$$\hat{H} = \hat{P}^2 + \Phi^2 \pm \hbar \Phi' \quad (2.7)$$

ve,

$$\Phi = \pm \hbar \frac{d}{dx} \ln(\Psi_0)$$

şeklinde ifade edilebilir. Temel halin düğümü bulunmadığı hatırlanırsa Ψ_0 'ın fazı, Ψ_0 reel değerli bir fonksiyon ayrıca $\ln(\Psi_0)$ bölgede iyi tanımlı olacak şekilde seçilebilir. Açıkça görüldüğü gibi eğer $\hat{H}$ 'nin $\{E_i\}$ spektrumu elde edilebilirse $\tilde{H}$ 'nin $\{\tilde{E}_i\}$ spektrumu bulunabilir. E_i özdeğerlerini bulmak için (2.7) hamiltonyeni için yarıklasik bir yaklaşım yapılabilir. Bunun için $\Psi = \exp[(i/\hbar)S]$ şeklindeki dalga fonksiyonu (2.7)'de yerine koyulup , S fonksiyonu $\hbar$ serisine ,

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + O(\hbar^2)$$

şeklinde açılırsa ,

$$(S')^2 - i\hbar S'' = -\Phi^2 + \hbar\Phi' + E$$

elde edilir. S açılımının ilk iki terimi alınarak ,

$$(S'_0)^2 - \hbar^2 (S'_1)^2 - 2i\hbar S'_0 S''_1 - i\hbar S''_0 - \hbar^2 S''_1 = -\Phi^2 + \hbar\Phi' + E$$

elde edilir. Aynı dereceli $\hbar$ terimleri eşitlenirse ,

$$(S'_0)^2 = E - \Phi^2 = q^2$$

$$i(2S'_0 S'_1 + S''_0) = -\Phi'$$

bulunur. Dalga fonksiyonlarını enerjinin çeşitli bölgelerine göre ifade etmekte kolaylık sağlaması için bir χ fazı tanımlanırsa ,

$$S'_0 = \chi \sqrt{|E - \Phi^2|} = \chi |q| = q$$

$$S'_1 = \frac{i\Phi}{2S_0} - \frac{S''_0}{2S'_0} = -\frac{q'}{2q} + \frac{i\Phi'}{2q}$$

$$S_1 = -\frac{1}{2} \ln(|q|) + i \int \frac{\Phi'}{2q} dx$$

elde edilir ve,

$$\sigma = \int \frac{\Phi'}{2q} dx$$

ile gösterilirse dalga fonksiyonu ,

$$\Psi = \frac{C \pm}{\sqrt{q}} \exp(\pm \frac{i}{\hbar} \int q dx \pm i\sigma)$$

olarak bulunur. Kolayca görüldüğü gibi $E > \Phi^2$ bölgesi için dalga fonksiyonu ,

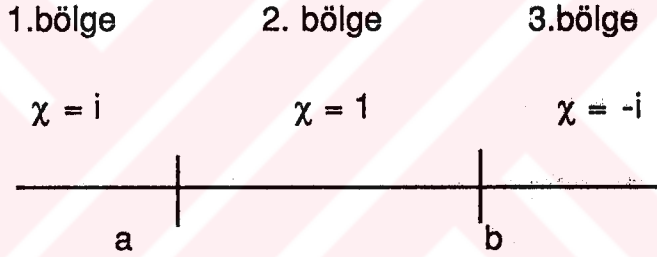
$$\Psi = \frac{A_{\pm}}{(E - \Phi^2)^{1/4}} \exp\left[\pm \frac{1}{\hbar} \int (E - \Phi^2)^{1/2} dx\right] \exp\left[\frac{i}{2} \text{Arcsin}\left(\frac{\Phi}{\sqrt{E}}\right)\right]$$

$E < \Phi^2$ bölgesi için ise ,

$$\Psi = \frac{C_{\pm}}{(\Phi^2 - E)^{1/4}} \exp\left[\pm \frac{1}{\hbar} \int (\Phi^2 - E)^{1/2} dx\right] \left[|\Phi(x)| + \sqrt{\Phi(x)^2 - E} \right]^{1/2}$$

şeklinde elde edilir.

Dalga fonksiyonlarına dikkat edilirse χ fazının tutarlı bir seçimi Şekil 1. 'deki gibi olması gerekir.



Şekil 1: Tek Kuyulu Potansiyeller için Kullanılan Faz diyagramı

Dalga fonksiyonları belirlendikten sonra şimdi kuantumlanma koşulu elde edilebilir. Adi WKB'de izlenilen benzer yolla kuantumlanma koşuluna ulaşılabilir, ancak SWKB kuantumlanma koşulu süperpotansiyelin $\hbar$ 'nin fonksiyonu olması özelliğinden yararlanarak aşağıdaki gibi de bulunabilir.

WKB kuantumlanma koşulu (1.8) bağıntısına göre a ve b klasik dönme noktaları olmak üzere ,

$$\int_a^b (E_n - V(x))^{1/2} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

şeklindedir. (2.2)'de verilen $V_-(x)$ $\hbar$ Planck sabitini de içerdği için kuantumlanma koşulu şu formu alır :

$$I \equiv \int_{a(\hbar)}^{b(\hbar)} f(x, \hbar) dx = (n + \frac{1}{2}) \hbar \pi \quad (2.8)$$

Burada $f(x, \hbar)$ fonksiyonu ,

$$f(x, \hbar) \equiv (E_n - \Phi(x)^2 + \hbar \Phi'(x))^{1/2}$$

olarak alınmıştır. Şimdi I , f ve integral sınırlarının $\hbar$ 'ye bağlı olduğu gözönüne alınır, ayrıca $\hbar \rightarrow 0$ limitinde a ve b dönme noktalarında $E_n = \Phi^2(a) = \Phi^2(b)$ olduğu gözönünde bulundurulursa $\hbar$ serisine açılabilir ;

$$I = I_0 + \hbar I_1 + O(\hbar^2)$$

Serinin ilk iki terimi ile yetinilirse, bu terimler

$$I_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0} I = \int_a^b (E_n - \Phi^2)^{1/2} dx$$

$$I_1 = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{dI}{d\hbar}$$

$$= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx + f(x_2, \hbar) \frac{dx_2}{d\hbar} - f(x_1, \hbar) \frac{dx_1}{d\hbar} \right)$$

olarak hesaplanabilir. $f(a, \hbar) = f(b, \hbar) = 0$ olduğu için son iki terim ortadan kalkar. Hesaplanan I açılımı (2.8)' de yerine koyulursa ,

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_a^b (E_n - \Phi^2)^{1/2} dx + \frac{\hbar}{2} \int_a^b (E_n - \Phi^2)^{-1/2} \Phi'(x) dx + O(\hbar^2) \\ &= (n + \frac{1}{2}) \hbar \pi \end{aligned}$$

bulunur. Açılımındaki ikinci integralin $\hbar\pi/2$ değerine sahip olduğu gösterilebilir. Böylece SWKB kuantumlanma koşulu,

$$\int_a^b (E_n - \Phi(x))^2 dx = n\hbar\pi \quad (2.9)$$

olarak bulunur.(2.9) kuantumlanma koşulunun kullanılması ile birçok potansiyel için tam enerji değerleri hesaplanabilmektedir [1].Şimdi Comtet ve arkadaşları tarafından ele alınan potansiyellerden birkaçı üzerinde durularak hesaplanan enerji değerleri verilecektir.

a) Harmonik osilatör :

$$\Phi(x) = \omega x$$

$$\hat{H} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2 - \hbar\omega$$

$$E_n = 2n\hbar\omega$$

$\tilde{H} = \hat{H} + \tilde{E}_0$, olduğu hatırlanırsa tam değer olduğu görülür.

b) Morse Potansiyeli :

$$\tilde{H} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + U_0[1 - \exp(-ax)]^2$$

$$\Phi = \sqrt{U_0}[1 - \exp(-ax)] - \frac{a\hbar}{2}$$

$$\tilde{H} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \Phi^2 - \hbar\Phi' + a\hbar\sqrt{U_0} - \frac{a^2\hbar^2}{4}$$

$$E_n = na\hbar(2\sqrt{U_0} - a\hbar - na\hbar)$$

$$\tilde{E}_n = a\hbar[\sqrt{U_0}(2n + 1) - a\hbar(n + \frac{1}{2})]$$

bu tam spektrumdur.

c) Rosen-Morse Potansiyeli :

$$H = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} [(\hbar^2 \alpha^2 + 4U_0)^{1/2} - \hbar \alpha] \tanh(\alpha x)$$

$$H = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \Phi^2 - \hbar \Phi' - \frac{1}{4} [\sqrt{\hbar^2 \alpha^2 + 4U_0} - \hbar \alpha]^2$$

$$E_n = [(\hbar^2 \alpha^2 + 4U_0)^{1/2} - \hbar \alpha(n+1)] \hbar \alpha$$

$$E_n = -\left[\frac{1}{2} \sqrt{\hbar^2 \alpha^2 + 4U_0} - \hbar \alpha \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^2$$

ve yine tam spektrum.

Yukarıda ele alınan potansiyeller incelenirse çözülebilir (solvable) oldukları görülür. Burada çözülebilirlikle, özdeğer probleminin uygun bir dönüşümle hipergeometrik bir fonksiyona indirgenebildiği ve böylece elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir bir çözümü olan potansiyeller kastedilmektedir.

Harmonik osilatör hariç yukarıdaki potansiyeller için , eğer herhangi bir düzeltme yapılmazsa , adi WKB tam enerji değerlerini veremez. SWKB hepsi için tüm n değerlerinde tam sonuç vermektedir . Ancak gözlenen bu tamlığın kantitatif bir açıklaması yoktur. Tabii bu durum söz konusu tamlığın sadece çözülebilir potansiyellerin bir özelliği olup olmadığı sorusunu akla getirir. Buna ek olarak bir istisnai durum olan , harmonik osilatör halinde , heriki WKB ve SWKB kuantumlanma koşullarının tüm n'ler için tam sonuç vermesi ilginçtir.

BÖLÜM 3. FRÖMAN VE FRÖMAN TEORİSİ KUANTUMLANMA KOŞULLARI

Bir önceki bölümde belirtildiği gibi WKB kuantumlanma koşulunun harmonik osilatör için tam sonuç vermesi şaşırtıcıdır. Yarıklasik yaklaşımın kullanılmaya başlanmasından sonra pek çok kişi $V = x^2$ için , WKB'nin niçin tam sonuç verdiğini araştırdı. Fakat genel bir matematiksel ispat WKB kuantumlanma koşulunun formüle edilmesinden yaklaşık kırk yıl sonra 1965'te Frömanlar tarafından verildi. Bu bölümde FF teorisine bir giriş verilerek süpersimetrik hamiltonyene nasıl genişletildiği incelenecektir.

3.1.Fröman ve Fröman Tekniği

FF tekniği,

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + Q^2(z) = 0 \quad (3.1)$$

formundaki denklemleri çözmek için genel bir yöntemdir. Burada $Q^2(z)$ karmaşık fonksiyonlar kümesinde tanımlı bir meromorfik fonksiyondur. Düşünülen özel uygulamada Q^2 reel eksen üzerinde reel değerli bir fonksiyon olacaktır. ($Q^2 = - (2m (E - V(x))/\hbar^2)$). Bölüm 1.2'de gösterildiği gibi kuantumlanma koşulu hamiltonyenin hermitikliğinin bir sonucudur. Şimdi,

$$\Psi = \frac{\phi(\omega(z))}{\sqrt{q}}$$
$$\omega(z) = \int_{z_0}^z q(z) dz$$

ile yeni değişkenler tanımlanarak , bu Ψ (3.1)'de yerine koyulursa ,

$$\varepsilon = \frac{Q^2 - q^2}{q^2} + \frac{1}{16q^2} \left[5 \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 - 4q^2 \left(\frac{d^2 q}{dx^2} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

olmak üzere ,

$$\frac{d^2 \phi}{d\omega^2} + (1 + \varepsilon) \phi = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $\varepsilon = 0$ olduğunda $\phi = \exp(\pm i\omega)$, (3.3) denkleminin tam çözümü olur. Ayrıca $q^2 = Q^2$ için ε yeterince küçük ise WKB dalga fksiyonları iyi yaklaşımlar olacaktır. $\varepsilon = 0$ yapan q 'yu bulmak için bir Airy denklemi çözülmelidir[7]. Genelde (3.2) denklemini kapalı analitik formda çözmek mümkün olmadığı için (3.3) denklemi birinci mertebe iki diferansiyel denkleme ayrılarak ϕ çözümünün,

$$\phi = a_1(\omega)\exp(i\omega) + a_2(\omega)\exp(-i\omega)$$

formunda olduğu düşünülebilir. Bunu ilk defa E.C. Kemble yaptı[9]. Ancak Kemble aşağıda anlatılacak yöntemle göre daha kalitatif bir yol izleyerek fazla kullanışlı olmayan bir çözüm elde etti .Şimdi a katsayıları için bir kısıtlama getirilerek , sabit gibi davrandıkları kabul edilirse ,

$$\frac{da_1}{d\omega} \exp(i\omega) + \frac{da_2}{d\omega} \exp(-i\omega) = 0 \quad (3.4)$$

ve

$$\frac{d\phi}{d\omega} = ia_1 \exp(i\omega) - ia_2 \exp(-i\omega) \quad (3.5)$$

elde edilir.(3.3), (3.4) ve (3.5) kullanılarak,

$$\frac{da_1}{d\omega} = \frac{1}{2}i\varepsilon\{a_1 + a_2 \exp(-2i\omega)\} \quad (3.6)$$

$$\frac{da_2}{d\omega} = -\frac{1}{2}i\varepsilon\{a_2 + a_1 \exp(2i\omega)\} \quad (3.7)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir .Şimdi (3.6) ve (3.7) bir matris eşitliği olarak yazılmak istenirse $a(\omega)$ ve $M(\omega)$ matrisleri ,

$$a(\omega) = \begin{bmatrix} a_1(\omega) \\ a_2(\omega) \end{bmatrix} \quad M(\omega) = \frac{i\varepsilon}{2} \begin{bmatrix} 1 & \exp(-2i\omega) \\ -\exp(2i\omega) & -1 \end{bmatrix}$$

ise ,

$$\frac{d\vec{a}}{d\omega} = M(\omega) \vec{a} \quad (3.8)$$

kapalı formuna getirilebilir. Dikkat edilirse , M matrisi $\text{Det}M = 0$ ve $\text{Iz}M = 0$ özelliklerine sahiptir. Artık a için (3.8) formuna getirilen denklem , kerneli M olan integral serisi ile çözülebilir;(3.8) ifadesi,

$$a(\omega) = a(\omega_0) + \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega_1 M(\omega_1) a(\omega_1) = F(\omega, \omega_0) a(\omega_0) \quad (3.9)$$

ise ,

$$F(\omega, \omega_0) = 1 + \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega_1 M(\omega_1) + \int_{\omega_0}^{\omega} \int_{\omega}^{\omega_2} d\omega_2 M(\omega_1) M(\omega_2) + \dots \quad (3.10)$$

serisine ulaşılır. M analitik olduğunda serinin yakınsadığını göstermek kolaydır.Şimdi heriki taraf M(ω) ile çarpılarak integre edilirse F için,

$$F(\omega, \omega_0) = 1 + \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega_1 M(\omega_1) F(\omega, \omega_0) \quad (3.11)$$

denkleminde ulaşılır. $F(\omega, \omega_0) a(\omega_0)$, (3.8)'in çözümü ve $a(\omega_0)$ gerçekte keyfi sabit bir vektör olduğu için,

$$\frac{\partial F(\omega, \omega_0)}{\partial \omega} = M(\omega) F(\omega, \omega_0)$$

elde edilir. Buradan ,

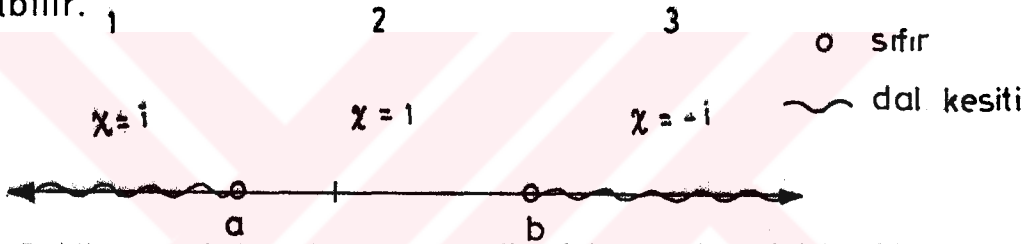
$$\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Det}(F) = 0$$

bulunur.Sonuç olarak DetF'nin bir sabit, $\omega = \omega_0$ için $F(\omega_0, \omega_0)$ 'ın (3.10)

'dan birim matris olduğuna dikkat edilirse $\text{Det}F(\omega_0, \omega_0) = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi F,

$$F(z_2, z_0) = F(z_2, z_1)F(z_1, z_0)$$

özelliğine sahiptir (formüllerde ω değişkeni yerine z yazmanın hiçbir sakıncası yoktur). İlgilendiğimiz tüm $\varepsilon, \omega, a, M$ ve F parametre ve değişkenleri, q ve $q^{1/2}$ 'nin fonksiyonu olduğundan bunların bölgelerini q ve $q^{1/2}$ 'nin tanımlandığı bölgelerle sınırlamak gereklidir. Bu nedenle C düzleminde q 'nun sıfırlarında ve kutuplarında dal kesitleri yapılmalıdır. Tek kuyulu (burada ilgilenilen) potansiyeller için, reel eksen üzerindeki klasik dönme noktalarına karşılık gelen dal kesitleri Şekil 2. 'deki gibi yapılabilir.



Şekil. 2 :Tek kuyulu potansiyeller için yapılan dal kesiti

Eğer q 'nun fazını seçersek q 'yu üst kesitler üzerinde tanımlayabiliriz. Bunu tutarlı bir şekilde yapmak için o bölgedeki dal noktalarının açılarının q fazına katkıları dikkate alınmalıdır :

1.bölge $\theta_a + \theta_b = 2\pi$

2.bölge $\theta_a + \theta_b = \pi$

3.bölge $\theta_a + \theta_b = 0$

Eğer q keyfi bir θ_0 fazına bağlı olarak tanımlanırsa,

$$q(x) = |q| \exp(i\theta_0) \exp(i \frac{\theta_a + \theta_b}{2})$$

formunda ifade edilebilir. Buradaki $1/2$, a ve b , q^2 nin sıfırları olduğu içindir. $\theta_0 = -\pi/2$ alınırsa önceden kullanılan q 'nun fazlarını verir. (Şekil 1.)

Eğer bölüm 1.2'deki denklemin hermitikliğinin kuantumlanma koşuluna neden olduğu hatırlanırsa şimdide bu formülasyonda denklemin hermitikliğinin sonuçlarının ne olacağı sorulabilir. Reel eksen üzerinde kalınırsa her $\Psi(x)$ 'e karşı gelen $\Psi^*(x)$ 'inde bir çözüm olduğu görülür. Dalga fonksiyonu ,

$$\vec{f} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{q}} = \frac{(\exp(i\omega), \exp(-i\omega))}{\sqrt{q}}$$

ise,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{q}}[a_1(\omega)\exp(i\omega) + a_2(\omega)\exp(-i\omega)] = \vec{f} \cdot \vec{a}$$

O halde $\Psi^* = \vec{f}^* \cdot \vec{a}^*$ ve eğer $\vec{f}$ üzerine etki ederek $\vec{f}^*$ 'yü veren bir B matrisi tanımlanırsa ;

$$\vec{f}^*(x) = \vec{f}(x) \cdot B(x) , \quad \vec{f}^{**}(x) = \vec{f}(x)$$

Böyle bir matris B matrisi için $B^*B = 1$ ve $\text{Det}B = 1$ olur . Ayrıca reel eksen üzerinde bulunulduğu ve B sabit bir matris olduğu için $\vec{f}^*$ 'nin türevi,

$$\frac{d\vec{f}^*(x)}{dx} = \frac{d\vec{f}(x)}{dx} B(x)$$

olur. Dikkat edilirse B'yi x'in bulunduğu bölgeye göre yazabiliriz. Çünkü ω integrali 1,2,3 bölgelerindeki sabit fazın katkılarını alır . Bu matrisler $q^2(x) > 0$ için ,

$$B(x) = \frac{q(x)}{|q(x)|} \begin{bmatrix} 0 & \exp[2\text{Im}(\omega)] \\ \exp[-2\text{Im}(\omega)] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

ve $q^2(x) < 0$ için ,

$$B(x) = \frac{q(x)}{|q(x)|} \begin{bmatrix} \exp[-2\text{Re}(\omega)i] & 0 \\ 0 & \exp[2\text{Re}(\omega)i] \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde dir. Dalga fonksiyonundaki a vektörünün ,

$$\Psi = \vec{f} \cdot \vec{a} , \quad \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\vec{f}}{dx} \cdot \vec{a}$$

ile dalga fonksiyonun karmaşık eşleniğindeki B matrisinin,

$$\Psi^* = \vec{f} \cdot B \vec{a}^* , \quad \frac{dB}{dx} = 0$$

ile sabit oldukları gözönünde bulundurarak Ψ^* 'nin türevi alınır ,

$$\frac{d\Psi^*}{dx} = \frac{d\vec{f}}{dx} \cdot B \vec{a}^*$$

$B \vec{a}^*$ 'nın Ψ^* için bir $\vec{a}$ vektörü gibi davrandığı görülür . Böylece (3.10) kullanılarak,

$$B(x_1) \vec{a}^*(x_1) = F(x_1, x_2) B(x_2) \vec{a}^*(x_2)$$

yazılabilir. Şimdi $B^* = B^{-1}$ olduğu için ,

$$F(x_1, x_2) = B(x_1) F^*(x_1, x_2) B^*(x_2)$$

bulunur .Bu simetri bağıntısı ,farklı bölgelerdeki farklı F matrisi elemanları arasındaki ilişkiyi veren formüllere yol açar. İlgilenilen formül $q^2(x) < 0$ olan iki farklı bölgedeki x_1 ve x_2 arasındadır.(tek kuyulu potansiyel) (3.14) eşitliği kullanılarak F_{22} bileşeni için ,

$$F_{22}(x_1, x_2) = \frac{\frac{q(x_1)}{|q(x_1)|}}{\frac{q(x_2)}{|q(x_2)|}} \exp[-2i \text{Re} \{ \omega(x_2) - \omega(x_1) \}] F_{22}^*(x_1, x_2) \quad (3.15)$$

sonucuna ulaşılır.Bu ifade kuantumlanma koşuludur. Tek kuyu problemi için ayrı klasik olarak yasak bölgelerde (Şekil 2'deki 1 ve 3 bölgeleri) ise o halde fazı Şekil 1'e göre seçerek ,

$$\frac{\frac{q(x_1)}{|q(x_1)|}}{\frac{q(x_2)}{|q(x_2)|}} = -1 = \exp(i\pi)$$

elde edilir. Bu faz seçimi ile ω değerleri hesaplanırsa ,

$$\text{Re} \{ \omega(x_1) - \omega(x_2) \} = \int_a^b |q| dx \quad (3.16)$$

bulunur. Şimdi (3.16), (3.15)'te yerine koyulursa ,

$$F_{22}(x_1, x_2) = \exp[-2i \{ \int_a^b |q| dx - \frac{\pi}{2} \}] F_{22}^*(x_1, x_2)$$

sonucuna ulaşılır. Görüldüğü gibi ,

$$F_{22}(x_1, x_2) \exp[i \int_a^b |q| dx - i \frac{\pi}{2}]$$

reel olmalıdır. Buradan hareketle ,

$$\int_a^b |q| dx = (n + \frac{1}{2})\pi - \arg(F_{22}(x_1, x_2)) \quad (3.17)$$

sonucuna varılır. Bu sonuç incelenirse WKB yaklaşımının ancak F_{22} 'nin reel olması durumunda tam sonuç vereceği anlaşılır .

(3.17)'de x_1 ve x_2 keyfi olduğu için , x_1 ve x_2 'nin $-\infty$ ve $+\infty$ 'a yaklaşmasına izin verilebilir. 1 ve 3 bölgelerinde $\exp(i\omega)$ bileşeni monoton artan (sadece tek kuyulu potansiyeller düşünüldüğü için) ve normalize edilebilir. WKB dalga fonksiyonunu elde etmek için

$x \rightarrow \pm\infty$ 'a giderken $a_1(\omega)$ yeteri kadar hızlı bir şekilde sıfıra gitmelidir. $a_2(x=\pm\infty) \neq 0$ olduğu için $a_2(+\infty)$, $a_1(z)$ ve $a_2(z)$ 'yi (3.9)'u kullanarak,

$$\frac{a_1(z)}{a_2(z)} = \frac{F_{12}(z, +\infty)}{F_{22}(z, +\infty)}$$

aynı şekilde $a_2(-\infty)$ ile başlayarak benzer ifade tekrar $a_1(z)$ ve $a_2(z)$ için bulunabilir. Böylece ,

$$\frac{F_{12}(z, -\infty)}{F_{22}(z, -\infty)} = \frac{F_{12}(z, +\infty)}{F_{22}(z, +\infty)}$$

bulunur. F'nin matris çarpım kuralından $F_{12}(-\infty, +\infty) = 0$ bulunur. Bu ve yukarıdaki formüller F_{22} 'nin asimtotik bir ifadesini bulmak için birleştirilirse,

$$F_{22}(-\infty, +\infty) = \frac{F_{22}(z_0, +\infty)}{F_{22}(z_0, -\infty)}$$

yazılabilir. N. Fröman ve P.O. Fröman özel F matris elemanları için seri açılım ifadeleri elde ettiler[4]. Ancak bu uzun ifadeler buraya alınmadı. Bununla beraber bu açılımların $F_{22}(-\infty, +\infty)$ 'un reel olup olmadığını araştırmak için kullanılabileceğini belirtmek gerekir.

3.2 Fröman ve Fröman Formunda SWKB Kuantumlanma Koşulu

Şimdi SWKB kuantumlanma koşulu ele alınacaktır. SWKB kuantumlanma koşulu ilk defa FF formunda M. Crescimanno tarafından ifade edildi [2]. Burada FF tekniği kullanmak için dalga fonksiyonu,

$$\Psi = \frac{\phi}{\sqrt{q}} \quad q^2 = E - \Phi^2$$

yazılırsa ve $\vec{f}$ ile $\vec{f}$ vektörlerinin tanımı önceki gibi yapılarak SWKB dalga fonksiyonları,

$$\phi = \vec{f} \cdot \vec{G} \cdot \vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. Burada G matrisi ,

$$\sigma = \int_{z_0}^z \frac{\Phi'}{2q} dx$$

ise,

$$G = \begin{bmatrix} \exp(i\sigma) & 0 \\ 0 & \exp(-i\sigma) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. ϕ fonksiyonu da ,

$$\varepsilon = \frac{1}{16q^6} \left[5 \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 - 4q^2 \frac{d^2 q}{dx^2} \right]$$

olmak üzere ,

$$\frac{d^2 \phi}{d\omega^2} + \left(1 + \varepsilon + \frac{\Phi'}{2q}\right) \phi = 0 \quad (3.18)$$

denklemini sağlar. Burada $G.\vec{a}$ 'nın WKB 'nin $\vec{a}$ vektörüne benzer özellikleri olduğu kabul ediliyor. O halde ,

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{d\vec{f}}{d\omega} G.\vec{a} \quad \text{ve} \quad \vec{f}.\left(\frac{dG}{d\omega} \vec{a} + G \frac{d\vec{a}}{d\omega}\right) = 0 \quad (3.19)$$

olur. Buradan,

$$\frac{d^2 \phi}{d\omega^2} = \frac{d^2 \vec{f}}{d\omega^2} G.\vec{a} + \frac{d\vec{f}}{d\omega}.\left(\frac{dG}{d\omega} \vec{a} + G \frac{d\vec{a}}{d\omega}\right) = 0$$

elde edilir.

$$\frac{d^2 \vec{f}}{d\omega^2} = -\vec{f}$$

olduğu için (3.18),

$$\frac{d\vec{f}}{d\omega}.\left(\frac{dG}{d\omega} \vec{a} + G \frac{d\vec{a}}{d\omega}\right) + \left(\varepsilon + \frac{\Phi'}{2q}\right) \vec{f} G.\vec{a} = 0 \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir.Şimdi,

$$\frac{d\vec{f}}{d\omega}.\frac{dG}{d\omega} \vec{a} = -\left(\frac{\Phi'}{2q}\right) \vec{f} G.\vec{a}$$

ifadesini kullanarak (3.19) ve (3.20) gözönünde bulundurulursa $\vec{a}$ ile ilgili yeni bir M matrisi M_s elde edilebilir :

$$\frac{d\vec{a}}{d\omega} = M_s \vec{a}$$

Burada,

$$k = 1 + \frac{\Phi'}{2q\varepsilon}$$

olmak üzere , M_s şu ifade ile verilir :

$$M_s = \frac{i\varepsilon}{2} \begin{bmatrix} 1 & k \exp[-2i(\omega + \sigma)] \\ -k \exp[2i(\omega + \sigma)] & -1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Buradaki M_s matrisi WKB'deki M matrisinden daha karışıktır.

$Iz(M_s) = Iz(M) = 0$ olmasına rağmen $Det(M_s) \neq 0$ olduğu görülüyor.

Şimdi tekrar , süpersimetrik a vektörünün evrimini karakterize eden bir F matrisi tanımlanabilir ;

$$a(\omega) = F(\omega, \omega_0) a(\omega_0)$$

Bu ifade (3.21) denkleminde yazılırsa,

$$\frac{dF(\omega, \omega_0)}{d\omega} = M_s(\omega) F(\omega, \omega_0)$$

olur. Tekrar $Tr(M_s) = 0$ ve $F, F(\omega_0, \omega_0) = 1$ koşulu ile çözülürse $Det(F) = 1$

bulunur. Şimdi bu gelişmelerin süpersimetrik hamiltonyeni nasıl etkileyeceğinin araştırılması gerekir. Burada yine , adi WKB 'de olduğu gibi reel eksen üzerinde kalıp diferansiyel denklemin hermitikliğinden istifade edilecektir. Önceki kısımda yapıldığı gibi 'f'nin karmaşık eşleniği için bir B matrisi tanımlayarak ,

$$\vec{f}^* = \vec{f} \cdot B$$

yazılabilir. Burada B WKB'dekinin aynıdır. Köple dalgafonksiyonu ,

$$\Psi = \vec{f} \cdot G \cdot \vec{a} \quad \text{böylece} \quad \Psi^* = \vec{f} \cdot B \cdot G^* \cdot \vec{a}^* \quad \text{ve tekrar,}$$

$$\frac{d\Psi^*}{dx} = \frac{d\vec{f}}{dx} \cdot B \cdot G^* \cdot \vec{a}^*$$

bulunur. Görüldüğü gibi $B \cdot G^* \cdot \vec{a}^*$ faktörü Ψ^* 'nin $G \cdot \vec{a}$ vektörü gibi davranıyor Ψ^* 'nin $G \cdot \vec{a}$ vektörünü $G \cdot \vec{b}$ ile göstererek,

$$G \cdot \vec{b} = B \cdot G^* \cdot \vec{a}^* \quad \text{ve} \quad \vec{b} = G^{-1} \cdot B \cdot G^* \cdot \vec{a}^*$$

yazılabilir. Yukarıdaki sonuç,

$$\vec{b}(x_1) = F(x_1, x_2) \vec{b}(x_2)$$

ifadesinde kullanılırsa,

$$F(x_1, x_2) = G^{-1} \cdot B \cdot G^*(x_1) F^*(x_1, x_2) G^{*-1} \cdot B \cdot G(x_2)$$

genel simetri bağıntısına ulaşılır. Şimdi bir kez daha ayrı, klasik olarak yasak, 1 ve 3 bölgelerinde olan x_1 ve x_2 ($q^2 < 0$) için kuantumlanma koşulu türetilir. G matrisinin kompleks eşleniği alınırken farklı bölgelerdeki fazları değiştiği için dikkatli olunmalıdır. Burada gerekli olan F matrisinin F_{22} elemanı alınır ,

$$R = \exp[i \{ (\sigma_1 + \sigma_1^*) - (\sigma_2 + \sigma_2^*) + 2 \operatorname{Re} \{ \omega(x_1) - \omega(x_2) \} \}]$$

olmak üzere ,

$$F_{22}(x_1, x_2) = \frac{\frac{q(x_1)}{|q(x_1)|}}{\frac{q(x_2)}{|q(x_2)|}} R F_{22}^*(x_1, x_2)$$

bulunur. Burada ,

$$\sigma_1 = \sigma(x_1) \text{ ve } \sigma_2 = \sigma(x_2)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\frac{\frac{q(x_1)}{|q(x_1)|}}{\frac{q(x_2)}{|q(x_2)|}} = -1$$

değeri hatırlanmalıdır. R 'de σ ile ilgili terim x_1 ve x_2 noktalarına bağlı olabilecek gibi görünmesine rağmen $(\sigma + \sigma^*)$ 'nin pür reel olmasına dikkat edilirse buradan ,

$$[(\sigma_1 + \sigma_1^*) - (\sigma_2 + \sigma_2^*)] = \int_a^b \frac{\Phi'}{q} dx = \pi$$

bulunur. Böylece ,

$$F_{22}(x_1, x_2) \exp(-2i \int_a^b |q| dx$$

reeldir.Buradan,

$$\int_a^b |q| dx = n\pi - \arg[F_{22}(x_1, x_2)] \quad (3.23)$$

sonucuna ulaşılır.Bu denklem Comtet ve arkadaşları tarafından türetilen kuantumlanma koşulunun eğer $F_{22}(x_1, x_2)$ reel ise tam olacağını ifade eder.

SWKB koşulunun tamlığını tartışmak için , yani $F_{22}(x_1, x_2)$ 'nin reelliğini, x_1 ve x_2 'nin sırasıyla $-\infty$ ve $+\infty$ 'a gittiğini düşünmek uygun olacaktır. Tekrar bir önceki kısımda olduğu gibi $a_1(\pm\infty) = 0$ ve $a_2(\pm\infty) = 0$ ve böylece adi WKB'dekine benzer argümanla ,

$$F_{22}(-\infty, +\infty) = \frac{F_{22}(z_0, \infty)}{F_{22}(z_0, \infty)}$$

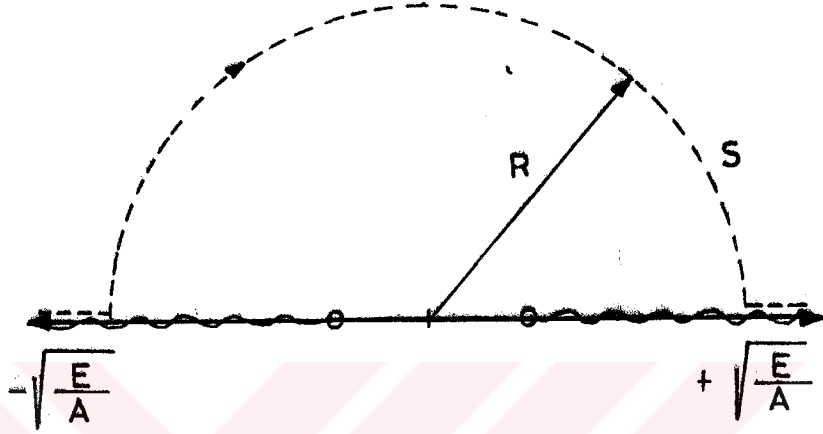
bulunur.

Belli bir potansiyel için $F_{22}(-\infty, +\infty)$ 'in reel mi değilmi olduğunu anlamak için hangi işlem kullanılmalıdır ? sorusu sorulabilir. M 'yi M_S ile yerdeğiştirerek elde edilecek F açılımının kullanılması akla gelebilir. Ancak M_S matrisindeki fazla karışıklıktan dolayı bu açılımı elde etmek kolay bir iş olarak görünmemektedir.

3.3 Harmonik Osilatörün Tamlığı

Harmonik osilatör için $Q^2 = q^2 = E - Az^2$ şeklinde seçilirse dal kesitleri Şekil 2'deki gibi alınabilir $M(z)$ (ve $M_S(z)$)'nin tüm üst yarıdüzlemde analitik olduğu için reel eksen boyunca $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a geçen kontör yerine Şekil 3'teki gibi bir R yarıçaplı S yolu izlenir R yarıçapı sonsuza götürülürse $M(z)$ ve aynı limitte, $M_S(z)$ 'deki ϵk 'nin da sıfıra gitmesi ile $M_S(z)$ 'nin sıfıra gittiği görülür.Bu sonuç 3.11'de kullanılırsa , $F_{22}(-\infty, +\infty) = 1$ ve buradan WKB kuantumlanma koşulunun (adi ve supersimetrik durumda) harmonik osilatör için tam olduğu görülür.Süpersimetrik Rosen-Morse potansiyelinin

için bir ispat Cressimano tarafından verilmiştir ancak bu ispat daha çok kalitatif bir analize dayanmaktadır ve Fröman teorisi çerçevesi içinde aranan çözüm değildir. Bu nedenle burada incelenmedi. Gerçek bir çözüm için bölüm 3.2'nin sonunda belirtildiği gibi yeni M_S matrisi F matris açılımı bulunarak, elemanların limit özellikleri araştırılmalıdır.



Şekil. 3 : Harmonik osilatör için seçilen integral yolu

Okuyucuya bir fikir vermesi için F matrisinin bazı özellikleri ve Rosen-Morse potansiyelinin (adi durumda) tamlığının ispatı ekte verilmiştir.

EK : F MATRİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE ROSEN-MORSE POTANSİYELİNİN TAMLIĞI

1. F Matrisinin Bazı Özellikleri

Rosen-Morse potansiyelinin tamlığının ispatı için kullanılacak bu özellikler aşağıda ispatsız olarak verilecektir.

F matrisi ,

$$F(z_1, z_0) = \begin{bmatrix} F_{11}(z_1, z_0) & F_{12}(z_1, z_0) \\ F_{21}(z_1, z_0) & F_{22}(z_1, z_0) \end{bmatrix} \quad (\text{EK.1})$$

şeklinde 2x2'lik bir matristir ve ,

$$F(z_2, z_0) = F(z_2, z_1)F(z_1, z_0) \quad (\text{EK.2})$$

özellğine sahiptir.Tersi,

$$F^{-1}(z_1, z_0) = F(z_0, z_1) \quad (\text{EK.3})$$

ile verilebilir ve F'nin tersi açık olarak şöyledir :

$$F^{-1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} F_{11}(z_0, z) & F_{12}(z_0, z) \\ F_{21}(z_0, z) & F_{22}(z_0, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{22}(z, z_0) & -F_{12}(z, z_0) \\ -F_{21}(z, z_0) & F_{11}(z, z_0) \end{bmatrix} \quad (\text{EK.4})$$

Ayrıca bir,

$$\mu(z, z_0) = \int_{z_0}^z |\varepsilon q dz| \quad (\text{EK.5})$$

şeklinde εq 'yu analitik yapan herhangi bir λ yolu boyunca alınabilen μ integrali tanımlanmalıdır. FF kuantumlanma koşulu tekrar yazılırsa,

$$\int_{x'}^{x''} |q(x)| dx = (n + \frac{1}{2})\pi - \arg \frac{F_{22}(z, +\infty)}{F_{22}(z, -\infty)}$$

Buradaki $z, x \rightarrow \pm\infty$ iken $|\exp(i\omega(x))|$ monoton artması ve μ reel eksenin bir kısmı boyunca yakınsak olması koşulu ile karmaşık düzlemdeki herhangi bir noktadır. $z \rightarrow Z$ iken $F(z, z_0)$ limit değerleri şöyledir, $z \rightarrow Z$

iken $F(z_1, z_0) = |\exp(i\omega(z))| \rightarrow \infty$ olur, Buna göre

a) $F(z, z_0)$ tüm elemanları sonlu

b) $\lim_{z \rightarrow Z} \mu(z_1, z)$ sonlu

$z \rightarrow Z$

c) $|\exp i\omega(z)|$ z_1 'den Z 'ye bir λ yolu boyunca giderken monoton artıyor ise F şu özelliklere sahiptir:

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{11}(z, z_0) \text{ mevcut ve sonlu} \quad (\text{EK.6})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{12}(z, z_0) \text{ mevcut ve sonlu} \quad (\text{EK.7})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{21}(z, z_0) \exp(-2i\omega(z)) = 0 \quad (\text{EK.8})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{22}(z, z_0) \exp(-2i\omega(z)) = 0 \quad (\text{EK.9})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{22}(z_0, z) \text{ mevcut ve sonlu} \quad (\text{EK.10})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{12}(z_0, z) \text{ mevcut ve sonlu} \quad (\text{EK.11})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{21}(z_0, z) \exp(-2i\omega(z)) = 0 \quad (\text{EK.12})$$

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{11}(z_0, z) \exp(-2i\omega(z)) = 0 \quad (\text{EK.13})$$

Yukarıdaki(EK.6-13) denklemlerde tüm limitler z_0 'dan z_1 'e giden bir yol ve z_1 'i Z 'ye bağlayan bir λ yolu boyunca alındı. Bu nedenle eğer

$$\lim_{z \rightarrow Z} F_{22}(z_0, z)$$

mevcut ve sonlu ise bu limit Z 'ye nasıl yaklaşıldığından bağımsızdır F 'nin limit özellikleri yanısıra F üzerindeki üst kısıtlamaları da bilmek gereklidir. Bu kısıtlamalardan bahsederken ω_0 'ı ω 'ya bağlayan bir λ yolunun seçilmesi esastır. ω_0 'dan ω 'ya giderken λ üzerinde ω 'nın aldığı değerlere göre $v > 1$ olmak üzere sıralı ω_v 'lar alınarak,

$$\frac{1}{2} |1 - \exp[-2i(\omega_{v-1} - \omega_v)]| \leq M \quad (\text{EK.14})$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa ω_1, ω_0 ile ω arasında bulunur
Buradan ,

$$|F_{11}(\omega, \omega_0)| \leq \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1] \quad (\text{EK.15})$$

olduğu gösterilebilir. Eğer λ yolu ω_0 'dan ω 'ya hareket ederken $|\exp i\omega|$ monoton artacak şekilde seçilirse ,

$$|\exp(-2i\omega_v)| \leq |\exp(-2i\omega_0)| \quad (\text{EK.16})$$

$$|\exp(2i\omega_1)| \leq |\exp(2i\omega)| \quad (\text{EK.17})$$

$$|\exp[2i(\omega_1 - \omega_v)]| \leq |\exp[2i(\omega - \omega_0)]| \quad (\text{EK.18})$$

olur. λ 'nın bu kabulü ile F matrisinin geri kalan elemanları için hesaplar şu şekildedir :

$$|F_{12}(\omega, \omega_0)| \leq \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1] |\exp(-2i\omega_0)| \quad (\text{EK.19})$$

$$|F_{21}(\omega, \omega_0)| \leq \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1] |\exp(-2i\omega)| \quad (\text{EK.20})$$

$$|F_{22}(\omega, \omega_0) - 1| \leq \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1 - M\mu] |\exp[2i(\omega - \omega_0)]| \quad (\text{EK.21})$$

Şimdi eğer $|\exp(i\omega)|$ monoton artmayacak şekilde bir λ yolu seçilirse ve (EK.15-21)'e benzer bağıntılar bulunmak istenirse , o halde (EK.15) sağlanması için belli bir sonlu M gereklidir . (EK.19-21)'i kullanmak için ek bir tedbire ihtiyaç vardır. Herhangi bir ω_v için,

$$|\exp(-2i\omega_v)| \leq |\exp(-2i\omega)| \quad (\text{EK.22})$$

şeklinde bir ω' ,

$$|\exp(2i\omega_1)| \leq |\exp(2i\omega'')| \quad (\text{EK.23})$$

şeklinde bir ω'' bulunmalıdır, o halde ,

$$|\exp[2i(\omega_1 - \omega_v)]| \leq |\exp[2i(\omega'' - \omega')]| \quad (\text{EK.24})$$

olur.Böylece $|\exp(-2i\omega)|$, $\omega = \omega'$ 'de λ boyunca maksimum ve $|\exp(2i\omega)|$, $\omega = \omega''$ 'de λ boyunca maksimum olur;Buradan,

$$|F_{11}(\omega, \omega_0) - 1| \leq \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1] \quad (\text{EK.25})$$

$$|F_{22}(\omega, \omega_0)| \leq \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1] |\exp(-2i\omega')| \quad (\text{EK.26})$$

$$|F_{21}(\omega, \omega_0) - 1| \leq \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1] |\exp(2i\omega'')| \quad (\text{EK.27})$$

$$|F_{22}(\omega, \omega_0) - 1| \leq \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2M} [\exp(M\mu) - 1 - M\mu] \exp[2i(\omega'' - \omega')] \quad (\text{EK.28})$$

olur . F hakkındaki son bilgi F elemanlarından elde edilecektir.

$$\omega = \int^z q(z) dz$$

şeklinde ω daha önce tanımlandığında integralin alt limitinin keyfi olduğuyula başlandı.Tabii olarak çeşitli noktaların seçimi ω 'nın değerini gerçekte ω 'nın fonksiyonlarının değerini değiştirir . Bununla beraber ,

$$F_{11}(\omega, \omega_0) , F_{22}(\omega, \omega_0) , F_{12}(\omega, \omega_0) \exp(2i\omega), \\ F_{21}(\omega, \omega_0) \exp(-2i\omega) \quad (\text{EK.29})$$

hepsi ω 'daki alt limitin seçiminden bağımsızdır.Sonuçta $F_{22}(\omega, \omega_0)$ tanımı sadece,

$$\int_{\omega_0}^{\omega_n} d\omega_{n+1} i\epsilon(\omega_{n+1}) \{1 - \exp[-2i(\omega_n - \omega_{n+1})]\} \exp[2i(\omega_1 - \omega_{n+1})] \quad (\text{EK.30})$$

formundaki terimleri içerir ve bu terim reel ise $F_{22}(\omega, \omega_0)$ kendisi reel olacaktır.

2.Rosen-Morse Potansiyelinin Tanımı

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \frac{x}{a}} \quad -\infty < x < +\infty$$

şeklindeki Rosen-Morse potansiyeli incelenirse $z = a\pi i(n + 1/2)$ 'de

kutupları olduğu görülür. Bu kutuplardan dolayı $q^2(z)$, $Q^2(z)$ 'den farklı seçilmelidir;

$$q^2(z) = Q^2(z) + \frac{1}{4a^2 \cosh^2(\frac{z}{a})} = E + \frac{4a^2 V_0 + 1}{4a^2 \cosh^2(\frac{z}{a})} \quad (\text{EK.31})$$

Bu özel seçimin nedeni μ integralinin yakınsaklığına bakarken netleşecektir. $q(x)$ fazının seçimi (Şekil 1.)'deki gibidir ve $q^2(x)$ 'nin tam kuantumlanma koşulu,

$$\int_{x'}^{x''} |q(x)| dx = (n + \frac{1}{2})\pi - \arg \frac{F_{22}(z, +\infty)}{F_{22}(z, -\infty)} \quad (\text{EK.32})$$

Eğer $F_{22}(z, +\infty)/F_{22}(z, -\infty)$ 'nin reel olduğu gösterilirse (2.3) ile verilen tam kuantumlanma koşuluna ulaşılabacaktır.

Bunu göstermek için $z = q\pi/2$ seçilerek ve $F_{22}(\pi a i/2, +\infty)$ ve $F_{22}(\pi a i/2, -\infty)$ 'nin reel olduğu ispatlanmaya çalışılacaktır. İlk adım karmaşık düzlemi q fazı EK Şekil 1. ile uyumlu olacak şekilde keşmektir. q 'nın dal noktaları q^2 'nin kutupları $\cosh^2(z/a) \rightarrow 0$ iken (veya $z \rightarrow \pm(n+1/2)\pi a i/2$) meydana gelir ve ikinci mertebedir. q^2 'nin sıfırları ise şu eşitliği sağlayan,

$$\cos \frac{z}{a} = \frac{1}{2a} \left[- \left(\frac{4a^2 V_0 + 1}{E} \right) \right]^{-1/2}$$

noktalardır. Sadece pozitif reel kökler q^2 'nin reel sıfırlarını verir ve bu E 'nin mümkün değerlerini sınırlar. Bu denklemin kökleri,

$$z = \pm \cosh^{-1} \left(\frac{1}{2a} \left[\frac{4a^2 V_0 + 1}{-E} \right] \right)^{1/2} + a\pi i$$

olur. Ayrıca çalışılan bölgede, dal noktalarının $+i$ ve $-i$ yönünde sonsuza genişlediği düşünülebilir. Birazdan görüleceği gibi dal noktalarının bu fazladan düşünülen işleme hiç bir katkısı olmaz.. Bölgeler (EK.Şekil 1) 'de işaretlenmiştir;

1. Bölge: 4 sıfırının solundaki x noktaları
2. Bölge: 4 sıfırının sağındaki ve 5 sıfırının solundaki x

noktaları

3.Bölge: 5 sıfırının sağındaki tüm noktalar

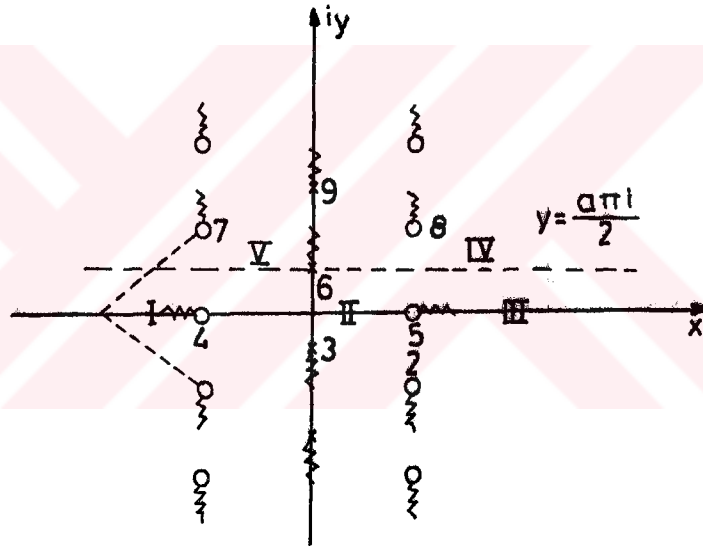
4.Bölge: $x + \pi i/2$ ve $x > 0$ bölgesi

5.Bölge: $x + \pi i/2$ ve $x < 0$ bölgesi tüm noktaları

Reel eksenin altındaki dal noktalarından ölçülen bütün açılar $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ bölgesinde , reel eksenin üstündekiler ise

$-3\pi/2 < \theta < \pi/2$ arasında değişir . θ_4 (4 nolu dal noktasından ölçülen açı) $-\pi < \theta_4 < \pi$ ve $0 < \theta_5 < 2\pi$ aralığında değerler alır

.Kutuplar ve sıfırlar reel eksene göre simetrik oldukları için 1 ve 7 nolu açılar için $\theta_7 = -\theta_1$ olur. Benzer sonuç herhangi simetrik dal noktası içinde geçerlidir .Böylece , tüm kutup ve sıfırlardan faza katkı; (reel eksen üzerindeki noktalar hariç) sonsuz dal noktası kümesinden net katkı sıfır olur. Sadece 4 ve 5 nolu noktalardan faza katkı vardır.



EK Şekil 1: Rosen-Morse Potansiyeli için Yapılan Dal Kesiti

Birinci bölgede; $\theta_4 + \theta_5 = \pi + \pi = 2\pi$

İkinci bölgede; $\theta_4 + \theta_5 = 0 + \pi = \pi$

Üçüncü bölgede; $\theta_4 + \theta_5 = 0 + 0 = 0$

$q(z)$ fazı ,

$$q(z) = \exp(i\theta_0) \exp(i\Sigma \theta_n |q|/2)$$

şeklindedir.(buradaki 1/2 kutup ve sıfırların q^2 için artmasından

ileri gelir.Çünkü q 'nın fazıyla ilgilenilmektedir,burada : $(q^2)^{1/2}$).
Şekildeki özel fazı elde edebilmek için $\theta_0 = -\pi/2$ koyulursa ;

- 1.Bölgede $q = i|q|$
- 2.Bölgede $q = |q|$
- 3.Bölgede $q = -i|q|$

q fazı $y = a\pi/2$ doğrusu üzerinde de hesaplanabilir ve tekrar simetri fazın seçimini basitleştirir. Bu çizgi için katılan tek dal noktası 6 noludur.

4. bölgede $\theta_6 = 0$
5. Bölgede $\theta_6 = -\pi$

Böylece q için şu yazılabilir:

$$q = \exp(-i\pi/2)\exp(-\Sigma 2\theta_n/2)|q|$$

(-2; 6'nın ikinci mertebe kutup olması nedeni ile dir.)

4. bölgede $q = -i|q|$
5. Bölgede $q = i|q|$

q için bu şekilde faz seçilirse $|\exp[2i\omega(z)]|$ için şunlar görülüyor : $x'' \rightarrow +\infty, x' \rightarrow -\infty, a\pi/2 \rightarrow |x| + a\pi/2$ ve $a\pi/2 \rightarrow -|x| + a\pi/2$. Burada $|x|, \infty$ olabilir. F elemanlarını $a\pi/2$ ve $\pm\infty$ arasında seçildiğinden bu elemanların mevcut olduğundan emin olunabilir. (EK 15-21) ve (EK 24-27) bağıntıları kullanılmak istenirse , F matris elemanlarını sonlu değerler şeklinde elde etmek için μ integrali yakınsamalıdır. Bu nedenle eldeki potansiyel için μ 'nün özelliklerini araştırılması gerekir. (3.2) ve (EK.31) denklemlerinden

$$e(z) = \frac{-\frac{1}{4}a^2 \cosh^2\left(\frac{z}{a}\right)}{(E + \frac{4a^2 V_0 + 1}{4a^2 \cosh^2\left(\frac{z}{a}\right)})} + \frac{1}{16(E + \frac{4a^2 V_0 + 1}{4a^2 \cosh^2\left(\frac{z}{a}\right)})} x \quad (EK.33)$$

$$x \left\{ \frac{2E(4a^2 V_0 + 1)}{4a^2 \cosh^4\left(\frac{z}{a}\right)} (3 - 2\cosh^2\left(\frac{z}{a}\right)) + \frac{4a^2 V_0 + 1}{4a^6 \cosh^4\left(\frac{z}{a}\right)} + \frac{(4a^2 V_0 + 1)^2}{4a^6 \cosh^6\left(\frac{z}{a}\right)} \right\}$$

$z \rightarrow \pm(n + 1/2)\pi i$, $\cosh(z/a) \rightarrow 0$ ve q^2 için ikinci mertebe kutuptur. Bununla birlikte bu limitte (EK. 33) ve (EK. 31) gösterirki , $\varepsilon(z)q(z) \rightarrow 0$ ve böylece (EK.5) tanımlanan m sonludur z veya

$z_0 \rightarrow (n + 1/2) \pi i$ q^2 'yi Q^2 'den farklı seçerek εq 'dan singüleritenin elimine edilebileceğine de dikkat edilmelidir. Şundan emin olunmalıdırki μ integralinin yakınsaklığı q^2 'nin seçimine bağlıdır.

q^2 'nin çalıştığımız Q^2 'den farklı özel seçimini bulmak için $(Q^2 - q^2)/q^2$ teriminin εq 'nin kalan terimlerdeki singüleriteyi ortadan kaldırması gerektiğine dikkat edilmelidir. Ayrıca $|x| \rightarrow \infty$ iken de μ 'nün davranışını kontrol edilmelidir. Bu halde ,

$$|\cosh z| \approx |\sinh z| \approx \exp|x| \text{ ve}$$

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} |\varepsilon q| \propto \frac{1}{|\cosh^2(\frac{x}{a})|} \rightarrow \exp(-\frac{2|x|}{a}) \rightarrow 0$$

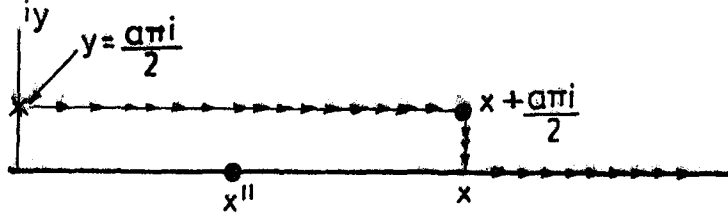
Böylece μ integrali yakınsaktır. Ayrıca $\mu(z, z_0)$ tüm λ yolu boyunca hesaplanırsa yukarıdaki hesap $\mu(z, z_0) \rightarrow 0$ olduğunu gösterir . Bu gerçek bizim ispatımızda önemli olacaktır. Önceden değinildiği gibi $F_{22}(a\pi i/2, +\infty)$ ve $F_{22}(a\pi i/2, -\infty)$ 'un herikisinin de reel olduğu ispatlanabilirse tam kuantumlanma koşulu tesis edilmiş olacaktır .Aşağıda sadece $F_{22}(a\pi i/2, +\infty)$ 'un reel olduğu ispatlanacak çünkü

$F_{22}(a\pi i/2, +\infty)$ 'un reel olduğunu ispatlamak için (EK.2) denkleminde 22 elemanı ile $z = a\pi i/2$, $z_1 = (a\pi i/2) + x$ ve $z_0 = +\infty$ alınarak çalışılırsa şu bağıntı elde edilir :

$$F_{22}(\frac{a\pi i}{2}, +\infty) = F_{21}(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2})F_{12}(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty) \quad (\text{EK.34})$$

$$+ F_{22}(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2})F_{22}(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty)$$

(EK Şekil. 2)'de $a\pi/2$ ile $+\infty$ 'u birleştiren yol görülmektedir.



EK Şekil. 2 :Rosen-Morse Potansiyeli için Seçilen Integral Yolu

$F(x + (a\pi/2), x)$ elemanlarının hepsinin sonlu olduğunu ispatlamaya eşdeğer bir sonuç kısaca tesis edileceği için ve $|\exp(i\omega(z))|$ önceden gösterildiği gibi x , ve $x' \rightarrow +\infty$ arasında monoton arttığı için μ integrali yakınsar. Bu nedenle (EK.10) ve (EK.11) 'i kullanarak $F_{12}(x + (a\pi/2), +\infty)$ ve $F_{22}(x + (a\pi/2), +\infty)$ 'un sonlu olduğunu öne sürebiliriz. (EK.4) ve (EK.15-21) ile $\mu(x + (a\pi/2), a\pi/2)$ sonlu değerleri birleştirilerek (EK.33) denkleminde geriye kalan iki matris elemanının sonlu değerlerinin mevcudiyeti tesis edilmiş olur. Şimdi $x \rightarrow +\infty$ limitinde

$$F_{21}\left(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2}\right) F_{21}\left(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty\right) = 0$$

$$F_{22}\left(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty\right) = 1 \quad F_{22}\left(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2}\right) \text{ reel}$$

ve böylece ,

$$F_{22}\left(\frac{a\pi i}{2}, +\infty\right) = F_{22}\left(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2}\right)$$

reeldir. (EK.29) denklemleri $F_{21}F_{12}$ 'nin ω 'nın alt limitinden bağımsız olduğunu ortaya koyar. Böylece bu alt limit için uygun bir değer seçilebilir. (EK.4) ve (EK.20) birleştirilirse ,

$$|F_{21}\left(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2}\right)| \leq \frac{1}{2} [\exp(\mu) - 1] \exp\left[2i \int_p^{x + (a\pi i)/2} q dx\right] \quad (\text{EK.35})$$

olur. Burada μ 'nün yakınsaklığı ve p 'nin uygun seçimi F_{21} 'in sonlu olmasını garanti eder.

Bununla birlikte $|F_{12}|$ için bir hesap kolayca yapılamaz, (EK.25) kullanılmalıdır. Fakat ilk önce bir M ve ω' 'nün bulunabileceğini göstermeliyiz. λ yolunu (EK.Şekil 2.)'deki gibi iki kısma ayrılabilir. $|\exp(i\omega(x))|$ x 'ten $+\infty$ 'a kadar monoton arttığı için ve $\omega_1(z) = \omega(x)$ seçilebilir. Eğer $x + (a\pi/2)$ 'den x 'e yol üzerindeki tüm ω 'lar için (EK.14)'ü sağlayan bir M_2 bulunabilirse M 'yi (EK.24-27) 'de kullanılacak M_1 ve M_2 maksimum olarak seçilebilir. Benzer olarak (EK.21) 'i sağlayan bir ω'_2 bulunabilirse (yolun aynı kısmı için) ω' 'yü $|\exp(-i\omega_1)|$ veya $|\exp(-i\omega'_2)|$, bir maksimum olan ω'_1 veya ω'_2 olarak seçilebilir. Böyle sonlu M_2 ve ω'_2 'nin mevcudiyeti , $\int q dz$ 'nin sonlu bir kısmı ile ilgilenildiğinden, açıktır ve böylece $|\exp(i\omega(z))|$ singüleritesi olmayan iyi davranışlı bir fonksiyondur. Bu sonlu bir $F(x + (a\pi/2), x)$ 'nin mevcudiyetini garanti altına alır. O halde $F_{12}(x + (a\pi/2), +\infty)$ için hesap,

$$|F_{12}(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty)| \leq \frac{1}{2M} \{ \exp[M\mu(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty)] - 1 \} \exp[-2i \int_p^{z'} q dz] \quad (EK.36)$$

burada ,

$$\omega'(z) = \int_p^{z'} q dz$$

şeklindedir. Şimdi (EK.35) ve (EK.36)'yı birleştirerek,

$$|F_{21}(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2}) F_{12}(\frac{a\pi i}{2} + x, +\infty)| \leq \frac{1}{4M} \{ \exp[\mu(\frac{a\pi i}{2}, x + \frac{a\pi i}{2})] - 1 \} \times \{ \exp[M\mu(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty)] - 1 \} \exp[2i \int_{z'}^{x + \frac{a\pi i}{2}} q dz] \quad (EK.37)$$

$x \rightarrow +\infty$ limitinde hepsi sonlu ve $|F_{21}F_{12}| \rightarrow 0$ olacak şekilde

$\mu[x + (a\pi/2), +\infty] \rightarrow 0$ olur. Böylece ilk tartışma doğrulanmış olur. Aynı işlemleri esas alarak M 'yi (EK. 4) ve (EK.15) 'de kullanarak ,

$$|F_{22}(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty) - 1| \leq \frac{1}{2M} \{ \exp[M\mu(x + \frac{a\pi i}{2}, +\infty)] - 1 \} \quad (\text{EK.38})$$

ve $x \rightarrow +\infty$ iken $F_{22}[x + (a\pi/2), +\infty] \rightarrow 1$ Böylece sadece ,

$F_{22}[(a\pi/2), x + (a\pi/2)]$ 'nin reel olduğu gösterilerek ispat tamamlanacaktır. İlk önce (EK.29) ile ω 'daki alt limiti seçmekte serbest olunduğuna dikkat edilmelidir(heryerde) . 4. bölgede bir nokta seçilip ω 'nın sadece bu bölgedeki değerleri düşünülürse ,

$$\omega = \int_p^z q(z) dz = \int_p^{x + \frac{a\pi i}{2}} i|q| dz$$

bulunur.Böylece ω ve $d\omega$ pür sanaldır. $\varepsilon(q^2, Q^2)$ reel değerli olduğu için (EK.30) ifadesinin reel olduğu görülür ve buradan hareketle $F_{22}[(a\pi/2), x + (a\pi/2)]$ reeldir. Aynı nedenler $F_{22}[(a\pi/2), +\infty]$ 'un reel olması için de kullanılabilir.

SONUÇ

WKB kuantumlanma koşulu hamiltonyenin hermitikliğinin bir sonucudur. Kuantum mekaniğinde iyi bilinen Ehrenfest teoreminden yararlanarak harmonik osilatörün tamlığını anlamak zor değildir. Ancak bu teoremden yola çıkarak diğer tam sonuç veren potansiyellerle ilgili bir tahminde bulunmak veya tamlığını araştırmak için sistematik bir yöntem türetmek pek mümkün görünmemektedir. Burada önemle belirtilmelidir ki bu tez de tamlığın ispatı için incelenen yöntem tamamen kuantum mekaniğinin postülat ve teoremlerinden bağımsızdır, sadece matematiksel bir formalizmdir. Bu nedenle kuantum mekaniği dışındaki alanlara da rahatlıkla uygulanabilir.

FF tekniği adi WKB yaklaşımını da içine alan daha genel bir yöntemdir. Bu teknik kullanılarak adi ve süpersimetrik kuantumlanma koşullarının tam sonuç vermesi bir kriterle bağlanabilir. Bu kriter $F_{22}(-\infty, +\infty)$ 'un reel olmasıdır. Ancak şimdiye kadar $F_{22}(-\infty, +\infty)$ 'un reel olup olmadığını verecek doğrudan bir yöntem bulunamamıştır. Bu konu araştırmaya açıktır.

FF teorisi ve bu teoriden türetilmiş tekniklerin literatürdeki mevcut başarıları [giriş bölümü] yöntemle olan güveni arttırmaktadır. Bu nedenle Crescimanno tarafından ulaşılan (3.23) genelleştirmesi süpersimetri, çözülebilirlik ve tamlık arasındaki fonksiyonel ilişkiyi araştırmak için literatürdeki diğer yöntemlere seçenek teşkil etmektedir [14]. Ayrıca (3.22) ile verilen M_S matrisi daha karışık yapıda olduğu için SWKB'nin tamlığını verecek bir yöntemin araştırılması daha ileri bir çalışmanın yapılması gerektiğini göstermektedir.

Son olarak şu da belirtilmelidir ki; bu çalışmada ele alınan veya literatürdeki atıf yapılan yöntemler SWKB yaklaşımında görülen tamlığı araştırmak için fonksiyonel yöntemlerdir; potansiyel fonksiyonlarının matematiksel özelliklerini verebilir ve bu yöntemlerle potansiyel fonksiyonlarının bir sınıflaması yapılabilir. Ancak sözkonusu tamlığın fiziksel nedenini veremez, Comtet ve arkadaşlarına göre bu tamlığın fiziksel nedenini daha derinlerde süpersimetrik kuantum alan teorilerinde aramak gerekmektedir.

ÖZET

Bu tezde ilk önce WKB ve SWKB yaklaşımlarının türetilmesi incelendi . Bunun ardından kısaca süpersimetrik kuantum mekaniği tanıtıldı ve SWKB kuantumlanma koşulu ele alınarak SWKB yaklaşımında görülen tamlik vurgulandı .Daha sonra Fröman ve Fröman (FF) tekniği kullanılarak gözlenen tamlığın tek kuyulu potansiyeller için bir kritere nasıl bağlanabileceği incelendi. Sonuçta elde edilen bağıntının (adi ve süpersimetrik) harmonik osilatörün tamlığının ispatı için nasıl kullanılabileceği gösterildi. EK kısmında ise 3.Bölüm'de verilmeyen F matrisinin bazı özellikleri özetlenerek okuyucuya bir fikir vermesi için adi durumda Rosen-Morse Potansiyelinin tamlığının ispatı FF formalizmi çerçevesi içinde sunuldu .

SUMMARY

In this thesis , firstly , derivation of the WKB approximation and its generalized form has been investigated . After that, the supersymmetric quantum mechanics has been introduced briefly, the SWKB approximation and its exactness has been discussed. Then, how can be connected the observed exactness with a criteria using the Fröman and Fröman technique for the single-well potentials has been examined. In the final , how can be used the obtained relation for the proof of the exactness of the harmonic oscillator (in the ordinary and the supersymmetric case) has been shown . In the appendix section , some properties of the F matrix which has not been given in the third section and the proof of the exactness of the Rosen-Morse potential in the ordinary case using the Fröman and Fröman technique has been presented.

LİTERATÜR LİSTESİ

- [1] COMTETA., BANDRAUK A.D., CAMPBELL D.K.: Phys. Letts.B.150, (1985) 159.
- [2] CRESCIMANNO M.:J.Math.Phys.,31,(1990) 2946.
- [3] DAMMERT Ö.,J.Math.Phys.,32,(1991) 1822.
- [4] FRÖMAN N.,FRÖMAN P.O.:JWKB Approximation (North-Holland,AMSTERDAM,1965)
- [5] FRÖMAN N.,FRÖMAN P.O.:Nucl.Phys.A147,(1970) 606.
- [6] GOZZI E.,Phys.Letts.B.129,(1983) 432.
- [7] HECHT C.E.,MAYER J.E.:Phys.Rev.106,(1957) 1156.
- [8] JEFFREYS B.S.:The Asymtotic Method - Review Article in : Quantum Theory-I. Edited by BATES D.R., (Academic Press.NEW YORK,1961)
- [9] KEMBLE E.C.:The Fundamental Principles of Quantum Mechanics (McGraw Hill,NEW YORK,1937)
- [10] LANDAU L.D.,LIFSHITZ E.M.:Quantum Mechanics (Pergamon Press,OXFORD,1977)
- [11] LANGER R.E.:Phys.Rev.51,(1937) 669
- [12] MERZBACHER E.:Quantum Mechanics (John Wiley,NEW YORK,1961)
- [13] MORSE P.M.,FESBACH H.:Methods of Theoretical Physics Part-I.(McGraw Hill,NEW YORK,1953)
- [14] RAGHUNATAN K.,SEETHERAMAN M.,VASAN S.S.:Phys Letts.B.188,(1986) 351
- [15] ROSENZWEIG C.,KRIEGER J.B.:J.Math. Phys.9,(1968) 849
- [16] WESS J.,ZUMINO B.: Nucl.Phys.B70,(1974) 39
- [17] WITTEN E.:Nucl Phys.B188,(1981) 513