ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazan AKDOĞAN

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ÇARPIMLARI VE REZİDÜLÜ-P CEBİRLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2014

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ÇARPIMLARI VE REZİDÜLÜ-P CEBİRLERİ

Nazan AKDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 01/08/2014 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

………………...................	…………………………..............	……...................................
Prof. Dr. Naime EKİCİ	Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL	Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ÇARPIMLARI VE REZİDÜLÜ-P CEBİRLERİ

Nazan AKDOĞAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Naime EKİCİ
Yıl: 2014, Sayfa: 79
Jüri : Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
: Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL

Bu tezde Lie cebirlerinin çeşitli çarpımları, rezidülü-P Lie cebirleri ve X-by-Y Lie cebirleri araştırılmış ve bazı çarpım Lie cebirlerinin bazları için örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie cebirleri, serbest Lie cebirleri, rezidülü-P Lie cebirleri, X-by-Y Lie cebirleri

ABSTRACT

MSc THESIS

PRODUCTS OF FREE LIE ALGEBRAS AND RESIDUALLY-P ALGEBRAS

Nazan AKDOĞAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor :Prof. Dr. Naime EKİCİ
Year: 2014, Pages: 79
Jury :Prof. Dr. Naime EKİCİ
:Assoc. Prof. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
:Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

In this thesis, various products of Lie algebras, residually-P Lie algebras and X-by-Y Lie algebras are researched and examples are given for some bases of product Lie algebras.

Key Words: Lie algebras, free Lie algebras, residually-P Lie algebras, X-by-Y Lie algebras

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında hiçbir zaman yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak çalışmamın tamamlanmasını sağlayan, bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünün tüm akademik personeline lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve teşviklerinden dolayı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli anneme, babama ve kardeşime sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT.. II
TEŞEKKÜR..III
İÇİNDEKİLER .... …..IV
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
2.1. Lie Cebirleri 3
2.2. İzomorfizm Teoremleri 6
2.3. Seriler 7
2.4. Serbest Lie Cebirleri..9
2.5. Serbest Lie Cebirlerinin Hall Bazı 11
2.6. Bir Serbest Lie Cebirinin Alt Merkezi Serisinin Terimleri için Serbest Üreteçler. 14
2.7. Bir Serbest Lie Cebirinin Polisentral Serilerinin Terimleri için Bazlar ve Serbest Üreteçler 16
2.8. Serbest Polinilpotent Lie Cebirleri için Bazlar......................................19
2.9. Serbest Çözülebilir Lie Cebirleri için Bazlar 20
2.10. Evrensel Enveloping Cebiri...20
3. HALKALARIN DİREKT ÇARPIMI 23
4. CEBİRLERİN ÇARPIM SINIFLARI 33
4.1. Kartezyen Çarpım...33
4.2. Direkt Çarpım...34
4.3. Direkt Toplam 35
4.4. Lie Cebirlerinin Yarıdirekt Çarpımı...36
4.5. Cebirlerin Ayrık Genişlemesi..38
4.6. Serbest Çarpım 39
4.6.1. Cebirlerin Üreteç ve Tanımlayıcı Bağıntılar Cinsinden Sunumu.....39
4.6.2. Lie Cebirlerinin Serbest Çarpımı..40
4.6.3. Serbest Çarpımın Bazları...41

4.7. Genişletilmiş Serbest Çarpım 45
4.7.1. Lie Cebirlerinin Genişletilmiş Serbest Çarpımlarının İnşası 47
4.8. Wreath Çarpım (Çelenk Çarpım) 48
4.9. Wreath Çarpımın Sunumu 51
4.9.1. Abelyen Bir Lie Cebiri ile Herhangi Bir Lie Cebirinin Wreath Çarpımı 52
4.9.2. Serbest Abelyen Lie Cebirlerinin Wreath Çarpımı 54
5. LİE CEBİRLERİNİN M-ÇARPIMI 57
5.1. Abelyen Çarpım 57
5.2. Metabelyen Çarpım 58
5.3. Çözülebilir Çarpım 59
5.4. Nilpotent Çarpım 60
5.5. Minimal Nilpotent Çarpım 61
6. REZİDÜLÜ-P LİE CEBİRLERİ 67
6.1. Rezidülü Sonlu Lie Cebirleri 69
7. X-BY-Y GRUPLARI VE LİE CEBİRLERİ 71
7.1. X-by-Y Grupları 71
7.1.1. Sonlu-by-Nilpotent Grup 71
7.1.2. Nilpotent-by-Sonlu Grup 72
7.1.3. Çözülebilir-by-Sonlu Grup 73
7.1.4. Merkezi-by-Metabelyen Grup 73
7.2. Merkezi-by-Metabelyen Lie Cebirleri 75
KAYNAKLAR 77
ÖZGEÇMİŞ 79

1. GİRİŞ

Serbest Lie cebirlerinin çarpımları Lie cebirlerinde önemli bir yere sahiptir. U, V cebirlerin iki sınıfı olsun. UV çarpımı şu şekilde tanımlanır: bir G cebirinin UV de olması için gerek ve yeter koşul $I \in U$ ve $G/I \in V$ olacak şekilde G nin bir I idealine sahip olmasıdır. Eğer U ve V cebirlerin bir sınıfı ise UV de bir sınıftır. UV çarpım sınıfı bir U cebirinin bir V cebir yoluyla genişlemesi olarak da düşünülebilir.

Cebirsel yapıların farklı tipteki çarpımları ile ilgili yeterli Türkçe kaynak olmayışı bu çalışmanın yapılmasında önemli bir rol oynamıştır. Tezin bir kısmında Bahturin (1987) ve Kukin ve Bokut (1994) den alınan temel sonuçlar ve tanımlar derlenmiştir.

Halkaların çarpımı ile ilgili temel bilgiler Hungerford (1974) den alınmış olup Lie cebirlerinin çeşitli çarpımları için Bahturin (1987); Kukin (1972); Kukin ve Bokut (1994); Sullivan (1985) ve Golovin (1950) den yararlanılmıştır. Ayrıca wreath çarpımın literatürde çok az rastlanan sunum cinsinden tanımı yapılarak bu tanım örneklerle zenginleştirilmiştir.

Lie cebirlerinin sahip olduğu birçok özelliğin rezidülü-P ve X-by-Y Lie cebirlerine taşınabilir olması nedeniyle bu sınıflardaki Lie cebirleri de ele alınarak incelenmiş ve bazıları için örnekler verilmiştir.

Bu tezin amaçlarından biri, Lie cebirlerinin farklı tipteki çarpımları, rezidülü-P Lie cebirleri ve X-by-Y Lie cebirleri ile ilgili Türkçe kaynak boşluğunu doldurmak ve okuyuculara bu konular ile ilgili temel bilgileri vermektir.

Çalışmamız yedi ayrı bölümden oluşmaktadır. Her bir bölümde aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde halkaların direkt çarpımı incelenip örneklerle genişletilmiş ve problemler çözülmüştür.

Dördüncü bölümde çeşitli çarpım sınıfları verilip örneklerle genişletilmiştir. Ayrıca Shirshov’un serbest Lie cebirlerinin serbest çarpımı için bulduğu baz ve Shmel’kin tarafından çalışılan wreath çarpım incelenmiştir. Bunların dışında Sullivan

(1985) da Lie cebirlerinin wreath çarpımını sunum cinsinden incelemiştir. Buna dayanarak bu konu genişletilmiş örnekler verilmiş ve serbest Lie cebirlerine örneklerle genişletilmiştir.

Beşinci bölümde Lie cebirlerinin M-çarpımları incelenmiştir. Golovin (1950) nin grupların minimal nilpotent çarpımı için yaptığı çalışma temel alınarak minimal nilpotent çarpımın tanımı Lie cebirleri için uyarlanarak benzer sonuçlar Lie cebirleri için elde edilmeye çalışılmıştır.

Altıncı bölümde rezidülü-P Lie cebirleri ele alınmış olup bu bölümde farklı P özellikleri için rezidülü-P Lie cebirlerinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Yedinci bölümde X-by-Y grupları ve Lie cebirleri incelenmiştir. X ve Y yerine farklı farklı sınıflar verilerek konu genişletilmiştir. Bu bölümde Oger (1991); Trabelsi (2000); Lennox (1978); Ridley (1970); Bryant ve Groves (1970) un makaleleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde Lie cebirleri ile ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Burada söz konusu olan bütün Lie cebirleri karekteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde düşünülecektir. K nın karakteristiğini $KarF$ ile göstereceğiz.

2.1. Lie Cebirleri

Tanım 2.1.1: L, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde her $x, y \in L$ için (x, y) ikilisine $[x, y]$ elemanını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $[.,.]: L \times L \to L$ işlemi tanımlı ise L ye K cismi üzerinde bir Lie cebiri denir.

L1) Her $x \in L$ için

$$[x, x] = 0$$

L2) Her $x, y, z \in L$ ve $a, b \in K$ için

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$

$$[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z] = 0 \qquad \text{(bilineerlik özelliği)}$$

L3) Her $x, y, z \in L$ için

$$\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0 \qquad \text{(Jacobi özdeşliği)}$$

[,] çarpımına komütatör çarpım ya da braket çarpım veya Lie çarpımı denir. Lie cebirleri Jacobi özdeşliğinden dolayı asosyatif değildir.
L1) koşulundan

$$[x + y, x + y] = 0$$

$$[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=[x,y]+[y,x]=0$$

olup, buradan

$$[x,y]=-[y,x] \qquad \text{…L1)}'$$

elde edilir. Fakat genelde L1)$'$ koşulu L1) koşulunu gerektirmez.
Bunu görelim. $[x,y]=-[y,x]$ olsun ve özel olarak $x=y$ alalım.

$$[x,x]=-[x,x]$$
$$2[x,x]=0$$

olur. Eğer $KarK=2$ ise $[x,x]\neq 0$ dır.

O halde L1) koşulu bir Lie cebirinin antikomütatif olduğunu gösterir.
Lie cebirlerinin antikomütatif olmalarından dolayı her $x,y\in L$ için eğer $[x,y]=0$ ise L abelyendir.

Tanım 2.1.2: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $V\to V$ ye olan tüm lineer dönüşümlerin kümesi bileşke işlemiyle bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı üzerinde $[x,y]=xoy-yox$ çarpımı ile bir Lie cebiridir. Bu Lie cebiri $gl(V)$ ile gösterilir. Bu cebire genel lineer Lie cebiri denir.

Tanım 2.1.3: L Lie cebirinin merkezi

$$Z(L)=\{x\in L\text{: } her\ y\in L\ için\ [x,y]=0\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.4: L, bir Lie cebiri ve A da L nin bir alt uzayı olsun. Eğer A, L deki Lie çarpımı altında kapalı ise (yani her $x,y\in A$ için $[x,y]\in A$ ise) A ya L nin bir Lie alt cebiri denir ve $A\leq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: L bir Lie cebiri ve I da L nin bir alt cebiri olsun. Eğer her $x \in I$ ve $y \in L$ için $[x, y] \in I$ ise I ya L nin bir ideali denir ve $I \triangleleft L$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: L_1ve L_2, K üzerinde iki Lie cebiri ve $\varphi: L_1 \to L_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer

i) φ lineer ise yani her $x, y \in L$ ve $a, b \in F$ için

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y),$$

i) her $x, y \in L$ için

$$\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

ise φ ye bir Lie cebir homomorfizmi denir.

Bir φ homomorfizminin çekirdeğini $Çek(\varphi)$ ve görüntüsünü $Im(\varphi)$ ile göstereceğiz.

Eğer φ birebir ve örten bir dönüşüm ise φ ye bir izomorfizm denir. Bu durumda L_1 ile L_2 izomorf cebirlerdir. Bunu $L_1 \cong L_2$ şeklinde göstereceğiz. L bir Lie cebiri ve $\varphi: L \to L$ bir izomorfizm ise φ ye bir otomorfizm denir.

Örnek 2.1.6: $ad: L \to gl(L)$
$x \to adx$

her $x, y \in L$ için $(adx)(y) = [x, y]$ olarak tanımlanan homomorfizm adjoint homomorfizmidir. ad dönüşümü lineerdir ve Lie çarpımını korur. $Çek(ad) = Z(L)$ dir.

Tanım 2.1.7: A, K cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. $D: A \to A$ lineer dönüşümü her $a, b \in A$ için

$$D([a,b]) = [a, D(b)] + [D(a), b]$$

koşulunu sağlıyorsa D ye A nın bir türevi denir ve A nın tüm türevlerinin kümesi *DerA* ile gösterilir.

Tanım 2.1.8: L, bir Lie cebiri ve I, L nin bir ideali olsun. L/I kümesini $L/I = \{x + I : x \in L\}$ olarak tanımlayalım. L/I üzerindeki toplama ve çarpma işlemlerini

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$
$$[x + M, y + M] = [x, y] + M$$

şeklinde tanımlarsak L/I bu işlemlerle birlikte bir Lie cebiridir. Bu cebire L nin I ile bölüm cebiri denir.

2.2. İzomorfizm teoremleri

Teorem 2.2.1 (I. İzomorfizm teoremi): L_1 ve L_2 iki Lie cebiri ve $\varphi: L_1 \to L_2$ bir homomorfizm olsun. O zaman $Çek(\varphi)$, L_1 in bir ideali; $Im(\varphi)$, L_2 nin bir alt cebiri ve

$$L_1/_{Çek(\varphi)} \cong Im(\varphi)$$

dir.

Teorem 2.2.2 (II. İzomorfizm teoremi): *I* ve *J* bir Lie cebirinin idealleri ise

$$I + J/_{J} \cong I/_{I \cap J}$$

dir.

Teorem 2.2.3 (III. İzomorfizm teoremi): I ve J bir L Lie cebirinin $I \subseteq J$ olacak şekilde idealleri ise J/I, L/I nın bir ideali ve

$$\frac{L/I}{J/I} \cong L/J$$

dir.

2.3. Seriler

L bir Lie cebiri olsun.

Tanım 2.3.1: $n = 1,2,\ldots$ için $\gamma_n(L)$ terimleri tümevarımla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\gamma_1(L) = L, \gamma_{n+1}(L) = [\gamma_n(L), L]$$

Böylece L nin ideallerinin azalan bir serisi elde edilir.

$$L = \gamma_1(L) \supseteq \gamma_2(L) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_n(L) \supseteq \gamma_{n+1}(L) \supseteq \cdots$$

Bu seriye L nin alt merkezi serisi denir.

L nin $\gamma_2(L) = L' = [L, L]$ alt cebirine türetilmiş (komütatör) alt cebir denir.

Eğer $\gamma_{k-1}(L) \neq \{0\}$ ve $\gamma_k(L) = \{0\}$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı varsa L ye k-ıncı sınıftan nilpotent Lie cebiri denir.

Eğer L, 2–inci sınıftan nilpotent yani $[L, L] = 0$ ise L ye abelyen denir.

Tanım 2.3.2: $n = 0,1, \dots$ için $\delta^n(L)$ terimleri tümevarımla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\delta^0(L) = L, \delta^{n+1}(L) = [\delta^n(L), \delta^n(L)]$$

Böylece L nin ideallerinin azalan bir serisi elde edilir.

$$L = \delta^0(L) \supseteq \delta^1(L) \supseteq \cdots \supseteq \delta^n(L) \supseteq \delta^{n+1}(L) \supseteq \cdots$$

Bu seriye L nin türetilmiş serisi denir.

Eğer $\delta^{k-1}(L) \neq \{0\}$ ve $\delta^k(L) = \{0\}$ olacak şekilde bir k tam sayısı varsa L ye k–ıncı sınıftan çözülebilir Lie cebiri denir.

Tanım 2.3.3: $i = 1,2, \dots, k, \dots$ için $n_i \geq 1$ olmak üzere pozitif tam sayıların bir $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ dizisi için L nin polisentral serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\gamma_{n_1}(L)$; L nin alt merkezi serisinin n_1-inci terimi

$\gamma_{n_1}(\gamma_{n_2}(L))$; $\gamma_{n_1}(L)$ in alt merkezi serisinin n_2-inci terimi

$\vdots$

$\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_i}\left(\gamma_{n_{i+1}}(L)\right)\right)\dots\right)\right)$; $\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_i}(L)\right)\dots\right)\right)$ nin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi

olsun. Böylece elde edilen

$$\begin{aligned} L \supseteq \gamma_{n_1}(L) \supseteq \gamma_{n_1}(\gamma_{n_2}(L)) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_i}(L)\right)\dots\right)\right) \\ \supseteq \gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_i}\left(\gamma_{n_{i+1}}(L)\right)\right)\dots\right)\right) \supseteq \cdots \end{aligned}$$

serisine L nin polisentral serisi denir.

Eğer $\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_i}\left(\gamma_{n_{i+1}}(L)\right)\right)\dots\right)\right) = \{0\}$ ve n_i lerin hiç biri bu eşitlik sağlanacak şekilde daha küçük pozitif sayılarla değiştirilemiyor ise L ye $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ dizisine göre polinilpotent Lie cebiri denir.

Eğer $n_1 = n_2 = 2$ ve $\gamma_2(\gamma_2(L)) = \{0\}$ ise L ye metabelyen Lie cebiri denir.

2.4. Serbest Lie Cebirleri

Tanım 2.4.1: X boştan farklı bir küme; F, K cismi üzerinde bir Lie cebiri ve $i: X \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her B Lie cebiri ve her $\alpha: X \to B$ dönüşümü için $\alpha = \delta i$ olacak şekilde bir tek $\delta: F \to B$ Lie cebiri homomorfizmi varsa F ye X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve X kümesine F nin serbest üreteç kümesi denir. Bunu aşağıdaki diyagramla ifade ederiz:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & F \arrow[d, "\delta \text{ bir tek}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

X üzerindeki serbest Lie cebiri aşağıdaki şekilde inşa edilir.
Her pozitif n tam sayısı için X_n kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X_1 = X$$
$$X_2 = X \times X$$

$$\vdots$$

$$X_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p})$$

Buradaki “×” işlemi kümelerdeki kartezyen çarpımdır.
$M(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ olsun.

Her $a, b \in M(X\ )$ için $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a, b) \in X_p \times X_q$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
$n = p + q$ olsun. Bu durumda $(a, b) \in X_p \times X_q$ olup (a, b) nin $X_p \times X_{n-p} \to X_n$ olan kanonik injeksiyon altındaki görüntüsünü $[a, b]$ ile gösterelim. Yani,

$$X_p \times X_{n-p} \to X_n$$
$$(a, b) \to [a, b]$$

olsun. Böylece $a, b \in M(X)$ için $[a, b]$ çarpımını tanımlamış olduk. $a \in X_p$ olacak şekildeki p tam sayısına a nın uzunluğu denir ve $l(a)$ ile gösterilir. Uzunluğu 1 olan elemanlar, X in elemanlarıdır. Uzunluğu ≥ 2 olan elemanlar için $l(a) \leq l(c)$ ve $l(b) \leq l(c)$ olmak üzere $c = [a, b]$ yazılır. $l(c) = l([a, b]) = l(a) + l(b)$ dır.

K herhangi bir cisim olsun. K üzerinde bazı $M(X)$ kümesi olan vektör uzayını gözönüne alalım. Yani $M(X)$ in elemanlarının K-lineer kombinasyonlarını alıp $M(X)$ deki çarpımı tüm vektör uzayına genişletelim. Böylece K cismi üzerinde birleşmeli olmayan ve sonlu boyutlu olmayan bir serbest Lie cebiri elde ederiz. Bu cebire $N(X)$ diyelim.

A, $N(X)$ in aşağıdaki formdaki bütün elemanları tarafından üretilen bir ideali olsun.

$$Q(a) = [a, a]$$
$$J(a, b, c) = \big[[a, b], c\big] + \big[[b, c], a\big] + \big[[c, a], b\big]$$

O zaman $F(X) = {}^{N(X)}/_{A}$, X üzerinde serbest Lie cebiridir. X e $F(X)$ için bir serbest üreteç kümesi denir. $F(X)$ in inşa edildiği küme belli ise $F(X)$ yerine kısaca F yazarız.

Teorem 2.4.1: $\eta: N(X) \to F(X)$ kanonik dönüşüm ve φ, η nın X e kısıtlanışı olsun. L herhangi bir Lie cebiri olsun. Her $f: X \to L$ dönüşümü için $f = g\varphi$ olacak şekilde bir tek $g: F(X) \to L$ Lie homomorfizmi vardır.

Tanım 2.4.2: L bir Lie cebiri ve $A = \{a_i : i\epsilon I\}$, L nin elemanlarının bir ailesi olsun. I üzerinde kurulan serbest Lie cebirine $F(I)$ diyelim. σ, $\sigma: i \to a_i$ olacak şekilde $F(I)$ dan L nin içine olan bir Lie homomorfizmi olsun. σ örten ise A ya L için bir üreteç kümesi denir. Eğer σ bijektif ise L serbest Lie cebiridir ve A, L nin serbest üreteç kümesidir. Eğer A sonlu bir küme ise L ye sonlu üretilmiş Lie cebiri denir.

Bu tanıma göre serbest Lie cebirinin iki üreteç kümesinin kardinalitesi aynıdır. F nin bir serbest üreteç kümesinin kardinalitesine F nin rankı denir.

2.5. Serbest Lie Cebirinin Hall Bazı

Daha önce tanımladığımız $M(X)$ kümesi, K üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünülen asosyatif olmayan $N(X)$ serbest cebiri için bir bazdır. $M(X)$, $N(X)$ içinde lineer bağımsız olmasına rağmen, $F(X)$ içinde lineer bağımsız değildir. Örneğin $a, b \in M(X)$ için $[a, b]$ ve $[b, a]$ formundaki elemanlar $N(X)$ de lineer bağımsız olmasına rağmen $F(X)$ de $[a, b] = -[b, a]$ olduğundan dolayı lineer bağımlıdırlar. Bu nedenle $M(X)$, $F(X)$ in bir bazı olamaz.

Bu bölümde $F(X)$ i bir vektör uzayı olarak düşündüğümüzde $F(X)$ serbest Lie cebiri için bir baz kümesi kuracağız.

$M^n(X)$ ile $M(X)$ de uzunluğu n olan elemanları gösterelim. Açıkça görülür ki $M^1(X) = X$ dir.

Tanım 2.5.1: $X \neq \emptyset$ olsun. Bir $H \subseteq M(X)$ Hall kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i) $X \subseteq H$ ve X e bir tam sıralama verilmiş olsun.

ii) $H \cap M^2(X)$ kümesi $x, y \in X$ iken $x > y$ olmak üzere $[x, y]$ formundaki elemanlardan meydana gelir.

iii) $H \cap M^m(X)$, $m = 1,2,3, \dots, n-1$ için tanımlanmış ve uzunluğu koruyan bir sıralama verilmiş olsun. Yani $u, v \in M(X)$ ve $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ yazalım ve aynı uzunluktaki elemanları keyfi olarak sıralayalım. O zaman $n \geq 3$ için

$H \cap M^n(X) = \{\big[[a,b],c\big]: a,b,c,[a,b] \in \bigcup_{k=1}^{n-1}(H \cap M^k(X))\,, a > b \leq c, [a,b] > c\}$

dir.

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty}(H \cap M^n(X))$$

olsun.

$$H_n = H \cap M^n(X)$$

dersek

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

kümesi $F(X)$ in bir bazıdır ve buna Hall bazı denir. $H_1, H_2, \dots, H_n$ ... kümelerine Hall kümeleri denir ve H_n ile H de uzunluğu n olan elemanların kümesi gösterilir. Verilen bir X kümesi üzerinde farklı Hall kümeleri tanımlanabilir.

Kısaca $X \neq \emptyset$ olmak üzere Hall bazı aşağıdaki şekilde inşa edilir.

$H_1 = X$, X e tam sıralama verilmiş olsun.

$H_2 = \{[x,y]: x, y \in X, x > y\}$,

$\vdots$

$$H_n = \{[[x,y],z] : x,y,z,[x,y] \in \cup_{i=1}^{n-1} H_i \,, x > y \leq z, l([[x,y],z]) = n\}.$$

Şimdi $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ diyelim. H, $F(X)$ in bir bazı olup bu baza Hall bazı denir.

Bundan sonra H Hall bazındaki sıralama aşağıdaki gibi olacaktır.

i) X keyfi olarak sıralanmış olsun.

ii) $u, v \in H$ ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ şeklinde iki eleman olsun.
Eğer $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ dir.
Eğer $l(u) = l(v)$ ise
$u < v \iff u_1 < v_1$ veya $u_1 = v_1$ iken $u_2 < v_2$
dir.

Örnek 2.5.1: $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki Hall bazını yazalım. $a > b > c$ olsun.

$H_1 = X$,
$H_2 = \{[a,b],[a,c],[b,c]\}$,
$H_3 = \{[[a,b],c],[[a,b],b],[[a,c],a],[[a,c],b],[[a,c],c],[[b,c],a],[[b,c],b],$
$[[b,c],c]\}$,
$H_4 = \{[[[a,b],a],a],[[[a,b],b],a],[[[a,b],b],b],[[[a,c],a],a],[[[a,c],b],a],$
$[[[a,c],b],b],[[[a,c],c],a],[[[a,c],c],b],[[[a,c],c],c],[[[b,c],a],a],$
$[[[b,c],b],a],[[[b,c],b],b],[[[b,c],c],a],[[[b,c],c],b],[[[b,c],c],c],$
$[[a,b][a,c]],[[a,b][b,c]],[[a,c][b,c]]\}$,
$\vdots$

Tanım 2.5.1: L bir X kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun.

a) Eğer $L \cong F/\gamma_n(F)$ olacak şekilde X tarafından üretilen serbest bir F Lie cebiri varsa L ye n–inci sınıftan serbest nilpotent Lie cebiri denir. Eğer $L \cong F/\gamma_2(F)$ ise L ye serbest abelyen Lie cebiri denir.

b) Eğer $L \cong F/\delta^n(F)$ olacak şekilde X tarafından üretilen serbest bir F Lie cebiri varsa L ye *n*–inci sınıftan serbest çözülebilir Lie cebiri denir.

c) Eğer $L \cong F/\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\dots\right)\right)$ olacak şekilde X tarafından üretilen serbest bir F Lie cebiri varsa L ye $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir. Eğer $L \cong F/\gamma_2(\gamma_2(F))$ ise L ye serbest metabelyen Lie cebiri denir.

Dikkat edilecek olursa $\underbrace{\gamma_2\left(\gamma_2\left(\dots\left(\gamma_2(F)\right)\right.\right.}_{\text{k tane}}\left.\left.\dots\right)\right) = \delta^k(F)$ olup $\{2,2,\dots,2\}$ dizisine göre serbest polinilpotent bir Lie cebiri, *k*–ıncı sınıftan serbest çözülebilir Lie cebiridir.

2.6. Bir Serbest Lie Cebirinin Alt Merkezi Serisinin Terimleri İçin Serbest Üreteçler

$m \geq 2$ için *K* üzerindeki bir serbest Lie cebirinin $\gamma_m(F)$ alt merkezi serisinin terimleri *F* nin bir alt cebiri gibi sonlu üretilmiş değildir. Tek istisna durum serbest abelyen olan ve tek bir eleman tarafından üretilen serbest Lie cebirleridir. F bir serbest Lie cebiri olmak üzere $\gamma_m(F)$ için serbest üreteç kümeleri Shmel'kin (1963) tarafından verilmiştir.

F, *K* cismi üzerinde bir *X* serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest bir Lie cebiri olsun. *H*, *F* serbest Lie cebirinin *X* kümesi üzerindeki Hall bazını ve H_n de *H* de uzunluğu *n* olan elemanların kümesini göstersin.

Teorem 2.6.1 (Shmel'kin, 1963): C_m kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$C_m = \{x = [a_1, a_2]: a_1, a_2 \in H, l(x) \geq m, x \in H, l(a_2) < m\}$$

C_m, $\gamma_m(F)$ için bir serbest üreteç kümesidir.

H nin tanımı kullanılarak C_m kümesi aşağıdaki gibi daha açık bir şekilde ifade edilebilir.

$$C_m = \left\{ x = \big[\big[\ldots \big[[a_1, a_2], a_3\big] \ldots \big], a_r\big] : l(x) \geq m, a_i \in H = \bigcup_{k=1}^{m-1} H^k, \mathrm{a}_1 > \mathrm{a}_2 \leq \mathrm{a}_3 \right.$$
$$\left. \leq \cdots \leq \mathrm{a}_r, r \geq 2, eğer\ a_r = [b_1, b_2]\ ise\ a_{r-1} \leq b_1 \right\}$$

C_m serbest üreteç kümesi üzerinde $\gamma_m(F)$ için bir H^{C_m} Hall bazını tanımlayalım. Eğer h, C_m formundaki elemanların çarpımlarının bir kelimesi ise $C_m - l(h)$ ve $X - l(h)$ ile sırasıyla C_m ve X den kullanılan harflerin sayısını gösterelim. C_m, H nin bir alt kümesi olduğundan C_m ye H deki ile aynı olan sıralama verilebilir.

$$H_1^{C_m} = C_m,$$
$$H_2^{C_m} = \{x = [a_1, a_2]: a_1, a_2 \in C_m, a_1 > a_2\}.$$

Şimdi $H_2^{C_m}$ ye aşağıdaki gibi bir sıralama verelim:
$h, g \in H_2^{C_m}$, $h = [h_1, h_2]$ ve $g = [g_1, g_2]$, $h_1, h_2, g_1, g_2 \in C_m$ olsun. Eğer $X - l(h) < X - l(g)$ ise $h < g$ yazalım. h ve g nin aynı uzunlukta olduğunu kabul edelim. O zaman $h < g \Leftrightarrow h_1 < g_1$ veya $h_1 = g_1$ iken $h_2 < g_2$ dir.
$H_1^{C_m}, \ldots, H_{n-1}^{C_m}$ tanımlanmış ve sıralanmış olsun.

$$H_n^{C_m} = \left\{ x = \big[[a_1, a_2], a_3\big]: C_m - l(x) = n, a_1 > a_2 \leq a_3, [a_1, a_2] \right.$$
$$\left. > a_3, a_1, a_2, a_3, [a_1, a_2] \in \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i^{C_m} \right\}.$$

Burada eşitsizliğin yönü $\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i^{C_m}$ deki sıralamaya göre belirlenir. $H_n^{C_m}$ nin $H_2^{C_m}$ nin sıralamasına benzer bir sıralaması vardır.

$$H^{C_m} = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j^{C_m}$$

kümesi $\gamma_m(F)$ nin bir bazıdır.

Bu sıralamayı H^{C_m} ye genişletebiliriz. H^{C_m} nin sıralaması H nin sıralaması ile uyumlu olmak zorunda değildir. $H_2^{C_m}$ de $H_1^{C_m}$=C_m nin bir elemanından X-uzunluğu daha küçük olan elemanlar vardır.

Teorem 2.6.2: $L = {}^{F}\!/_{\gamma_n(F)}$ bir serbest nilpotent Lie cebiri ve H, F nin bir Hall bazı olsun. $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}$ kümesi $L = {}^{F}\!/_{\gamma_n(F)}$ serbest nilpotent Lie cebiri için bir baz kümesidir. Yani, H de uzunluğu n den küçük elemanlar L nin bir bazını oluşturur.

2.7. Bir Serbest Lie Cebirinin Polisentral Serilerinin Terimleri için Bazlar ve Serbest Üreteçler

F, X üzerinde bir serbest Lie cebiri ve H de F nin X üzerindeki Hall bazı olsun. Bir $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ tamsayı dizisine göre $\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\dots\right)\right)$ teriminin serbest üreteç kümesi ve Hall bazını oluşturalım.

Daha önce $\gamma_{n_1}(F)$ için C_{n_1} serbest üreteç kümesi

$$C_{n_1} = \{x = [a_1, a_2]: x \in H, l(x) \geq n_1, l(a_2) < n_1\}$$

şeklinde tanımlamıştık. γ_{n_1} için Hall bazı, $H^{C_{n_1}}$ idi.

$\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}(F)\right)$ için C_{n_1,n_2} serbest üreteç kümesini tanımlayalım.

$$C_{n_1,n_2} = \{x = [a_1, a_2]: x \in H^{C_{n_1}}, C_{n_1} - l(x) \geq n_2, C_{n_1} - l(a_2) < n_2\}$$

C_{n_1,n_2} aşağıdaki şekilde sıralanır.

$g = [g_1, g_2], h = [h_1, h_2] \in C_{n_1,n_2}$ olsun.
Eğer $C_{n_1} - l(g) < C_{n_1} - l(h)$ ise $g < h$ dir.
Eğer $C_{n_1} - l(g) = C_{n_1} - l(h)$ ve $X - l(g) < X - l(h)$ ise $g < h$ dir.
Eğer $C_{n_1} - l(g) = C_{n_1} - l(h)$ ve $X - l(g) < X - l(h)$ ise

$$g < h \iff g_1 < h_1 \text{ veya } g_1 = h_1 \text{ iken } g_2 < h_2$$

dir.

$\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}(F)\right)$ için $H^{C_{n_1,n_2}}$ Hall bazını tanımlayalım.

$$H_1^{C_{n_1,n_2}} = C_{n_1,n_2},$$
$$H_2^{C_{n_1,n_2}} = \{\mathrm{x} = [a_1, a_2]: a_1, a_2 \in C_{n_1,n_2}, a_1 > a_2\}.$$

Bu kümeye önceki bölümde tanımladığımız gibi bir sıralama verelim.
$H_1^{C_{n_1,n_2}}, \dots, H_{n-1}^{C_{n_1,n_2}}$ tanımlanmış ve sıralanmış olsun.

$$H_m^{C_{n_1,n_2}} = \left\{x = \big[[a_1, a_2], a_3\big]: C_{n_1,n_2} - l(x) = m, a_1 > a_2 \leq a_3, [a_1, a_2] > a_3, a_1, a_2, a_3, [a_1, a_2] \in \bigcup_{i=1}^{m-1} H_i^{C_{n_1,n_2}}\right\}.$$

O zaman

$$H^{C_{n_1,n_2}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m^{C_{n_1,n_2}}$$

kümesi $\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}(F)\right)$ nin bir Hall bazıdır.

γ_{n_1}(F), $\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}(F)\right),\ldots,\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\ldots\left(\gamma_{n_{k-1}}(F)\right)\ldots\right)\right)$ için üreteç kümeleri ve bazı tanımlanmış ve sıralanmış olsun.

$\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\ldots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\ldots\right)\right)$ için $C_{n_1,\ldots,n_k}$ serbest üreteç kümesini tanımlayalım.

$$C_{n_1,\ldots,n_k}=\left\{x=[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]:\mathrm{x}\in H^{C_{n_1,\ldots,n_{k-1}}},C_{n_1,\ldots,n_{k-1}}-l(x)\geq n_k,C_{n_1,\ldots,n_{k-1}}-l(\mathrm{a}_2)<n_k\right\}.$$

$\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\ldots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\ldots\right)\right)$ için $H^{\,C_{n_1,\ldots,n_k}}$ Hall bazını tanımlayalım.

$$H_1^{C_{n_1,\ldots,n_k}}=\;C_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Bu küme aşağıdaki öncelik sırasına göre sıralanmış uzunluklar göz önünde bulundurularak sıralanır.

$C_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$- l

$C_{n_1,\ldots,n_{k-2}}$- l

$\vdots$

C_{n_1}- l

X – l

Eğer hepsi eşit ise $g=[g_1,g_2]$, $h=[h_1,h_2]$ olması durumunda yapılan sıralamayı düşünelim.

$H_1^{C_{n_1,\ldots,n_k}},\ldots,H_{m-1}^{C_{n_1,\ldots,n_k}}$ tanımlanmış ve sıralanmış olsun. O zaman

$$H_m^{C_{n_1,\dots,n_k}} = \Big\{x = [[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2], \mathrm{a}_3]: C_{n_1,\dots,n_k} - l(x) = m, \mathrm{a}_1 > \mathrm{a}_2 \leq \mathrm{a}_3, [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2]$$
$$> \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2] \in \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathrm{H}_i^{C_{n_1,\dots,n_k}}\Big\}.$$

olur. Buna göre

$$H^{C_{n_1,\dots,n_k}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m^{C_{n_1,\dots,n_k}}$$

kümesi $\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\dots\right)\right)$ nin bir Hall bazıdır.

2.8. Serbest Polinilpotent Lie Cebirleri için Bazlar

Tanım 2.8.1: $L = {}^{F}\Big/_{\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\dots\right)\right)}$ $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri olsun. B_i kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$B_1 = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n_1-1},$$
$$B_2 = H_1^{C_{n_1}} \cup H_2^{C_{n_1}} \cup \dots \cup H_{n_2-1}^{C_{n_1}},$$
$$\vdots$$
$$B_k = H_1^{C_{n_1,\dots,n_{k-1}}} \cup H_2^{C_{n_1,\dots,n_{k-1}}} \cup \dots \cup H_{n_k-1}^{C_{n_1,\dots,n_{k-1}}}$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

kümesi $L = {}^{F}\Big/_{\gamma_{n_1}\left(\gamma_{n_2}\left(\dots\left(\gamma_{n_k}(F)\right)\dots\right)\right)}$ cebirinin bir bazıdır.

2.9. Serbest Çözülebilir Lie Cebirleri için Bazlar

Tanım 2.9.1: $L = {}^{F}\!/_{\delta^k(F)}$ serbest çözülebilir Lie cebiri olsun.

$$B_1 = X,$$
$$B_2 = C_2,$$
$$B_3 = C_{2,2},$$
$$\vdots$$
$$B_k = C_{\underbrace{2,\dots,2}_{\text{k-1 tane}}}$$

olmak üzere

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

kümesi $L = {}^{F}\!/_{\delta^k(F)}$ cebirinin bir bazıdır.

2.10. Evrensel Enveloping Cebiri

Tanım 2.10.1: L bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birim elemanlı ve birleşmeli $U(L)$ cebirine L nin evrensel enveloping cebiri denir.

1) L den $[U(L)]$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\varepsilon: L \to [U(L)]$ homomorfizmi vardır.

2) K cismi üzerindeki birim elemanlı her B birleşmeli cebiri ve her $\phi: L \to [B]$ homomorfizmi için $\psi\varepsilon = \phi$ olacak şekilde bir tek $\psi: [U(L)] \to B$ homomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & {[B]} \\ {[U(L)]} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \psi\varepsilon = \phi$$

Tanımdan görülüyor ki $[U(L)]$ tektir. $[U(L)]$ nin varlığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

F, X üzerinde bir serbest Lie cebiri ve R de F nin bir ideali olmak üzere $L = F/R$ olarak ifade edilebilir. Serbest Lie cebirleri ve serbest birleşmeli cebirlerin evrensel özelliğinden, X tarafından üretilen serbest birleşmeli A cebiri F nin evrensel enveloping cebiri olup $i: F \to A$ kanonik dönüşümü X üzerindeki birim dönüşümün bir genişlemesi olan bir homomorfizmdir. S, A da $i(R)$ yi içeren en küçük ideal olsun. O zaman A/S, L nin evrensel enveloping cebiridir.

Teorem 2.10.1 (Poincare-Birkhoff-Witt): L, K cismi üzerinde bir Lie cebiri ve $U(L)$, L nin evrensel enveloping cebiri olsun. Eğer L bir serbest F–modül ve E, L nin iyi sıralı bir bazı ise o zaman $\varepsilon: L \to U(L)$ kanonik dönüşümü injektif olup $U(L)$, 1 ve

$$e_1 e_2 \dots e_n, \quad e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n, n \geq 1$$

formundaki monomialler tarafından üretilen bir serbest F–modüldür.

L bir Lie cebiri ve $F(X)$, X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.

Tanım 2.10.2: V, $F(X)$ in bir alt kümesi olsun. $\pi: F(X) \to L$ herhangi bir homomorfizm olmak üzere $V(L)$ ile $v \in V$ için $\pi(v)$ formundaki tüm elemanlar tarafından üretilen en küçük ideali gösterelim. $V(L)$ ye L nin V kümesi tarafından üretilen verbal ideali denir. Eğer $V = \emptyset$ ise $V(L) = \{0\}$ olduğu açıktır. Ayrıca eğer L serbest Lie cebiri ise L nin bir verbal ideali L nin bir alt kümesi tarafından üretilen en küçük idealdir.

Tanım 2.10.3: $\mathbb{V}$, Lie cebirlerin birimli değişmeli k halkası üzerindeki bir sınıfı ve V asosyatif olmayan polinomların bir kümesi olmak üzere özdeşliklerin bir $A = \{v \equiv 0 : v \in V\}$ kümesi varsa aşağıdaki özelliğin sağlanması halinde $\mathbb{V}$ sınıfına bir varyete denir:

"Bir G Lie cebirinin $\mathbb{V}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul G nin A kümesindeki bütün özdeşlikleri sağlamasıdır."

Burada V kümesi bir $F(X)$ serbest Lie cebirinin verilmiş bir alt kümesi olarak düşünülebilir.

Tanım 2.10.4: U, V bir k halkası üzerindeki cebirlerin iki sınıfı olsun. U ile V nin UV çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Bir G Lie cebirinin UV sınıfında olması için gerek ve yeter koşul G de, ${}^{G}\!/_{H} \in V$ olacak şekilde bir $H \in U$ idealinin olmasıdır.

Eğer U ve V birer varyete ise UV de bir varyetedir.

Tanım 2.10.5: R bir halka olsun. Sıfırdan farklı bir $x \in R$ için $xy = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $y \in R$ bulunabiliyorsa x elemanına sıfır bölen denir. Sıfır böleni olmayan halkalara sıfır bölensiz halka denir.

3. HALKALARIN DİREKT ÇARPIMI

Bu kısımda temel bilgiler Hungerford (1974) den alınmıştır.

Teorem 3.1: $\{R_i: i \in I\}$ halkaların boş kümeden farklı bir ailesi olsun ve $\prod_{i\in I} R_i$, R_i toplamsal abelyen gruplarının direkt çarpımı olsun.

i) $\{a_i\}_{i\in I}\{b_i\}_{i\in I} = \{a_ib_i\}_{i\in I}$ çarpımıyla $\prod_{i\in I} R_i$ bir halkadır.

ii) Her $i \in I$ için R_i nin birim elemanı varsa $\prod_{i\in I} R_i$nin de birim elemanı vardır.

iii) Her $k \in I$ için $\{a_i\} \to a_k$ olarak tanımlı $\pi_k: \prod_{i\in I} R_i \to R_k$ kanonik projeksiyonu halka epimorfizmidir.

iv) Her $k \in I$ için $a_k \to \{a_i\}$ $(i \neq k\ a_i = 0)$ olarak tanımlı $i_k: R_k \to \prod_{i\in I} R_i$ kanonik injeksiyonu halka monomorfizmidir.

Burada $\{a_i\}_{i\in I} = (a_1, a_2, \dots)$ dir.

İspat: i) $\prod_{i\in I} R_i$, toplamsal abelyen grupların direkt çarpımı olduğundan $\prod_{i\in I} R_i$ abelyen gruptur. $\prod_{i\in I} R_i$ nın halka olduğunu gösterelim.

$\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\} \in \prod_{i\in I} R_i$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(\{a_i\}\{b_i\})\{c_i\} &= \{a_ib_i\}\{c_i\} = \{(a_ib_i)c_i\} = \{a_i(b_ic_i)\} = \{a_i\}\{b_ic_i\} \\
&= \{a_i\}(\{b_i\}\{c_i\}) \\
\{a_i\}(\{b_i\} + \{c_i\}) &= \{a_i\}(\{b_i + c_i\}) = \{a_ib_i + a_ic_i\} = \{a_ib_i\} + \{a_ic_i\} \\
&= \{a_i\}\{b_i\} + \{a_i\}\{c_i\} \\
(\{a_i\} + \{b_i\})\{c_i\} &= (\{a_i + b_i\})\{c_i\} = \{a_ic_i + b_ic_i\} = \{a_ic_i\} + \{b_ic_i\} \\
&= \{a_i\}\{c_i\} + \{b_i\}\{c_i\}
\end{aligned}
$$

Böylece $\prod_{i\in I} R_i$ bir halkadır.

ii) Her $i \in I$ için 1_{R_i} R_i nin birim elemanı olsun.
$\{1_{R_i}\} \in \prod_{i\in I} R_i$ olmak üzere her $\{r_i\} \in \prod_{i\in I} R_i$ için

$$\{1_{R_i}\}\{r_i\} = \{1_{R_i}r_i\} = \{r_i\}$$
$$\{r_i\}\{1_{R_i}\} = \{r_i 1_{R_i}\} = \{r_i\}$$

olur. Buradan $\{1_{R_i}\}$, $\prod_{i\in I} R_i$ nin birim elemanıdır.

iii) $\pi_k : \prod_{i\in I} R_i \ \to R_k$
$\{a_i\} \to a_k$
π_k nın halka homomorfizmi olduğunu gösterelim.

$\{a_i\}, \{b_i\} \in \prod_{i\in I} R_i$ olsun.

$$\pi_k(\{a_i\} + \{b_i\}) = \pi_k(\{a_i + b_i\}) = a_k + b_k = \pi_k(\{a_i\}) + \pi_k(\{b_i\})$$
$$\pi_k(\{a_i\}\{b_i\}) = \pi_k(\{a_i b_i\}) = a_k b_k = \pi_k(\{a_i\})\pi_k(\{b_i\})$$

Böylece π_k halka homomorfizmidir.
π_k nın örten olduğunu gösterelim.
Her $a_k \in R_k$ için $\pi_k(\{a_i\}) = a_k$ olacak şekilde $\{a_i\} \in \prod_{i\in I} R_i$vardır.
Böylece π_k örtendir.
Böylece $\pi_k$halka epimorfizmidir.

iv) $i_k: R_k \to \prod_{i\in I} R_i$
$a_k \to \{a_i\} \qquad (i \neq k \ a_i = 0)$
i_k nın halka homomorfizmi olduğunu gösterelim.

$$i_k(a_k + b_k) = \{a_i + b_i\} \qquad (i \neq k \ a_i + b_i = 0)$$
$$= \{a_i\} + \{b_i\} = i_k(a_k) + i_k(b_k)$$

$$i_k(a_k b_k) = \{a_i b_i\} \qquad (i \neq k\ a_i b_i = 0)$$
$$= \{a_i\}\{b_i\} = i_k(a_k) i_k(b_k)$$

Böylece i_k halka homomorfizmidir.
i_k nın birebir olduğunu gösterelim.

$i_k(a_k) = i_k(b_k)$ olsun.
$\{a_i\} = \{b_i\}$
$a_k = b_k$

Böylece $i_k$birebirdir.
Böylece i_k halka monomorfizmidir.

Tanım 3.1: $\prod_{i \in I} R_i$ halkasına $\{R_i : i \in I\}$ halka ailesinin dış direkt çarpımı denir. İndeks kümesi sonlu ise yani $I = \{1, \ldots, n\}$ ise $\prod_{i \in I} R_i$ yerine $R_1 \times \ldots \times R_n$ yazarız.

Eğer $\{R_i : i \in I\}$ halka ailesi ve her $i \in I$ için A_i, R_i nin ideali ise $\prod_{i \in I} A_i$, $\prod_{i \in I} R_i$ nin idealidir. Eğer bütün $i \neq k$ için $A_i = 0$ ise $\prod_{i \in I} A_i$ ideali $i_k(A_k)$ dır. Eğer I sonlu ise ve her R_i nin birim elemanı varsa $\prod_{i \in I} R_i$ nin her ideali; A_i, R_i nin ideali olmak üzere $\prod_{i \in I} A_i$ formundadır.

Örnek 3.1: $R_1 = \mathbb{R}[x]$ ve $R_2 = \mathbb{R}$ halkaları olmak üzere $\prod_{i=1}^{2} R_i$ halkasını bulalım.

$$\prod_{i=1}^{2} R_i = R_1 \oplus R_2 = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}[x], b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, b) : a_i \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Bunu aşağıdaki şekilde de yazabiliriz

$$R_1 \oplus R_2 = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + b : a_i \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{c + a_1 x + \ldots + a_n x^n : c, a_i \in \mathbb{R}\}$$

Teorem 3.2: $\{R_i : i \in I\}$ halkaların boştan kümeden farklı bir ailesi, S bir halka ve $\{\varphi_i : S \to R_i : i \in I\}$halka homomorfizmlerinin bir ailesi olsun. O zaman her $i \in I$ için $\pi_i\varphi = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : S \to \prod_{i \in I} R_i$ halka homomorfizmi vardır.

İspat: Her $i \in I$ için $\pi_i\varphi = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : S \to \prod_{i \in I} R_i$ grup homomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \prod_{i \in I} R_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & R_i \end{tikzcd}$$

φ nin halka homomorfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \prod_{i \in I} R_i \\ & R_i \arrow[u, "i_i"'] \end{tikzcd} \qquad \varphi = i_i\varphi_i$$

$a, b \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= i_i(\varphi_i(ab)) = i_i(\varphi_i(a)\varphi_i(b)) = \{\varphi_i(a)\varphi_i(b)\} \quad (i \neq k\ \varphi_i(a)\varphi_i(b) = 0) \\ &= \{\varphi_i(a)\}\{\varphi_i(b)\} \\ &= i_i(\varphi_i(a))i_i(\varphi_i(b)) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

Buradan φ halka homomorfizmidir.

Böylece $\prod_{i \epsilon I} R_i$ halkalar kategorisinde bir çarpımdır.

Teorem 3.3: R bir halka ve $A_1, \dots, A_n$; R halkasında idealler olsun.

i) $A_1 + \dots + A_n = R$,

ii) Her k $(1 \leq k \leq n)$ için $A_k \cap (A_1 + \dots + A_{k-1} + A_{k+1} + \dots + A_n) = 0$

ise $R \cong A_1 \times \dots \times A_n$ dir.

İspat: $\varphi : A_1 \times \dots \times A_n \to R$

$$(a_1, \dots, a_n) \to a_1 + \dots + a_n$$

Toplamsal abelyen grup izomorfizmidir.

$i \neq j$ ve $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ olsun.

$$a_i a_j \in A_i,\ a_i a_j \in A_j$$

olup

$$a_i a_j \in A_i \cap A_j = 0$$

dır. O halde

$$a_i a_j = 0$$

elde edilir.

φ nin halka homomorfizmi olduğunu göstermeliyiz.

$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ olsun.

$$\varphi\big((a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n)\big) = \varphi\big((a_1 b_1, \dots, a_n b_n)\big) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$\varphi\big((a_1, \dots, a_n)\big)\varphi\big((b_1, \dots, b_n)\big) = (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)$$

$$= a_1 b_1 + \dots + a_1 b_n + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_2 b_n + \dots + a_n b_1 + \dots + a_n b_n$$

$i \neq j$ için $a_i a_j = 0$ olduğundan

$$\varphi\big((a_1, \ldots, a_n)\big)\varphi\big((b_1, \ldots, b_n)\big) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi\big((a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n)\big) = \varphi\big((a_1, \ldots, a_n)\big)\varphi\big((b_1, \ldots, b_n)\big)$$

olup φ halka homomorfizmidir.
Böylece $R \cong A_1 \times \ldots \times A_n$ elde edilir.

Yukardaki teoremin hipotezlerinin sağlanması durumunda R ye $A_1, \ldots, A_n$ ideallerinin iç direkt çarpımı denir.

R; $A_1, \ldots, A_n$ ideallerinin iç direkt çarpımı ise R, $A_1 \times \ldots \times A_n$ dış direkt çarpımına izomorftur ve her A_i, R tarafından içerilen bir idealdir. Ama $A_1 \times \ldots \times A_n$ dış direkt çarpımı A_i yi içermez fakat sadece izomorf kopyalarını (yani $i_i(A_i)$) içerir.

R nin $A_1, \ldots, A_n$ ideallerinin iç direkt çarpımı olduğunu göstermek için $R = \prod A_i$ veya $R = A_1 \times \ldots \times A_n$ yazarız.

Şimdi halkaların direkt çarpmı ile ilgili aşağıdaki problemleri inceleyelim. Bu problemler Hungerford (1974) den alınmıştır.

Problem 3.1: $R_1, \ldots, R_n$ birimli halka ve I, $R_1 \times \ldots \times R_n$ nin bir ideali ise her A_i, R_i nin ideali olmak üzere $I = A_1 \times \ldots \times A_n$ dir.

Çözüm: $\pi_k : R_1 \times \ldots \times R_n \to R_k$ kanonik epimorfizmidir.
$0 \neq I \triangleleft R_1 \times \ldots \times R_n$ olsun.
$I \subset R_1 \times \ldots \times R_n$ olup A_i, R_i nin alt halkası olmak üzere $I = A_1 \times \ldots \times A_n$ dir.
$\pi_k(I) = A_k$ dır.
A_k nın ideal olduğunu gösterelim.

$\pi_k(i) \in \pi_k(I)$, $i = (i_1, \ldots, i_n) \in I$, $i_k \in A_k$, $r_k \in R_k$ olmak üzere

$$r_k\pi_k(i) = \pi_k(r_1, \ldots, r_n)\pi_k(i_1, \ldots, i_n) = \pi_k(r_1 i_1, \ldots, r_n i_n) = r_k i_k$$

olup

$$r_k\pi_k(i) \in \pi_k(I)$$

ve dolayısıyla

$$r_k i_k \in A_k$$

dır.

$$\pi_k(i)r_k = \pi_k(i_1, \ldots, i_n)\pi_k(r_1, \ldots, r_n) = \pi_k(i_1 r_1, \ldots, i_n r_n) = i_k r_k$$

olup

$$\pi_k(i)r_k \in \pi_k(I)$$

ve dolayısıyla

$$i_k r_k \in A_k$$

dır. Böylece A_k, R_k nın idealidir.
R_i ler birim elemanlı değilse $I = A_1 \times \ldots \times A_n$ ideali için sonuç doğru değildir.

Tanım 3.2: Bir R halkasındaki bir e elemanı $e^2 = e$ oluyorsa e ye idempotent ve R halkasının merkezindeki bir elemana merkezi eleman denir. Eğer e birimli bir halkada merkezi idempotent ise $\boldsymbol{eR}$ idealdir.

Problem 3.2: Bir R halkasındaki $e_1, \ldots, e_n$ idempotent elemanları $i \neq j$ için $e_i e_j = 0$ oluyorsa $e_1, \ldots, e_n$ elemanlarına ortogonal denir. $R, R_1, \ldots, R_n$ birimli halka ise aşağıdakiler birbirine denktir.

a) $R \cong R_1 \times \ldots \times R_n$,

b) R, $e_1 + \ldots + e_n = 1_R$ ve her i için $e_1 R \cong R_i$ olacak şekildeki $e_1, \ldots, e_n$ ortogonal merkezi idempotent kümesini içerir,

c) $A_i \cong R_i$ olacak şekildeki her A_i, R nin ideali olmak üzere R, $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ iç direkt çarpımıdır.

Çözüm: (a)⇒(b): $R \cong R_1 \times \ldots \times R_n$ olsun.

Her i için $e_i = \left(0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0\right)$ olsun.

e_i nin idempotent olduğunu gösterelim.

Her i için

$$e_i^2 = \left(0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0\right)\left(0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0\right) = \left(0, \ldots, 1_{R_i} 1_{R_i}, \ldots, 0\right)$$
$$= (0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0) = e_i$$

$e_i^2 = e_i$ dir. Yani e_i idempotenttir.

e_i nin merkezi olduğunu gösterelim.

Her i ve her $r = (r_1, \ldots, r_n)$ için

$$e_i r = \left(0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0\right)(r_1, \ldots, r_n) = \left(0r_1, \ldots, 1_{R_i} r_i, \ldots, 0r_n\right) = (0, \ldots, r_i, \ldots, 0)$$
$$r e_i = (r_1, \ldots, r_n)\left(0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0\right) = \left(r_1 0, \ldots, r_i 1_{R_i}, \ldots, r_n 0\right) = (0, \ldots, r_i, \ldots, 0)$$

$e_i r = r e_i$ dir. Yani e_i merkezidir.

e_i nin ortogonal olduğunu gösterelim.

$i \neq j$ için ya $i < j$ ya da $i > j$ olur.

$i < j$ olsun.

$$e_i e_j = \left(0, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0, \ldots, 0\right)\left(0, \ldots, 0, \ldots, 1_{R_j}, \ldots, 0\right)$$
$$= \left(0, \ldots, 1_{R_i} 0, \ldots, 0 1_{R_j}, \ldots, 0\right)$$
$$= (0, \ldots, 0) = 0$$

olur.

$i > j$ olsun.

$$e_i e_j = \left(0,\ldots,0,\ldots,1_{R_i},\ldots,0\right)\left(0,\ldots,1_{R_j},\ldots,0,\ldots,0\right)$$
$$=\left(0,\ldots,0 1_{R_j},\ldots,1_{R_i}0,\ldots,0\right)$$
$$=(0,\ldots,0)=0$$

olur.

Buradan $i \neq j$ için $e_i e_j = 0$ dır. Yani e_i ortogonaldir.

$e_1 + \ldots + e_n = 1_R$ olduğunu gösterelim.

$e_i = \left(0,\ldots,1_{R_i},\ldots,0\right)$ olmak üzere

$e_1 + \ldots + e_n = \left(1_{R_i},\ldots,0\right) + \ldots + \left(0,\ldots,1_{R_n}\right) = \left(1_{R_i},\ldots,1_{R_n}\right) = 1_R$ olur.

$e_i R \cong R_i$ olduğunu gösterelim.

$$\varphi: e_i R \to R_i$$
$$e_i r \to r_i$$

$r = (r_1,\ldots,r_n)$ olarak tanımlanan φ bir izomorfizmdir.

(b)⇒(c): R, $e_1 + \ldots + e_n = 1_R$ ve her i için $e_i R \cong R_i$ olacak şekildeki $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortogonal merkezi idempotent kümesini içersin.

Yukarıdaki tanımdan $e_i R$, R nin idealidir.

$R = e_1 R \times \ldots \times e_n R$ olduğunu gösterelim.

Bunun için önce $e_i R \cap (e_1 R + \ldots + e_{i-1} R + e_{i+1} R + \ldots + e_n R) = 0$ olduğunu gösterelim.

$r \in e_i R \cap (e_1 R + \ldots + e_{i-1} R + e_{i+1} R + \ldots + e_n R)$ olsun.

O zaman $r \in e_i R$ ve $r \in e_1 R + \ldots + e_{i-1} R + e_{i+1} R + \ldots + e_n R$ dir.

$r \in e_i R$ ise $r = e_i m$ dir.

$r \epsilon (e_1 R + \ldots + e_n R)$ ise $r = e_1 m_1 + \ldots + e_{i-1} m_{i-1} + e_{i+1} m_{i+1} + \ldots + e_n m_n$ dir.

$$e_i m_i = e_1 m_1 + \ldots + e_{i-1} m_{i-1} + e_{i+1} m_{i+1} + \ldots + e_n m_n$$

$$0 = e_1 m_1 + \ldots + e_{i-1} m_{i-1} - e_i m_i + e_{i+1} m_{i+1} + \ldots + e_n m_n$$

Bunu e_i ile çarpalım.

$$e_i 0 = e_i e_1 m_1 + \ldots + e_i e_{i-1} m_{i-1} - e_i e_i m_i + e_i e_{i+1} m_{i+1} + \ldots + e_i e_n m_n$$

e_i ortogonal olduğundan yani $e_i e_j = 0$ olduğundan

$$0 = e_i e_i m_i$$
$$m_i = 0$$

elde edilir.

Her e_i için $m_i = 0$ dir yani $r = 0$ dır.

Buradan

$$e_i R \cap (e_1 R + \ldots + e_{i-1} R + e_{i+1} R + \ldots + e_n R) = 0$$

elde edilir.

$R = e_1 R + \ldots + e_n R$ olduğunu gösterelim.

$r \in R$ alalım.

$$r = 1_R r = (e_1 + \ldots + e_n) r = (e_1 r + \ldots + e_n r)$$
$$r \in e_1 R + \ldots + e_n R$$

$R \subseteq e_1 R + \ldots + e_n R$ dir.

$e_1 R + \ldots + e_n R \subseteq R$ olduğu açıktır.

$R = e_1 R + \ldots + e_n R$ dir.

Böylece $R = e_1 R \times \ldots \times e_n R$ olur.

$e_i R$ idealini A_i olarak alırsak $A_i = e_i R \cong R_i$ ve $R = A_1 \times \ldots \times A_n$ olur.

(c)⇒(a): $R = A_1 \times \ldots \times A_n$ ve $A_i \cong R_i$ olduğundan $R = R_1 \times \ldots \times R_n$.

4. CEBİRLERİN ÇARPIM SINIFLARI

Bu kısımda cebirlerinin farklı tipteki çarpımlarını inceleyip bu çarpımların yapısını araştıracağız.

Bu kısımda temel bilgiler Bahturin (1987) den alınmıştır.

4.1. Kartezyen Çarpım

Tanım 4.1.1: $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$ k halkası üzerindeki cebirlerin boş kümeden farklı bir ailesi olsun. Kartezyen çarpım; elemanları, $f(\alpha) \in R_\alpha$ olacak şekildeki, $f: I \to \bigcup_{\alpha\in I} R_\alpha$ fonksiyonları olan cebire denir ve $R = \otimes R_\alpha$ ile gösterilir.
k-cebir yapısı $\lambda \in k$, $f, g \in R$, $\alpha \in I$ olmak üzere

$$(\lambda f)(\alpha) = \lambda f(\alpha)$$
$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$$
$$(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$$

işlemleriyle bellidir.
k-cebirin bütün aksiyomları sağlanır. Yani bu işlemlerle ***R*** bir cebirdir.

Önerme 4.1.1: k üzerindeki Lie cebirlerinin kartezyen çarpımı k üzerinde bir Lie cebiridir.

İspat: $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$ k halkası üzerindeki Lie cebirlerinin boş olmayan bir ailesi olsun.
$L = \otimes R_\alpha$ diyelim.
$L = \otimes R_\alpha$ nın elemanları $f(\alpha) \in R_\alpha$ olacak şekide $f: I \to \bigcup_{\alpha\in I} R_\alpha$ fonksiyonlarıdır.
Şimdi *L* nin bir Lie cebiri olduğunu gösterelim.

i) $f, g, h \in \otimes R_\alpha$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in k$ olsun.
$[\lambda_1 f + \lambda_2 g, h] = \lambda_1[f, h] + \lambda_2[g, h]$ olduğunu gösterelim.

$$[\lambda_1 f + \lambda_2 g, h](\alpha) = [(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(\alpha), h(\alpha)] = [\lambda_1 f(\alpha) + \lambda_2 g(\alpha), h(\alpha)]$$
$$= \lambda_1 [f(\alpha), h(\alpha)] + \lambda_2 [g(\alpha), h(\alpha)]$$
$$= \lambda_1 [f, h](\alpha) + \lambda_2 [g, h](\alpha)$$

ii) $f \in \otimes R_\alpha$ olsun.
$[f, f] = 0$ olduğunu gösterelim.

$$[f, f](\alpha) = [f(\alpha), f(\alpha)] = 0$$

iii) $f, g, h \in \otimes R_\alpha$ olsun.
$\big[[f, g], h\big] + \big[[g, h], f\big] + \big[[h, f], g\big] = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\Big(\big[[f, g], h\big] + \big[[g, h], f\big] + \big[[h, f], g\big]\Big)(\alpha) =$$
$$= \big[[f, g](\alpha), h(\alpha)\big] + \big[[g, h](\alpha), f(\alpha)\big] + \big[[h, f](\alpha), g(\alpha)\big]$$
$$= \big[[f(\alpha), g(\alpha)], h(\alpha)\big] + \big[[g(\alpha), h(\alpha)], f(\alpha)\big] + \big[[h(\alpha), f(\alpha)], g(\alpha)\big]$$
$$= 0$$

Böylece *L*, *k* üzerinde bir Lie cebirdir.

Tanım 4.1.2: $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ *k* halkası üzerindeki cebirlerin boş kümeden farklı bir ailesi, $R = \otimes R_\alpha$ ve $f \in R$ olsun. $\alpha \in I$, $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$ olacak şekilde $\pi_\alpha : R \to R_\alpha$ homomorfizmi *R* den R_α cebirine bir projeksiyondur. *S*, *R* kartezyen çarpımının alt cebiri olsun. Her $\alpha \in I$ için $\pi_\alpha(S) = R$ ise *S* alt cebirine *R* nin alt kartezyen çarpımı denir.

4.2. Direkt Çarpım

Tanım 4.2.1: $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ *k*-cebirlerinin bir ailesi ve $R = \otimes R_\alpha$ kartezyen çarpım olsun. $f \in R$ için f fonksiyonunun *suppf* desteği, $f(\alpha) \neq 0$ olacak şekilde bütün $\alpha \in I$ indislerinin kümesidir. $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ ailesinin *R* kartezyen çarpımının, elemanları sonlu desteğe sahip fonksiyonlar olan S alt kümesi, R nin bir alt cebiridir. Bu alt cebire yukarıdaki ailenin direkt çarpımı denir ve S=$\prod_{\alpha\in I} R_\alpha$ ile gösterilir.

I sonlu ise yani $I = \{1, \dots, n\}$ ise kartezyen çarpım ve direkt çarpım çakışıktır. $R = \prod_{i\in I} R_i = R_1 \times \dots \times R_n$ şeklinde yazarız.

R nin elemanları, $r_i \in R_i$ $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $(r_1, \dots, r_n)$ formundaki *n* bileşenli vektörlerden oluşur. Bütün işlemler bileşen bileşen tanımlıdır. Alt direkt çarpım kavramı, alt kartezyen çarpım kavramına benzer şekilde tanımlanır.

4.3. Direkt Toplam

Tanım 4.3.1: *S* bir cebir ve $S_1, \dots, S_n$ de *S* nin idealleri olsun. *S* nin her *x* elemanının, $x_i \in S_i$ $i = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$x = x_1 + \dots + x_n \tag{4.1.}$$

formunda tek bir yazılışı varsa *S* ye sıfırdan farklı $S_1, \dots, S_n$ ideallerinin direkt toplamı denir ve $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ile gösterilir.
y, *S* deki başka bir eleman ve $y = y_1 + \dots + y_n$ ise *xy* elemanını

$$xy = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \tag{4.2.}$$

ve $\lambda \in k$ olmak üzere λx elemanını

$$\lambda x = \lambda x_1 + \dots + \lambda x_n \tag{4.3.}$$

şeklinde gösteririz.
(4.2.) deki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.
$i \neq j$ ise $x_i y_j \in S_i$ ve $x_i y_j \in S_j$ dir. (4.1.) eşitliğindeki formun tekliğinden $S_i \cap S_j = \{0\}$ dır. Dolayısıyla $i \neq j$ için $x_i y_j = 0$ dır.

$$xy = (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + \sum_{i \neq j} x_i y_i$$
$$= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

$x_i y_i \in S_i$ olduğundan (4.2.) eşitliği xy için istenilen yazılıştır.
(4.2.) ve (4.3.) ten $s_i \in S_i$ olmak üzere $x = s_1 + \ldots + s_n$ formundaki elemanla $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ elemanını ilişkilendirerek direkt çarpım ve direkt toplam arasında bir izomorfizm elde ederiz.
O halde $S_1 \times \ldots \times S_n \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ dir.

4.4. Lie Cebirlerinin Yarıdirekt Çarpımı

L ve M, k halkası üzerinde Lie cebirleri olsun. L den M nin $Der\,M$ türevlerinin cebirine bir φ homomorfizmi verildiğini varsayalım. $x_1, x_2 \in L$, $y_1, y_2 \in M$ ve $\lambda \in k$ için

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$
$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], \varphi(x_1)(y_2) - \varphi(x_2)(y_1) + [y_1, y_2])$$

işlemlerini tanımlayalım. O zaman $x \in L$, $y \in M$ olmak üzere bütün (x, y) ikililerinin kümesi bir cebir olur.

Yukarıdaki ikililerinin kümesini N ile gösterelim. N bir k-modüldür ve N deki çarpma değişmeli değildir. N nin bir Lie cebiri olduğunu göstermek için Jacobi özelliğinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. $(x, y) \in N$ için $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla $J(u, v, w) = 0$ eşitliği aşağıdaki dört durum için ispatlanmalıdır.

i) $u = (x_1, 0)$ $v = (x_2, 0)$ $w = (x_3, 0)$,
ii) $u = (0, y), v = (x_1, 0), w = (x_2, 0)$,
iii) $u = (0, y_1), v = (0, y_2), u = (x, 0)$,

iv) $u = (0, y_1), v = (0, y_2), w = (0, y_3)$.

i) $J(u,v,w) = \big[[u,v],w\big] + \big[[v,w],u\big] + \big[[w,u],v\big]$

$$= \big[[(x_1,0),(x_2,0)],(x_3,0)\big] + \big[[(x_2,0),(x_3,0)],(x_1,0)\big] + \big[[(x_3,0),(x_1,0)],(x_2,0)\big]$$

$$= \big[[(x_1,0),(x_2,0)],(x_3,0)\big] + \big[[(x_2,0),(x_3,0)],(x_1,0)\big] + \big[[(x_3,0),(x_1,0)],(x_2,0)\big]$$

$$= [([x_1,x_2],0),(x_3,0)] + [([x_2,x_3],0),(x_1,0)] + [([x_3,x_1],0),(x_2,0)]$$

$$= \big(\big[[x_1,x_2],x_3\big],0\big) + \big(\big[[x_2,x_3],x_1\big],0\big) + \big(\big[[x_3,x_1],x_2\big],0\big)$$

$$= \big(\big[[x_1,x_2],x_3\big] + \big[[x_2,x_3],x_1\big] + \big[[x_3,x_1],x_2\big],0\big) = (0{,}0) = 0$$

iv) (i) ye benzer şekilde gösterilir

ii) $J(u,v,w) = \big[[u,v],w\big] + \big[[v,w],u\big] + \big[[w,u],v\big]$

$$= \big[[(0,y),(x_1,0)],(x_2,0)\big] + \big[[(x_1,0),(x_2,0)],(0,y)\big] + \big[[(x_3,0),(x_1,0)],(x_2,0)\big]$$

$$= [(0,-\varphi(x_1)(y)),(x_2,0)] + [([x_1,x_2],0),(0,y)] + [(0,\varphi(x_2)(y)),(x_1,0)]$$

$$= (0,\varphi(x_2)\varphi(x_1)(y)) + (0,\varphi([x_1,x_2])(y)) + (0,-\varphi(x_1)\varphi(x_2)(y))$$

$$= (0,\varphi(x_2)\varphi(x_1)(y) + \varphi([x_1,x_2])(y) - \varphi(x_1)\varphi(x_2)(y))$$

$$= \big(0,\big([\varphi(x_2),\varphi(x_1)] + \varphi([x_1,x_2])\big)(y)\big)$$

$$= \big(0,\big(-[\varphi(x_1),\varphi(x_2)] + \varphi([x_1,x_2])\big)(y)\big)$$

$$= \big(0,-\varphi([x_1,x_2]) + \varphi([x_1,x_2])\big)(y)$$

$$= (0{,}0) = 0$$

iii) $J(u,v,w) = \big[[u,v],w\big] + \big[[v,w],u\big] + \big[[w,u],v\big]$

$$= \big[[(0,y_1),(0,y_2)],(x,0)\big] + \big[[(0,y_2),(x,0)],(0,y_1)\big] + \big[[(x,0),(0,y_1)],(0,y_2)\big]$$

$$= [(0,[y_1,y_2]),(x,0)] + [(0,-\varphi(x)(y_2)),(0,y_1)] + [(0,\varphi(x)(y_1)),(0,y_2)]$$

$$= \big(0,-\varphi(x)([y_1,y_2])\big) + (0,[-\varphi(x)(y_2),y_1]) + (0,[\varphi(x)(y_1),y_2])$$

$$= (0,-\varphi(x)([y_1,y_2]) - [\varphi(x)(y_2),y_1] + [\varphi(x)(y_1),y_2])$$

$$= (0,-[\varphi(x)(y_1),y_2] - [y_1,\varphi(x)(y_2)] + [y_1,\varphi(x)(y_2)] + [\varphi(x)(y_1),y_2])$$

$= (0,0) = 0$

N nin Jacobi özelliği dışındaki koşulları sağladığı basit hesaplarla kolayca elde edilir. Böylece N, L nin M ile φ ye göre k üzerindeki yarıdirekt çarpımı olan bir Lie cebiridir. Bu cebiri $L \ltimes_{\varphi} M$ ile göstereceğiz. Eğer φ nin ne olduğu belli ise $L \ltimes M$ yazacağız. φ sıfır dönüşüm ise M ile L nin direkt çarpımını elde ederiz.

4.5. Cebirlerin Ayrık Genişlemesi

Tanım 4.5.1: Bir R k-cebiri $R/S' \cong T$ olacak şekilde $S' \cong S$ idealine sahipse R k-cebirine, S k-cebirinin T bölüm cebiriyle bir genişlemesi denir. Eğer R, $T' \cap S' = \{0\}$ ve $R = T' + S'$ (k-modül toplamı) olacak şekilde T' alt cebirine sahipse bu genişlemeye ayrık denir. Bu durumda $T \cong T'$ dür. İzomorfizm teoremlerini kullanarak bunu gösterelim.

$$T = R/S' = T' + S'/S' = T'/T' \cap S' = T'/\{0\} = T'$$

dir.

Önerme 4.5.1: Eğer R Lie cebiri, S nin T ile ayrık genişlemesi ise uygun bir $\varphi: T \to DerS$ homomorfizmi için $R \cong T \ltimes_{\varphi} S$ dir.

Bu izomofizmin doğruluğunu gösterelim.

Yukarıdaki izomorfizmle S ve S', T ve T' ideallerini belirleyebiliriz. O zaman $R = T \oplus S$ dir. Her $x \in T$ için $\varphi(x)$, adx türevinin S ye kısıtlaması olsun. *ad* homomorfizm olduğu için aynı şey φ için de doğrudur. Şimdi R nin herhangi iki ikilisinin çarpımını hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}[x_1 + y_1, x_2 + y_2] &= [x_1, x_2] + [x_1, y_2] + [y_1, x_2] + [y_1, y_2] \\ &= [x_1, x_2] + [x_1, y_2] - [x_2, y_1] + [y_1, y_2] \\ &= [x_1, x_2] + ad(x_1)y_2 - ad(x_2)y_1 + [y_1, y_2]\end{aligned}$$

$$= [x_1, x_2] + \varphi(x_1)(y_2) - \varphi(x_2)(y_1) + [y_1, y_2]$$
$$= ([x_1, x_2], \varphi(x_1)(y_2) - \varphi(x_2)(y_1) + [y_1, y_2])$$

$(x, y) \to x + y$ olacak şekilde $\theta: T \leftthreetimes_{\varphi} S \to R$ dönüşümü iki cebirdeki çarpma ile uyumludur. Diğer işlemler de korunur ve θ bijektiftir. Dolayısıyla istenilen izomorfizm elde edilmiş olur.

4.6. Serbest Çarpım

4.6.1. Cebirlerin Üreteç ve Tanımlayıcı Bağıntılar Cinsinden Sunumu

X boş kümeden farklı bir küme; $L = L(X)$, X tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri ve R, $L(X)$ in bir alt kümesi olsun. L nin R yi içeren en küçük idealine $S = id_L(R)$ diyelim. L nin S ile bölüm cebiri olan $G = L/S$ bölüm cebirini $\langle X: R\rangle$ ile gösterelim. $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ve $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ ise $\langle X: R\rangle$ yerine $\langle x_1, x_2, \dots : r_1 = 0, r_2 = 0, \dots\rangle$ yazabiliriz. Her iki durumda da *G*, *X* üreteç kümesi ve $\{r = 0: r\epsilon R\}$ tanımlayıcı bağıntı kümesiyle bir Lie cebiridir. $\langle X: R\rangle$ ye *G* nin bir sunumu denir.

Örnek 4.6.1.1: $\alpha, \beta \in k$ olmak üzere $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ formundaki bütün matrislerin Lie cebirini *G* ile gösterelim.

$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $[x_1, x_2]$ çarpımını hesaplayalım.

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\beta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2\alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2\beta_1 \end{pmatrix} = 0$$

O halde *G* Lie cebirini $\langle x_1, x_2: [x_1, x_2] = 0\rangle$ şeklinde gösterebiliriz. Eğer *G* Lie cebirinin $|X| < \infty$ olacak şekilde bir $\langle X: R\rangle$ sunumu varsa *G* ye sonlu üretilmiştir denir. Eğer $|X| < \infty$ ve $|R| < \infty$ ise G ye sonlu sunuma sahiptir denir. Serbest Lie cebirleri $L(X) = \langle X: \emptyset \rangle$ şeklinde sunuma sahiptir.

Lemma 4.6.1.1: $G = \langle X: R \rangle$ ve H, k üzerinde bir Lie cebiri olsun. Her $r = r(x_1, \ldots, x_n) \in R$ için $r(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 0$ olacak şekildeki $\varphi: X \to H$ dönüşümünü düşünelim. O zaman $\tilde{\varphi}\,(w(x_1, \ldots, x_n) + S) = w(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ şeklindeki dönüşüm her $x \in X$ için $\tilde{\varphi}\ (x + S) = \varphi(x)$ olacak şekilde bir tek $\tilde{\varphi} : G \to H$ homomorfizmini tanımlar.

4.6.2. Lie Cebirlerinin Serbest Çarpımı

Tanım 4.6.2.1: $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\alpha \neq \beta$ için $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ olmak üzere $\langle X_\alpha: R_\alpha \rangle$ sunumu ile k üzerinde Lie cebirlerinin bir ailesi ve $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ ve $R = \bigcup_\alpha R_\alpha$ olsun. O zaman $G = \langle X: R \rangle$, $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ ailesinin serbest çarpımıdır ve $G = \prod^*_{\alpha \in I} G_\alpha$ ile gösterilir.

I sonlu yani, $I = \{1, \ldots, n\}$ ise $G = G_1 * \ldots * G_n$ dir. Herhangi bir $\alpha \in I$ için X_α nın birim dönüşümünü X e genişleten $i_\alpha: G_\alpha \to G$ homomorfizmi vardır.

Önerme 4.6.2.1: $G = \prod^*_{\alpha \in I} G_\alpha$, H bir Lie cebiri ve $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\varphi_\alpha: G_\alpha \to H$ homomorfizmlerinin bir ailesi olsun. O zaman $\varphi i_\alpha = \varphi_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\varphi: G \to H$ homomorfizmi vardır.

İspat: $\varepsilon_\alpha: L(X_\alpha) \to G_\alpha$ doğal homomorfizm olsun. O zaman $R_\alpha \subset Çek(\varphi_\alpha \varepsilon_\alpha)$ dır. Her $\alpha \in I$ için $\psi(x_\alpha) = \varphi_\alpha \varepsilon_\alpha$ ile $\psi: L(X_\alpha) \to H$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm, herhangi bir $\alpha \in I$ için $R_\alpha \subset Çek(\bar{\psi})$ olacak şekilde $\bar{\psi}: L(X) \to H$ homomorfizmine genişler. Böylece $R_\alpha \subset Çek(\bar{\psi})$ ve S, $L(X)$ in R yi içeren en küçük ideali olmak üzere $S \subset Çek(\bar{\psi})$dir. Yukarıdaki lemmayı uygulayarak $\varepsilon: L(X) \to G$ doğal homomorfizmi olmak üzere $\bar{\psi}$ yi $\bar{\psi} = \varphi\varepsilon$ şeklinde gösteririz. Şimdi istenilen φ yi elde ettik. G, $i_\alpha(G_\alpha)$ alt cebiriyle üretildiğinden φ tektir.

Sonuç 4.6.2.1: Herhangi bir α için i_α dönüşümü injektiftir. Yani $i_\alpha(G_\alpha)$, $G_\alpha \in G$ nin izomorf kopyasıdır.

İspat: Yukarıdaki önermede $H = G_\alpha$ ve $\beta \neq \alpha$ için $\varphi_\beta = 0$, $\varphi_\alpha = 1_{G_\alpha}$ alınarak sonuç elde edilir.

Serbest çarpımın alternatif tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir.

Eğer $G = \prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$ izomorfizme göre her $\alpha \in I$ için G_α alt cebirini içeren tek Lie cebiri ise ve $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ homomorfizmlerinin herhangi bir $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesi $\varphi / G_\alpha = \varphi_\alpha$ olacak şekildeki $\varphi: G_\alpha \to H$ homomorfizmine tek bir şekilde genişliyorsa $G = \prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$, $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesinin serbest çarpımıdır.

4.6.3. Serbest Çarpımın Bazları

$(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ cebirlerin bir ailesi olsun. $\alpha \in I$ için bütün G_α cebirlerinin $E_\alpha = \{e_{\alpha\beta} : \beta \in I_\alpha\}$ bazına sahip serbest k-modül olduğunu ve $\alpha \in I$ için bütün I_α kümelerinin ve I nın iyi sıralı olduğunu varsayalım. $E = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha$ olsun. E deki sıralamayı $\alpha > \alpha'$ ise veya $\alpha = \alpha'$ iken $\beta > \beta'$ ise $e_{\alpha\beta} > e_{\alpha'\beta'}$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi Shirshov bazını tanımlayalım:

X iyi sıralı bir küme, $W(X)$ de alfabetik olarak sıralı kelimelerin yarı grubu olsun. Eğer $x_{s-p} < x'_{r-p}$ olacak şekilde p yoksa ve $x_{s-p+1} = x'_{r-p+1}, \dots, x_s = x'_r$ ise $x_1 x_2 \dots x_s > x'_1 x'_2 \dots x'_r$ yazalım.

Örneğin; $x_1 < x_2 < x_3$ ise $x_2x_3 > x_1x_2^2x_3 > x_2x_1x_3$ dir

$W(X)$ in bir a elemanı $a \neq a_1, a_2$ olmak üzere $a = a_1a_2$ şeklinde bir parçalanışa sahip olduğunda $a > a_2a_1$ oluyorsa a ya baz kelimesi denir. $\Gamma(X)$, X kümesi üzerinde asosyatif olmayan tüm monomiallerin kümesi olmak üzere her $w \in \Gamma(X)$ monomialine W daki parantezlerin kaldırılmasıyla elde edilen $\overline{w} \in W(X)$ monomialini karşılık getirelim.

$\check{R}$ aşağıdaki koşulları sağlayan ve asosyatif olmayan monomiallerin kümesi olsun:

1) $X \subset \breve{R}$

2) $w = u * v \in \breve{R}$ olması için gerek ve yeter koşul

i) $u, v \in \breve{R}$

ii) $\bar{u} < \bar{v}$

iii) $v = v_1 * v_2$ ise $\bar{u} \geq \overline{v_1}$

$\breve{R}$ nın $\Gamma(X) \to L(X)$ doğal homomorfizmi altındaki görüntüsü $L(X)$ in serbest ***k***-modül olarak bazıdır. Bu baza Shirshov bazı denir.

Şimdi $\breve{R}$ kümesini E üzerinde düşünelim.

$\breve{R} = \breve{R}\ (E)$, E deki Shirshov bazı olsun. R nin bir w monomialine karşılık gelen $\bar{w}$ kelimesinin $i < j$ için $e_{\alpha i}e_{\alpha j}$ şeklinde alt kelimesi yoksa w ye özel monomial denir. R_s, $G = \prod_{\alpha \epsilon I}^{*} G_\alpha$ nın bütün özel monomiallerinin görüntülerinin kümesi olsun.

Teorem 4.6.3.1 (A.I. Shirshov): R_s, $G = \prod_{\alpha \in I}^{*} G_\alpha$ serbest çarpımının bir bazıdır.

İspat: $U = U(G)$ nin bir bazı 1 ve

$e_{\alpha_1 i} \dots e_{\alpha_1 j} e_{\alpha_2 s} \dots e_{\alpha_2 r} \dots e_{\alpha_t n} \dots e_{\alpha_t m}$, $t \geq 1$, $\alpha_i \in I$, $i \geq \ldots \geq$j, $s \geq \ldots \geq$r, $n \geq \ldots \geq m$,
$\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $i = 1, \ldots, t$ (4.4.)

şeklindeki bütün çarpımlardan oluşur. $\varepsilon: G \to U$ doğal homomorfizm olsun. $w \in R_s$ elemanını seçelim ve ε(w) elemanını U nun (4.4.) deki elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazalım. $\widehat{w}$, alfabetik sıralamaya göre bu kombinasyonun baş terimidir. $\widehat{w}$ alternatif bir yoldan da bulunabilir. Yani; $A(E)$, birimli ve E serbest üreteç kümesine sahip serbest asosyatif cebir olmak üzere w elemanını $A(E)$ cebirinin bir elemanı olarak düşünüp asosyatif polinom olarak yazabiliriz. Alfabetik olarak en büyük kelime, w üzerindeki parantezlerin kaldırılmasıyla elde edilen $\bar{w}$ kelimesidir. $A(E)$ den U ya olan doğal dönüşüm altında $\bar{w}$, w elemanına gider. Çünkü $\bar{w}$ elemanının $i < j$ için $e_{\alpha i}e_{\alpha j}$ şeklinde alt kelimesi yoktur. Farklı $w \in R$ için

$\overline{w}$ elemanının lineer bağımsızlığından w kelimesinin lineer bağımsızlığını elde ederiz. Böylece R_s yi oluşturan özel monomiallerin lineer bağımsızlığını elde ederiz. Şimdi özel monomiallerin G yi gerdiğini gösterelim. $\varepsilon(\check{R})$ nin özel monomialler kümesinin lineer gereninin içinde olduğunu göstermek yeterlidir. $w \in \check{R}$ olsun. $\overline{w}$ elemanının $i < j$ için $e_{\alpha i}e_{\alpha j}$ şeklinde alt kelimesi olduğunu varsayalım. Alfabetik sıralamaya göre verilen derece üzerinde tümevarım uygulayalım. Yukarıdaki gibi w da $w_t \geq \ldots \geq w_2 \geq w_1 < e_{\alpha i}$ olmak üzere $(w_t \ldots w_2 w_1 e_{\alpha i})e_{\alpha j}$ şeklinde bir çarpan vardır. w', w dan elde edilen $w_t \ldots w_2 w_1 e_{\alpha i} e_{\alpha j}$ kelimesi olmak üzere $\varepsilon(w)$, $\varepsilon(w')$ kelimesinin lineer kombinasyonudur. Çünkü $w_t \ldots w_2 w_1 e_{\alpha i} e_{\alpha j}$ nin görüntüsünde $e_{\alpha i} e_{\alpha j}$, G deki $e_{\alpha i}e_{\alpha j} = \sum_p c_{ij}^p\, e_{\alpha p}$, $\sum_p c_{ij}^p\, e_{\alpha p} \in k$ çarpımıyla yer değiştirebilir. Tümevarım hipotezini uyguladığımızda sonuç elde edilir.

Şimdi iki Lie cebirinin serbest çarpımının bir bazını yukarıdaki teoreme göre nasıl bulunacağını örneklerle gösterelim.

Örnek 4.6.3.1: G_1 ve G_2 iki Lie cebirleri ve G_1 in bir bazı E_1=$\{x_1, x_2\}$, G_2 nin bir bazı E_2=$\{x_3, x_4, x_5\}$ olsun. $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesi üzerindeki sıralamanın $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ şeklinde olduğunu varsayalım. $G = G_1 * G_2$ serbest çarpımının birkaç baz elemanını yazalım.

$$x_1, x_3, x_4, [x_4, x_3], [x_5, x_1], \big[[x_4, x_2], x_1\big], \big[[x_5, x_3], x_2\big], \Big[\big[[x_5, x_4], x_3\big], x_2\Big],$$
$$\big[[x_4, x_3], [x_2, x_1]\big], \ldots$$

Örnek 4.6.3.2: G_1 ve G_2 iki Lie cebirleri ve G_1 in bir bazı $B_1 = \{a, b\}$, G_2 nin bir bazı $B_2 = \{c, d\}$ olsun. $\{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki sıralama $a > b > c > d$ şeklinde olsun. $G = G_1 * G_2$ serbest çarpımının birkaç baz elemanını yazalım.

$$b, d, [c, d], [a, d], \big[[a, c], d\big], \Big[\big[[a, b], c\big], d\Big], \big[[a, c], [b, d]\big], \ldots$$

Bu kısımdaki tanımlar Kukin'in (1972) On The Cartesian of a Free Lie Sum of Lie Algebras adlı makalesinden alınmıştır ve örneklerle genişletilmiştir.

Tanım 4.6.3.1: Bir E Lie cebirinin, $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ Lie cebirlerinin serbest Lie çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in I$ için $\varphi_\alpha : E_\alpha \to E$ monomorfizm olmak üzere herhangi bir L Lie cebiri ve herhangi bir $\psi_\alpha : E_\alpha \to L$ homomorfizmi için $\psi_\alpha = \chi\varphi_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\chi : E \to L$ homomorfizminin olmasıdır.

$\prod^*_{\alpha\in I} E_\alpha$ serbest Lie çarpımından $\bigoplus E_\alpha$ direkt toplamına olan χ kanonik epimorfizmi vardır. Bu, $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ cebirlerinden kendi üzerine olan birim dönüşüm vasıtasıyla tanımlanır.

Tanım 4.6.3.2: $\chi : \prod^*_{\alpha\in I} E_\alpha \to \bigoplus E_\alpha$, $\chi e = e \; (e \in E_\alpha, \alpha \in I)$
şeklindeki χ epimorfizminin çekirdeğine $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ Lie cebirlerinin $\prod^*_{\alpha\in I} E_\alpha$ serbest Lie çarpımının kartezyen alt cebiri denir.

Örnek 4.6.3.3: $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{x_3\}$ olmak üzere $E_1 = \langle x_1, x_2\rangle$, $E_2 = \langle x_3\rangle$ serbest Lie cebirleri olsun. X ve Y kümeleri üzerindeki sıralamayı da $x_1 > x_2 > x_3$ olarak alalım.

$E_1 * E_2$ serbest çarpımının birkaç elemanını yazalım.

$E_1 * E_2$ cebiri $\{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olup Hall bazı aşağıdaki şekildedir.

$$H_1 = X \cup Y$$
$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\}$$
$$H_3 = \{\big[[x_1, x_2], x_2\big], \big[[x_1, x_2], x_1\big], \big[[x_1, x_3], x_3\big], \big[[x_1, x_3], x_2\big], \big[[x_1, x_3], x_1\big],$$
$$\big[[x_2, x_3], x_3\big], \big[[x_2, x_3], x_2\big], \big[[x_2, x_3], x_1\big]\}$$
$$\vdots$$
$$H_n$$
$$\vdots$$
$$H = H_1 \cup \dots \cup H_n \dots$$

Her $u \in E_1 * E_2$ için $u = \sum_{i \in I} \alpha_i h_i$, $\alpha_i \in k$, $h_i \in H$ olarak tek bir şekilde yazılabilir. Eğer $h_i \in H$ elemanları X ve Y kümelerinden elemanlar içeriyorsa kartezyen alt cebirin elemanları olup u da kartezyen alt cebirin elemanıdır. Örneğin,

$[x_1, x_3], [x_2, x_3], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2],$
$[[x_2, x_3], x_1], \ldots$

elemanları kartezyen alt cebirine aittir.

4.7. Genişletilmiş Serbest Çarpım

Bu kısımda temel tanım ve teoremler Kukin ve Bokut (1994) den alınmıştır. R, K cismi üzerindeki cebirlerin bir varyetesi olsun.

Tanım 4.7.1: $\alpha \in I$, A_α ve C, R varyetesindeki cebirler; $\varphi_\alpha : C \to A_\alpha$ izomorfizmler olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $A \in R$ cebirine, A_α ların C alt cebiri ile genişletilmiş bir serbest çarpımı denir.

i) Her $\alpha \in I$ için A, A_α lara izomorf $\overline{A_\alpha}$ lar tarafında üretilir.
ii) Birbirinden farklı her α, β indisi için A_α ve A_β alt cebirlerinin kesişimi C ye izomorf $\bar{C}$ alt cebiridir.
iii) R deki herhangi bir G cebiri ve $\theta_\alpha \varphi_\alpha$ nın görüntüsü $\alpha \in I$ dan bağımsız olacak şekildeki $\theta_\alpha : A_\alpha \to G$ homomorfizimleri için θ_α homomorfizmlerinin genişlemesi olan bir tek $\theta : A \to G$ homomorfizmi vardır.

Bu serbest çarpımı $A = *_R (A_\alpha; C | \alpha \in I)$ şeklinde gösteririz. Eğer R ve I indis kümesi belli ise $A = * (A_\alpha; C)$ yazarız.

Bu tanımı farklı bir şekilde söylemek gerekirse,
$A = * (A_\alpha; C)$, R varyetesinde (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir cebirdir ve $\varphi_\alpha : A_\alpha \to G$ homomorfizmleri için

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & A_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\theta_\alpha"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\
& & G
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını sağlayan bir $\theta: A \to G$ homomorfizmi vardır. Burada $i_\alpha: A_\alpha \to A$, $A_\alpha \to \overline{A_\alpha} \subset A$ gömmesini gösterir.

$A_\alpha \in R$ cebirlerinin serbest çarpımı, sıfır ile genişletilmiş serbest çarpımdır. Yani, $A =*_R (A_\alpha | \alpha \in I) = \prod^*_{\alpha\epsilon I} A_\alpha$ dır.

Örnek 4.7.1: K cismi üzerindeki A_1, A_2 ve C asosyatif cebirleri

$$A_1 = (x, c, e | xc = 0, xe = ex = x, ce = ec = c, e^2 = e)$$
$$A_2 = (y, c, e | yc = cy = e, ye = ey = y, ce = ec = c, e^2 = e)$$
$$C = (c, e | ce = ec = c, e^2 = e)$$

olarak tanımlansın. C ile genişletilmiş $A =* (A_1, A_2; C)$ serbest çarpımının var olduğunu kabul edelim. $x \neq 0$ için $(xc)y = 0$ ve $x(cy) = x$ olduğundan dolayı ya birleşme özelliği sağlanmaz ya da $A_1 \to A$ dönüşümü gömme değildir.

Örnek 4.7.2: $A_1 = \langle a, b, c \rangle$, $A_2 = \langle d, b, c \rangle$ ve $C = \langle b, c \rangle$ serbest Lie cebirleri verilmiş olsun. A_1 ile A_2 nin C ile genişletilmiş serbest çarpımının birkaç baz elemanını bulalım. $\{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki sıralama $a > b > c > d$ şeklinde olsun.

C nin baz elemanları $b, c, [b, c], \big[[b, c], b\big]$, ...

A_1 in baz elemanları $a, b, [a, b], \big[[b, c], a\big], \big[[a, b], b\big]$, ...

A_2 nin baz elemanları $b, c, [b, c], \big[[d, c], b\big], \big[[d, b], c\big]$, ...

olup $A =* (A_1, A_2; C)$nin baz elemanlarından birkaç tanesi aşağıdaki şekildedir.

$[a, b], \big[[b, c], [a, b]\big], \big[a, [b, c]\big]$, ...

4.7.1. Lie Cebirlerinin Genişletilmiş Serbest Çarpımlarının İnşası

$\alpha \in I$ olmak üzere Λ_α lar, K cismi üzerinde bir ve aynı C alt cebirini içeren Lie cebirleri olsun. C nin bir $\{v_k: k \in J\}$ bazını her $\alpha \in I$ için $\{v_{\alpha k}: \alpha \in I, k \in J\}$ kümesiyle özdeşleştirelim. Ayrıca $\alpha \in I$ olmak üzere $\{v_{\alpha k}: k \in J_\alpha\}$ kümesi Λ_α Lie cebirlerinin bazı olsun öyleki J_α tam sıralı olsun ve başlangıç kümesi olarak J kümesini içersin. Λ_α nın tanımlayıcı bağıntıları $k > l$ olmak üzere $[v_{\alpha k}, v_{\alpha l}] = \sum_m \gamma_{\alpha k l}^m v_{\alpha m}$ şeklinde olsun.

$k \in J$ olmak üzere bütün $v_{\alpha k} = v_k$ bağıntılarının birleşimi olan V, Λ_α Lie cebirlerinin C ile genişletilmiş $*(\Lambda_\alpha; C)$ serbest çarpımının tanımlayıcı bağıntılar kümesini oluşturur.

Tanım 4.7.1.1: $X = \{x_\alpha: \alpha \in I\}$ lineer sıralı bir küme olsun. Bir $q \in X$ monomialindeki parantezlerin kaldırılmasıyla elde edilen monomiale asosyatif kelime denir ve $\bar{\bar{q}}$ ile gösterilir.

Tanım 4.7.1.2: Her $x_\alpha \in X$ elemanını Lindon-Shirshov kelimesi olarak kabul edelim. $l(q) \geq 2$ olmak üzere bir $q \in X$ monomialinin Lindon-Shirshov kelimesi olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulları sağlamasıdır.

i) $q = q_1 q_2$ ise q_1 ve q_2 Lindon-Shirshov kelimesidir ve $\overline{\overline{q_1}} \geq \overline{\overline{q_2}}$ dir,

ii) $q = (q'q'')q_2$ ise $\overline{\overline{q''}} \leq \overline{\overline{q_2}}$ dir.

Tanım 4.7.1.3: I kümesinin lineer olarak sıralı olduğunu varsayalım. Yani; $v_{\alpha k} > v_{\beta l}$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha > \beta$ veya $\alpha = \beta$ iken $k > l$ olmasıdır. $\{v_{\alpha k}: k \in J_\alpha, \alpha \in I\}$ kümesindeki elemanlar cinsinden yazılmış bir s Lindon-Shirshov kelimesi, kelimedeki parantezlerin kaldırılmasıyla elde edilen $\bar{\bar{s}}$ kelimesi $k > l$ olmak üzere $v_{\alpha k} v_{\alpha l}$ formunda alt kelimeler içermiyorsa s ye özel kelime denir.

Tanım 4.7.1.4: L bir Lie cebiri ve $\alpha_i \in K$; s_i, bir Lindon-Shirshov kelimesi olmak üzere $f = \sum \alpha_i s_i$ olsun. Uzunluğu en büyük ve $\alpha_i \neq 0$ olacak şekildeki s_i kelimesini s ile gösterelim. s ye f nin baş terimi denir ve $s = \tilde{f}$ ile gösterilir.

Lemma 4.7.1.1 (Kompozisyon Lemma): $L(X)$ serbest Lie cebiri ve I, $L(X)$ in bir S tam kümesi tarafından üretilen bir ideal olsun. $f \neq 0$ olmak üzere $f \in L(X)$ elemanının $\tilde{f}$ baş terimi herhangi bir $s \in S$ için $\bar{\bar{s}}$ alt kelimesini içeriyorsa f, I idealinin elemanıdır.

Teorem 4.7.1.1: $\alpha \in I$ olmak üzere K cismi üzerindeki herhangi Λ_α Lie cebirleri ve herhangi bir $C < \Lambda_\alpha$ alt cebiri için bir $\Lambda =* (A_\alpha; C)$ genişletilmiş serbest çarpımı vardır. $\{v_{\alpha k}\}$ kümesindeki elemanlardan oluşturulan bütün özel kelimelerin kümesi Λ nın bir bazını oluşturur.

İspat: $\{v_{\alpha k}\}$ kümesindeki elemanlardan oluşturulan bütün özel kelimelerin kümesinin Λ nın bazı olduğunu gösterelim. $\{v_{\alpha k}: \alpha \in I, k \in J_\alpha\}$ üreteç kümesiyle verilen Λ Lie cebirini ve Λ_α cebirlerinin tanımlayıcı bağıntılarının birleşimi olan V tanımlayıcı bağıntılarını düşünelim. V tam olduğundan kompozisyon lemmayı uygulayabiliriz. Böylece $\{v_{\alpha k}\}$ kümesindeki elemanlardan oluşturulan bütün özel kelimelerin kümesi, Λ nın bazı olacak şekildeki bütün koşulları sağlar. Dolayısıyla $\{v_{\alpha k}\}$ kümesi Λ nın bazıdır.

Λ nın genişletilmiş serbest çarpım olduğunu gösterelim. Sırasıyla $\{v_{\alpha k}: k \in J_\alpha\}$ ve $\{v_\alpha\}$ bazlarına sahip $\overline{\Lambda_\alpha}$ ve $\bar{C}$ alt cebirleri Λ_α ve C alt cebirlerine izomorftur. $\alpha \neq \beta$ için $\overline{\Lambda_\alpha} \cap \overline{\Lambda_\beta} = \bar{C}$ dir. Λ cebiri $\overline{\Lambda_\alpha}$ alt cebirleri tarafından üretilir. Böylece genişletilmiş serbest çarpımın (i) ve (ii) koşulları sağlanır. (iii) de kolaylıkla sağlanır. Böylece Λ genişletilmiş serbest çarpımdır.

4.8. Wreath Çarpım (Çelenk Çarpım)

Bu kısımda temel tanım ve teoremler Bahturin (1987) den alınmıştır.

Tanım 4.8.1: V, birimli ve değişmeli bir k halkası üzerindeki Lie cebirlerinin bir varyetesi; A, V deki bir Lie cebiri ve G, k üzerindeki herhangi bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa bir W Lie cebirine A ve G cebirlerinin V-wreath çarpımı denir.

i) $W = alg(A, G)$

ii) $K = id_W(A)$, W cebirinin A tarafından üretilen ideali olsun. O zaman $K \in V$ dir.

iii) $C = alg(\varphi(A), \psi(G))$ ve $S = id_C(\varphi(A)) \in V$ olacak şekildeki $\varphi: A \to C$ $\psi: G \to C$ homomorfizmlerini düşünelim. O zaman $\chi/A = \varphi$ ve $\chi/G = \psi$ olacak şekilde bir tek $\chi: W \to C$ homomorfizmi vardır

Burada $alg(A, G)$ ile A ve G tarafından üretilen cebiri gösteriyoruz.

A nın G ile V-wreath çarpımını $Awr_V G$ şeklinde gösteririz.

Wreath çarpımının açık formunu vermek için $P = A * G$ serbest çarpımı ile başlayalım. Q, A tarafından üretilen bir ideal; J, P nin $V(Q)$ verbal idealini içeren en küçük ideal olsun. O zaman $W \cong P/J$ dır. Wreath çarpımın tanımındaki koşullar serbest çarpımın evrenselliğinden ve verbal alt cebirin tanımından sağlanır.

Tanım 4.8.2: V bir varyete olsun. $v = \sum_\alpha v_\alpha$, v nin çoklu homojen parçalanışı olacak şekildeki V deki $v \equiv 0$ özdeşliği verilmiş olsun. Her α için $v_\alpha \equiv 0$, V nin özdeşliği oluyorsa V varyetesine çoklu homojen varyete denir.

Önerme 4.8.1: $W = Awr_V G$ olsun. O zaman W, G alt cebirinin $J = id_W(A)$ idealiyle yarıdirekt çarpımıdır. V, çoklu homojen varyete; G, serbest k-modül ve A, V-serbest cebir ise K da V-serbest cebirdir.

İspat: Yukarıda verilen wreath çarpım yapısında $P = A * G$ olmak üzere T, $Q = id_P(A)$ idealinin görüntüsüdür. Dolayısıyla Q, P den G ye olan doğal homomorfizmin çekirdeğidir. Yani, $Q \cap G = \{0\}$ dır. V, çoklu homojen varyete ve $A = L(X, V)$ V-serbest cebir ise L, A ile aynı üreteç kümesine sahip serbest Lie cebiri olmak üzere $W = Awr_V G$ yı $A = L(X) = L$ ile başlayarak inşa edebiliriz. $F = L * G$ ve $J = id_F(L)$ olsun. Homojenlikten $\tilde{V} = V(J)$, F nin bir idealidir. $\widetilde{W} = F/\tilde{V}$ olsun. $A = L/V(L)$ nin $\varphi = \psi\varepsilon$ olacak şekildeki herhangi bir homomorfizmi L nin ψ homomorfizmi tarafından belirlendiginden ve L den bir V sınıfında bir cebire olan bir ψ homomorfizmi $A = L/V(L)$ ile belirlenen bir parçalanışa sahip olduğundan $W = Awr_V G$ wreath çarpımının tanımındaki (i)-(iii) özelliklerini göstermek $\widetilde{W}$ için problem olmayacaktır. Burada ε, L den A üzerine olan doğal homomorfizmdir. $K = id_W(A) = A = J/V(J)$ dir. T, V-serbest cebirdir ve T için serbest üreteç kümesi; E, G nin iyi sıralı bazı olmak üzere $e_1 e_2 \ldots e_s$, $e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_s$, $e_i \in E$, $x \in X$, $s \geq 0$ formunda seçilebilir.

Lemma 4.8.1: A, k halkası üzerinde bir B Lie cebirinin abelyen bir ideali ve $G = B/A$ k-serbest olsun. O zaman B, C abelyen bir Lie cebiri ve $C \cap B = A$ olmak üzere $S = G \leftthreetimes C$ yarıdirekt çarpımının bir alt cebirine izomorftur.

Bu lemmanın ispatı Bahturin (1987) de bulunabilir.

Teorem 4.8.1: M, k üzerindeki $L = L(\{x_i : i \in I\})$ serbest Lie cebirinin bir ideali ve A, $\{a_i : i \in I\}$ tarafından üretilen serbest abelyen cebir olsun. $g \in L/M$ nin görüntüsünü $\bar{g}$ ile gösterelim. L/M k-serbest cebir ise $i \in I$ için $\varphi(x_i) = \overline{x_i} + a_i$ dönüşümü $\tilde{\varphi}: L/M^2 \to Awr_V(L/M)$ izomorf gömmesini gerektirir.

Bu teoremin ispatı Bahturin (1987) de bulunabilir.

Sonuç 4.8.1: k herhangi bir halka ve $M = L(\{x_i : i \in I\}, A^2)$, k üzerinde serbest üreteç kümesi $\{x_i : i \in I\}$ olan bütün metabelyen Lie cebirlerinin varyetesinde bir serbest cebir olsun. A ile $\{y_i : i \in I\}$ bazına sahip serbest abelyen cebirlerini, $R = k[y_i : i \in I]$ ile bilinmeyenleri $\{y_i : i \in I\}$ olan polinom halkasını ve P ile $\{z_i : i \in I\}$ bazına sahip bir serbest R-modülünü gösterelim. O zaman $x_i \to y_i + z_i$ dönüşümü M den $S = A \leftthreetimes P$ yarıdirekt çarpımına olan bir monomorfizmine genişler.

Teorem 4.8.2 (A.L. Shmel'kin): V, k cismi üzerindeki Lie cebirlerinin çoklu homojen bir varyete; $L = L(\{x_i : i \in I\})$, k cismi üzerindeki $\{x_i : i \in I\}$ serbest üreteç kümesine sahip bir serbest Lie cebiri; M, L nin bir ideali ve $A = L(\{x_i : i \in I\}, V)$ olsun. $\bar{g}$ ile $g \in L$ nin L/M deki görüntüsünü gösterelim. O zaman $i \in I$ olmak üzere $x_i \to \overline{x_i} + y_i$ dönüşümü $L/V(M) \to Awr(L/M)$ monomorfizmine genişler.

Bu teoremin ispatı Bahturin (1987) de bulunabilir.

Sonuç 4.8.2: U ve V, k cismi üzerindeki Lie cebirlerinin iki varyetesi ve U çoklu homojen olsun. O zaman çarpım sınıfının $L(\{x_i : i \in I\}, UV)$ serbest cebiri, $L(\{y_i : i \in I\}, U) wr_U L(\{z_i : i \in I\}, V)$ formundaki U-wreath çarpımının $y_i + z_i$ elemanlarıyla üretilmiş alt cebirine izomorftur.

4.9. Wreath Çarpımın Sunumu

Bu kısımda Sullivan'nın (1985) Wreath Products of Lie Algebras isimli makalesinin bir derlemesi yapılmıştır.

A, K cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. X, A Lie cebirinin bir alt kümesi ise $L(X)$, A nın X tarafından üretilen Lie alt cebiridir.

Tanım 4.9.1:

i) L Lie cebirinin $L = C \oplus D$ olacak şekilde sıfırdan farklı C ve D alt cebirleri varsa L ye direkt olarak parçalanabilir denir.

ii) L Lie cebirinin $L = C * D$ olacak şekilde sıfırdan farklı C ve D alt cebirleri varsa L ye serbest olarak parçalanabilir denir.

Bundan sonraki kısımlarda aşağıdaki teoreme ihtiyacımız olacaktır.

Teorem 4.9.1 (von Dyck): A ve B nin $A = \langle X : R \rangle$ ve $B = \langle Y : R \cup S \rangle$ sunumlarına sahip Lie cebirleri olduğunu varsayalım. O zaman A nın X üreteç kümesinin elemanını B nin X üreteç kümesinin elemanına gönderen dönüşüm, A dan B ye bir homomorfizm tanımlar.

Şimdi Lie cebirleri için sunum cinsinden wreath çarpım tanımını yapalım. $A = \langle X : R \rangle$ ve $T = \langle Y : S \rangle$ olmak üzere A ve T Lie cebirleri ise A ve T nin wreath çarpımı

$$AwrT = \langle X \cup Y : R \cup S \cup \left\{ \left[[w(x), v(y)], [w'(x), v'(y)] \right] \right\} \\ \cup \left\{ \left[w(x), [w'(x), v'(y)] \right] \right\} \rangle$$

şeklindedir. Burada $w(x)$ ve $w'(x)$, X kümesindeki elemanların bir kelimesi; $v(y)$ ve $v'(y)$, Y kümesindeki elemanların bir kelimesidir.

Örnek 4.9.1: F, $\{x_1, x_2, x_3\}$ ve L, $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. F ile L nin wreath çarpımına ait bir kaç kelime yazalım.
$FwrL$ cebirinde aşağıdaki şekilde olan elemanlar sıfırdır:

$$\left[[x_1, y_1], [x_2, y_2] \right], \left[\left[[x_1, x_2], y_3 \right], \left[\left[[x_2, x_3], x_3 \right], [y_2, y_3] \right] \right], \left[[x_1, x_3], \left[x_3, [y_1, y_2] \right] \right], \ldots$$

$FwrL$ cebirinde sıfırdan farklı birkaç eleman yazalım:

$$\left[[y_1, x_1], y_2 \right], \left[[x_1, x_3], y_3 \right], \left[[y_1, x_2], \left[[y_1, y_2], y_2 \right] \right], \ldots$$

4.9.1. Abelyen Bir Lie Cebiri ile Herhangi Bir Lie CebirininWreath Çarpımı

Teorem 4.9.1.1: A abelyen bir Lie cebiri ve T herhangi bir Lie cebiri ise $W = AwrT$ nin A tarafından üretilen en küçük $B = id_W(A)$ ideali de abelyendir. B, bir sağ $U = U(T)$ $-$modül olarak düşünülürse B, A vektör uzayının seçilen herhangi bir bazı tarafından üretilen serbest U-modüldür.

Teorem 4.9.1.2: A aşikar olmayan abelyen bir Lie cebiri ve T aşikar olmayan herhangi bir Lie cebiri ise $W = AwrT$ nin merkezi aşikardır.

İspat: $N = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : u \in U(T), b \in B \right\}$ kümesini düşünelim. Bu küme bilinen matris çarpımıyla bir asosyatif cebirdir. N üzerinde $s, t \in N$ için $[s,t] = st - ts$ çarpımını tanımlayalım. N bu çarpımla bir Lie cebirdir. Bu cebiri N^- ile gösterelim. Şimdi $M = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : t \in T, b \in B \right\}$ kümesini düşünelim. M nin N de bir alt cebir olduğu açıktır. Bir $\phi: W \to M$ vektör uzayı dönüşümünü

$$\phi: t + b \to \begin{pmatrix} t & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. ϕ bir Lie cebiri izomorfizmi olup $W \cong M$ dir.

M nin merkezinin sıfır olduğunu gösterelim.

$Z(M)$ den herhangi bir elemen alalım.

$\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix} \in$ Z(M), $b \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M$ olsun.

$$\left[\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t_0 b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t_0 b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$t_0 b = 0$ olur.

$b \neq 0$ olduğundan $t_0 = 0$ dır.

$\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix} \in$ Z(M), $t \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ olsun.

$$\left[\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} t_0 t & 0 \\ t b_0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t t_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t b_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$t_0 b = 0$ olur.

$t \neq 0$ olduğundan $b_0 = 0$ dır.

Teorem 4.9.1.3: Aşikar olmayan abelyen bir A Lie cebirinin aşikar olmayan bir T Lie cebiriyle wreath çarpımı direkt olarak parçalanamaz.

Teorem 4.9.1.4: $W = AwrT$, aşikar olmayan abelyen bir A Lie cebiriyle herhangi bir T Lie cebirinin wreath çarpımı ise W serbest olarak parçalanamaz.

4.9.2. Serbest Abelyen Lie Cebirlerinin Wreath Çarpımı

Bu kısımda serbest abelyen iki Lie cebirinin wreath çarpımı için baz kümesi inşa edeceğiz.

Örnek 4.9.2.1: $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ olmak üzere $A = \langle X \rangle$, $B = \langle Y \rangle$ serbest abelyen Lie cebirleri olsun. X ve Y kümelerinin elemanları arasında $y < x$ sıralamasını düşünelim.

$$AwrB = \langle x, y: [[w(x), w(y)], [w_1(x), w_1(y)]], \big[w(x), [w_1(x), w(y)]\big] \rangle$$

çarpımının baz kümesi aşağıdaki şekilde inşa edilir:

$H_1 = X \cup Y,$
$H_2 = \{[x, y]\},$
$H_3 = \{\big[[x, y], y\big]\},$
$H_4 = \Big\{\Big[\big[[x, y], y\big], y\Big]\Big\},$
$H_5 = \Big\{\Big[[x, y^k], x^m\Big]: 1 + k + m = 5, k \geq 3\Big\},$
n≥6 için
$H_n = \{u = \big[[a, b], c\big]: a, b, c, [a, b] \in H_1 \cup \ldots \cup H_{n-1}, a > b, b < c, [a, b] > c,$
$l(u) = n\}.$

Örnek 4.9.2.2: $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A = \langle X \rangle$, $B = \langle Y \rangle$ serbest abelyen Lie cebirleri olsun. X ve Y kümelerinin elemanları arasında $y_1 < y_2 < x$ sıralamasını düşünelim.

$$AwrB = \langle x, y_1, y_2 : \big[[w(x), w(y)], [w_1(x), w_1(y)]\big], \big[w(x), [w_1(x), w(y)]\big], [y_2, y_1] \rangle$$

çarpımının baz kümesi aşağıdaki şekilde inşa edilir:

$$H_1 = X \cup Y,$$
$$H_2 = \{[x, y_i] : x \in X, y_i \in Y, x > y_i\},$$
$$H_3 = \left\{\left[[x, y_{i_1}], y_{i_2}\right] : x \in X, y_{i_k} \in Y, x > y_{i_1} < y_{i_2}, k = 1,2\right\},$$
$$H_4 = \left\{\left[\left[[x, y_{i_1}], y_{i_2}\right], y_{i_3}\right] : x \in X, y_{i_k} \in Y, x > y_{i_1} < y_{i_2} < y_{i_3}, k = 1,2,3\right\},$$
$$H_5 = \left\{\left[\dots\left[[x, y_{i_1}], y_{i_2}\right]\dots y_{i_k}\right], x^t\right] : 1 + k + t = 5, k \geq 3, x \in X, y_{i_k} \in Y, x > y_{i_1} < \dots < y_{i_k} < x, k = 1, \dots, 4\} \cup \left\{\left[\left[[x, y_1], y_2\right], [x, y_1]\right]\right\},$$
$$H_6 = \left\{\left[\dots\left[[x, y_{i_1}], y_{i_2}\right]\dots y_{i_k}\right], x^t\right] : 1 + k + t = 6, k \geq 3, x \in X, y_{i_k} \in Y, x > y_{i_1} < \dots < y_{i_k} < x, k = 1, \dots, 5\} \cup \{\left[\left[\left[[x, y_1], y_1\right], y_1\right], [x, y_1]\right], \left[\left[\left[[x, y_1], y_1\right], y_1\right], [x, y_2]\right],$$
$$\left[\left[\left[[x, y_1], y_1\right], y_2\right], [x, y_1]\right], \left[\left[\left[[x, y_1], y_1\right], y_2\right], [x, y_2]\right], \left[\left[\left[[x, y_1], y_2\right], y_2\right], [x, y_1]\right],$$
$$\left[\left[\left[[x, y_1], y_2\right], y_2\right], [x, y_2]\right], \left[\left[\left[[x, y_2], y_2\right], y_2\right], [x, y_1]\right], \left[\left[\left[[x, y_2], y_2\right], y_2\right], [x, y_2]\right],$$
$$\left[\left[[x, y_1], y_2\right], \left[[x, y_1], y_1\right]\right], \left[\left[[x, y_2], y_2\right], \left[[x, y_1], y_1\right]\right], \left[\left[[x, y_2], y_2\right], \left[[x, y_1], y_2\right]\right]\},$$
$$H_7 = \left\{\left[\dots\left[[x, y_{i_1}], y_{i_2}\right]\dots y_{i_k}\right], x^t\right] : 1 + k + t = 7, k \geq 3, x \in X, y_{i_k} \in Y, x > y_{i_1} < \dots < y_{i_k} < x, k = 1, \dots, 6\} \cup \{\left[\left[\left[\left[[\mathrm{x}, y_1], y_1\right], y_1\right], y_1\right], [\mathrm{x}, y_1]\right],$$
$$\left[\left[\left[\left[[x, y_1], y_1\right], y_1\right], y_1\right], [x, y_2]\right], \left[\left[\left[\left[[\mathrm{x}, y_1], y_1\right], y_1\right], y_2\right], [\mathrm{x}, y_1]\right],$$
$$\left[\left[\left[\left[[\mathrm{x}, y_1], y_1\right], y_1\right], y_2\right], [\mathrm{x}, y_2]\right], \left[\left[\left[\left[[\mathrm{x}, y_1], y_1\right], y_1\right], \mathrm{x}\right], [\mathrm{x}, y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_1\right],x\right],[x,y_2]\right],\left[\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],y_2\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],y_2\right],[x,y_2]\right],\left[\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],x\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],x\right],[x,y_2]\right],\left[\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],y_2\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],y_2\right],[x,y_2]\right],\left[\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],x\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],x\right],[x,y_2]\right],\left[\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],y_2\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],y_2\right],[x,y_2]\right],\left[\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],x\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],x\right],[x,y_2]\right],\left[\left[[[x,y_1],y_2],[x,y_1]\right],[x,y_1]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_1],y_2],[x,y_1]\right],[x,y_2]\right],\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_1\right],[[x,y_1],y_1]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_1\right],[[x,y_1],y_2]\right],\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_1\right],[[x,y_2],y_2]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],[[x,y_1],y_1]\right],\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],[[x,y_1],y_2]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_1],y_1],y_2\right],[[x,y_2],y_2]\right],\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],[[x,y_1],y_1]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],[[x,y_1],y_2]\right],\left[\left[[[x,y_1],y_2],y_2\right],[[x,y_2],y_2]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],[[x,y_1],y_1]\right],\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],[[x,y_1],y_2]\right],$$

$$\left[\left[[[x,y_2],y_2],y_2\right],[[x,y_2],y_2]\right]\}.$$

5. LİE CEBİRLERİNİN M-ÇARPIMI

Bu bölümde M, Lie cebirlerinin bir varyetesi olmak üzere Lie cebirlerinin M-çarpımı tanımlanmış ve bu çarpımla ilgili farklı örnekler incelenmiştir.

Tanım 5.1: Lie cebirlerinin herhangi bir M varyetesi için $i = 1, \ldots, m$ olmak üzere L_i Lie cebirlerinin M-çarpımı $M \prod_{i=1}^{m} L_i$ şeklinde gösterilir. D, L_i Lie cebirlerinin $\prod_{\alpha\in I}^{*} L_i$ serbest çarpımının kartezyen alt cebiri ise yani $\prod_{\alpha\in I}^{*} L_i$ den $\bigoplus L_i$ direkt toplamına olan kanonik homomorfizmin çekirdeği ise ve V, M varyetesine göre $\prod_{\alpha\in I}^{*} L_i$ nin verbal alt cebiri olmak üzere L_i cebirlerinin M-çarpımı

$$M \prod_{i=1}^{m} L_i = {\prod_{\alpha\epsilon I}^{*} L_i} \Big/ {D \cap V}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi M-çarpımın farklı tiplerini inceleyeceğiz.

5.1. Abelyen Çarpım

Tanım 5.1.1: L_1 ve L_2 iki serbest Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2 nin abelyen çarpımını $L_1 *_{ab} L_2$ ile gösterelim. Buna göre

$$L_1 *_{ab} L_2 = {L_1 * L_2} \Big/ {D \cap (L_1 * L_2)}$$

dır.

Eğer L_1 ve L_2 serbest abelyen Lie cebirleri ise

$$D \cap (L_1 * L_2) = D$$

olup

$$L_1 *_{ab} L_2 = {}^{L_1 * L_2}\!/_{D} \cong L_1 \oplus L_2$$

olur.

5.2. Metabelyen Çarpım

Tanım 5.2.1: L_1 ve L_2 iki serbest Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2 nin metabelyen çarpımını $L_1 *_{met} L_2$ ile gösterelim. O zaman

$$L_1 *_{met} L_2 = {}^{L_1 * L_2}\!/_{D \cap \delta^2(L_1 * L_2)}$$

dır.

Eğer L_1 ve L_2 serbest metabelyen Lie cebirleri ise

$$D \cap \delta^2(L_1 * L_2) = \delta^2(L_1 * L_2)$$

olup

$$L_1 *_{met} L_2 = {}^{L_1 * L_2}\!/_{\delta^2(L_1 * L_2)}$$

olur ve metabelyen çarpım bir metabelyen Lie cebiridir.

Örnek 5.2.1: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y\}$ olmak üzere $L_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, $L_2 = \langle y \rangle$ serbest Lie cebirleri olsun. X ve Y kümeleri üzerindeki sıralamayı da $x_1 > x_2 > x_3 > y$ olarak alalım. $L_1 *_{met} L_2$ metabelyen çarpımının baz kümesi aşağıdaki şekilde inşa edilir:

$H_1 = X \cup Y$,

$H_2 = \{u = [a,b]: a,b \in X \cup Y, a > b, l(u) = 2\}$,

$H_3 = \{u = [[a,b],c]: a,b,c,[a,b] \in H_1 \cup H_2, a > b < c, [a,b] > c, l(u) = 3\}$,

$H_4 = \{u = [[a,b],c]: [a,b] \in H_3, c \in H_1, l(u) = 4\} \cup \{[[x_1,x_2],[x_1,x_3]],$

$[[x_1,x_2],[x_2,x_3]], [[x_1,x_3],[x_2,x_3]]\}$,

$\vdots$

$H = H_1 \cup H_2 \ldots$

Her $u \in L_1 *_{met} L_2$ için $u = \sum_{i \in I} \alpha_i h_i$, $\alpha_i \in k$, $h_i \in H$ olarak tek bir şekilde yazılabilir.

Örnek 5.2.2: $X = \{x_1,x_2,x_3\}$, $Y = \{y\}$ olmak üzere $L_1 = \langle x_1,x_2,x_3 \rangle$, $L_2 = \langle y \rangle$ serbest metabelyen Lie cebirleri olsun. X ve Y kümeleri üzerindeki sıralamayı da $x_1 > x_2 > x_3 > y$ olarak alalım. $L_1 *_{met} L_2$ metabelyen çarpımının baz kümesi aşağıdaki şekilde inşa edilir:

$H_1 = X \cup Y$,

$H_2 = \{u = [a,b]: a,b \in X \cup Y, a > b, l(u) = 2\}$,

$H_3 = \{u = [[a,b],c]: a,b,c,[a,b] \in H_1 \cup H_2, a > b < c, [a,b] > c, l(u) = 3\}$,

$H_4 = \{u = [[a,b],c]: [a,b] \in H_3, c \in H_1, l(u) = 4\}$,

$\vdots$

$H = H_1 \cup H_2 \ldots$

Her $u \in L_1 *_{met} L_2$ için $u = \sum_{i \in I} \alpha_i h_i$, $\alpha_i \in k$, $h_i \in H$ olarak tek bir şekilde yazılabilir.

5.3. Çözülebilir Çarpım

Tanım 5.3.1: L_1 ve L_2 iki serbest Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2 nin n-inci çözülebilir çarpımını $L_1 *_{çöz}^{n} L_2$ ile gösterelim. O zaman

$$L_1 *_{\text{çöz}}^n L_2 = {L_1 * L_2}/{D \cap \delta^n(L_1 * L_2)}$$

dır.

Eğer L_1 ve L_2 *n*-inci sınıftan serbest çözülebilir Lie cebirleri ise

$$D \cap \delta^n(L_1 * L_2) = \delta^n(L_1 * L_2)$$

olup

$$L_1 *_{\text{çöz}}^n L_2 = {L_1 * L_2}/{\delta^n(L_1 * L_2)}$$

olur ve *n*-inci çözülebilir çarpım bir çözülebilir Lie cebiridir.

5.4. Nilpotent Çarpım

Tanım 5.4.1: L_1 ve L_2 iki serbest Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2 nin *n*-inci nilpotent çarpımını $L_1 *_{nil}^n L_2$ ile gösterelim. O zaman

$$L_1 *_{nil}^n L_2 = {(L_1 * L_2)}/{D \cap \gamma_n(L_1 * L_2)}$$

dır.

L_1 ve L_2 serbest abelyen ve *n*-inci sınıftan serbest nilpotent Lie cebiri ise

$$D \cap \gamma_n(L_1 * L_2) = \gamma_n(L_1 * L_2)$$

olup

$$L_1 *_{nil}^{n} L_2 = {L_1 * L_2}\Big/{\gamma_n(L_1 * L_2)}$$

dır.

5.5. Minimal Nilpotent Çarpım

Bu kısımda Golovin'in (1950) Nilpotent Product of Groups isimli makalesindeki sonuçlar Lie cebirleri için elde edilmiştir.

Tanım 5.5.1: *G* bir Lie cebiri ve *A* da *G* nin bir alt cebiri olmak üzere terimleri

$$_0A = A$$
$$_lA = (G, {}_{l-1}A), l > 0$$

şeklinde tanımlı olan diziye *G* nin *A* ya göre minimal merkezi serisi denir. Minimal merkezi serisi *G* nin ideallerinin azalan bir dizisinden oluşur.

Tanım 5.5.2: L_1 ve L_2 iki serbest Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2 nin serbest çarpımını F ile gösterelim. $[L_1, L_2]$ nin F deki *k*-inci minimal merkezi terimi $min_k[L_1, L_2]_F$ olmak üzere L_1 ve L_2 nin $[L_1, L_2]$ alt cebirine göre *k*-inci minimal nilpotent çarpımını

$$L_1 *_{nil}^{[L_1,L_2]} L_2 = {(L_1 * L_2)}\Big/{min_k[L_1, L_2]_F}$$

şeklinde tanımlayalım.

$L_1 *_{nil}^{[L_1,L_2]} L_2$ cebirinde $[L_1, L_2]$ komütatörünü ele alalım.
$k = 0$ için $min_0[L_1, L_2]_F = [L_1, L_2]$
olup $[L_1, L_2]$ 0-ıncı minimal nilpotent çarpım içinde sıfırdır.

$k > 0$ için $min_k[L_1, L_2]_F = \underbrace{\Big[F, \Big[F, \big[\ldots \big[F}_{\text{k defa}}, [L_1, L_2]\big] \ldots \big]\Big]\Big]$

olup k-inci minimal nilpotent çarpım içinde $min_k[L_1, L_2]_F = 0$ olup $[L_1, L_2]$ k-inci nilpotent komütatör alt cebirdir ve bunu $[L_1, L_2]^{(k)}$ ile gösteririz.

0-ıncı minimal nilpotent çarpım $L_1 \oplus L_2$ direkt toplamına izomorftur. Gerçekten de,

$$L_1 *_{nil}^{[L_1,L_2]} L_2 = {L_1 * L_2}/{[L_1, L_2]} = {L_1 * L_2}/{D} \cong L_1 \oplus L_2$$

dır.

$[L_1, L_2] = F$ alındığında

$$L_1 *_{nil}^{F} L_2 = {L_1 * L_2}/{\gamma_{k+1}(F)}$$

olduğu görülür.

$$[L_1, L_2]^{(k)} = {[L_1, L_2]_F}/{min_k[L_1, L_2]_F} = {[L_1, L_2]_F}/{[L_1, L_2]_F \cap min_k[L_1, L_2]_F}$$

$$= {[L_1, L_2]_F + min_k[L_1, L_2]_F}/{min_k[L_1, L_2]_F}$$

dır.

Tanım 5.5.3: $L = L_1 *_{nil}^{[L_1,L_2]} L_2$ nin $[L_1, L_2]^{(k)}$ k-inci nilpotent komütatör alt cebirine göre minimal merkezi serisinin i-inci terimine (k, i) $-$inci nilpotent komütatör alt cebir denir ve $min_i[L_1, L_2]^{(k)}$ ile gösterilir.

O halde

$$min_i[L_1,L_2]^{(k)} = \underbrace{\Big[L,\Big[L,\big[\dots\big[L,}_{i \text{ tane}}[L_1,L_2]\big]\dots\big]\Big]\Big]$$

şeklindedir.

$$i \leq k \text{ için } min_i[L_1,L_2]^{(k)} = {}^{min_i[L_1,L_2]_F}\Big/_{min_k[L_1,L_2]_F} \text{ dir.}$$

Böylece minimal merkezi serinin terimleri en fazla k adımdan sonra sıfır olur. Yani

$$min_0[L_1,L_2]^{(k)} = \langle [L_1,L_2]^{(k)}\rangle_{id} \supseteq min_1[L_1,L_2]^{(k)} \supseteq \cdots \supseteq min_k[L_1,L_2]^{(k)} = 0$$

dır.

Not 5.5.1: Bu konu içinde $\langle A\rangle_{id}$ ile A tarafından üretilen ideali ve A^G ile $A \subseteq G$ olduğunu göstereceğiz.

Lemma 5.5.1: Eğer $G = A *_{nil}^{[A,B]} B$ ise $l \geq k-1$ için

$$min_l[\langle A\rangle_{id}^G, \langle B\rangle_{id}^G]_G = min_l[\langle A\rangle_{id}^A, \langle B\rangle_{id}^B]_G$$

dır.

İspat: $\langle A\rangle_{id}^G \subseteq \langle A\rangle_{id}^G + [A,B]$
ve N, G nin ideali iken

$$[A+N, B+N] \subseteq [A,B] + {}_1N$$

olduğundan

$$[\langle A\rangle_{id}^A, \langle B\rangle_{id}^A]_G \subseteq \left[\langle A\rangle_{id}^G, \langle B\rangle_{id}^G\right]_G \subseteq \left[\langle A\rangle_{id}^A + [A,B], \langle B\rangle_{id}^A + [A,B]\right]$$
$$\subseteq [\langle A\rangle_{id}^A, \langle B\rangle_{id}^A] + min_1[A,B]_G$$

olur.

$$_l\langle A,B\rangle = {_l}A + {_l}B$$

eşitliğinden

$$min_l[\langle A\rangle_{id}^{A}, \langle B\rangle_{id}^{A}]_G \subseteq min_l\left[\langle A\rangle_{id}^{G}, \langle B\rangle_{id}^{G}\right]_G \subseteq min_l[\langle A\rangle_{id}^{A}, \langle B\rangle_{id}^{A}]_G + min_{l+1}[A,B]_G$$

elde edilir.

$$min_k[A,B]^{(k)} = 0$$

olduğundan

$$min_l\left[\langle A\rangle_{id}^{G}, \langle B\rangle_{id}^{G}\right]_G = \ min_l[\langle A\rangle_{id}^{A}, \langle B\rangle_{id}^{B}]_G$$

olur.

Not 5.5.2: *G* nin *A*, *B* alt cebirleri verilmiş olsun. $i > 0$ ve $l \geq 0$ için

$$[\gamma_i(G), {_l}[A,B]] \subseteq {_{l+i}}[A,B]$$

dır.

Lemma 5.5.2: $G = A *_{nil}^{[A,B]} B$ ise

$$\left[\gamma_k(G), [A,B]\right] = 0$$

dır.

Lemma 5.5.3: $G = A *_{nil}^{[A,B]} B$ ve $\gamma_1(A) \supseteq \gamma_2(A) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_n(A) \supseteq \cdots$ A nın alt merkezi serisi ise

$$[\gamma_{n+1}(A), B] \subseteq {}_n[A, B]$$

dır.

Sonuç 5.5.1: $G = A *_{nil}^{[A,B]} B$ ve $\gamma_1(A) \supseteq \gamma_2(A) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_n(A) \supseteq \cdots$ A nın alt merkezi serisi ise

$$[B, \gamma_k(A)] = 0$$

dır.

Yani, A veya B den herhangi birinin her elemanı, diğerinin alt merkezi serisinin k-inci teriminin her elemanı ile değişmelidir.

Lemma 5.5.4: $G = A *_{nil}^{[A,B]} B$ nin A tarafından içerilen bir N ideali verilmiş ise

$$\left(A *_{nil}^{[A,B]} B\right) \big/ N \cong \left(A/N\right) *_{nil}^{[A/N, B]} B$$

dir.

İspat: $A * B \big/ \langle N \rangle_{id}^{A*B} + min_k[L_1, L_2]_F \cong (A/N * B) \Big/ min_k[A/N, B]_{(A/N * B)}$

özelliğini kullanarak

$$\left(A *_{nil}^{[A,B]} B\right)\Big/_{N} \cong {}^{(A*B)}\Big/_{min_k[A,B]_F}\Big/_{N} \cong {}^{(A*B)}\Big/_{min_k[A,B]_F + N}$$

$$\cong {}^{({}^{A}/_{N} * B)}\Big/_{min_k[{}^{A}/_{N}, B]_{({}^{A}/_{N}*B)}} = {}^{A}/_{N} *_{nil}^{[{}^{A}/_{N},B]} B$$

elde edilir.

6. REZİDÜLÜ-P LİE CEBİRLERİ

Tanım 6.1: *P*, Lie cebirlerinin izomorfizmler altında invaryant kalan bir özelliği olsun ve *G* bir Lie cebiri olsun. Eğer her $0 \neq x \in G$ için $x \notin N$ ve ${}^{G}/_{N}$ cebiri *P* özelliğine sahip olacak şekilde bir *N* ideali varsa *G* ye rezidülü-*P* denir.

Buna denk olarak şu tanımı da verebiliriz.

G nin rezidülü-*P* olması için gerek ve yeter koşul *N*, *G* nin ${}^{G}/_{N}$ *P* özelliğine sahip olacak şekildeki bir ideali olmak üzere

$$\bigcap N = \{0\}$$

olmasıdır.

P özelliğine sahip bir Lie cebirinin her alt cebiri de *P* özelliğine sahipse bu cebirin rezidülü-*P* olması için gerek ve yeter koşul *P* Lie cebirlerinin direkt toplamına gömülebilir olmasıdır.

Örnek 6.1: *P* özelliğine sahip Lie cebirleri olarak çözülebilir Lie cebirlerini düşünelim. Bir *G* Lie cebirinin rezidülü çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \delta^n(\mathrm{G}) = \{0\}$$

olmasıdır.

Benzer şekilde *P* özelliğini nilpotent olma özelliği olarak alırsak bir *G* Lie cebirinin rezidülü nilpotent olması için gerek ve yeter koşul

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n\,(G) = \{0\}$$

olmasıdır.

Buna denk olarak şu tanımı da verebiliriz.

G bir Lie cebiri ve N bir nilpotent Lie cebiri olsun. Her $0 \neq g \in G$ için $\varphi(g) \neq 0$ olacak şekilde bir $\varphi: G \to N$ homomorfizmi varsa **G** ye rezidülü nilpotent Lie cebiri denir.

Bu iki tanımın birbirine denk olduğunu gösterelim.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n (G) = \{0\}$ olsun.

$0 \neq g \in G$ için $g \notin \gamma_n(G)$ olacak şekilde bir ***n*** bulabiliriz.

$\varepsilon: G \to G/\gamma_n(G)$ doğal dönüşümü altında $\varepsilon(g) \neq 0$ dır ve $G/\gamma_n(G)$ bir nilpotent cebirdir.

Şimdi **G** rezidülü nilpotent Lie cebiri olsun.

$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n (G)$ olsun ve $0 \neq g$ olduğunu kabul edelim.

O zaman *N*, *c+1*-inci sınıftan nilpotent Lie cebiri olmak üzere bir $\varphi: G \to N$ için $\varphi(g) \neq 0$ dır.

$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n (G)$ olduğundan $g \in \gamma_{c+1}(G)$ dir.

O halde

$$\varphi(g) \in \varphi\big(\gamma_{c+1}(G)\big) = \gamma_{c+1}\big(\varphi(G)\big) = \gamma_{c+1}(N) = \{0\}$$

olur.

Bu da **G** nin rezidülü nilpotent Lie cebiri olmasıyla çelişir.

O zaman

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n (G) = \{0\}$$

dır.

6.1. Rezidülü Sonlu Lie Cebirleri

Tanım 6.1.1: G bir Lie cebiri ve F sonlu boyutlu bir Lie cebiri olsun. Sıfırdan farklı her $g \in G$ için $\varphi(g) \neq 0$ olacak şekilde bir $\varphi: G \to F$ homomorfizmi varsa G ye rezidülü sonlu Lie cebiri denir.

Her abelyen Lie cebiri rezidülü sonludur. Rezidülü sonlu olmayan 3-üncü sınıftan nilpotent bir Lie cebiri örneği verelim.

Örnek 6.1.1: H, bazı $\{x_i, y_i, z: i \in \mathbb{Z}\}$ olan ve $[x_i, y_i] = z$ dışındaki komütatör çarpımları sıfır olan bir Lie cebiri ve F sonlu boyutlu bir cebir olmak üzere bir $\varphi: H \to F$ homomorfizmi verilmiş olsun.

$$\lambda_1 \varphi(x_{i_1}) + \cdots + \lambda_r \varphi(x_{i_r}) = 0$$

olacak şekilde bazıları sıfırdan farklı $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sayıları vardır.
$\lambda_1 \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 &= [\lambda_1 \varphi(x_{i_1}) + \cdots + \lambda_r \varphi(x_{i_r}), \varphi(y_{i_1})] \\ &= \varphi([\lambda_1 x_{i_1} + \cdots + \lambda_r x_{i_r}, y_{i_1}]) \\ &= \varphi([\lambda_1 x_{i_1}, y_{i_1}]) \\ &= \varphi(\lambda_1 z) \\ &= \lambda_1 \varphi(z) \end{aligned}$$

$\lambda_1 \neq 0$ olduğundan $\varphi(z) = 0$ dır.
O halde H rezidülü sonlu değildir.

Teorem 6.1.1: S, K cismi üzerinde sonlu üretilmiş bir Lie cebiri ve A da S nin abelyen bir ideali olsun. K nın karakteristiği sıfır olmak üzere $G = {}^{S}/_{A}$ bölüm cebiri sonlu boyutlu abelyen Lie cebiri olsun. O zaman S rezidülü sonlu bir Lie cebiridir.

İki tane sonlu üretilmiş Lie cebiri örneği verelim. Bu Lie cebirleri metabelyenliğe çok yakın olup metabelyen Lie cebirlerinin aksine rezidülü sonlu değildir.

Örnek 6.1.2: $KarK = 0$, G boyutu 2 veya 3 olan bir Lie cebiri ve $M = k[t]$ sonsuz boyutlu basit G-modül olmak üzere $L = G \leftthreetimes M$ olsun. L den sonsuz boyutlu M Lie cebiri üzerine aşikar olarak tanımlanan homomorfizm L nin rezidülü sonlu olmadığını gösterir.

Örnek 6.1.3: Herhangi bir cisim üzerinde rezidülü sonlu olmayan sonlu üretilmiş bir Lie cebiri inşa edebiliriz. Bunun için bazı $\{x_i, y_i, z: i \in \mathbb{Z}\}$ olan ve çarpım tablosu $[x_i, y_i] = z$ olması dışında baz elemanlarının çarpımı sıfır olacak şekildeki bir H Lie cebirini alalım. $i \in \mathbb{Z}$ için

$$d(x_i) = x_{i-1} - x_{i+1}, d(y_i) = y_{i-1} - y_{i+1}, d(z) = 0$$

ile verilen $d: H \to H$ türevini düşünelim. O zaman $L = kd \leftthreetimes H$ yarıdirekt çarpımını düşünelim. L; d, x_0, x_1, y_0, y_1 tarafından üretilebilir. Aynı zamanda H, L nin bir alt cebiridir. L Lie cebiri, H yi aşağıdaki özelliğe sahip olacak şekilde içerir. H den sonlu boyutlu bir Lie cebirine giden her homomorfizm $z \in H$ yi sıfıra götürür. Dolayısıyla L den sonlu boyutlu bir Lie cebirine olan bir homomorfizmin H ye kısıtlanmışı z yi sıfıra götürür. O halde L rezidülü sonlu değildir.

7. X-BY-Y GRUPLARI VE LİE CEBİRLERİ

7.1. X-by-Y Grupları

Tanım 7.1.1: X ve Y iki grup sınıfı olsun. Eğer bir G grubu $H \in X$ ve ${}^{G}/_{H} \in Y$ olacak şekilde bir *H* normal alt grubuna sahip ise *G* ye X-by-Y grup denir.

7.1.1. Sonlu-by-Nilpotent Grup

Bu kısımda Oger'ın (1991) Cancellation And Elementary Equivalence of Finitely Generated Finite-by-Nilpotent Groups isimli makalesindeki sonuçların bir derlemesi yapılmıştır.

Tanım 7.1.1.1: Bir G grubu H sonlu ve ${}^{G}/_{H}$ nilpotent olacak şekilde bir H normal alt grubuna sahip ise G ye sonlu-by-nilpotent grup denir.

Tanım 7.1.1.2: M bir grup ve S, M nin bir alt grubu olsun. Her $x \in M$ ve $n \geq 1$ için $x^n \in S$ ise S nin M de izole olması için gerek ve yeter koşul $x \in S$ olmasıdır. S yi içeren M nin en küçük izole alt grubuna $S \in M$ nin izolatörü denir ve $I_M(S)$ veya $I(S)$ ile gösterilir.

Bu bölümde $i \geq 1$ için $\Delta_i(M) = I(\gamma_i(M))$ dir ve $i = 2$ için $\Delta_2(M) = \Delta(M)$ olarak alacağız.

Önerme 7.1.1.1: Sonlu üretilmiş G ve H sonlu-by-nilpotent grupları denk ise $m \geq 2$ için $|H/f(G)|$ ile m aralarında asal ve $f(\Delta(G)) = \Delta(H)$ olacak şekilde bir $f: G \to H$ injektif homomorfizmi vardır.

Önerme 7.1.1.2: G sonlu üretilmiş bir sonlu-by-nilpotent grup ve H, $\Delta(H) = \Delta(G)$ olacak şekilde G nin bir alt grubu olsun. G ve H izomorf ise $G = \langle H, Z(G) \rangle$ dir.

Önerme 7.1.1.3: G sonlu üretilmiş bir sonlu-by-nilpotent grup ve H, $\Delta(H) = \Delta(G)$ ve $G = \langle H, Z(G) \rangle$ olacak şekilde G nin bir alt grubu olsun. $|G/H|$ nin $|I(\langle Z(G), \Delta(G) \rangle)/\langle Z(G), \Delta(G) \rangle|$ ile aralarında asal olduğunu varsayalım. O zaman $G \times \mathbb{Z} \cong H \times \mathbb{Z}$ dir.

Teorem 7.1.1.1: G ve H, $G \times \mathbb{Z} \cong H \times \mathbb{Z}$ olacak şekildeki gruplar ise $G \cong H$ dir.

Yukarıdaki teorem ve lemmalar kullanılarak şu teorem elde edilir.

Teorem 7.1.1.2: Sonlu üretilmiş G ve H sonlu-by-nilpotent gruplarının izomorf olması için gerek ve yeter koşul $G \times \mathbb{Z} \cong H \times \mathbb{Z}$ olmasıdır.

7.1.2. Nilpotent-by-Sonlu Grup

Bu kısımda Trabelsi'nin (2000) Characterisation of Nilpotent-by-Finite Groups isimli makalesindeki sonuçların bir derlemesi yapılmıştır.

Burada y^m ile y nin bir kuvvetini $[x, {}_n y]$ ile $\left[\left[\ldots\left[[x,\underbrace{y],y,\right]\ldots y\right],y}_{\text{n tane}}\right]$ şeklindeki çarpımı tanımlayacağız.

Tanım 7.1.2.1: Bir G grubu H nilpotent ve ${}^{G}/_{H}$ sonlu olacak şekilde bir H normal alt grubuna sahip ise G ye nilpotent-by-sonlu grup denir.

Teorem 7.1.2.2: G sonlu üretilmiş çözülebilir bir grup olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

- **i)** G nilpotent-by-sonlu gruptur.
- **ii)** G nin sonsuz alt kümelerinden her X, Y çifti için $[x, {}_n y^m] = 1$ olacak şekilde $x \in X$, $y \in Y$ ve iki pozitif $m = m(x, y)$, $n = (x, y)$ tamsayıları vardır.

Sonuç 7.1.2.1: Sonlu üretilmiş bir çözülebilir *G* grubunun nilpotent-by-sonlu olması için gerek ve yeter koşul G nin sonsuz alt kümelerinden her X, Y çifti için bir nilpotent-by-sonlu grubunu üreten $x \in X$ ve $y \in Y$ vardır.

7.1.3. Çözülebilir-by-Sonlu Grup

Bu kısımda Lennox'un (1978) Lower Central Depth in Finitely Generated Soluble-by-Finite Groups isimli makalesindeki sonuçların bir derlemesi yapılmıştır.

Tanım 7.1.3.1: Bir *G* grubu *H* çözülebilir ve $G/_H$ sonlu olacak şekilde bir *H* normal alt grubuna sahip ise *G* ye çözülebilir-by-sonlu grup denir.

Tanım 7.1.3.2: *G* nin alt merkezi serisi sonlu bir adımdan sonra birbirine eşit olursa *G* nin sonlu alt merkezi derinliği vardır denir.

$x, y \in G$ için $x^y = yxy^{-1}$ olsun.

Teorem 7.1.3.1: *G* nin sonlu üretilmiş çözülebilir-by-sonlu grup olduğunu ve $x, y \in G$ olmak üzere *G* nin (x, x^y) formundaki her alt grubunun sonlu alt merkezi derinliği olduğunu varsayalım. O zaman *G* sonlu-by-nilpotenttir.

Burada (x, x^y) ile x ve x^y tarafından üretilen alt grup gösterilmiştir.

7.1.4. Merkezi-by-Metabelyen Grup

Bu kısımda Ridley'in (1970) The Free Centre-by-Metabelian Group of Rank Two isimli makalesindeki sonuçların bir derlemesi yapılmıştır.

Tanım 7.1.4.1: *G* bir grup olmak üzere $[G, \delta^2(G)] = 0$ ise G ye merkezi-by-metabelyen denir.

Bu tanımı serbest gruplar için de yapalım.

Tanım 7.1.4.2: F rankı iki olan serbest grup olmak üzere $F/[\delta^2(F),F]$ bölüm grubu serbest merkezi-by-metabelyendir.

Bu kısımda F ile rankı iki olan bir serbest grubu göstereceğiz.

$F/[\delta^2(F),F]$ bölüm grubunun merkezi $\delta^2(F)/[\delta^2(F),F]$ sayılabilir ranka sahip bir serbest abelyen gruptur.

Şimdi $\delta^2(F)/[\delta^2(F),F]$ nin üretecini bulalım.

Tanım 7.1.4.3: x ve y, F nin serbest üreteçleri ise sıfırdan farklı bütün r ve s tamsayıları için bütün $[x^r,y^s]$ komütatörlerinin kümesi, F' türetilmiş grubunun serbest üreteçlerinin bir kümesidir.

Tanım 7.1.4.4: F bir serbest grup olmak üzere F', her r ve s tamsayıları için $[\mathrm{x},\mathrm{y}]^{x^r y^s}$ komütatörleri tarafından serbest olarak üretilir. $c=[x,y]$ olmak üzere $[\mathrm{x},\mathrm{y}]^{x^r y^s}$komütatörünü $cox^r y^s$ ile gösterelim.

Önerme 7.1.4.1: $(a\geq 0, b\geq 1)$ $[cox^a y^b, c]$ ve $(a\geq 1, b\geq 0)$ $[cox^a, coy^b]$ komütatörlerinin B_1 kümesi $\delta^2(F)/[\delta^2(F),F]$ nin bir serbest üreteç kümesidir.

Sonuç 7.1.4.1: $(a\geq 0, b\geq 1)$ $\left[[x^{a+1},y^{b+1}],[x,y]\right]$ ve $(a\geq 1, b\geq 0)$ $\left[[x^{a+1},y],[x,y^{b+1}]\right]$

komütatörlerinin B_2 kümesi $\delta^2(F)/[\delta^2(F),F]$ nin serbest üreteç kümesidir ve

$(a\geq 0, b\geq 1)$ $\left[\left[[[x,y],{}_a x],{}_b y\right],[x,y]\right]$ ve $(a\geq 1, b\geq 0)$ $\left[[[x,y],{}_a x],[[x,y],{}_b y]\right]$

komütatörlerinin B_3 kümesi $\delta^2(F)/[\delta^2(F),F]$ nin serbest üreteç kümesidir.

7.2. Merkezi-by-Metabelyen Lie Cebirleri

X-by-Y Lie cebirleri gruplarda olduğu gibi tanımlanır. Bu kısımda merkezi-by-metabelyen Lie cebirlerinin yapısına kısaca göz atacağız.

Tanım 7.2.1: Bir G Lie cebiri H merkezi ve G/H metabelyen olacak şekilde bir H idealine sahip ise G ye merkezi-by-metabelyen Lie cebiri denir.

Bu kısımda Bryant ve Groves'un (1970) Finitely Presented Centre-by-Metabelian Lie Algebras isimli makalesindeki sonuçların bir derlemesi yapılmıştır.

Tanım 7.2.2: L sonlu sunuma sahip K üzerinde bir Lie cebiri ve A ile B, $B \subseteq A$ olacak şekilde L nin idealleri olsun. $R = U(L/A)$ ve $M = A/B$ diyelim. O zaman M, her $a \in A$ ve $l \in L$ için

$$(a + B)(l + A) = [a, l] + B$$

ile bir sağ R-modül olur.

M üzerindeki R-modül yapısı, $M \otimes M$ tensor çarpım üzerindeki $R \otimes R$-modül üzerine taşınabilir. Böylece bir $M \otimes M$, R-modül olur. R nin $M \otimes M$ üzerine etkisine diagonal etki denir. Bu da her $m, n \in M$ ve $x \in L/A$ için

$$(m \wedge n)x = (mx) \wedge n + m \wedge (nx)$$

ile verilen R nin $M \wedge M$ üzerinde etkisine yol açar.

L nin kendisi üzerindeki etkisi, her $b \in B$, $l \in L$ için

$$(b + [B, A])(l + A) = [b, l] + [B, A]$$

ile R nin $B/[B, A]$ üzerindeki etkisine taşınabilir.

$\gamma: M \wedge M \to B/[B,A]$ lineer dönüşümünü $(a_1 + B) \wedge (a_2 + B) \to [a_1, a_2] + [B, A]$ şeklinde tanımlayalım. γ bir R-modül homomorfizmidir.

Lemma 7.2.1: L sonlu sunuma sahip bir Lie cebiri ve A, L nin ideali olmak üzere L/A sonlu boyutlu olsun. O zaman $Çek(\gamma)$ sonlu üretilmiş bir R-modüldür.

Önerme 7.2.1: L sonlu sunuma sahip K üzerinde bir Lie cebiri; A ve B, $B \subseteq A$ olacak şekilde L nin idealleri olsun. L/A abelyen, A/B de merkezi olsun ve $M = A/B$ diyelim. O zaman $M \wedge M$, $U(L/A)$ $-$modül olarak sonlu üretilmiştir. Sonuç olarak L/B sonlu sunuma sahiptir ($B = \delta^2(L)$ alınırsa $L/\delta^2(L)$ sonlu sunuma sahiptir).

Yukarıdakiler kullanılarak şu teorem elde edilir.

Teorem 7.2.1: Sonlu sunuma sahip merkezi-by metabelyen Lie cebirleri abelyen-by-sonludur.

Abelyen-by-sonlu Lie cebiri tanımını da benzer şekilde verebiliriz.

Tanım 7.2.3: Bir *G* Lie cebiri *H* abelyen ve ${}^{G}/_{H}$ sonlu olacak şekilde bir *H* idealine sahip ise *G* ye abelyen-by-sonlu denir.

KAYNAKLAR

BAHTURIN, Y., 1987. Identical Relations in Lie Algebras. VNU Science Press, Utrecht, The Netherlands, 309s.

BOKUT', L.A., KUKIN, G.P., 1994. Algorithmic and Combinatorial Algebra. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 384s.

BRYANT, R.M., GROVES, J.R.J., 1999. Finitely Presented Centre-by-Metabelian Lie Algebras. Bull. Austral. Math. Soc., 60: 221-226.

HUNGERFORD, T.W., 1974. Algebra. Springer-Verlag New York Inc., United States of America, 502s.

GOLOVIN, O.N., 1950. Nilpotent Product of Groups. Mat. Sb. (N.S.), 27(69):3 427-454.

KUKIN, G.P., 1972. On The Cartesian of a Free Lie Sum of Lie Algebras. Algebra i Logika, 9(6): 701-713.

LENNOX, J. C., 1978. Lower Central Depth in Finitely Generated Soluble-by-Finite Groups. Glasgow Math. J., 19:153-154.

OGER, F., 1991. Cancellation and Elementary Equivalence of Finitely Generated Finite-by-Nilpotent Groups. J. London Math. Soc., (2)44:173-183.

RIDLEY, J.N., 1970. The Free Centre-by-Metabelian Group of Rank Two. Proc. London Math. Soc., (3)20: 321-47.

SULLIVAN, F.E., 1985. Wreath Products of Lie Algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 35: 95-104.

TRABELSI, N., 2000. Characterisation of Nilpotent-by-Finite Groups. Bull. Austral. Math. Soc., 61: 33-38.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Adana'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra Seyhan Rotary Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne başladı. 2012 yılında bölüm ikincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı.