T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL KENMOTSU YAPILARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

SAADET DOĞAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2014

Tezin Başlığı : Bazı Özel Kenmotsu Yapıların Geometrisi Üzerine

Tezi Hazırlayan : Saadet Doğan

Sınav Tarihi : 18.06.2014

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ** ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Bayram ŞAHİN ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Yusuf YAYLI ....
Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Erol KILIÇ ....
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Habil GÜRSOY ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Bazı Özel Kenmotsu Yapıların Geometrisi Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Saadet DOĞAN

ÖZET

Doktora Tezi

Bazı Özel Kenmotsu Yapıların Geometrisi Üzerine

Saadet DOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

101+viii sayfa

2014
Danışman: Yrd.Doç.Dr. Müge KARADAĞ

Altı bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü, tezin amacı ve kullanım alanlarını belirtmek üzere giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremlere detaylarıyla birlikte yer verilmiştir.

Çalışmanın bundan sonraki herbir bölümü orjinal sonuçlar içermektedir.

Üçüncü bölüm, α-Kenmotsu manifoldlarla ilgili elde edilen orjinal sonuçlardan oluşmaktadır. Bu bölümün birinci kısmında α-Kenmotsu manifoldlar üzerinde, bazı simetri şartları altında eğrilik problemleri incelenmiştir. İkinci kısmında ise bir $\bar{M}$ α-Kenmotsu manifoldunun bir M altmanifoldu boyunca tanımlı $\chi(M)$ de ki ξ karakteristik vektör alanı için ξ-umbilik, total ξ-geodezik ve ξ-minimal altmanifoldlarla ilgili birtakım sonuçlara ulaşıldı.

Dördüncü bölüm, nearly Kenmotsu manifoldlara ayrılmıştır. Bu bölümün birinci kısmında nearly Kenmotsu manifoldların belli şartlar altında eğrilik problemleri incelenmiştir. İkinci kısmında ise nearly Kenmotsu manifoldların hemi-slant altmanifoldları üzerinde tanımlanan distribüsyonların M de total geodeziklikleri araştırılmıştır.

Beşinci bölümde para-Kenmotsu manifoldların bazı eğrilik problemleri ve birtakım altmanifoldları incelenmiştir. Altmanifoldlar kısmında, ele alınan altmanifoldlarının distribüsyonlarının integrallenebilirliği ve bazı altmanifoldların varlığı araştırılmıştır.

Son bölümde ise bazı simetri şartları altında eğrilik özellikleri kullanılarak Lorentz Kenmotsu manifoldların bazı sınıflandırmaları yapılmıştır. Ayrıca Lorentz Kenmotsu manifoldların kontakt jenerik normal altmanifoldlarıyla ilgili birtakım sonuçlara ulaşılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar, Kenmotsu Manifoldlar, α-Kenmotsu Manifoldlar, Nearly Kenmotsu Manifoldlar, Para-Kenmotsu Manifoldlar, Lorentz Kenmotsu Manifoldlar, Slant Altmanifold, Semi-slant Altmanifold, Hemi-slant Altmanifold, Z-umbilik Altmanifold, Jenerik Altmanifold, Simetri Şartları (φ-simetrik, φ-rekürent,...), η-einstein Manifold

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

On The Geometry Of Some Special Kenmotsu Structures

Saadet DOĞAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

101+viii pages
2014
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Müge KARADAĞ

The present thesis consists of six chapters. The first chapter of this thesis is devoted to the introduction part which states the aim and usage areas of the thesis.

The second chapter contains some fundamental definitions and theorems which will be used in other chapters in details.

From third chapter to the last chapter, each chapter of this thesis consist original results.

The third chapter consists some original results about α-Kenmotsu manifolds. In the first part of this chapter, we introduce some curvature problems with some symmetry conditions. On the other hand, in the second part of this chapter, we give some results about ξ-umbilical, totally ξ-goedesic and ξ-minimal submanifolds associated with an $\bar{M}$-vector field ξ on a submanifold M of an α-Kenmotsu manifold $\bar{M}$.

The fourth chapter contains some curvature problems of nearly Kenmotsu manifold. In addition to this, we study geometry of the leaves of distributions of hemi-slant submanifolds.

In the fifth chapter we consider some curvature problems and some submanifolds of para-Kenmotsu manifolds. In these submanifolds, we search the integrability of distributions of submanifolds which were handled in the submanifolds part and the existence of some submanifolds.

In the last part, some classifications of Lorentz Kenmotsu manifolds are given using some curvature properties under some symmetry conditions. In addition to we give some results about contact generic normal submanifolds of Lorentz Kenmotsu manifolds.

KEYWORDS: Almost Contact Manifolds, Kenmotsu Manifolds, α-Kenmotsu Manifolds, Nearly Kenmotsu Manifolds, Para-Kenmotsu Manifolds, Lorentz Kenmotsu Manifolds, Slant Submanifolds, Semi-slant Submanifolds, Hemi-slant Submanifolds, Z-umbilical Submanifolds, Generic Submanifolds, Symmetry Conditions (φ-symmetric, φ-rekürent etc.), η-einstein Manifolds

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübelerinin yanısıra ilgi ve teşvikleriyle de bana destek olan danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Müge KARADAĞ'a, tez konumun belirlenmesinde yardımcı olan sayın Prof.Dr. H.Bayram KARADAĞ'a, doktora eğitimim boyunca engin tecrübelerinden istifade ettiğim sayın Doç.Dr. Erol KILIÇ'a ve bölümün tüm imkanlarını sunarak desteğini üzerimizden eksik etmeyen bölüm başkanımız sayın Prof.Dr. Sadık KELEŞ'e ve teknik destekleriyle bana yardımcı olan sayın Doç.Dr. M.Kemal Özdemir ve Şener YANAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında maddi yönden destek gördüğüm İÜBAP'a da teşekkür ederim.

Ayrıca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, gösterdiği sabır ve anlayışla herzaman yanımda olan eşime ve aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Kontakt geometri, diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından biridir. Kontakt geometrinin uygulamalarına optik, mekanik ve termodinamik gibi alanlarda da rastlanmaktadır. Kontakt geometrinin özel manifoldlarından biri de 1972 tarihinde Katsuel Kenmotsu'nun reel eksen ile kompleks uzayın warped çarpımının özelliklerini incelerken ortaya çıkmıştır. Ortaya çıkan manifold tipi, sonraları "Kenmotsu Manifold" olarak adlandırılmıştır. Kenmotsu manifoldları ilk olarak kaynağını 1969 da S. Tanno'nun, otomorfizm grupları maksimum boyuta sahip olan, bağlantılı, hemen hemen kontakt metrik manifoldların bir sınıflandırılmasından almıştır [1]. Tanno, sözü edilen çalışmada c sabit φ-kesitsel eğriliğini göstermek üzere:

• $c > 0$ ise; Riemann manifoldunun sabit φ-kesitsel eğriliğine sahip bir Sasakian manifoldu olduğu,

• $c = 0$ ise; Riemann manifoldunun sabit φ-kesitsel eğriliğine sahip Kaehler manifoldu ile bir çemberin ya da bir doğrunun çarpım manifoldu olduğu,

• $c < 0$ ise; Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin warped çarpımından oluştuğunu göstermiştir.

Kenmotsu, 1972 yılında yayınlanmış makalesinde [2], bu sınıflandırmanın üçüncü kısmında yer alan manifold çeşidini (Kenmotsu manifoldları) tüm geometrik özellikleriyle incelemiş, tensörel denklemlerle de ifade ederek geometri dünyasına önemli bir katkıda bulunmuştur.

M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold; $\varphi : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$, $(1,1)$ tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-form ve g metrik tensör olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= -I + \eta \otimes \xi \\
\eta(\xi) &= 1 \\
g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad \forall X,Y \in \xi(M) \\
g(X,\xi) &= \eta(X) \\
\eta \circ \varphi &= 0, \quad \varphi\xi = 0
\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan (M,φ,ξ,η,g) manifolduna hemen hemen kontakt metrik manifold denir [2]. Eğer bir (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik manifoldu

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(X,\varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

şartını sağlıyorsa M ye Kenmotsu manifoldu denir [2].

$$\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$$

ile tanımlanan Φ 2-formuna ise Kenmotsu manifoldunun temel 2-formu denir [2].

Kenmotsu manifoldları ve bunların altmanifoldları üzerindeki pekçok özellik incelenmiş ve bu özelliklerin önemli bir kısmı Transilvania Üniversitesi'nden Prof.Dr. Gheorghe Pitiş tarafından "Geometry of Kenmotsu Manifolds" kitabında toplanmıştır [3]. Kitabın son bölümünde "Some Special Kenmotsu Structures" başlığıyla bazı özel Kenmotsu yapılara yer verilmiştir. Bu tez, bu yapılardan α-Kenmotsu manifoldlar, nearly Kenmotsu manifoldlar, para-Kenmotsu manifoldlar ve Lorentz Kenmotsu manifoldları incelemek ve orjinal sonuçlara ulaşmak amacıyla hazırlanmıştır. Altı bölümden oluşan bu tezin ilk bölümü konu hakkında genel bir fikir verme ve konunun tarihi gelişimi ile ilgili bilgi vermek üzere giriş bölümüne ayrılmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler, diğer bölümlere taban oluşturmak üzere sistematik bir şekilde verilmiştir.

Tezin orjinal kısımları üçüncü bölümden itibaren başlamaktadır. Üçüncü bölüm, α-Kenmotsu manifoldlarını konu almaktadır. α-Kenmotsu manifold kavramı D. Janssens ve L. Vanhecke tarafından 1981 yılında tanımlanmıştır [4]. 1985'te J.A. Oubina da bu manifoldları $(0,\alpha)$-tipinde Trans-Sasakian manifoldlar olarak adlandırmıştır [5]. 1992 de ise J.C. Marrera bir Trans-Sasakian manifoldun ya α-Sasaki, ya α-Kenmotsu veya kosimplektik manifold olduğunu bulmuştur [6]. Ülkemizde bu konu ile ilgili Hakan Öztürk, Nesip Aktan ve Cengizhan Murathan'ın çalışmaları olmuştur [7]. Bu bölümün ilk kısmında Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve bunların kovaryant türevleri yardımıyla simetrik, ricci-simetrik, rekürrent, φ-rekürrent gibi çeşitli şartlar altında eğrilik özellikleri incelenerek birtakım sonuçlar bulunmuştur. İkinci kısmında ise bir $\bar{M}$ α-Kenmotsu manifoldu ve bunun bir M altmanifoldu ele alınmış ve M boyunca tanımlı $\chi(\bar{M})$ de tanımlı bir vektör alanı için altmanifoldların geometrisi incelenmiştir. Kontakt geometrinin karakteristik vektör alanı ξ, bu vektör alanı yerine seçilerek ξ-umbilik, total ξ-geodezik ve ξ-minimal altmanifoldlarla ilgili birtakım sonuçlara ulaşılmıştır. $\bar{M}$-vektör alanı kavramını 1991 de N.S. Agashe ve M.R. Chafle, "On special submanifolds of a Riemannian manifold" isimli çalışmada tanımlamıştır [8]. E. Kılıç, B. Şahin ve R. Güneş $\bar{M}$-vektör alanı kavramını bir Lorentz manifoldun bir Semi-Riemann hiperyüzeyi üzerinde incelemişlerdir [9]. 2008 de Kırıkkale Üniversitesi'nde Doç.Dr. Mehmet Yıldırım danışmanlığında Recai Atuçuran bu konu ile ilgili "Bir Riemann manifoldun bazı özel altmanifoldları" başlıklı yüksek lisans çalışması yapmıştır [10]. Agashe ve Chafle, $\bar{M}$ nin bir M altmanifoldu boyunca tanımlı $\chi(\bar{M})$ de ki bir Z vektör alanı için Z-umbilik, total Z-geodezik, Z-minimal gibi kavramlar tanıtılmıştır [8]. Bu bölümde de bu kavramların bir α-Kenmotsu manifoldun bir altmanifoldu için ve karakteristik vektör alanı ξ seçilerek birtakım uygulamalarına ve sonuçlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm; nearly Kenmotsu manifoldları konu alıyor olup bu bölüm, eğrilik özellikleri ve altmanifoldları olmak üzere iki kısımdan oluşmuştur. Eğrilik özellikleri kısmında belli şartlar altında nearly Kenmotsu manifoldunun eğrilikleriyle ilgili birtakım sonuçlar bulunmuştur. İkinci kısmında ise bir nearly Kenmotsu manifoldunun bir hemi-slant altmanifoldu üzerinde bulunan $D^{\perp}$ ve D_{θ} distribüsyonlarının M de total geodezik olma şartları incelenmiştir. Nearly Kenmotsu manifoldlarının eğrilikleri ve altmanifoldlarıyla ilgili Siraj Uddin, V.A. Khan, Meraj Ali Khan, Mobin Ahmad, Behzad Najafi ve Niloufar Hosseindur Kashani gibi yazarların çalışmaları da mevcuttur [11–14].

Beşinci bölümde, para-kenmotsu manifoldları ele alınmıştır. 1995'te B.B. Sinha ve K.L. Sai Prasad "A class of almost para-contact metric manifold" isimli makalelerinde para-kenmotsu manifold kavramını tanımlamış ve eğrilik problemlerini incelemiştir[15]. 1996'da K.K. Dube ise "Study of curvatures of para-kenmotsu manifold" isimli makalesinde para-kenmotsu manifoldların eğriliklerini çalışmıştır[16]. Bu bölümün ilk kısmında eğriliklerle ilgili birtakım sorulara cevaplar aranmış, ikinci kısmı ise altmanifoldlara ayrılmıştır. Çalışmanın altmanifoldlarla ilgili kısmında öncelikle para-kenmotsu manifoldların hemi-slant altmanifoldları ve bu kapsamda tanımlanan distribüsyonların integrallenebilirliği teker teker incelenmiştir.

Son bölümde Lorentz Kenmotsu manifoldlar ele alınmıştır. Lorentz Kenmotsu manifoldların bazı simetri şartları altında eğrilik özellikleri bu bölümün birinci kısmında incelenmiş olup ikinci kısmında Lorentz Kenmotsu manifoldların kontakt jenerik normal altmanifoldları ele alınmıştır. 1991'de Minoru Kobayashi, Kenmotsu manifoldların kontakt normal altmanifoldları ve kontakt jenerik altmanifoldları üzerine çalışmalar yapmıştır[17]. 2001'de de U.C. De ve A.K. Sengupta Lorentz para-Sasakian manifoldların jenerik altmanifoldlarını çalışmışlardır [18]. Lorentz Kenmotsu manifoldlar için $\xi \in TM^{\perp}$ olacak şekilde kontakt jenerik manifoldlarla ilgili bazı sonuçlara varılmıştır.

Kenmotsu manifoldların eğrilik çalışmalarıyla ilgili 2008'de Kamil Akpınar'ın[19], altmanifoldlarıyla da ilgili 2009'da Sibel Sular'ın[20], 2010'da Nazan Nur Öğütlü'nün[21] ve yine 2010'da Ümit Yıldırım'ın[22] tezleri mevcuttur. Bu tezde de bazı özel Kenmotsu yapıların hem eğrilik çalışmalarını hem de altmanifoldlarını ele alacak şekilde bir çalışma hazırlanmıştır.

Tezin hazırlanmasında arşiv araştırması, kaynak taraması, problem çözme, tümevarım, tümdengelim gibi yöntem ve tekniklerden yararlanılmıştır.

Bu tezin, konu ile ilgili çalışacak olan araştırmacılara da faydalı olabileceği düşünülmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M üzerinde

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow C^{\infty}(M,R)$$

şeklinde tanımlı pozitif tanımlı, simetrik ve bilineer bir metrik tanımlanabiliyorsa M'ye g ile birlikte Riemann manifoldu adı verilir ve (M,g) ile gösterilir [23].

Tanım 2.1.2. M bir manifold olmak üzere her $p\in M$ noktasına T_pM de bir tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşüme M üzerinde bir vektör alanı denir.
M üzerinde bir vektör alanı

$$X:M\longrightarrow \underset{p\in M}{\cup} T_pM$$

olarak tanımlanır [25].

Tanım 2.1.3. M bir diferensiyellenebilir manifold ve p de M nin herhangi bir noktası olsun. p nin U ve $U'(U\cap U'\neq\emptyset)$ komşulukları üzerindeki lokal koordinat sistemleri $\{x^i\}$ ve $\{y^i\}$ olmak üzere $y^i=y^i(x^1,...,x^n)$ olarak yazılır. Eğer $det[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}]>0$ ise M ye yönlendirilebilir manifold denir [24].

Tanım 2.1.4. M bir diferensiyellenebilir manifold ve p de M nin herhangi bir noktası olsun. T_pM tanjant uzayının duali olan uzaya M nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir ve T_p^*M ile gösterilir.

$$T_p^*M=\{w|w:T_pM\longrightarrow R\}$$

kotanjant uzayının her bir elemanına p noktasındaki kotanjant vektör denir ve her bir kotanjant vektöre de M üzerinde bir 1-form denir [25].

$(x^1,...,x^n)$, $p\in M$ noktasındaki lokal koordinat sistemini göstermek üzere; $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,...,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$, T_pM için bir baz, $\{dx^1|_p,...,dx^n|_p\}$ ise T_p^*M için bir bazdır. Ayrıca,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^j)=\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

dir. Bir $w \in T_p^*M$ 1-formu,

$$w = \sum_{i=1}^{n} f_i dx^i, \quad f_i \in C^\infty(U,R)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer f_i ler diferensiyellenebilirse w 1-formuna diferensiyellenebilirdir denir [25].

Tanım 2.1.5. M bir diferensiyellenebilir manifold ve p de M üzerinde herhangi bir nokta olsun. $C^\infty(U,R)$, p nin bir U komşuluğunda tanımlanan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini ve

$$\tau : [a,b] \subset R \longrightarrow M$$

diferensiyellenebilir bir eğriyi göstermek üzere $f \in C^\infty(U,R)$ için

$$Xf = \left(\frac{df(\tau(t))}{dt}\right)_{t_0}$$

ile tanımlanan X e, $\tau(t_0) = p$ noktasında bir tanjant vektörü denir. Xf, $t = t_0$ noktasında $\tau(t)$ eğrisi doğrultusunda, f fonksiyonunun türevini ifade eder.

X aşağıdaki özellikleri sağlar:

1-) $X : C^\infty(U,R) \longrightarrow R$ lineer bir dönüşümdür.

2-) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg); \quad f,g \in C^\infty(U,R)$

Eğer; $X(f)(p) = X_p f$ olmak üzere; $Xf : U \longrightarrow R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise X e diferensiyellenebilirdir denir [25].

Tanım 2.1.6. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\longrightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü;

1-) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2-) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya bir afin konneksiyon(lineer konneksiyon), ∇_X e de X vektör alanına göre kovaryant türev denir [26].

Bir f fonksiyonunun X e göre kovaryant türevi;

$$\nabla_X f = Xf = X^h \frac{\partial f}{\partial X^h}$$

ile tanımlanır. Burada X^h, X in lokal bileşenleridir.

$(0,s)$ veya $(1,s)$ tipinde herhangi bir tensör alanı S ile gösterildiğinde S nin X e göre kovaryant türevi $\nabla_X S$ şu şekilde tanımlanır: $\forall X_i \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X S)(X_1,...,X_n) = \nabla_X(S(X_1,...,X_n)) - \sum_{i=1}^{n}\{S(X_1,...,\nabla_X X_i,...,X_n)\} \tag{2.1.1}$$

dır. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X S = 0$ ise S tensör alanına ∇ konneksiyonuna göre paraleldir denir [26].

Tanım 2.1.7. M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} T:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\longrightarrow T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

ile tanımlanan $(1,2)$ tipindeki T tensörüne ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü denir. Burada $[X,Y]$, X ile Y nin Lie parantez operatörüdür ve $\forall f \in C^\infty(M,R)$ için;

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanır. Torsiyon tensörü sıfıra eşit olan konneksiyona torsiyonsuz veya simetrik konneksiyon denir [26].

Teorem 2.1.1. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $T=0$ ve $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir tek afin konneksiyon vardır [27].*

Tanım 2.1.8. Teorem 2.1.1 de verilen konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir ve aşağıdaki özdeşlikle ifade edilir:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &+ g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için verilen bu özdeşliğe Kozsul özdeşliği denir [27].

Tanım 2.1.9. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\chi(M)$, M üzerinde tanımlı vektör alanlarının kümesini, $\chi(M)^*$ da $\chi(M)$ nin dualini göstermek üzere;

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \chi(M) \times ... \times \chi(M)}_{r-tane} \times \underbrace{\chi(M)^* \times \chi(M)^* \times ... \times \chi(M)^*}_{s-tane} \rightarrow C^\infty(M,R)$$

şeklinde bütün lineer dönüşümlerin kümesi T_s^r ile gösterilirse; T_s^r nin bir K elemanına r. dereceden kovaryant, s. dereceden kontravaryant tensör alanı denir ve tensör alanının tipi; (r,s) şeklinde gösterilir. $T_0^r = T^r$, $T_s^0 = T_s$ ve $T_0^0 = C^\infty(M,R)$ dir. r. dereceden kovaryant tensör alanına r-form denir [25].

Tanım 2.1.10. M diferensiyellenebilir bir manifold, M üzerindeki r-formların uzayı $\bigwedge^r(M)$ olsun.

$$d : \wedge^r(M) \longrightarrow \wedge^{r+1}(M)$$

operatörü eğer;

1-) $f \in C^\infty(M,R)$ için $df(X) = X(f)$

2-) $\theta \in \bigwedge^r(M)$ ve $w \in \bigwedge^s(M)$ ise $d(\theta \wedge w) = d\theta \wedge w + (-1)^r \theta \wedge dw$

3-) $d^2 = 0$

şartlarını sağlıyorsa d dönüşümüne dış türev denir [27].

w bir r-form olsun. Bir r-formun dış türevi:

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, ..., X_r) &= \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i w(X_0, X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_r) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq r}(-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_r)\} \end{aligned}$$

dir. Burada ˆ ile işaretlenmiş elemanlar, vektör dizisine dahil edilmeyen elemanı göstermektedir. Özel olarak w 1-form ise

$$dw(X_0, X_1) = \frac{1}{2}\{X_0 w(X_1) - X_1 w(X_0) - w([X_0, X_1])\} \tag{2.1.4}$$

dir. w, 2-form ise

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, X_2) &= \frac{1}{3}\{X_0(w(X_1, X_2)) - X_1(w(X_0, X_2)) + X_2(w(X_0, X_1)) \\ &- w([X_0, X_1], X_2) + w([X_0, X_2], X_1) - w([X_1, X_2], X_0)\} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

dir [27].

Tanım 2.1.11. *M* bir Riemann manifoldu ve ∇ da *M* üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlanan $R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ dönüşümüne *M* Riemann manifoldunun eğrilik tensörü denir [26]. $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

ile tanımlanan dönüşüme de Riemann eğrilik tensör alanı denir[26]. Riemann eğrilik tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar: $\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için

1-) $R(X,Y,U,V) + R(Y,X,U,V) = 0$

2-) $R(X,Y,U,V) + R(X,Y,V,U) = 0$

3-) $R(X,Y,U,V) = R(U,V,X,Y)$

4-) $R(X,Y,U,V) + R(Y,U,X,V) + R(U,X,Y,V) = 0$, (1. Bianchi Özdeşliği)

5-) $(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0$, (2. Bianchi Özdeşliği)

dır [26].

Tanım 2.1.12. *M* bir diferensiyellenebilir manifold ve $\forall p \in M$ için T_pM de *M* nin *p* noktasındaki tanjant uzay olsun. T_pM tanjant uzayında $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız vektörlerinin gerdiği *P* düzlemi için

$$K(p) = \frac{g(R(X_1,X_2)X_2,X_1)}{g(X_1,X_1)g(X_2,X_2) - g(X_1,X_2)^2} \tag{2.1.6}$$

ile tanımlanan $K(p)$ ye *P* düzleminin kesit eğriliği denir[25].

T_pM tanjant uzayında, her P düzlemi ve *M* manifoldunun her *p* noktası için, $K(p)$ sabit ise *M* manifolduna sabit eğrilikli uzay denir. Bir sabit eğrilikli Riemann manifolduna da bir uzay form denir[25].

Teorem 2.1.2. *Sabit eğriliği c olan bir uzay form $M(c)$ ile gösterilsin. $M(c)$ nin eğrilik tensörü; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{2.1.7}$$

ile verilir [28].

Tanım 2.1.13. M bir diferensiyellenebilir manifold ve T_pM de M nin p noktasındaki tanjant uzay olsun. $\{e_i\}$, T_pM nin ortonormal bazı olmak üzere;

$$\begin{aligned} S:\chi(M)\times\chi(M) &\longrightarrow C^{\infty}(M,R) \\ (X,Y) &\longrightarrow S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned}$$

ile tanımlanan $(0,2)$ tipli tensör alanına M nin Ricci eğrilik tensörü denir [28].

$$S(X,Y)=g(QX,Y)$$

ile tanımlanan $(1,1)$ tipinde Q tensör alanına M nin Ricci operatörü adı verilir [28].

Tanım 2.1.14. (M,g), $n\geq 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve S de M nin Ricci tensörü olsun. Eğer M üzerinde bir $\lambda: M\longrightarrow R$ fonksiyonu için;

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y);\quad \forall X,Y\in\chi(M)$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye bir Einstein manifoldu denir [26].

U, M üzerinde bir birim teğet vektör alanı olmak üzere eğer;

$$A(X)=g(X,U)$$

olacak şekilde bir A 1-formu tanımlanıyorsa, U vektör alanına A 1-formunun üreteci denir.

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için; M nin Ricci tensörü S;

$$S(X,Y)=ag(X,Y)+bA(X)A(Y),\quad (a,b\in C^{\infty}(M,R))$$

şartını sağlıyorsa M ye yarı-Einstein manifold denir [29].

Tanım 2.1.15. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\chi(M)$ nin bir bazı $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olsun.

$$r=\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i)$$

fonksiyonuna M nin skaler eğrilik fonksiyonu adı verilir [30].

Tanım 2.1.16. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\forall p \in M$ noktasına T_pM nin bir D_p alt uzayını karşılık getiren D dönüşümüne distribüsyon denir[26].

$$\begin{aligned} D : M &\longrightarrow \bigcup T_pM \\ p &\longrightarrow D_p \subset T_pM \end{aligned}$$

Eğer D_p yi geren $X_1, ..., X_n$ vektör alanları varsa D ye diferensiyellenebilir distribüsyon denir. Eğer $D_p = T_pM$ ise D ye integrallenebilir denir [26].

Eğer $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ ise D ye involutive denir [26].

Teorem 2.1.3. *Her involütive distribüsyon integrallenebilirdir [26].*

Tanım 2.1.17. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer D distribüsyonu; $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ şartını sağlıyorsa, D distribüsyonuna ∇ ya göre paraleldir denir [26].

Tanım 2.1.18. M bir manifold ve X de M üzerinde bir vektör alanı olsun. Φ_t 1-parametreli dönüşüm grubu olmak üzere;

$$(L_X K)_x = \lim_{t=0} \frac{1}{t} [K_x - (\Phi_t K)_x]$$

ifadesine K tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi denir [31].

Lie türevi aşağıdaki özellikleri sağlar [27]:

1-) $L_X f = Xf, \quad \forall f \in C(M,R), \quad X \in \chi(M)$

2-) $L_X Y = [X,Y], \quad \forall X, Y \in \chi(M)$

3-) $L_X(fY) = X(f)Y + fL_X Y$

4-) $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y] = L_X L_Y - L_Y L_X$

5-) $L_X(df) = d(X[f])$

6-) $(L_X W)(Y) = X(W(Y)) - W([X,Y]), \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad W \in \chi(M)^*$

7-) $(L_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])$.

Tanım 2.1.19. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $X \in \chi(M)$ olsun. Eğer,

$$L_X g = 0$$

ise yani g, X in 1-parametreli dönüşüm grubu altında invaryant ise X e g nin bir Killing vektör alanı denir. Eğer X bir Killing vektör alanı ise $\forall Y,Z \in \chi(M)$ için

$$(L_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

dır [25].

Tanım 2.1.20. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $X,Y \in \chi(M)$ olsun. $R(X,Y)R = 0$ şartını sağlayan M manifolduna semi-simetrik manifold denir [32].

Burada $R(X,Y)$ lineer endomorfizmleri R tensörüne kovaryant türev olarak etki eder, yani, $\forall X,Y,U,V,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)R)(U,V,W) &= R(X,Y)R(U,V)W - R(R(X,Y)U,V)W \\ &- R(U,R(X,Y)V)W - R(U,V)R(X,Y)W \qquad (2.1.8)\end{aligned}$$

olur. $R(X,Y)R = 0$ şartına Nomizu şartı da denir.

Benzer şekilde S Ricci tensörünü göstermek üzere $R(X,Y)S = 0$ şartını sağlayan manifolda da Ricci semi-simetrik manifold denir [32] (Benzer tanım Weyl konformal eğrilik tensörü C için de yapılabilir).

Tanım 2.1.21. M bir Riemann manifoldu ve R de M nin eğrilik tensörü olsun. Eğer $\nabla R = 0$ ise M ye lokal simetriktir denir [25].

Tanım 2.1.22. M ve N Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M ve N nin kartezyen çarpımı olan $M \times N$ de bir Riemann manifoldudur ve aşağıdaki özellikler sağlanır [33]:
a-)

$$\begin{aligned}\pi : M \times N &\longrightarrow M \\ (p,q) &\longrightarrow p\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sigma : M \times N &\longrightarrow N \\ (p,q) &\longrightarrow q\end{aligned}$$

izdüşümleri C^∞ dönüşümlerdir ve bu dönüşümler submersiyondur.

b-) Bir $\phi : P \longrightarrow M \times N$ dönüşümünün C^∞ olması için gerek ve yeter şart $\pi \circ \phi$ ve $\sigma \circ \phi$ nin C^∞ olmasıdır.

c-) $\forall (p,q) \in M \times N$ için

$$\begin{aligned} M \times q &= \{(r,q) \in M \times N; r \in M\} \\ p \times N &= \{(p,r) \in M \times N; r \in N\} \end{aligned}$$

alt kümeleri $M \times N$ nin altmanifoldlarıdır.

d-) $\forall (p,q) \in M \times N$ için

$\pi|_{M\times q}$, $M \times q$ dan M ye diffeomorfizmdir.

$\sigma|_{p\times N}$, $p \times N$ den N ye diffeomorfizmdir.

$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times q)$ ve $T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$ uzayları (p,q) da $M \times N$ nin tanjant alt uzaylarıdır.

Tanım 2.1.23. (B, g_B) ve (F, g_F) iki Riemann manifoldu ve f de B üzerinde pozitif tanımlı bir C^∞ fonksiyon olsun. Bu durumda

$$g = g_B + f^2 g_f$$

$B \times F$ manifoldu üzerinde bir Riemann metriğidir ve $(B \times F, g)$ ye warped çarpım manifoldu denir ve $M = B \times_f F$ ile gösterilir [34].

Tanım 2.1.24. I, R nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow E^n$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna eğri denir [24].

Tanım 2.1.25. M, $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere;

$\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] \tag{2.1.9}$$

ile tanımlanan tensör alanına M manifoldunun Weyl projektif eğrilik tensör alanı denir [25].

Tanım 2.1.26. M, $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \frac{1}{2n+1}[S(X,Y)Z - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX] \\ &- \frac{r}{2n(2n-1)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

ile tanımlı tensör alanına M manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensör alanı denir [25].

$C = 0$ ise M manifolduna konformal flat denir [25].

Tanım 2.1.27. M, $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere; $\forall X,Y,W \in \chi(M)$ için

$$\overline{Z}(X,Y)W = R(X,Y)W - \frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y,W)X - g(X,W)Y] \tag{2.1.11}$$

ile tanımlı tensör alanına M nin Weyl koncircular eğrilik tensör alanı denir [25].

Tanım 2.1.28. M, $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için bir W^* tensör alanı,

$$W^*(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{4n}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \tag{2.1.12}$$

ve

$$W^*(X,Y,Z,U) = g(W^*(X,Y)Z,U) = W^*(Z,U,X,Y)$$

ile tanımlansın. W^* tensör alanına m-projektif eğrilik tensörü denir [35].

Teorem 2.1.4. *Bir M Riemann manifoldu için aşağıdaki şartlar denktir [35]:*

i-) *M bir Einstein manifolddur.*

ii-) *m-projektif ve Weyl projektif eğrilik tensörleri lineer bağımlıdır.*

iii-) *m-projektif ve concircular eğrilik tensörleri lineer bağımlıdır.*

iv-) *m-projektif ve konformal eğrilik tensörleri lineer bağımlıdır.*

Tanım 2.1.29. Bir M^n Riemann manifoldu için

$$\begin{aligned} \overline{C}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &- \frac{r}{n}[\frac{a}{n-1} + 2b][g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

ile tanımlanan $(1,3)$ tipindeki $\overline{C}$ eğrilik tensörüne quasi-konformal eğrilik tensörü denir [44] (Burada a ve b sabitler, r skaler eğrilik).

Tanım 2.1.30. Bir M Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R; $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = \psi(X)R(Y,Z)W + \beta(X)[g(Z,W)Y - g(Y,W)Z] \tag{2.1.14}$$

şartını sağlarsa M ye genelleştirilmiş rekürrent Riemann manifold denir [45] (Burada ψ ve β 1-formlar ve $\beta \neq 0$ dır.).

Tanım 2.1.31. Bir (M^n,g) Riemann manifoldunun Ricci tensörü S; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \psi(X)S(Y,Z) + (n-1)\beta(X)g(Y,Z) \tag{2.1.15}$$

şartını sağlayacak şekilde ψ ve β 1-formları varsa M ye genelleştirilmiş Ricci rekürrent Riemann manifoldu denir [7] ($\beta \neq 0$).

Tanım 2.1.30 ve Tanım 2.1.31 de $\beta = 0$ alınırsa sırasıyla rekürrent ve ricci-rekürrent manifoldlar elde edilir.

Tanım 2.1.32. Bir (M^n,g) Riemann manifoldu için

$$\begin{aligned} \overline{P}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b\{S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\} \\ &- \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + b)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

ile verilen $(1,3)$ tipindeki $\overline{P}$ eğrilik tensörüne pseudo-projektif eğrilik tensörü denir (a ve b sıfırdan farklı sabitler) [47].

Tanım 2.1.33. M bir diferensiyellenebilir manifold ve g, M üzerinde tanımlı $(0,2)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer; g nin negatif tanımlı olduğu en geniş $W \subset T_pM$ nin boyutu $\forall p \in M$ için aynıysa g ye sabit indeksli denir [50].

M üzerinde tanımlanan $(0,2)$ tipinde, sabit indeksli, non-dejenere, simetrik bir g metriğine pseudo-Riemann metrik denir [50].

2.2 Altmanifoldlar

Tanım 2.2.1. (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ birer Riemann manifoldu ve F; M den $\bar{M}$ ye bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için $(F_*)_p$ birebir ise F ye M den $\bar{M}$ ye bir immersiyon denir. M manifolduna da immersed altmanifold veya kısaca altmanifold denir [30].

Eğer F birebir ise F ye imbedding denir [30].

Tanım 2.2.2. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M nin her bir p noktasına T_pM nin bir lineer alt uzayını karşılık getiren bir D dönüşümüne distribüsyon denir [30].

Eğer $\forall p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise $X \in D$ dir [30].

Eğer $\forall X,Y \in D$ için $[X,Y] \in D$ ise D distribüsyonuna involutive denir [30].

Tanım 2.2.3. M, $\bar{M}$ nın bir imbedded altmanifoldu ve F de M den $\bar{M}$ ye imbedding dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için

$$F_*(T_pM) = D_p$$

olacak şekilde bir D distribüsyonu varsa M ye D nin integral manifoldu denir [30].

Eğer D nin M yi içeren bir integral manifoldu yoksa M ye D nin maksimal integral altmanifoldu denir [30].

$\forall p \in M$ için D nin p yi içeren bir integral manifoldu varsa D ye integrallenebilirdir denir [30].

Teorem 2.2.1. *(Frobenius Teoremi) M üzerindeki bir involütive distribüsyon integrallenebilirdir. Üstelik D nin $\forall p \in M$ den geçen bir tek maksimal integral altmanifoldu vardır ve p yi içeren diğer her integral altmanifoldu, bu maksimal integral altmanifoldun bir açık alt kümesidir [30].*

Foliation (Yapraklanma) kavramından ; M üzerindeki involütive distribüsyonlar anlaşılacaktır[30].

Tanım 2.2.4. (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. Eğer $\forall X_p \in T_pM$ için

$$\bar{g}|_{F(p)}(F_*(X_p),Y_p) = 0$$

ise Y vektörüne $F(p)$ noktasında $\bar{M}$ ye normaldir denir. Her bir $F(p)$ noktasında $\bar{M}$ ye normal olan vektörlerin cümlesine normal vektör alanı denir.

$\bar{M}$ de M nin bir birim normal vektör alanına M üzerinde normal kesit denir. $\bar{M}$ de M nin tüm normal vektörlerinin vektör demetini $T^{\perp}M$ ile göstereceğiz. Bu durumda $\bar{M}$ nin tanjant demeti $T\bar{M}$;

$$T\bar{M}|_M = T(M) \oplus T^{\perp}M$$

olarak yazılabilir [30].

Tanım 2.2.5. (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ iki Riemann manifoldu ve (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. M ve $\bar{M}$ üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}$ olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.2.1}$$

dir. Bu şekilde tanımlanan ∇ bir Riemann konneksiyonudur. Burada h;

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi^{\perp}(M)$$

ile tanımlı, normal demet değerli, simetrik, bilineer formdur. (2.2.1) ile verilen denkleme Gauss formülü, bu formülde geçen h ya da M nin ikinci temel formu denir [30].

V, M üzerinde bir normal vektör alanı ve X, M üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda $\bar{\nabla}_X V$,

$$\bar{\nabla}_X V = -(A_V X) + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.2.2}$$

olarak ayrıştırılabilir (Burada $-A_V X$ ve $\nabla^{\perp}_X V$; $\bar{\nabla}_X V$ nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir).

A_V lineer operatörüne normal kesite göre Weingarten operatörü, (2.2.2) denklemine de Weingarten formülü denir [30].

Önerme 2.2.1. *$\forall X,Y \in \chi(M)$, $V \in \chi^{\perp}(M)$ için,*

$$g(A_V X, Y) = g(h(X,Y), V) \tag{2.2.3}$$

dır [30].

Tanım 2.2.6. Eğer M altmanifoldunun ikinci temel formu sıfırsa M ye total geodezik denir [30].

Tanım 2.2.7. (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. V, M üzerinde bir normal kesit olmak üzere; eğer A_V, her yerde birim dönüşümle orantılı ise yani;

$$A = \rho I \tag{2.2.4}$$

şartını sağlayan bir ρ fonksiyonu varsa V ye M üzerinde umbilik kesit denir veya M ye V ye göre umbiliktir denir. Eğer M, her lokal normal kesite göre umbilik ise M ye total umbilik denir [30].

Tanım 2.2.8. (M^n,g) ve $(\bar{M}^m,\bar{g})$ birer Riemann manifold ve (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. $V_1,...,V_{m-n}$; bir $p \in M$ noktasında $T_p^{\perp}M$ normal uzayının bir ortonormal bazı olsun. $A^i = A_{V_i}$ olmak üzere; $(i = 1,2,...,m-n)$

$$H = \frac{1}{n}(izA^i)V_i \tag{2.2.5}$$

ile tanımlanan H, p noktasında, ortonormal bazın seçiminden bağımsız bir normal vektördür. H ya p noktasında ortalama eğrilik vektörü denir [30].

$H = 0$ ise M ye minimal altmanifold denir [30].

Tanım 2.2.9. (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ birer Riemann nanifold ve (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde

$$\bar{g}(h(X,Y),H) = \lambda g(X,Y) \tag{2.2.6}$$

olacak şekilde bir λ fonksiyonu varsa M ye pseudo-umbilik altmanifold denir.

Bir pseudo-umbilik altmanifoldta $\lambda = \bar{g}(H,H)$ tır [30].

Tanım 2.2.10. (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ birer Riemann nanifold ve (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ ve M üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla $\bar{\nabla}$ ve ∇, Riemann eğrilik tensörleri de sırasıyla $\bar{R}$ ve R olmak üzere;

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

denkleminde (2.2.1) ve (2.2.2) eşitlikleri kullanılırsa $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için;

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \bar{g}(h(X,Z),h(Y,W)) - \bar{g}(h(X,W),h(Y,Z)) \quad (2.2.7)$$

elde edilir. Bu eşitliğe Gauss denklemi denir [30].

$\bar{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşenleri dikkate alındığında;

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X,Y)Z)^N &= [(\nabla_X h^i)(Y,Z) - (\nabla_Y h^i)(X,Z)]V_i + h^i(Y,Z)\nabla_X^{\perp} V_i \\ &- h^i(X,Z)\nabla_Y^{\perp} V_i \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

olur. Bu eşitliğe de Codazzi denklemi denir [30].

Tanım 2.2.11. (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ birer Riemann nanifold ve (M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ nin altmanifoldu olsun. $TM^{\perp}$ normal demeti üzerindeki $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyonuna göre eğrilik tensörü R^N ile gösterilsin. $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $U,V \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$\bar{R}(X,Y,U,V) = R^N(X,Y,U,V) - g([A_U,A_V](X),Y) \quad (2.2.9)$$

ile verilen denkleme Ricci denklemi denir [30].

Tanım 2.2.12. M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer M üzerinde tanımlı D distribüsyonu için, $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ şartı sağlanıyorsa D ye ∇ ya göre paraleldir denir [50].

Tanım 2.2.13. (M^n,g) bir Riemann manifoldu ve $k \geq 1$ için $(0,k)$ tipinde bir tensör alanı T olsun. Eğer T, $\forall X,X_1,Y_1,...,X_k,Y_k \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla T)(X_1,...,X_k;X)T(Y_1,...,Y_k) = (\nabla T)(Y_1,...,Y_k;X)T(X_1,...,X_k)$$

ise T ye rekürrent tensör alanı denir [51].

Bu tanıma denk olarak bir $p \in M$ nin bir U komşuluğunda sıfırdan farklı bir rekürrent T tensör alanı, U üzerinde

$$\nabla T = T \otimes \alpha \quad (2.2.10)$$

eşitliği sağlanır. Burada α 1-formu,

$$\alpha = d(\log \|T\|)$$

biçiminde olup, $\|T\|^2 = g(T,T)$ dir [51].

Tanım 2.2.14. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $k \geq 1$ için $(0,k)$ tipinde bir tensör alanı T olsun. Eğer T, $\forall X, Y, X_1, Y_1, ..., X_k, Y_k \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla^2 T)(X_1, ..., X_k; X, Y) T(Y_1, ..., Y_k) = (\nabla^2 T)(Y_1, ..., Y_k; X, Y) T(X_1, ..., X_k)$$

ise T ye 2-rekürrent tensör alanı denir [51].

Bu tanıma denk olarak bir $p \in M$ nin bir U komşuluğunda sıfırdan farklı bir 2-rekürrent T tensör alanı, U üzerinde

$$\nabla^2 T = T \otimes \psi \tag{2.2.11}$$

eşitliği sağlanır. Burada ψ, $(0,2)$-tipinde bir tensördür [51].

2.3 Hemen Hemen Çarpım Yapıları

Tanım 2.3.1. M, m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde;

$$F^2 = I \tag{2.3.1}$$

şartını sağlayan $(1,1)$ tensör alanına hemen hemen çarpım yapısı, (M,F) ye de hemen hemen çarpım manifoldu denir [36].

$\forall X \in \chi(M)$ için,

$$PX = \frac{X + FX}{2}, \quad QX = \frac{X - FX}{2}$$

denilirse;

$$P^2 = P, \quad PQ = QP = 0, \quad Q^2 = Q \tag{2.3.2}$$

elde edilir. Tersine eğer (P,Q); (2.3.2) yi sağlayan $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı çiftiyse

$$F = P - Q$$

olup; F, M üzerinde bir hemen hemen çarpım yapıdır.

$$\bar{P} = lmP, \quad \bar{Q} = lmQ$$

denilirse $\bar{P}$ ve $\bar{Q}$, M üzerinde kompleman distribüsyonlar oluştururlar, yani; $\forall X \in M$ için

$$T_xM = \bar{P}_x \oplus \bar{Q}_x$$

olur. Eğer $rankP = p$ ve $rankQ = q$ ise $\bar{P}$ ve $\bar{Q}$; M üzerinde sırasıyla p ve q boyutlu distribüsyonlardır ve $p+q=m$ dir. Tersine eğer $\bar{P}$ ve $\bar{Q}$; M üzerinde iki kompleman distribüsyonlar ise P ve Q sırasıyla $P_x : T_xM \longrightarrow \bar{P}_x$ ve $Q_x : T_xM \longrightarrow \bar{Q}_x$ e karşılık gelen projeksiyonlardır.

Tanım 2.3.2. $\forall X \in M$ için $\{e_1, ..., e_p\}$; $\bar{P}_x$ in; $\{e_{p+1}, ..., e_m\}$ de $\bar{Q}_x$ in bir bazı olsun. Bu durumda $\{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_m\}$ de T_xM nin bir bazıdır ve bu baza x noktasındaki adapte edilmiş baz denir [36].

Adapte edilmiş baza göre P,Q ve F nin matrisel gösterimi ise sırasıyla;

$$P_0 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

şeklindedir [36].

Tanım 2.3.3. $B = \{$ M'nin tüm noktalarındaki adapte edilmiş bazlar $\}$ olmak üzere eğer M nin her bir noktasındaki bir $(U, x^1, ..., x^m)$ lokal koordinat komşuluğu için,

$$\sigma : x \in U \longrightarrow \sigma(x) = ((\frac{\partial}{\partial x^1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial x^m})_x)$$

ile tanımlanan $\sigma(x)$ de x noktasında bir adapte edilmiş baz ise F hemen hemen çarpım yapısına integrallenebilir denir [36].

Önerme 2.3.1. *F integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $\bar{P}$ ve $\bar{Q}$ integrallenebilirdir [36].*

Önerme 2.3.2. *Aşağıdaki şartlar denktir:*

i-) *F hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilirdir.*

ii-) $N_F = 0$

iii-) $N_P = 0$

iv-) $N_Q = 0$ *[36].*

Önerme 2.3.3. *Aşağıdaki şartlar denktir:*

i-) $\nabla F = 0$

ii-) $\nabla P = 0$

iii-) $\nabla Q = 0$ *[36].*

Tanım 2.3.4. M üzerinde $\nabla F = 0$ şartını sağlayan ∇ lineer konneksiyonuna hemen hemen çarpım konneksiyonu denir [36].

Önerme 2.3.4. *Her hemen hemen çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım konneksiyonu vardır [36].*

Teorem 2.3.1. *Eğer M üzerinde bir simetrik hemen hemen çarpım konneksiyonu varsa F integrallenebilirdir, tersi de doğrudur [36].*

2.4 Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.4.1. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde

$$J^2 = -I \tag{2.4.1}$$

şartını sağlayan lineer J $(1,1)$ tensör alanına M üzerindeki hemen hemen kompleks yapı; J ile birlikte M ye bir hemen hemen kompleks manifold denir [36].

J, M üzerindeki hemen hemen kompleks yapı olmak üzere $\forall x \in M$ için J_x, T_xM nin

$$J_x^2 = -I$$

şartını sağlayan bir endomorfizmidir. Buradan T_xM, kompleks sayılar yardımıyla bir kompleks vektör uzayına dönüştürülebilir. Yani; $\forall X \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in R$ için

$$(a+ib)X = aX + b(JX)$$

dir. Üstelik, T_xM nin reel boyutu çift $(2n)$ olur. Yani; her hemen hemen kompleks manifold çift $(2n)$ boyutludur. $\{X_1,...,X_n\}$, bir kompleks vektör uzayı olarak T_xM nin bir bazı ise, $\{X_1,...,X_n,JX_1,...,JX_n\}$ de bir reel vektör uzayı olarak T_xM nin bir bazıdır [36].

Tanım 2.4.2. (M,J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $\forall x \in M$ için T_xM nin $\{X_i,JX_i\}$ bazına x noktasındaki adapte edilmiş baz (veya kompleks baz) denir [36].

Kompleks baza göre J nin matrissel gösterimi,

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada I_n; $n \times n$ birim matristir [36].

Her kompleks manifold, üzerinde bir standart hemen hemen kompleks yapı taşır. Gerçekten; $(z^1,...,z^n)$ M üzerindeki bir U komşuluğu üzerinde bir kompleks koordinat sistemi olsun.

$$J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$$

endomorfizmi; $1 \leq i \leq n$ için,

$$J_x(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J_x(\frac{\partial}{\partial y^i}) = -(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

ile tanımlandığında J, kompleks lokal koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır [36].

Tanım 2.4.3. (M,J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde J yardımıyla, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y] \tag{2.4.2}$$

ile tanımlanan $(1,2)$ tipindeki N_J tensör alanına Nijenhius tensörü denir [36].

Teorem 2.4.1. *J integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $N_J = 0$ dır [36].*

Tanım 2.4.4. (M^{2n},J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde,

$$\nabla J = 0 \tag{2.4.3}$$

şartını sağlayan bir ∇ lineer konneksiyonu varsa ∇ ya hemen hemen kompleks konneksiyon denir [36].

Lemma 2.4.1. ∇*, M üzerinde bir simetrik lineer konneksiyon olsun. Bu durumda* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$N_J(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X - (\nabla_X J)Y) \tag{2.4.4}$$

dir [36].

Önerme 2.4.1. (M,J) *bir hemen hemen kompleks manifold ve* ∇ *da M üzerinde bir hemen hemen kompleks konneksiyon olsun. M nin torsiyon tensörü T, eğrilik tensörü R olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır [36]:*
i-) $T(JX,JY) - J(T(JX,Y)) - J(T(X,JY)) - T(X,Y) = -N_J(X,Y)$,
ii-) $R(X,Y)J = JR(X,Y)$.

Tanım 2.4.5. (M,J) bir hemen hemen kompleks manifold ve g de M üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere, eğer g; $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX,JY) = g(X,Y) \tag{2.4.5}$$

şartını sağlıyorsa g ye Hermityen metrik denir [36].

(2.4.5) şartını sağlayan (M,J,g) hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen hermityen manifold; (2.4.5) şartını sağlayan kompleks manifolda ise hermityen manifold denir [36].

Önerme 2.4.2. *Her hemen hemen kompleks manifold, bir hermityen metrik içerir [36].*

İspat. h, M üzerinde keyfi bir Riemann metrik olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X,Y) = h(X,Y) + h(JX,JY)$$

olarak tanımlanırsa g bir hermityen metriktir. $\square$

Tanım 2.4.6. (M,J,g) bir hemen hemen hermityen yapı olmak üzere; $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M üzerinde

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY)$$

ile tanımlanan Ω 2-formuna M nin temel 2-formu veya Kaehler form denir [36].

Önerme 2.4.3. Ω*, J yi invaryant bırakır yani;*

$$\Omega(JX,JY)=\Omega(X,Y)$$

dir [36].

Önerme 2.4.4. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ *için*

$$2g((\nabla_X J)Y,Z)=3d\Omega(X,JY,JZ)-3d\Omega(X,Y,Z)+g(N_J(Y,Z),JX) \tag{2.4.6}$$

dir [36].

Tanım 2.4.7. Bir M hemen hemen hermityen manifold üzerindeki temel 2-form Ω kapalı ise M ye hemen hemen Kaehler manifold, eğer M hermityen ise M ye Kaehler manifold denir [36].

Bu durumda bir hermityen manifold Kaehler manifolddur gerek ve yeter şart ∇ bir hemen hemen kompleks konneksiyondur[36].

Tanım 2.4.8. (M,J) hemen hemen hermityen manifoldu eğer $\forall X\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X J)X=0$$

şartını veya buna denk olarak, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X=0$$

şartını sağlıyorsa M ye nearly Kaehler manifold denir [50].

2.5 Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.5.1. M, $(2n+1)$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. φ, $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı; $\xi\in\chi(M)$ ve η bir 1-form olmak üzere;

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi,\quad \eta(\xi)=1 \tag{2.5.1}$$

şartını sağlayan (φ,ξ,η) yapısına hemen hemen kontakt yapı, (M,φ,ξ,η) manifolduna ise hemen hemen kontakt manifold denir [3].

ξ ye M nin reeb vektör alanı, karakteristik vektör alanı veya temel vektör alanı denir.

Tanım 2.5.2. (M,φ,ξ,η) bir hemen hemen kontakt manifold olsun.

$$D : x \in M \longrightarrow D_x = \{X \in T_xM : \eta(X) = 0\}$$

ile tanımlanan dönüşüm T_xM nin bir alt uzayı olup $(2n)$ boyutlu bir distribüsyon tanımlar. Bu distribüsyona M nin kontakt distribüsyonu ve η ya M nin kontakt formu denir [3].

Önerme 2.5.1. *$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta)$ bir hemen hemen kontakt manifold olsun. (φ,ξ,η) kontakt yapısı aşağıdaki şartları sağlar [25]:*

$$\varphi\xi = 0 \tag{2.5.2}$$

$$\eta(\varphi X) = 0 \tag{2.5.3}$$

$$\varphi^3 = -\varphi \tag{2.5.4}$$

$$rank\varphi = 2n \tag{2.5.5}$$

Önerme 2.5.2. *Her (M,φ,ξ,η) hemen hemen kontakt manifoldu*

$$\eta(X) = g(X,\xi) \tag{2.5.6}$$

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.5.7}$$

olacak şekilde bir g metrik tensör alanı içerir [25].

Tanım 2.5.3. (2.5.6) ve (2.5.7) şartlarını sağlayan g metrik tensör alanı ile birlikte (M,φ,ξ,η) hemen hemen kontakt manifolduna hemen hemen kontakt metrik manifold denir [25].

Önerme 2.5.3. *$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta)$ bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda; M nin tanjant demetinin yapı grubu $U(n)\times 1$ e indirgenebilir. Tersi de doğrudur [25].*

Önerme 2.5.4. *Her hemen hemen kontakt manifold, yönlendirilebilirdir [25].*

Tanım 2.5.4. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer η 1-formu, M üzerinde heryerde,

$$\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$$

ise M ye kontakt manifold, η ya da kontakt form denir [25].

Teorem 2.5.1. *$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir kontakt manifold ise*

$$g(X,\varphi Y)=d\eta(X,Y) \tag{2.5.8}$$

olacak şekilde bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt yapısı vardır [25].

Tanım 2.5.5. Bir M manifoldu üzerinde tanımlı (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt yapısı için,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{2.5.9}$$

şeklinde tanımlanan Φ 2-formuna , hemen hemen kontakt yapının temel 2-formu denir [25].

Tanım 2.5.6. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kontakt manifold olsun. $M\times R$ çarpım manifoldu gözönünde bulundurulduğunda, $M\times R$ üzerinde bir vektör alanı; $(X,f(\frac{d}{dt}))$ şeklindedir (Burada $X\in\chi(M)$; t, R nin koordinatı ve f, $M\times R$ üzerinde bir fonksiyon).

$M\times R$ nin tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir lineer J dönüşümü

$$J(X,f\frac{d}{dt})=(\varphi X-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{2.5.10}$$

şeklinde tanımlanırsa $J^2=-I$ olup J, $M\times R$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

J hemen hemen kompleks yapısı eğer;

$$N_J(X,Y)=J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \tag{2.5.11}$$

ile tanımlanan Nijenhius tensörü sıfıra eşitse integrallenebilirdir.

Eğer $M\times R$ üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısına normaldir denir [25].

$$N_\varphi(X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y] \tag{2.5.12}$$

ile tanımlanan N_φ, φ nin Nijenhius tensörü olmak üzere, normallik şartı, N_φ yardımı ile tanımlanmak istenirse, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $N_J((X,0),(Y,0))$ ve $N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ nin hesaplanması yeterlidir [25]. Buna göre; (2.5.10) yardımıyla;

$$\begin{aligned}
N_J((X,0),(Y,0)) &= -([X,Y],0)+([\varphi X,\varphi Y],(\varphi X\eta(Y)-\varphi Y\eta(X))\frac{d}{dt}) \\
&- (\varphi[\varphi X,Y]+(Y\eta(X))\xi,\eta([\varphi X,Y])\frac{d}{dt}) \\
&- (\varphi[X,\varphi Y]+(X\eta(Y))\xi,\eta([X,\varphi Y])\frac{d}{dt}) \\
&= (N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi,((L_{\varphi X}\eta)Y-(L_{\varphi Y}\eta)X)\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) &= ((-[\varphi X,\xi],(\xi\eta(X))\frac{d}{dt})+(\varphi[X,\xi],\eta[X,\xi])\frac{d}{dt}) \\
&= ((L_\xi\varphi)X,(L_\xi\eta)(X)\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olur. Burada;

$$N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi = N^{(1)}(X,Y) \tag{2.5.13}$$

$$(L_{\varphi X}\eta)Y-(L_{\varphi Y}\eta)X = N^{(2)}(X,Y) \tag{2.5.14}$$

$$(L_\xi\varphi)X = N^{(3)}(X,Y) \tag{2.5.15}$$

$$(L_\xi\eta)X = N^{(4)}(X,Y) \tag{2.5.16}$$

denilecek olursa (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısı normaldir $\Leftrightarrow N^{(1)}=N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$ [25].

Lemma 2.5.1. $N^{(1)}=0$ *ise* $N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$ *dır [25].*

Bu durumda aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.5.5. (M,φ,ξ,η) *hemen hemen kontakt manifoldu normaldir gerek ve yeter şart;*

$$N_\varphi+2d\eta\otimes\xi=0 \tag{2.5.17}$$

olmasıdır [25].

Önerme 2.5.6. *(M,φ,ξ,η) hemen hemen kontakt manifoldu normaldir gerek ve yeter şart;*

$$\varphi(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y-(\nabla_X\eta)(Y)\xi=0 \tag{2.5.18}$$

olmasıdır [37].

Lemma 2.5.2. *Bir (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik manifold için,*

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X) \\ &+ N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) \\ &- 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

eşitliği geçerlidir [25].

Tanım 2.5.7. (M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $\forall p\in M$ için T_pM de ξ ye ortogonal bir X birim vektörü alındığında $\{X,\varphi X\}$, T_pM deki bir düzlem kesitinin bir ortonormal bazı oluyorsa, bu düzlem kesitine φ-kesiti denir [25].

$$K(X,\varphi X)=g(R(X,\varphi X)\varphi X,X) \tag{2.5.20}$$

kesit eğriliğine ise φ-kesit eğriliği denir ve $H(X)$ ile gösterilir [25].

Tanım 2.5.8. (M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt Riemann manifold ve S de M nin Ricci tensörü olsun. a ve b skalar fonksiyonlar olmak üzere; $\forall X,Y\in\chi(M)$ için S;

$$S(X,Y)=a.g(X,Y)+b.\eta(X)\eta(Y) \tag{2.5.21}$$

şartını sağlıyorsa M ye η-Einstein manifold denir [2].

Önerme 2.5.7. *(M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold olmak üzere; M nin herbir noktası etrafındaki herbir lokal komşuluğunda bir*

$$\{X_1,\dots,X_n,X_{1^*}=\varphi X_1,X_{2^*}=\varphi X_2,\dots,X_{n^*}=\varphi X_n,\xi\}$$

formunda ortonormal bir baz bulunabilir [3].

Tanım 2.5.9. Önerme 2.5.7 de verilen $\{X_i,X_{i^*},\xi\}_{i\in 1,\dots,n}$ bazına hemen hemen kontakt yapının φ-bazı denir [3].

2.6 Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 2.6.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt Riemann manifoldu eğer;

$$d\eta = 0; \quad d\Phi = 2\eta \wedge \Phi \tag{2.6.1}$$

şartını sağlıyorsa bu manifolda hemen hemen Kenmotsu manifold denir [3].

Önerme 2.6.1. *Herhangi bir hemen hemen Kenmotsu manifoldun kontakt distribüsyonu D, daima integrallenebilirdir [3].*

Tanım 2.6.2. Herhangi bir hemen hemen Kenmotsu manifold normalse, bu manifolda Kenmotsu manifold denir [3].

Teorem 2.6.1. *Bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontakt Riemann manifoldu Kenmotsu manifolddur $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X \varphi)Y = -\eta(Y)\varphi X - g(X, \varphi Y)\xi \tag{2.6.2}$$

olmasıdır [4].

İspat. $\Rightarrow$): M bir Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $d\eta(X,Y) = 0$ olup (2.1.14) den

$$X\eta(Y) - Y\eta(X) = \eta[X, Y] \tag{2.6.3}$$

olur. Ayrıca; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$d\Phi(X,Y,Z) = 2\eta(X)\Phi(Y,Z) - 2\eta(Y)\Phi(X,Z) + 2\eta(Z)\Phi(X,Y) \tag{2.6.4}$$

olduğu ve M nin normalliği yani; $N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa Lemma 2.5.2 den

$$2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z)$$

elde edilir. Bu durumda (2.5.3) ve (2.6.4) denklemleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 2\eta(X)\Phi(\varphi Y, \varphi Z) - 2\eta(X)\Phi(Y,Z) \\ &+ 2\eta(Y)\Phi(X,Z) - 2\eta(Z)\Phi(X,Y) \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

olur. Temel 2-formun tanımı (2.6.5) te yerine yazılıp (2.5.1), (2.5.3) ve (2.5.6) kullanıldığında;

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= -2\eta(Y)g(\varphi X,Z)-2\eta(Z)g(X,\varphi Y) \\ &= -2\eta(Y)g(\varphi X,Z)-2g(X,\varphi Y)g(\xi,Z) \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

olur. $\forall Z\in\chi(M)$ için (2.6.6) geçerli olduğundan

$$(\nabla_X\varphi)Y=-\eta(Y)\varphi X-g(X,\varphi Y)\xi$$

elde edilir.

$\Leftarrow$): (2.6.2) sağlansın. O halde; (2.6.1) de ki şartların sağlandığını ve M nin normal olduğunu göstermeliyiz. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,Y) &= X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y]) \\ &= Xg(Y,\xi)-Yg(X,\xi)-g([X,Y],\xi) \\ &= g(\nabla_XY,\xi)+g(Y,\nabla_X\xi)-g(\nabla_YX,\xi)-g(X,\nabla_Y\xi)-g([X,Y],\xi) \\ &= g(Y,X-\eta(X)\xi)-g(X,Y-\eta(Y)\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $d\eta=0$ dır. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için;

$$\begin{aligned} X\Phi(Y,Z) &= Xg(Y,\varphi Z) \\ &= g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(Y,\nabla_X\varphi Z) \\ &= g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(Y,(\nabla_X\varphi)Z+\varphi\nabla_XZ) \end{aligned}$$

olur. (2.6.2) den;

$$X\Phi(Y,Z)=g(\nabla_XY,\varphi Z)-g(X,\varphi Z)\eta(Y)-\eta(Z)g(Y,\varphi X)+g(Y,\varphi\nabla_XZ) \tag{2.6.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$Y\Phi(X,Z)=g(\nabla_YX,\varphi Z)-\eta(X)g(Y,\varphi Z)-\eta(Z)g(X,\varphi Y)+g(X,\varphi\nabla_YZ) \tag{2.6.8}$$

ve

$$Z\Phi(X,Y) = g(\nabla_Z X, \varphi Y) - \eta(X)g(Z,\varphi Y) - \eta(Y)g(X,\varphi Z) + g(X,\varphi\nabla_Z Y) \qquad (2.6.9)$$

bulunur. (2.1.5) te bu ifadeler yerine yazıldığında;

$$3d\Phi(X,Y,Z) = 2\eta(X)\Phi(Y,Z) + 2\eta(Y)\Phi(Z,X) + 2\eta(Z)\Phi(X,Y)$$

olduğu görülür. Şimdi de (2.6.2) şartını sağlayan bir hemen hemen kontakt manifoldun normal olduğunu göstermek için Önerme 2.5.6 kullanılırsa;

$$\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_X\eta)(Y)\xi = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_X\eta)(Y)\xi &= \varphi(-\eta(Y)\varphi X - g(X,\varphi Y)\xi) \\
&- (-\eta(Y)\varphi^2 X - g(\varphi X,\varphi Y)\xi) - (g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))\xi \\
&= -\eta(Y)(-X + \eta(X))\xi - g(X,\varphi Y)\varphi\xi + \eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) \\
&+ g(X,Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\xi - g(X,Y)\xi + \eta(X)\eta(Y)\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. O halde M, Kenmotsu manifolddur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 2.6.2. *Bir M Kenmotsu manifoldu için;*

$$\nabla_X\xi = X - \eta(X)\xi \qquad (2.6.10)$$

eşitliği sağlanır [3].

İspat. ξ birim vektör olduğundan,

$$\begin{aligned}
g(\xi,\xi) &= 1 \\
Xg(\xi,\xi) &= 0 \\
2g(\nabla_X\xi,\xi) &= 0
\end{aligned}$$

olur ki

$$g(\nabla_X \xi, \xi) = 0 \tag{2.6.11}$$

elde edilir. (2.6.2) de $Y = \xi$ alınır ve (2.6.11) gözönünde bulundurulursa ispat tamamlanmış olur. $\square$

Örnek 2.6.1. (x,y,z), R^3 teki standart koordinatlar olmak üzere 3-boyutlu

$$M = \{(x,y,z) \in R^3 : (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$

manifoldu gözönünde bulundurulduğunda;

$$e_1 = z\frac{\partial}{\partial x}, \;\; e_2 = z\frac{\partial}{\partial y}, \;\; e_3 = -z\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları M nin herbir noktasında lineer bağımsızdır. Bir g Riemann metriği,

$$g = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

ve η 1-formu $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$\eta(Z) = g(Z, e_3)$$

ve φ, $(1,1)$ tensör alanı ise

$$\varphi(e_1) = -e_2, \;\; \varphi(e_2) = e_1, \;\; \varphi(e_3) = 0$$

olarak tanımlanıp φ ve g nin lineerliği kullanılırsa, $\forall Z, W \in \chi(M)$ için

$$\eta(e_3) = 1, \;\; \varphi^2 Z = -Z + \eta(Z)e_3, \;\; g(\varphi Z, \varphi W) = g(Z,W) - \eta(Z)\eta(W)$$

olduğu görülür. $e_3 = \xi$ seçilirse (φ, ξ, η, g), M üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapı tanımlar.

∇, g metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda;

$$[e_1, e_2] = 0, \;\; [e_1, e_3] = e_1, \;\; [e_2, e_3] = e_2$$

olur. Kozsul formülünden;

$$\nabla_{e_1} e_3 = e_1 \;\; \nabla_{e_1} e_2 = 0 \;\; \nabla_{e_1} e_1 = 0$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = e_2 \ \ \nabla_{e_2} e_2 = 0 \ \ \nabla_{e_2} e_1 = 0$$

$$\nabla_{e_3} e_3 = 0 \ \ \nabla_{e_3} e_2 = 0 \ \ \nabla_{e_3} e_1 = 0$$

olup $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifolddur [38].

Teorem 2.6.2. *F bir Kaehler manifold ve c sıfırdan farklı bir sabit olsun. $f(t) = ce^t$ bir L doğrusu üzerinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda $M = L \times_f F$ warped çarpım uzayı, bir Kenmotsu yapıya sahiptir [2].*

Tersine aşağıdaki yapı teoremi verilebilir.

Teorem 2.6.3. *M bir Kenmotsu manifold olsun. $\forall p \in M$ nin bazı $U(p)$ komşulukları $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_f V$ warped çarpım uzayıyla tanımlanır öyle ki $(-\varepsilon, \varepsilon)$ bir açık aralık, $f(t) = ce^t$ ve V bir Kaehler manifold [2].*

Tanım 2.6.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = A(W) R(X,Y)Z \qquad (2.6.12)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir A 1-formu bulunabiliyorsa M ye φ-rekürrenttir denir [41].

Eğer X, Y, Z, W; ξ ye ortogonal ise M ye lokal φ-rekürrenttir denir [41].

Tanım 2.6.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = 0 \qquad (2.6.13)$$

şartı sağlanıyorsa M ye φ-simetrik denir [42].

Eğer X, Y, Z, W; ξ ye ortogonal ise M ye lokal φ-simetriktir denir [42].

Tanım 2.6.5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M nin Ricci operatörü Q eğer

$$\varphi^2(\nabla_X Q)Y = 0 \qquad (2.6.14)$$

şartı sağlanırsa M ye φ-Ricci simetriktir denir [43].

Eğer X ve Y, ξ ye ortogonal iseler M ye lokal φ-simetriktir denir [43].

Tanım 2.6.6. (M,φ,ξ,η,g) bir Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X S)(\varphi Y,\varphi Z) = 0 \tag{2.6.15}$$

şartını sağlıyorsa M ye Ricci tensörü η-paralel Kenmotsu manifold denir [46].

Tanım 2.6.7. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. M nin Riemann eğrilik tensörü R; $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) &= A(W)\varphi^2(R(X,Y)Z)+B(X)\varphi^2(R(W,Y)Z)\\ &+ B(Y)\varphi^2(R(X,W)Z)+D(Z)\varphi^2(R(X,Y)W)\\ &+ g(R(X,Y)Z,W)\varphi^2(\rho)\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

şartını sağlıyorsa M ye weakly φ-simetrik manifold denir (Burada A,B ve D; aynı anda sıfır olmayan 1-formlar ve $D(Z) = g(Z,\rho)$ dır.) [48].

Tanım 2.6.8. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci operatörü Q; $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\varphi^2[(\nabla_X Q)(Y)] &= A(X)\varphi^2(Q(Y))+B(Y)\varphi^2(Q(X))\\ &+ S(Y,X)\varphi^2(\rho)\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

şartını sağlarsa M ye weakly φ-Ricci simetrik Kenmotsu manifold denir (Burada A ve B; aynı anda sıfır olmayan1-formlar ve $D(Z) = g(Z,\rho)$ dır.) [48].

2.7 α-Kenmotsu Yapılar

Tanım 2.7.1. (M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt Riemann manifold ve α sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta\wedge\Phi \tag{2.7.1}$$

şartını sağlayan M manifolduna hemen hemen α-Kenmotsu manifold denir [7].

Bir normal hemen hemen α-Kenmotsu manifolda da α-Kenmotsu manifold denir [7].

Teorem 2.7.1. *Boyutu ≥ 5 olan bir trans-Sasakian manifold; ya α-Sasaki ya α-Kenmotsu ya da cosimplektiktir [3].*

Teorem 2.7.2. *Bir (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt Riemann manifoldunun α-Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X \varphi)Y = \alpha[-g(X,\varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X] \tag{2.7.2}$$

olmasıdır [3].

İspat. Teorem 2.6.1 deki ile aynı yöntemle yapılabilir. □

Önerme 2.7.1. *Bir (M,φ,ξ,η,g) α-Kenmotsu manifoldu için*

$$\nabla_X \xi = \alpha[X - \eta(X)\xi] \tag{2.7.3}$$

şartı sağlanır [3].

İspat. (2.7.2) de $Y = \xi$ alınarak (2.7.3) elde edilir. □

Önerme 2.7.2. *Bir (M,φ,ξ,η,g) α-Kenmotsu manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

$$\textbf{\textit{i-)}}\quad R(X,Y)\xi = \alpha^2\{Y\eta(X) - X\eta(Y)\} \tag{2.7.4}$$

$$\textbf{\textit{ii-)}}\quad R(\xi,X)Y = \alpha^2\{-g(X,Y)\xi + \eta(Y)X\} \tag{2.7.5}$$

dır [3].

İspat. **i-)** $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= \nabla_X\{\alpha Y - \alpha\eta(Y)\xi\} - \nabla_Y\{\alpha X - \alpha\eta(X)\xi\} \\
&- \alpha[X,Y] + \alpha\eta[X,Y]\xi \\
&= \alpha\nabla_X Y - \alpha\nabla_X(\eta(Y))\xi - \alpha\eta(Y)\nabla_X\xi \\
&- \alpha\nabla_Y X + \alpha\nabla_Y(\eta(X))\xi + \alpha\eta(X)\nabla_Y\xi \\
&- \alpha\{\nabla_X Y - \nabla_Y X\} + \alpha\eta(\nabla_X Y)\xi - \alpha\eta(\nabla_Y X)\xi \\
&= \alpha\nabla_X Y - \alpha\{(\nabla_X\eta)Y + \eta(\nabla_X Y)\}\xi - \alpha\eta(Y)\{\alpha(X - \eta(X)\xi)\} \\
&- \alpha\nabla_Y X + \alpha\{(\nabla_Y\eta)X + \eta(\nabla_Y X)\}\xi + \alpha\eta(X)\{\alpha(Y - \eta(Y)\xi)\} \\
&- \alpha\nabla_X Y + \alpha\nabla_Y X + \alpha\eta(\nabla_X Y)\xi - \alpha\eta(\nabla_Y X)\xi \\
&= \alpha^2\{Y\eta(X) - X\eta(Y)\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii-) Benzer hesaplamalarla görülebilir. □

Önerme 2.7.3. *Bir* (M,φ,ξ,η,g) α*-Kenmotsu manifoldunda* $\forall X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$(\nabla_X\eta)Y = \alpha\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\} \tag{2.7.6}$$

dır [3].

İspat.

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X\eta)Y &= \nabla_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X(g(Y,\xi)) - g(\nabla_X Y,\xi) \\
&= g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi) - g(\nabla_X Y,\xi) \\
&= g(Y,\alpha X - \alpha\eta(X)\xi) \\
&= \alpha\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\}
\end{aligned}
$$

olur. □

Önerme 2.7.4. *Bir* $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ α*-Kenmotsu manifoldunun Ricci tensörü S için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{i-)}} \quad S(X,\xi) &= -2n\alpha^2\eta(X) && (2.7.7) \\ \textbf{\textit{ii-)}} \quad S(\varphi X,\varphi Y) &= S(X,Y)+2n\alpha^2\eta(X)\eta(Y) && (2.7.8) \end{aligned}$$

İspat. i-)

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i,X)\xi,e_i) \\ &= \alpha^2\sum_{i=1}^{2n+1} g(X\eta(e_i)-e_i\eta(X),e_i) \\ &= \alpha^2\{\eta(X)-(2n+1)\eta(X)\} \\ &= -2n\alpha^2\eta(X) \end{aligned}$$

olur.

ii-) $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S(\varphi X,\varphi Y) &= g(Q\varphi X,\varphi Y) \\ &= g(\varphi QX,\varphi Y) \\ &= -g(QX,\varphi^2 Y) \\ &= -g(QX,-Y+\eta(Y)\xi) \\ &= g(QX,Y)-\eta(Y)S(X,\xi) \\ &= S(X,Y)+2n\alpha^2\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 2.7.5. *Bir* (M,φ,ξ,η,g) α*-Kenmotsu manifoldu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{i-)}} \quad \eta(R(X,Y)Z) &= \alpha^2[\eta(Y)g(X,Z)-\eta(X)g(Y,Z)] && (2.7.9) \\ \textbf{\textit{ii-)}} \quad (\nabla_Z R)(X,Y)\xi &= \alpha^2[X\eta(\nabla_Z Y)-Y\eta(\nabla_Z X)] \\ &+ \alpha^3\eta(Z)[Y\eta(X)-X\eta(Y)]-\alpha R(X,Y)Z && (2.7.10) \end{aligned}$$

İspat. i-)

$$\begin{aligned}\eta(R(X,Y)Z) &= g(R(X,Y)Z,\xi)\\ &= -g(R(X,Y)\xi,Z)\\ &= g(\alpha^2(X\eta(Y)-Y\eta(X)),Z)\\ &= \alpha^2[\eta(Y)g(X,Z)-\eta(X)g(Y,Z)]\end{aligned}$$

ii-) $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_Z R)(X,Y)\xi &= \nabla_Z R(X,Y)\xi - R(\nabla_Z X,Y)\xi - R(X,\nabla_Z Y)\xi\\ &- R(X,Y)\nabla_Z\xi\\ &= \alpha^2\nabla_Z\{Y\eta(X)-X\eta(Y)\}\\ &- \alpha^2\{Y\eta(\nabla_Z X)-\eta(Y)\nabla_Z X\}\\ &- \alpha^2\{\eta(X)\nabla_Z Y - X\eta(\nabla_Z Y)\}\\ &- \alpha R(X,Y)Z+\alpha^3\eta(Z)\{Y\eta(X)-X\eta(Y)\}\end{aligned}$$

olur. İşlemler devam ettirilip (2.7.6) ve lineerlik özellikleri kullanılırsa ispat tamamlanır.

□

Örnek 2.7.1. (x,y,z), R^3 te ki standart koordinatlar olmak üzere, 3-boyutlu bir

$$M=\{(x,y,z)\in R^3\}$$

manifoldunu gözönüne alalım. $\alpha\neq 0$ bir sabit; c_1 ve c_2, $c_1^2+c_2^2\neq 0$ şartını sağlayan sabitler olmak üzere, f_1 ve f_2

$$f_1(z)=c_2.e^{-\alpha z},\quad f_2(z)=c_1.e^{-\alpha z}$$

ile tanımlansın.

$$e_1=f_1(z)\frac{\partial}{\partial x}+f_2(z)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$e_2=-f_2(z)\frac{\partial}{\partial x}+f_1(z)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$e_3=\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları M nin herbir noktasında lineer bağımsızdır. g, Riemann metriği;

$$g(e_1,e_1) = g(e_2,e_2) = g(e_3,e_3) = 1$$

$$g(e_1,e_2) = g(e_1,e_3) = g(e_2,e_3) = 0$$

ve tensörel olarak da

$$g = (f_1^2 + f_2^2)^{-1}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz$$

ile tanımlansın. η 1-formu $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, e_3)$$

ile φ, $(1,1)$ tensör alanı

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = -e_1, \quad \varphi(e_3) = 0$$

ile tanımlansın. φ ve g nin lineerliği kullanıldığında, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)e_3, \quad \eta(e_3) = 1, \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olur. ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere,

$$[e_1, e_3] = \alpha e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_2, \quad [e_1, e_2] = 0$$

elde edilir. Kozsul formülü kullanıldığında,

$$\nabla_{e_1} e_1 = -\alpha e_3 \quad \nabla_{e_1} e_2 = -e_3 \quad \nabla_{e_1} e_3 = \alpha e_1$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -e_3 \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\alpha e_3 \quad \nabla_{e_2} e_3 = \alpha e_2$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = 0 \qquad \nabla_{e_3} e_2 = 0 \qquad \nabla_{e_3} e_3 = 0$$

bulunur. Buradan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir α-Kenmotsu manifold olduğu görülür [7].

2.8 Nearly Kenmotsu Manifold

Tanım 2.8.1. (N,J,G) bir hemen hemen Hermityen manifold ve $c \in (0,\infty)$ için $f(t) = e^{ct}$ olsun. $R \times_f N$ warped çarpımı üzerindeki g metriği $X',Y' \in \chi(N)$, $X = (a\frac{d}{dt},X')$ ve $Y = (b\frac{d}{dt},Y')$ olmak üzere

$$g(X,Y) = ab + e^{2ct}G(X',Y')$$

ile verilsin. Eğer

$$\varphi(X) = (0,JX'), \quad \xi = (\frac{d}{dt},0), \quad \eta = dt$$

denilirse (φ,ξ,η,g), $R \times_f N$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen kontakt Riemann yapı oluşturur. Bir N hemen hemen Hermityen manifoldu N üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇^N ve temel 2-formu Φ^N ile, bunun yanısıra $R \times_f N$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve temel 2-formu da Φ ile gösterilirse

$$\Phi = e^{2ct}\Phi^N$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\Phi)(Y,Z) &= e^{2ct}(\nabla^N_{X'}\Phi^N)(Y',Z') + \eta(Z)\Phi(X,Y) + \eta(Y)\Phi(Z,X) \\
d\Phi(X,Y,Z) &= e^{2ct}d\Phi^N(X',Y',Z') + 2\eta \wedge \Phi(X,Y,Z) \qquad (2.8.1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer N hemen hemen Kaehler manifold ise (2.8.1) den $R \times_f N$ bir hemen hemen Kenmotsu manifolddur. Bunun yanısıra eğer N bir nearly Kaehler manifold ise yani; $\forall X',Y' \in \chi(N)$ için

$$(\nabla^N_{X'}\Phi^N)(X',Y') = 0$$

ise $R \times_f N$ üzerinde

$$(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(X)\Phi(Y,X), \quad d\eta = 0 \qquad (2.8.2)$$

elde edilir. Tersi de doğrudur, yani; $R \times_f N$ üzerinde (2.8.2) sağlanırsa N hemen hemen hermityen manifoldu Nearly Kaehlerdir.

(2.8.2) şartını sağlayan bir hemen hemen kontakt Riemann manifolda nearly Kenmotsu manifold denir [3].

Önerme 2.8.1. *Bir* (M,φ,ξ,η,g) *hemen hemen kontakt Riemann manifoldu, bir nearly Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart* $\forall X \in \chi(M)$ *için*

$$(\nabla_X\varphi)X = -\eta(X)\varphi X, \quad d\eta = 0 \tag{2.8.3}$$

olmasıdır [3].

İspat. Temel 2-form Φ nin tanımından

$$(\nabla_X\Phi)(X,Y) = g(X,(\nabla_X\varphi)Y) = -g((\nabla_X\varphi)X,Y)$$

olup (2.8.2) eşitliği de göz önünde bulundurulursa (2.8.3)'e ulaşılır. □

Önerme 2.8.2. *Herhangi bir Kenmotsu manifold, nearly Kenmotsu manifolddur [3].*

Önerme 2.8.3. *Bir* (M,φ,ξ,η,g) *hemen hemen kontakt Riemann manifoldu, bir nearly Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart* $\forall X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$(\nabla_X\varphi)Y + (\nabla_Y\varphi)X = -\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y \tag{2.8.4}$$

olmasıdır [14].

İspat. (2.8.3) nolu eşitlikte X yerine $X+Y$ yazıldığında (2.8.4) elde edilir. □

Teorem 2.8.1. (M,φ,ξ,η,g) *bir nearly Kenmotsu manifold ise*

$$\nabla_X\xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.8.5}$$

olur [14].

Teorem 2.8.2. *Bir normal nearly Kenmotsu manifold, Kenmotsu manifolddur [39].*

Önerme 2.8.4. (M,φ,ξ,η,g) *bir nearly Kenmotsu manifold olsun. M nin eğrilik tensörü R için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [14]:*

$$\textbf{\textit{i-)}} \quad R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{2.8.6}$$

$$\textbf{\textit{ii-)}} \quad R(\xi,X)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \tag{2.8.7}$$

$$\textbf{\textit{iii-)}} \quad \eta(R(X,Y)Z) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X) \tag{2.8.8}$$

$$\textbf{\textit{iv-)}} \quad (\nabla_W R)(X,Y)\xi = g(X,W)Y - g(Y,W)X - R(X,Y)W \tag{2.8.9}$$

İspat. Basit hesaplamalarla görülebilir. □

Önerme 2.8.5. *$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir nearly Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [14]:*

$$\textbf{\textit{i-)}}\quad S(X,\xi) = -2n\eta(X) \tag{2.8.10}$$

$$\textbf{\textit{ii-)}}\quad S(\varphi X,\varphi Y) = S(X,Y)+2n\eta(X)\eta(Y) \tag{2.8.11}$$

2.9 Parakenmotsu Yapılar

Tanım 2.9.1. M, m-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer M üzerinde;

$$\varphi^2 = I-\eta\otimes\xi,\quad \eta(\xi)=1,\quad \eta\circ\varphi=0,\quad \varphi\xi=0,\quad rank\varphi = m-1 \tag{2.9.1}$$

şartını sağlayan bir φ $(1,1)$ tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-formu varsa M ye hemen hemen parakontakt manifold denir [3].

Tanım 2.9.2. (M^m,φ,ξ,η) bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.9.2}$$

ise (φ,ξ,η,g) ye M üzerinde bir hemen hemen parakontakt metrik yapı denir [3].

Tanım 2.9.3. Bir hemen hemen parakontakt Riemann manifoldu eğer, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(X,\varphi Y)\xi-\eta(Y)\varphi X \tag{2.9.3}$$

şartını sağlarsa bu manifolda bir parakenmotsu manifold denir [3].

Önerme 2.9.1. *(M,φ,ξ,η,g) bir parakenmotsu manifold olsun. M için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$\textbf{\textit{i-)}}\quad (\nabla_X\eta)Y = (\nabla_Y\eta)X \tag{2.9.4}$$

$$\textbf{\textit{ii-)}}\quad \nabla_X\xi = X-\eta(X)\xi \tag{2.9.5}$$

$$\textbf{\textit{iii-)}}\quad (\nabla_X\eta)Y = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.9.6}$$

$$\begin{aligned}\textbf{\textit{iv-)}}\quad (\nabla_X\nabla_Y\eta)Z &= [\eta(X)\eta(Z)-g(X,Z)]\eta(Y)\\ &+ [\eta(X)\eta(Y)-g(X,Y)]\eta(Z)\end{aligned} \tag{2.9.7}$$

İspat. Basit hesaplamalarla görülebilir. □

Önerme 2.9.2. *$(M^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir parakenmotsu manifold olsun. M nin eğrilik tensörü R için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{i-)}} \quad R(X,Y)\xi &= \eta(X)Y - \eta(Y)X && (2.9.8)\\
\textbf{\textit{ii-)}} \quad \eta(R(X,Y)Z) &= g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X) && (2.9.9)\\
\textbf{\textit{iii-)}} \quad (\nabla_W R)(X,Y)\xi &= g(X,W)Y - g(Y,W)X - R(X,Y)W && (2.9.10)
\end{aligned}
$$

İspat. R, η ve kovaryant türevi tanımı kullanılarak hesaplamalar yapılabilir. □

Önerme 2.9.3. *$(M^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir parakenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{i-)}} \quad S(X,\xi) &= (1-m)\eta(X) && (2.9.11)\\
\textbf{\textit{ii-)}} \quad S(\varphi X, \varphi Y) &= S(X,Y) + (m-1)\eta(X)\eta(Y) && (2.9.12)
\end{aligned}
$$

İspat. Tanım 2.1.13 teki eşitlikler yardımıyla görülebilir. □

2.10 Lorentz Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 2.10.1. M^{2n+1}, g Pseudo-Riemann metriği ile birlikte bir Lorentz manifold olsun. ∇, g metriğiyle birleşen Levi-Civita konneksiyonunu göstersin. $\chi(M)$ de $\{e_1, e_2, ..., e_{2n+1}\}$ lokal baz olsun. Yani; $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2n$ ve $g(e_{2n+1}, e_{2n+1}) = -1$ olsun. Bu durumda; $e_1, ..., e_{2n}$ space-like vektör alanları, $\xi = e_{2n+1}$ ise time-like vektör alanıdır. $\{w^1, ..., w^{2n+1}\}$ de $\{e_1, e_2, ..., e_{2n+1}\}$ in dual çatısını göstermek üzere $\eta = w^{2n+1}$ denirse, aşağıdaki

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \Phi(X,Y) = g(X, \varphi Y) && (2.10.1)\\
(\nabla_X \varphi)Y &= -\eta(Y)\varphi(X) + g(X, \varphi Y)\xi && (2.10.2)\\
\nabla_X \xi &= -X + \eta(X)\xi && (2.10.3)\\
d\eta &= 0, \quad d\Phi = -2\eta \wedge \Phi && (2.10.4)
\end{aligned}
$$

şartlarını sağlayan $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna Lorentz Kenmotsu manifold denir[3]. M için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{2.10.5}$$

dir [40].

Önerme 2.10.1. *$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentz Kenmotsu manifold olsun. M nin R eğrilik tensörü için aşağıdaki aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$\textbf{\textit{i-)}} \quad R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{2.10.6}$$

$$\textbf{\textit{ii-)}} \quad \eta(R(X,Y)Z) = \eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z) \tag{2.10.7}$$

$$\textbf{\textit{iii-)}} \quad (\nabla_Z R)(X,Y)\xi = Xg(Y,Z) - Yg(X,Z) + R(X,Y)Z \tag{2.10.8}$$

İspat. i-)

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= \nabla_X[-Y + \eta(Y)\xi] - \nabla_Y[-X + \eta(X)\xi] + [X,Y] - \eta[X,Y]\xi \end{aligned}$$

olup lineerlik, 1-formun kovaryant türevi ve (2.10.3) kullanıldığında ispat tamamlanır.
ii-) $\eta(R(X,Y)Z) = g(R(X,Y)Z, \xi) = -g(R(X,Y)\xi, Z)$ olup (2.10.6) kullanılırsa ispat tamamlanır.
iii-) $(\nabla_Z R)(X,Y)\xi = \nabla_Z R(X,Y)\xi - R(\nabla_Z X, Y)\xi - R(X, \nabla_Z Y)\xi - R(X,Y)\nabla_Z \xi$ olur. Bu ifade de (2.10.3), (2.10.6) nolu eşitlikler ve bir 1-formun kovaryant türevi tanımı kullanılırsa ispat tamamlanır. □

Önerme 2.10.2. *$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve S de M nin Ricci tensörü olsun. S için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3]:*

$$\textbf{\textit{i-)}} \quad S(X,\xi) = -2n\eta(X) \tag{2.10.9}$$

$$\textbf{\textit{ii-)}} \quad S(\varphi X, \varphi Y) = S(X,Y) + 2n\eta(X)\eta(Y) \tag{2.10.10}$$

İspat. i-)

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i,e_i)g(R(e_i,X)\xi,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} g(\eta(e_i)X-\eta(X)e_i,e_i)-g(R(\xi,X)\xi,\xi) \\ &= -2n\eta(X) \end{aligned}$$

ii-)

$$\begin{aligned} S(\varphi X,\varphi Y) &= g(Q\varphi X,\varphi Y) \\ &= g(\varphi QX,\varphi Y) \\ &= -g(QX,\varphi^2 Y) \\ &= -g(QX,-Y+\eta(Y)\xi) \\ &= S(X,Y)+2n\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir ki ispat böylece tamamlanmış olur. □

Önerme 2.10.3. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ *bir Lorentz Kenmotsu manifold olsun. M için,*

$$(\nabla_X\eta)Y=-g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \tag{2.10.11}$$

dir [3].

Tanım 2.10.2. (M,g) bir semi-Riemann manifold olsun. $\forall p\in M$ için T_pM nin iki boyutlu lineer alt uzayına düzlem kesiti denir. E bir düzlem kesiti olsun. Eğer sıfırdan farklı $\forall V\in E$ için $g(V,U)\neq 0$ olacak şekilde bir $U\in E$ varsa E ye non-dejeneredir denir. Bu tanım $g_p|_E$ nin nondejenere olmasıyla denktir. $K(p,E)$, nondejenere E düzleminin kesit eğriliğini göstermek üzere;

$$K(p,E)=\frac{g(R(W,V)V,W)}{g(V,V)g(W,W)-g(V,W)^2} \tag{2.10.12}$$

dir.

Tüm nondejenere düzlemler için aynı kesit eğriliğine sahip pseudo-Riemann manifoldlara sabit eğriliklidir denir. (M,g); c sabit eğriliğine sahip bir pseudo-Riemann manifold ise

$$R(X,Y)Z=c\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\} \tag{2.10.13}$$

dir [49].

2.11 Bazı Özel Altmanifold Çeşitleri

Tanım 2.11.1. $(\bar{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\forall X \in T_xM$ için φX ve T_xM arasındaki açı $\theta(X)$ ile gösterilsin. $\theta(X)$ e X in Wirtinger açısı denir. Eğer θ, $x \in M$ ve $X \in T_xM - \{\xi_x\}$ in seçiminden bağımsız ise M ye slant altmanifold denir. Slant immersiyonun wirtinger açısı θ ya slant immersiyonun slant açısı denir. Eğer $\theta = 0$ ise M ye invaryant altmanifold, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M ye anti-invaryant altmanifold denir. Eğer bir M slant altmanifoldu ne invaryant ne de anti-invaryant ise bu manifolda proper slant altmanifold denir [52].

Tanım 2.11.2. $(\bar{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M üzerindeki iki ortogonal $D_\perp$ ve D_θ distribüsyonu için
i- $TM = D_\perp \oplus D_\theta \oplus <\xi>$ olarak yazılabiliyor,
ii- $D_\perp$ anti-invaryant yani; $\varphi D_\perp \subseteq TM^\perp$,
iii- D_θ ve φD_θ arasındaki açı θ olmak üzere $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ iken D_θ slant distribüsyon,
şartları sağlanıyorsa M ye $\bar{M}$ nin hemi-slant altmanifoldu denir [57].

Tanım 2.11.3. $(\bar{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kontakt manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer TM,

$$TM = D_T \oplus D_\theta \oplus <\xi>$$

şeklinde yazılabiliyorsa M ye $\bar{M}$ nin semi-slant altmanifoldu denir. Burada D_T invaryant distribüsyon yani; $\varphi(D_T) = D_T$ ve D_θ slant (slant açı $\theta \neq 0$). Buradan,

$$TM^\perp = FD_\theta \oplus \mu$$

şeklinde yazılabilir. Burada, μ, FD_θ nın ortogonal komplemanı olup $TM^\perp$ in invaryant altdemetidir [53].

Tanım 2.11.4. $\bar{M}$ bir Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in TM^\perp$ olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. D ve $D^\perp$ TM deki distribüsyonları göstermek üzere, eğer;

i-) $TM = D \oplus D^{\perp}$

ii-) $\varphi(TM^{\perp}) \subset TM$

olacak şekilde bir D invaryant ve $D^{\perp}$ anti-invaryant altmanifoldu varsa M ye $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu denir [17].

Tanım 2.11.5. $\bar{M}$, bir m-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir n-boyutlu altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ üzerinde M boyunca tanımlı bir vektör alanı Z olmak üzere

$$Z = Z_T + Z^N \tag{2.11.1}$$

olarak yazılabilir. Burada $Z_T \in \chi(M)$ ve $Z^N \in \chi^{\perp}(M)$ dir.

Bu durumda M deki her X tanjant vektör alanı için

$$\bar{\nabla}_X Z = (\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X) + (\nabla^{\perp}_X Z^N + h(X, Z_T)) = tan\bar{\nabla}_X Z + nor\bar{\nabla}_X Z \tag{2.11.2}$$

şeklindedir. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} I_Z(X,Y) &= g(\bar{\nabla}_X Z, \bar{\nabla}_Y Z) \\ h_Z(X,Y) &= g(\nabla^{\perp}_X Z^N + h(X,Z_T), \nabla^{\perp}_Y Z^N + h(Y,Z_T)) \\ q_Z(X,Y) &= g(\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X, \nabla_Y Z_T - A_{Z^N} Y) \end{aligned} \tag{2.11.3}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ tipinde simetrik tensör alanları verilsin.

c, M de bir eğri ve c nin tanjant vektör alanı T olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{K}^2_{z\backslash a} &= I_Z(T,T) \\ K^2_{z\backslash g} &= q_Z(T,T) \\ K^2_{z\backslash n} &= h_Z(T,T) \end{aligned} \tag{2.11.4}$$

olsun. (2.11.4) teki $\bar{K}^2_{z\backslash a}$, $K^2_{z\backslash g}$, $K^2_{z\backslash n}$ ifadelerine sırasıyla Z-mutlak eğrilik, Z-geodezik eğrilik ve Z-normal eğrilik denir [8].

Buna göre M deki bir c eğrisi için aşağıdaki ifadeler söylenebilir [8]:

c eğrisi Z-mutlak geodeziktir $\Leftrightarrow \bar{K}^2_{z\backslash a} = 0$,

c eğrisi Z-geodeziktir $\Leftrightarrow$ c nin herhangi bir noktasında $K^2_{z\backslash g} = 0$ dır.

Böylece, bir mutlak geodezik eğride $I_Z(T,T) = 0$ ve Z-geodezik eğride ise $q_Z(T,T) = 0$ eşitlikleri sağlanır.

Eğer $tan\bar{\nabla}_X Z$, X ile aynı yönlü ise M de bir X vektör alanına, M de Z-quasi asli eğrilik vektör alanı denir [8].

M de $h_Z = 0$ ise M ye $\bar{M}$ nin total Z-geodezik altmanifoldu denir. Total Z-geodezik bir M altmanifoldu için

$$\bar{\nabla}_X Z = tan\bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X \tag{2.11.5}$$

yazılır. Bu nedenle, M total Z-geodezik altmanifoldundaki bir c eğrisi,

$$Z - mutlak \quad geodeziktir \Leftrightarrow Z - geodeziktir$$

özelliği ile karakterize edilir [8].

Total Z-geodezik bir altmanifold için

$$\begin{aligned} I_Z(T,T) &= g(\bar{\nabla}_T Z, \bar{\nabla}_T Z) = 0 \\ &= \|\bar{\nabla}_T Z\|^2 = 0 \\ &= \bar{\nabla}_T Z = 0 \end{aligned}$$

olup Z, c boyunca paraleldir. Benzer durum Z-geodeziklik için de geçerlidir [10].

Teorem 2.11.1. *M total geodezik altmanifoldu, total Z-geodeziktir $\Leftrightarrow$ Z nin normal bileşeni, M nin normal demetinde paraleldir [8].*

Tanım 2.11.6. Bir $Z \in \chi(M,\bar{M})$ nin bir $p \in M$ noktasındaki Z-ortalama eğriliği

$$H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_Z(E_i,E_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N + h(E_i,Z_T), \nabla^{\perp}_{E_i} Z^N + h(E_i,Z_T)) \tag{2.11.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer Z-ortalama eğriliği M nin her noktasında sıfıra özdeş ise M altmanifolduna Z-minimaldir denir [8].

Teorem 2.11.2. *$\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda;*

$$M \quad total \quad Z-geodeziktir \Leftrightarrow Z-minimaldir$$

önermesi doğrudur [8].

Sonuç 2.11.1. $\bar{M}$ Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin total geodezik bir altmanifoldu olsun. Buna göre, M, Z-minimaldir $\Leftrightarrow$ Z nin normal bileşeni, normal demette paraleldir [8].

Tanım 2.11.7. $\bar{M}$ bir Riemann manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda,

$$Q_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_Z(E_i, E_i)$$

ile tanımlanan Q_Z ye M nin Z-ortalama geodezik eğriliği denir.

$$L_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_Z(E_i, E_i)$$

ile tanımlanan L_Z ye M nin ortalama mutlak eğriliği denir [8].

Teorem 2.11.3. *$\bar{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu M olsun. M, Z-minimaldir gerek ve yeter şart M nin Z-ortalama mutlak eğriliği, Z-ortalama geodezik eğriliğine eşittir [8].*

Teorem 2.11.4. *$\bar{M}$ Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin total umbilik altmanifoldu olsun. $Z \in \chi(M, \bar{M})$ nin normal bileşeni normal demette paralel olsun. Bu durumda, M, Z-minimaldir $\Leftrightarrow$ M minimaldir [8].*

Tanım 2.11.8. $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ üzerinde M boyunca tanımlı bir vektör alanı Z için

$$tan\bar{\nabla}_X Z = \lambda X$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir λ reel sayısı bulunabiliyorsa M ye Z-umbilik altmanifold denir [8].

3. α-KENMOTSU MANİFOLDLAR

3.1 α-Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Bazı Eğrilik Özellikleri

Bu kısımda α-Kenmotsu manifoldların bazı şartlar altında eğrilik özellikleri incelenmiş ve birtakım sınıflandırmalara ulaşılmıştır.

Lemma 3.1.1. *M, η-Einstein bir α-Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S; $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y) \tag{3.1.1}$$

şartını sağlasın. Bu durumda a ve b sabit fonksiyonlardır. Ayrıca $a+b=-2n\alpha^2$ dir.

İspat. (3.1.1) de Y yerine ξ alınırsa;

$$S(X,\xi) = a\eta(X) + b\eta(X)$$

olur. (2.7.7) nolu denklem kullanıldığında;

$$-2n\alpha^2\eta(X) = (a+b)\eta(X)$$

olup

$$a+b = -2n\alpha^2$$

elde edilir. Şimdi, a ve b nin sabit fonksiyonlar olduğunu gösterelim.

M nin bir p noktasının bir U komşuluğundaki ortonormal baz $\{e_i\}_{i=1,\ldots,2n+1}$ olsun. $(3.1.1)$ de $X=Y=e_i$ alıp, $1 \leq i \leq 2n+1$ için toplam alındığında;

$$r = a.(2n+1) + b \tag{3.1.2}$$

olur. Benzer şekilde (3.1.1) de $X=Y=\xi$ alınırsa

$$S(\xi,\xi) = a+b$$

elde edilir. (2.7.7) nolu denklem kullanılırsa

$$-2n\alpha^2 = a+b \tag{3.1.3}$$

bulunur. (3.1.2) ve (3.1.3) den

$$a = \frac{r}{2n} + \alpha^2, \quad b = -\alpha^2(2n+1) - \frac{r}{2n} \tag{3.1.4}$$

olur. Bu durumda bir η-Einstein α-Kenmotsu manifoldunun Ricci tensörü S; $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X,Y) = \{\frac{r}{2n} + \alpha^2\}g(X,Y) + \{-\alpha^2(2n+1) - \frac{r}{2n}\}\eta(X)\eta(Y) \tag{3.1.5}$$

ile verilir. (3.1.5) in bir $Z \in \chi(M)$ boyunca kovaryant türevi alınır ve (2.7.6) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z S)(X,Y) &= \frac{dr(Z)}{2n}g(X,Y) - \frac{dr(Z)}{2n}\{(\nabla_Z\eta)(X)\eta(Y) + \eta(X)(\nabla_Z\eta)(Y)\} \\
(\nabla_Z S)(X,Y) &= \frac{dr(Z)}{2n}g(X,Y) - \frac{dr(Z)}{2n}\{g(X,Z)\eta(Y) - \eta(X)\eta(Z)\eta(Y) \\
&+ g(Y,Z)\eta(X) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

bulunur. (3.1.6) da $X = Y = e_i$ alıp, i üzerinden toplam alındığında $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$dr(Z) = 0 \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Öyleyse r sabittir. Bu durumda (3.1.4) ten a ve b nin de sabit olduğu görülür.

□

Teorem 3.1.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir φ-rekürrent α-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda M, η-Einstein'dır.*

İspat. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ α-Kenmotsu manifoldu φ-rekürrent olsun. Yani; $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2[(\nabla_W R)(X,Y)Z] = A(W)R(X,Y)Z$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir A 1-formu mevcut bulunsun. Bu durumda (2.5.1) den

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta[(\nabla_W R)(X,Y)Z]\xi = A(W)R(X,Y)Z \tag{3.1.8}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı, bir $U \in \chi(M)$ ile metrik çarpıma tabi tutulursa;

$$A(W)g(R(X,Y)Z,U) = -g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\eta(U) \tag{3.1.9}$$

olur. M nin herbir p noktasındaki herhangi bir U komşuluğundaki ortonormal baz $\{e_i\}_{1,\ldots,2n+1}$ olsun. (3.1.9) da $X = U = e_i$ yazılır ve $1 \leq i \leq 2n+1$ için toplam alınırsa,

$$A(W)S(Y,Z) = -(\nabla_W S)(Y,Z) + \eta[(\nabla_W R)(\xi,Y)Z]$$

elde edilir. Bu son denklemde Z yerine ξ alınırsa;

$$\begin{aligned}
A(W)S(Y,\xi) &= -(\nabla_W S)(Y,\xi) + \eta[(\nabla_W R)(\xi,Y)\xi] \\
-A(W)\alpha^2 2n\eta(Y) &= -\nabla_W S(Y,\xi) + S(\nabla_W Y,\xi) + S(Y,\nabla_W \xi) \\
&+ \eta[\nabla_W R(\xi,Y)\xi - R(\nabla_W \xi,Y)\xi - R(\xi,Y)\nabla_W \xi \\
&- R(\xi,\nabla_W Y)\xi]
\end{aligned}$$

bulunur. (2.7.3), (2.7.4) ve (2.7.7) kullanılıp işlemler sürdürülürse $\forall Y,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
-2n\alpha^2 A(W)\eta(Y) &= (2n+1)\alpha^3 g(W,Y) + \alpha S(Y,W) + \alpha^2\eta(\nabla_W Y) \\
&- \alpha^3\eta(W)\eta(Y)
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

olur. (3.1.10) da Y yerine φY, W yerine φW alınırsa (2.5.3) ten

$$O = (2n+1)\alpha^3 g(\varphi W,\varphi Y) + \alpha S(\varphi Y,\varphi W) \tag{3.1.11}$$

elde edilir. (2.5.7) ve (2.7.8), (3.1.11) de kullanılırsa

$$O = (2n+1)\alpha^3[g(W,Y) - \eta(W)\eta(Y)] + \alpha[S(Y,W) + 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(W)]$$

bulunur. Buradan

$$S(Y,W) = -(2n+1)\alpha^2 g(Y,W) + \alpha^2\eta(Y)\eta(W)$$

olur. Bu da M nin η-Einstein olması demektir. □

Teorem 3.1.2. (M,φ,ξ,η,g) *bir* α*-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M,* φ*-Ricci simetrik ise M bir Einstein manifolddur.*

İspat. (M,φ,ξ,η,g) bir α-Kenmotsu manifoldu, φ-Ricci simetrik olsun. Yani; $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2[(\nabla_X Q)Y] = 0$$

olsun. Öyleyse;

$$-(\nabla_X Q)Y + \eta((\nabla_X Q)Y)\xi = 0$$

olur. Bu durumda

$$-\nabla_X QY + Q\nabla_X Y + \eta(\nabla_X QY)\xi - \eta(Q\nabla_X Y)\xi = 0$$

olacaktır. Bu son ifadenin her iki tarafı $\xi \in \chi(M)$ ile metrik çarpıma tabi tutulursa

$$-g(\nabla_X QY, \xi) + g(Q\nabla_X Y, \xi) + \eta(\nabla_X QY) - \eta(Q\nabla_X Y) = 0$$

$$S(\nabla_X Y, \xi) - \eta(Q\nabla_X Y) = 0$$

$$-2n\alpha^2 \eta(\nabla_X Y) = \eta(Q\nabla_X Y)$$

$$g(-2n\alpha^2 \nabla_X Y, \xi) = g(Q\nabla_X Y, \xi)$$

olup, bu durumda $Q = -2n\alpha^2$ ve $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$QX = -2n\alpha^2 X$$

olur. Öyleyse, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= g(QX,Y) \\ &= g(-2n\alpha^2 X, Y) \\ &= -2n\alpha^2 g(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda M bir Einstein manifolddur. □

Lemma 3.1.2. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M, lokal φ-simetrik ise M nin skaler eğriliği sabittir.*

İspat. M lokal φ-simetrik α-Kenmotsu manifold olsun. Yani; ξ ye ortogonal $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2[(\nabla_W R)(X,Y)Z] = 0$$

olsun. Bu durumda;

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi = 0 \tag{3.1.12}$$

olur. M nin bir p noktasındaki ortonormal baz $\{e_i\}_{i=1,\ldots,2n+1}$ olmak üzere, (3.1.12) de Y yerine e_i alıp, her iki taraf e_i ile metrik çarpıma tabi tutulursa;

$$-g((\nabla_W R)(X,e_i)Z,e_i)+\eta((\nabla_W R)(X,e_i)Z)\eta(e_i)=0$$

olur. Bu son eşitlikte $1\leq i\leq 2n+1$ için toplam alındığında,

$$(\nabla_W S)(X,Z)+\eta((\nabla_W R)(X,\xi)Z)=0$$

elde edilir. Bu durumda;

$$(\nabla_W S)(X,Z)+\eta[\nabla_W R(X,\xi)Z-R(\nabla_W X,\xi)Z-R(X,\nabla_W\xi)Z-R(X,\xi)\nabla_W Z]=0$$

olur. (2.7.3) ve (2.7.5) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(\nabla_W S)(X,Z) &+ \alpha^2 g(X,Z)\eta(\nabla_W\xi)-\alpha^2\eta(Z)\eta(\nabla_W X)+\alpha^2 g(\nabla_W X,Z)\\ &- \alpha^2\eta(Z)\eta(\nabla_W X)-\alpha\eta(R(X,W)Z)+\alpha\eta(R(X,W)Z)-\alpha\eta(W)\eta(R(X,\xi)Z)\\ &- \alpha\eta(W)\eta(R(X,\xi)Z)-\eta(R(X,\xi)\nabla_W Z)=0\end{aligned}$$

bulunur. İşlemler sürdürülürse

$$\begin{aligned}(\nabla_W S)(X,Z) &= -\alpha^2 g(\nabla_W X,Z)+\alpha^2 g(X,\nabla_W Z)+\alpha^3\eta(W)g(X,Z)\\ &- \alpha^3\eta(X)\eta(W)\eta(Z)-\alpha^2\eta(X)\eta(\nabla_W Z)\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

elde edilir. M, lokal φ-simetrik olduğundan

$$\eta(X)=\eta(Y)=\eta(W)=\eta(Z)=0$$

dır. O halde (3.1.13) ifadesi

$$(\nabla_W S)(X,Z)=-\alpha^2 g(\nabla_W X,Z)+\alpha^2 g(X,\nabla_W Z)\tag{3.1.14}$$

haline dönüşür. (3.1.14) te $X=Z=e_i$ alıp i üzerinden toplam alınırsa

$$dr(W)=0$$

bulunur. Öyleyse lokal φ-simetrik bir α-Kenmotsu manifoldun skaler eğriliği sabittir. □

Teorem 3.1.3. *M lokal φ-simetrik bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M, quasi-konformal flat ise M, Einstein manifolddur.*

İspat. M bir α-Kenmotsu manifold olsun. M nin $(1,3)$ tipindeki quasi-konformal eğrilik tensörü; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için a ve b sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{C}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &- \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b][g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned}$$

olduğundan, M quasi-konformal flat ise $\overline{C} = 0$ dır.

$$\begin{aligned}aR(X,Y)Z &+ b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &- \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b][g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] = 0 \qquad (3.1.15)\end{aligned}$$

denkleminde X ve Z yerine ξ alır, her iki taraf $W \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}S(Y,W) &= \frac{1}{b}\{a\alpha^2 + 2nb\alpha^2 + \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n} + 2b)\}g(Y,W) \\ &+ \frac{1}{b}\{-a\alpha^2 - 4n\alpha^2 b - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n} + 2b)\}\eta(Y)\eta(W) \qquad (3.1.16)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer M lokal φ-simetrik ise Lemma 3.1.2 den r sabit ve M lokal φ-simetrik olduğundan X,Y,Z,W; ξ ye ortogonal olup $\eta(Y) = \eta(W) = 0$ olacağından (3.1.16) denklemi

$$S(Y,W) = \lambda g(Y,W) \quad (\lambda = \frac{1}{b}\{a\alpha^2 + 2nb\alpha^2 + \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n} + 2b)\})$$

haline dönüşür. Bu durumda M Einstein manifolddur. □

Teorem 3.1.4. *M, lokal φ-simetrik bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M, concircular flat ise M sabit eğriliklidir ve eğriliği $\frac{r}{2n(2n+1)}$ ile verilir.*

İspat. Tanım 2.1.27 deki $\overline{Z}$ concircular eğrilik tensörü sıfıra eşit olacağından $\forall X,Y,W \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)W = \frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,W)X - g(X,W)Y\}$$

olur. Lemma 3.1.2 den r sabit olduğundan ve sabit eğriliklerle ilgili (2.1.7) nolu eşitlikten ispat tamamlanmış olur. □

3.2 α-Kenmotsu Manifoldların Bazı Altmanifoldları

$\bar{M}$ Riemann manifoldunun M altmanifoldu üzerinde, M nin normal ve teğet uzayları gözönüne alınarak, genelleştirilmiş Gauss denklemi, şekil operatörü, ikinci temel form, asli eğrilikler, umbilik altmanifold, total geodezik altmanifold gibi kavramlar tanımlanmış ve bunlarla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

N.S. Agashe ve M.R. Chafle[8] " M nin geometrisi oluşturulurken normal vektör alanları yerine herhangi bir vektör alınıp M için bazı geometrik sonuçlar elde edilebilir mi? " sorusuna cevap aramış ve M boyunca tanımlı $\chi(\bar{M})$ de ki bir vektör alanı için literatürde bilinen altmanifold geometrisinin bir benzeri olarak bazı sonuçlar elde etmişlerdir. E. Kılıç, B. Şahin, R. Güneş[9] ise bir Lorentz manifoldun bir Semi-Riemann hiperyüzeyi üzerinde bir $\bar{M}$-vektör alanıyla birleştirilmiş eğrileri ele alarak bazı ilginç sonuçlara ulaşmışlardır.

Biz bu bölümde sözü geçen makalelerdeki $\bar{M}$-vektör alanı yerine bir α-Kenmotsu manifold üzerindeki ξ-karakteristik vektör alanını ele alarak bazı sonuçlar elde ettik.

Tezin bu kısmında $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold, M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olarak ele alınacaktır. $p \in M$ ve ξ_p ye karşılık gelen eğri de c olsun. $\eta(\xi) = 1$ olduğundan ξ, birim teğet vektör alanıdır ve

$$c'(p) = \xi_p$$

dir. Bu durumda

$$\xi = \xi_T + \xi_N \tag{3.2.1}$$

olarak yazılabilir.

Herhangi bir $X \in \chi(M)$ için (3.2.1) in X'e göre kovaryant türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X \xi_T + \bar{\nabla}_X \xi_N \\ &= (\nabla_X \xi_T + h(X, \xi_T)) + (-A_{\xi_N} X + \nabla^{\perp}_X \xi_N) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

olur. (2.7.3) nolu denklemden

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\xi_T &= \alpha(X-\eta(X)\xi) \\ &= \alpha(X-\eta(X)\xi_T-\eta(X)\xi_N) \qquad (3.2.3)\end{aligned}$$

olup (3.2.2) ve (3.2.3) nolu denklemler gözönünde bulundurulup teğet ve normal bileşenlerine göre ayrıştırıldığında;

$$tan\bar{\nabla}_X\xi = \nabla_X\xi_T - A_{\xi_N}X = \alpha(X-\eta(X)\xi_T) \qquad (3.2.4)$$

$$nor\bar{\nabla}_X\xi = h(X,\xi_T)+\nabla^{\perp}_X\xi_N = -\alpha\eta(X)\xi_N \qquad (3.2.5)$$

olur. Bu durumda (2.11.3) nolu denklemde tanımlanan $(0,2)$ tipindeki I, h ve q tensörleri ξ ye göre hesaplanacak olursa,

$$\begin{aligned}I_\xi(X,Y) &= g(\bar{\nabla}_X\xi,\bar{\nabla}_Y\xi) \\ &= \alpha^2\{g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\} \\ &= \alpha^2 g(\varphi X,\varphi Y) \qquad (3.2.6) \\ h_\xi(X,Y) &= g(-\alpha\eta(X)\xi_N,-\alpha\eta(Y)\xi_N) \\ &= \alpha^2\eta(X)\eta(Y)g(\xi_N,\xi_N) \qquad (3.2.7) \\ q_\xi(X,Y) &= g(\alpha X-\alpha\eta(X)\xi_T,\alpha Y-\alpha\eta(Y)\xi_T) \\ &= \alpha^2\{g(X,Y)-2\eta(X)\eta(Y)+\eta(X)\eta(Y)g(\xi_T,\xi_T)\} \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu bölümde öncelikle ξ teğette alınarak, sonrasında da ξ normalde alınarak (3.2.1)-(3.2.8) nolu eşitlikler gözönünde bulundurulup birtakım geometrik sonuçlara ulaşılmıştır.

Öncelikle ξ nin teğette olma durumunu inceleyelim.

Teorem 3.2.1. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ için ξ-umbilik bir M altmanifoldu yoktur.*

İspat. (3.2.4) nolu eşitlik gözönünde bulundurulduğunda,

$$\alpha\eta(X)\xi_T \neq 0$$

olduğundan $\bar{M}$ nin bir ξ-umbilik altmanifoldu yoktur. □

Sonuç 3.2.1. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir altmanifoldu ise M, total ξ-geodeziktir.

İspat. (3.2.7) den $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $h_\xi(X,Y) = 0$ olur. Öyleyse M, $\bar{M}$ nin total ξ-geodezik altmanifoldudur. □

Sonuç 3.2.2. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\bar{M}$ nin mutlak geodezik ve ξ-geodezik altmanifoldu yoktur.

İspat. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Teorem 3.2.1'den M total ξ-geodeziktir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} I_\xi(X,Y) &= g(\bar{\nabla}_X\xi, \bar{\nabla}_Y\xi) \\ &= g(tan\bar{\nabla}_X\xi + nor\bar{\nabla}_X\xi, tan\bar{\nabla}_Y\xi + nor\bar{\nabla}_Y\xi) \\ &= g(tan\bar{\nabla}_X\xi, tan\bar{\nabla}_Y\xi) + g(nor\bar{\nabla}_X\xi, nor\bar{\nabla}_Y\xi) \\ &= q_\xi(X,Y) + h_\xi(X,Y) \end{aligned}$$

olur. M total ξ-geodezik olduğundan

$$I_\xi(X,Y) = q_\xi(X,Y)$$

olur. $\xi \in \chi(M)$ için $I_\xi \neq 0$ olduğundan $q_\xi \neq 0$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.2. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir altmanifoldu ise M, ξ-minimaldir.*

İspat. Bir $p \in M$ noktasında bir $\bar{M}$ vektör alanı Z nin ortalama eğriliği,

$$H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_Z(E_i, E_i)$$

ile tanımlanır. Bu eşitlik bir α-Kenmotsu manifold üzerinde $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı için,

$$H_\xi = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{2n+1} h_\xi(E_i, E_i)$$

olup Teorem 3.2.1'den $H_\xi = 0$ olarak bulunur. O halde, M ξ-minimaldir. □

Sonuç 3.2.3. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir altmanifoldu ise aşağıdaki şartlar denktir:
i-) M, total ξ-geodeziktir.
ii-) M, ξ-minimaldir.

İspat. Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2'den açıkça görülür □

Teorem 3.2.3. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde total umbilik altmanifoldu ise M minimaldir.*

İspat. Agashe ve Chafle [8] de n-boyutlu bir Riemann manifoldunun total umbilik bir altmanifoldu için

$$H_Z = \frac{1}{n}|H|^2 \sum_{i=1}^{n} g(E_i, Z_T)^2 \tag{3.2.9}$$

olarak yazılabileceğini gösterdiler. Buna göre; $\sum_{i=1}^{n} g(E_i, Z_T)^2 \neq 0$ olduğundan "$H_Z = 0$ dır gerek ve yeter şart $H = 0$ dır" denilebilir. O halde Teorem 3.2.2 den $H_\xi = 0$ olduğundan M nin ortalama eğriliği $H = 0$ olarak bulunur. □

Sonuç 3.2.4. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M total umbilik ise M total geodeziktir.

İspat. "Bir M total umbilik altmanifoldun total geodezik altmanifold olması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır" teoremi ve Teorem 3.2.3 gözönünde bulundurulursa bu sonuca ulaşılır. □

Şimdi $\xi \in \chi(M, M^{\perp})$ durumunu inceleyelim.

Teorem 3.2.4. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekildeki bir altmanifoldu ise M, $\bar{M}$ nin ξ-umbilik altmanifoldudur.*

İspat. (3.2.6) nolu denklem ve $\xi_T = 0$ olduğu gözönünde bulundurulursa $\forall X \in \chi(M)$ için

$$tan\bar{\nabla}_X \xi = \alpha X$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.5. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekildeki bir altmanifoldu ise M, total ξ-geodeziktir.*

İspat. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için (3.2.7) nolu denklem gözönünde bulundurulursa $h_{\xi}(X,Y) = 0$ elde edilir Buradan M, total ξ-geodeziktir. □

Teorem 3.2.6. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekildeki bir altmanifoldu ise M, ξ-minimaldir.*

İspat. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekildeki bir altmanifoldu için

$$H_{\xi} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} h_{\xi}(E_i, E_i)$$

olup Teorem 3.2.5'den $H_{\xi} = 0$ bulunur. O halde M, ξ-minimaldir. □

Teorem 3.2.7. *$\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekilde total umbilik altmanifoldu ise M minimaldir.*

İspat. Teorem 3.2.6 gözönünde bulundurulursa Teorem 3.2.3 teki ile benzer şekilde ispat edilebilir. □

Sonuç 3.2.5. $\bar{M}$ bir α-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M total umbiliktir $\Leftrightarrow$ M total geodeziktir.

İspat. $\Rightarrow$:) M total umbilik altmanifold olsun. Bu durumda;

$$h(X,Y) = g(X,Y)H$$

ve Teorem 3.2.7 den $H = 0$ olduğundan $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$h(X,Y) = 0$$

olur.

$\Leftarrow$:) Açıktır. □

4. NEARLY KENMOTSU MANİFOLDLAR

4.1 Nearly Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Bazı Eğrilik Özellikleri

Bu kısımda nearly Kenmotsu manifoldların eğrilik özellikleri bazı şartlar altında incelenmiş ve birtakım sınıflandırmalar yapılmıştır.

Teorem 4.1.1. *M bir nearly Kenmotsu manifold olsun. M genelleştirilmiş rekürrent bir nearly Kenmotsu manifold ise M sabit -1 eğrilikli bir manifolddur.*

İspat. Kabul edelim ki M nearly Kenmotsu manifoldu, genelleştirilmiş rekürrent olsun. Yani; ψ ve β sıfırdan farklı 1-formlar olmak üzere $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = \psi(X)R(Y,Z)W + \beta(X)\{g(Z,W)Y - g(Y,W)Z\} \tag{4.1.1}$$

olsun. (4.1.1) de $Y = W = \xi$ alınırsa

$$(\nabla_X R)(\xi,Z)\xi = \psi(X)R(\xi,Z)\xi + \beta(X)\{\eta(Z)\xi - Z\}$$

olur. (2.8.9) ve (2.8.6) yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(X)\{Z - \eta(Z)\xi\} + \beta(X)\{\eta(Z)\xi - Z\} \\ 0 &= [\psi(X) - \beta(X)]\{Z - \eta(Z)\xi\} \end{aligned}$$

bulunur. M, nearly Kenmotsu manifold olduğundan $Z - \eta(Z)\xi \neq 0$ dır. Dolayısıyla;

$$\psi(X) - \beta(X) = 0$$

olur. Buradan, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\psi(X) = \beta(X) \tag{4.1.2}$$

dir.

Şimdi (4.1.1) de W yerine ξ alınıp, (2.8.6), (2.8.9) ve (4.1.2) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y,Z)\xi = \psi(X)R(Y,Z)\xi \quad &+ \quad \psi(X)\{\eta(Z)Y - \eta(Y)Z\} \\ g(Y,X)Z - g(Z,X)Y - R(Y,Z)X \quad &= \quad \psi(X)[\eta(Y)Z - \eta(Z)Y] + \psi(X)\eta(Z)Y - \psi(X)\eta(Y)Z \end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$R(Y,Z)X = -\{g(Z,X)Y - g(Y,X)Z\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Lemma 4.1.1. *M, Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifold ise M nin skaler eğriliği sabittir.*

İspat. (M,φ,ξ,η,g), Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifold olsun. Yani; M nearly Kenmotsu manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X S)(\varphi Y,\varphi Z) = 0$$

şartı sağlansın. Bu durumda;

$$\nabla_X S(\varphi Y,\varphi Z) - S(\nabla_X \varphi Y,\varphi Z) - S(\varphi Y,\nabla_X \varphi Z) = 0$$

olup, (2.8.11) ve bir tensör alanının kovaryant türev tanımından;

$$\begin{aligned}\nabla_X S(Y,Z) + 2n\nabla_X(\eta(Y))\eta(Z) + 2n\eta(Y)(\nabla_X(\eta(Z)))\\ -S((\nabla_X\varphi)Y + \varphi\nabla_X Y,\varphi Z) - S(\varphi Y,(\nabla_X\varphi)Z + \varphi\nabla_X Z) = 0\end{aligned}$$

dır. İşlemler devam ettirildiğinde

$$\begin{aligned}\nabla_X S(Y,Z) + 2n\{(\nabla_X\eta)Y + \eta(\nabla_X Y)\}\eta(Z) + 2n\eta(Y)\{(\nabla_X\eta)Z + \eta(\nabla_X Z)\}\\ -S((\nabla_X\varphi)Y + \varphi\nabla_X Y,\varphi Z) - S(\varphi Y,(\nabla_X\varphi)Z + \varphi\nabla_X Z) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}\nabla_X S(Y,Z) + 2ng(X,Y)\eta(Z) - 2n\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) + 2n\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)\\ +2n\eta(Y)g(X,Z) - 2n\eta(Y)\eta(X)\eta(Z) + 2n\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\\ -S((\nabla_X\varphi)Y,\varphi Z) - S(\nabla_X Y,Z) - 2n\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)\\ -S(\varphi Y,(\nabla_X\varphi)Z) - S(Y,\nabla_X Z) - 2n\eta(Y)\eta(\nabla_X Z) = 0\end{aligned}$$

bulunur. M nin bir p noktasındaki ortonormal bazı $\{e_i\}$ olmak üzere $Y=Z=e_i$ yazılıp $1,...,2n+1$ için toplam alınırsa $\forall X \in \chi(M)$ için

$$dr(X)=0 \tag{4.1.3}$$

elde edilir ki bu da r nin sabit olduğunu gösterir. □

Teorem 4.1.2. *(M,φ,ξ,η,g), Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifold olsun. Eğer M,*

$$R(\xi,X)\overline{P}=0$$

şartını sağlarsa M bir η-Einstein manifolddur.

İspat. Kabul edelim ki; (M,φ,ξ,η,g), Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifold olsun ve M nin Riemann eğrilik tensörü R, pseudo-projektif eğrilik tensörü $\overline{P}$ olmak üzere

$$R(\xi,X)\overline{P}=0 \tag{4.1.4}$$

şartını sağlasın. $\forall X,Y,U,V,W \in \chi(M)$ için

$$(R(X,Y)\overline{P})(U,V)W=0 \tag{4.1.5}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)\overline{P}(U,V)W &- \overline{P}(R(X,Y)U,V)W-\overline{P}(U,R(X,Y)V)W \\ -\overline{P}(U,V)R(X,Y)W &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. (4.1.4) şartını sağlatmak için, (4.1.6) da X yerine ξ yazılırsa ve (2.8.7) denklemi kullanılırsa,

$$-g(Y,\overline{P}(U,V)W)\xi-\eta(\overline{P}(U,V)W)Y-\overline{P}(-g(Y,U)\xi+\eta(U)Y,V)W$$

$$-\overline{P}(U,-g(Y,V)\xi+\eta(V)Y)W-\overline{P}(U,V)[-g(Y,W)\xi+\eta(W)Y]=0$$

bulunur. (2.1.16) nolu denklemden $\overline{P}$ nin tanımı yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}
&- \; ag(Y,R(U,V)W)\xi - bS(V,W)g(Y,U)\xi + bS(U,W)g(Y,V)\xi \\
&+ \; \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(V,W)g(Y,U)\xi - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(U,W)g(Y,V)\xi \\
&+ \; a\eta(R(U,V)W)Y + S(V,W)\eta(U)Y - bS(U,W)\eta(V)Y \\
&- \; \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)\{g(V,W)\eta(U) - g(U,W)\eta(V)\} \\
&+ \; g(Y,U)\overline{P}(\xi,V)W - \eta(U)\overline{P}(Y,W) + g(Y,V)\overline{P}(U,\xi)W \\
&- \; \eta(V)\overline{P}(U,Y)W + g(Y,W)\overline{P}(U,V)\xi - \eta(W)\overline{P}(U,V)Y = 0
\end{aligned}$$

olur. (2.8.5) - (2.8.11) denklemlerinden ve pseudo-projektif eğrilik tensörü $\overline{P}$ nin tanımından yararlanılırsa ;

$$\begin{aligned}
&- \; ag(Y,R(U,V)W)\xi - bS(V,W)g(Y,U)\xi + bS(U,W)g(Y,V)\xi \\
&+ \; \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(V,W)g(Y,U)\xi - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(U,W)g(Y,V)\xi \\
&+ \; a\eta(R(U,V)W)Y + bS(V,W)\eta(U)Y - bS(U,W)\eta(V)Y \\
&- \; \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)\{g(V,W)\eta(U) - g(U,W)\eta(V)\} + ag(Y,U)R(\xi,V)W \\
&+ \; bg(Y,U)\{S(V,W)\xi - S(\xi,W)V\} - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)\{g(V,W)\xi - \eta(W)V\}g(Y,U) \\
&- \; a\eta(U)R(Y,V)W - b\eta(U)S(V,W)Y + b\eta(U)S(Y,W)V + \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)\eta(U)g(V,W)Y \\
&- \; \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(Y,W)\eta(U)V - ag(Y,V)[-g(U,W)\xi + \eta(W)U] \\
&- \; bg(Y,V)S(U,W)\xi + bg(Y,V)S(\xi,W)U - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(Y,V)\{g(U,W)\xi - \eta(W)U\} \\
&- \; a\eta(Y)R(U,Y)W - b\eta(Y)S(Y,W)U + b\eta(Y)S(U,W)Y \\
&+ \; \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)g(Y,W)\{\eta(V)U - \eta(U)V\} - a\eta(W)R(U,V)Y - b\eta(W)S(V,Y)U \\
&+ \; b\eta(W)S(U,Y)V - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)\eta(W)g(V,Y)U + \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b)\eta(W)g(U,Y)V \\
&= \; 0 \qquad (4.1.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.7) de her iki taraf $\xi \in \chi(M)$ ile metrik çarpıma tabi tutulur ve $1 \leq i \leq 2n+1$ için $U = Y = e_i$ alınıp i üzerinden toplama bakılırsa; $\forall V, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
S(V,W) &= -(2n+1)g(V,W) \\
&+ \frac{1}{a}\{2n + 4n^2 b + \frac{4nr}{2n+1}(\frac{a}{2n}+b) - 2nb + a\}\eta(V)\eta(W) \qquad (4.1.8)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade Lemma 4.1.1 ile birlikte yorumlandığında Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifoldunun η-Einstein bir manifold olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.1.3. *M, Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifold olsun. M concircular flat ise M sabit eğrilikli olup eğriliği $\frac{r}{2n(2n+1)}$ dir.*

İspat. Bir M^{2n+1} Riemann manifoldunun concircular eğrilik tensörünün $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\overline{Z}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

ile verildiği ve M nin concircular flat olduğu göz önünde bulundurulursa $\overline{Z} = 0$ olur. Yani;

$$R(X,Y)Z = \frac{r}{2n(2n+1)}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

olup M, Ricci tensörü η-paralel olan bir nearly Kenmotsu manifold olduğundan Lemma 4.1.1 ve sabit eğrilikli manifoldların eğrilikleriyle ilgili (2.1.7) nolu eşitlik düşünüldüğünde M nin sabit eğrilikli ve eğriliğinin $\frac{r}{2n(2n+1)}$ olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.1.4. *M bir nearly Kenmotsu manifold olsun. Eğer M nin weyl-projektif eğrilik tensörü irrotational ise M, projektif flattır.*

İspat. Bir M^{2n+1} Riemann manifoldunun weyl-projektif eğrilik tensörü;

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}\{S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\}$$

olup, $\forall U,X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} rotP &= (\nabla_U P)(X,Y)Z + (\nabla_X P)(U,Y)Z \\ &+ (\nabla_Y P)(X,U)Z - (\nabla_Z P)(X,Y)U \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

ile verilir.

M bir nearly Kenmotsu manifold ve M nin weyl-projektif eğrilik tensörü irrotational olsun. Yani;

$$rotP = 0$$

olsun. 2. Bianchi özdeşliği göz önünde bulundurulduğunda (4.1.9) nolu eşitlik;

$$rotP = -(\nabla_Z P)(X,Y)U \tag{4.1.10}$$

haline dönüşecektir. $rotP = 0$ kabul edildiğinden

$$(\nabla_Z P)(X,Y)U = 0$$

olur. Öyleyse;

$$\nabla_Z P(X,Y)U - P(\nabla_Z X,Y)U - P(X,\nabla_Z Y)U - P(X,Y)\nabla_Z U = 0$$

olup P nin tanımı göz önünde bulundurulduğunda;

$$\begin{aligned}
\nabla_Z R(X,Y)U &- \frac{1}{2n}\{[\nabla_Z S(Y,U)]X - [\nabla_Z S(X,U)]Y\} \\
-R(\nabla_Z X,Y)U &+ \frac{1}{2n}\{S(Y,U)\nabla_Z X - S(\nabla_Z X,U)Y\} \\
-R(X,\nabla_Z Y)U &+ \frac{1}{2n}\{S(\nabla_Z Y,U)X - S(X,U)\nabla_Z Y\} \\
-R(X,Y)\nabla_Z U &+ \frac{1}{2n}\{S(Y,\nabla_Z U)X - S(X,\nabla_Z U)Y\} = 0
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. (4.1.11) da U yerine ξ yazılır ve (2.8.5)-(2.8.11) den ilgili denklemler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(X,Z)Y &- g(Y,Z)X - R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}\{-2n[(\nabla_Z\eta)Y + \eta(\nabla_Z Y)]X \\
+2n[(\nabla_Z\eta)X &+ \eta(\nabla_Z X)]Y - 2n\eta(Y)\nabla_Z X - 2n\eta(\nabla_Z X)Y + 2n\eta(\nabla_Z Y)X \\
-2n\eta(X)\nabla_Z Y &+ S(Y,Z)X + 2n\eta(Z)\eta(Y)X - S(X,Z)Y + 2n\eta(Z)\eta(X)Y\} = 0
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{2n}\{S(X,Z)Y - S(Y,Z)X\} \tag{4.1.12}$$

bulunur. Bu ise M nin projektif-flat olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 4.1.5. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ *genelleştirilmiş ricci-rekürrent nearly Kenmotsu manifold olsun. Yani M nearly Kenmotsu manifoldu* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için* ψ *ve* β 1*-formlar olmak üzere*

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \psi(X)S(Y,Z) + 2n\beta(X)g(Y,Z)$$

şartını sağlasın. Bu durumda

i-) *$\beta = \psi$ ise M bir Einstein manifolddur.*

ii-) *$\eta = \beta - \psi$ ise M bir η-Einstein manifolddur.*

İspat. M bir genelleştirilmiş ricci-rekürrent nearly Kenmotsu manifold olsun. Yani; M nearly Kenmotsu manifoldu için (2.1.15) şartı sağlansın. Bu durumda; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X S(Y,Z) - S(\nabla_X Y,Z) - S(Y,\nabla_X Z) = \psi(X)S(Y,Z) + 2n\beta(X)g(Y,Z)$$

olur. Bu son eşitlikte Z yerine ξ alınıp işlemler sürdürüldüğünde;

$$-2n\nabla_X(\eta(Y)) + 2n\eta(\nabla_X Y) - S(Y,X) - 2n\eta(X)\eta(Y) = -2n\psi(X)\eta(Y) + 2n\beta(X)\eta(Y)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &- \quad 2n[(\nabla_X\eta)Y + \eta(\nabla_X Y)] + 2n\eta(\nabla_X Y) - S(Y,X) - 2n\eta(X)\eta(Y) \\ &= \quad -2n\psi(X)\eta(Y) + 2n\beta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla;

$$S(Y,X) = -2ng(X,Y) - 2n\eta(Y)[\beta(X) - \psi(X)] \qquad (4.1.13)$$

dir.

i-) (4.1.13) denkleminde $\beta = \psi$ için M bir Einstein manifold olur.

ii-) $\beta(X) - \psi(X) = \eta(X)$ olması durumunda ise (4.1.12) denklemi

$$S(X,Y) = -2ng(X,Y) - 2n\eta(X)\eta(Y)$$

haline dönüşür. Bu ise M nin bir η-Einstein manifold olduğunu gösterir. □

4.2 Nearly Kenmotsu Manifoldların Bazı Altmanifoldları

Tezin bu kısmında bir nearly Kenmotsu manifoldunun bir hemi-slant altmanifoldu üzerinde bulunan $D^{\perp}$ ve D_{θ} distribüsyonlarının integral altmanifoldlarının M de total geodezik olma şartları incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. *$\bar{M}$ bir nearly Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin hemi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda, $D^{\perp}$ integrallenebilirdir ve $D^{\perp}$ in integral manifoldları M de total geodeziktir.*

İspat. $\forall X,Y \in D^{\perp}$ için (2.8.4) denklemi

$$(\overline{\nabla}_X \varphi)Y + (\overline{\nabla}_Y \varphi)X = 0$$

haline dönüşür. O halde;

$$\overline{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_Y \varphi X - \varphi \overline{\nabla}_Y X = 0$$

$$\overline{\nabla}_X PY + \overline{\nabla}_X FY - \varphi \nabla_X Y - \varphi h(X,Y) + \overline{\nabla}_Y PX + \overline{\nabla}_Y FX - \varphi \nabla_Y X - \varphi h(Y,X) = 0$$

olur. Bu son denklemde Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılır ve bu denklem teğet ve normal bileşenlerine göre ayrıştırılırsa

$$(\nabla_X P)Y + (\nabla_Y P)X = A_{FY}X + A_{FX}Y + 2th(X,Y) \tag{4.2.1}$$

olur.

$\Rightarrow)$: $D^{\perp}$ integrallenebilir ve $D^{\perp}$ in integral manifoldu M de total geodezik olsun. $\forall X,Y \in D^{\perp}$ için $PY = 0$ ve $\nabla_X Y \in D^{\perp}$ olduğundan (4.2.1) nolu denklem

$$A_{FY}X + A_{FX}Y + 2th(X,Y) = 0 \tag{4.2.2}$$

haline dönüşür. Bunun yanısıra $D^{\perp}$ integrallenebilir olduğundan $\forall X,Y \in D^{\perp}$ için

$$A_{FY}X = A_{FX}Y \tag{4.2.3}$$

dir [12]. Bu durumda $D^{\perp}$in integral manifoldu M de total geodezik ise

$$A_{FX}Y = -th(X,Y) \tag{4.2.4}$$

elde edilir.

$\Leftarrow)$: $\forall X,Y \in D^{\perp}$ için $A_{FX}Y = -th(X,Y)$ olsun.

$$A_{FX}Y = -th(X,Y) = -th(Y,X) = A_{FY}X \tag{4.2.5}$$

olduğundan $D^{\perp}$ integrallenebilirdir. Bunun yanısıra (4.2.1) nolu denklemden $\forall X,Y \in D^{\perp}$ olduğundan

$$P(\nabla_X Y + \nabla_Y X) = 0 \tag{4.2.6}$$

elde edilir. O halde $\nabla_X Y + \nabla_Y X \in D^{\perp}$ tir. $D^{\perp}$ integrallenebilir olduğundan $\nabla_X Y - \nabla_Y X \in D^{\perp}$ olup $\forall X,Y \in D^{\perp}$ için $\nabla_X Y \in D^{\perp}$ tir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.2.2. *$\bar{M}$ bir nearly Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin hemi-slant altmanifoldu ve D_θ integrallenebilir olsun. Bu durumda D_θ nın integral manifoldu M de total geodeziktir $\Leftrightarrow -h(X,PY) - h(Y,PX) + 2nh(X,Y) \in FD_\theta$ olmasıdır.*

İspat. $\Rightarrow)$: D_θ nın integral manifoldu M de total geodezik olsun. $\forall X,Y \in D_\theta$ için

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X \varphi)Y &= \overline{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \overline{\nabla}_X Y \\ (\overline{\nabla}_Y \varphi)X &= \overline{\nabla}_Y \varphi X - \varphi \overline{\nabla}_Y X\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olup bu iki eşitlik taraf tarafa toplanır ve (2.8.4) kullanılırsa

$$\overline{\nabla}_X FY - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y - th(X,Y) - nh(X,Y) + \overline{\nabla}_Y PX + \overline{\nabla}_Y FX - \varphi\nabla_Y X - \varphi h(Y,X) = 0$$

elde edilir. Bu denklemde Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılır ve denklem teğet ve normal bileşenlerine göre ayrıştırılırsa normal kısmı

$$\nabla_X FY - F\nabla_X Y + \nabla_Y FX - F\nabla_Y X = -h(X,PY) - h(Y,PX) + 2nh(X,Y)$$

olur. Öyleyse $-h(X,PY) - h(Y,PX) + 2nh(X,Y) \in FD_\theta$ elde edilir.
$\Leftarrow)$: $-h(X,PY) - h(Y,PX) + 2nh(X,Y) \in FD_\theta$ olsun. Bu durumda $\nabla_X FY - F\nabla_X Y + \nabla_Y FX - F\nabla_Y X \in FD_\theta$ dır. Bu ise ancak D_θ nın integral manifoldunun M de total geodezik olması ile mümkündür. □

5. PARA-KENMOTSU MANİFOLDLAR

5.1 Para-Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Bazı Eğrilik Özellikleri

Bu kısımda para-kenmotsu manifoldların bazı şartlar altında eğrilik özellikleri incelenmiş ve birtakım sınıflandırmalara ulaşılmıştır.

Teorem 5.1.1. $(M^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir para-kenmotsu manifold olsun. Eğer M,* η*-Einstein ise yani, (2.5.21) şartı sağlanıyorsa a ve b sabittir ve*

$$a + b = -(m-1)$$

dir.

İspat. $(M^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ η-Einstein bir para-kenmotsu manifold olsun. Yani M için:

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

şartı sağlansın. Burada $X = Y = e_i$ alınıp $1 \leq i \leq m$ için toplama bakılırsa,

$$\sum_{i=1}^{m} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{m} \{ag(e_i, e_i) + b\eta(e_i)\eta(e_i)\}$$

olur. Buradan

$$r = a.m + b \tag{5.1.1}$$

elde edilir. Diğer yandan $X = Y = \xi$ alınırsa;

$$S(\xi, \xi) = a.g(\xi, \xi) + b\eta(\xi)\eta(\xi)$$

bulunur. Öyleyse;

$$-(m-1) = a + b \tag{5.1.2}$$

olur. (5.1.1) ve (5.1.2) den

$$a = \frac{r}{m-1} + 1, \quad b = -m - \frac{r}{m-1}$$

elde edilir. O halde, η-Einstein bir para-kenmotsu manifoldun Ricci tensörü

$$S(X,Y) = (\frac{r}{m-1}+1)g(X,Y) + (-m - \frac{r}{m-1})\eta(X)\eta(Y) \tag{5.1.3}$$

şeklindedir. (5.1.3) ün bir $Z \in \chi(M)$ boyunca kovaryant türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z S)(X,Y) &= \frac{dr(Z)}{m-1}g(X,Y) - \frac{dr(Z)}{m-1}\eta(X)\eta(Y) \\
&+ \{(\nabla_Z\eta)(X)\eta(Y) + (\nabla_Z\eta)(Y)\eta(X)\}(-m - \frac{r}{m-1}) \\
&= (-m - \frac{r}{m-1})\{g(X,Z)\eta(Y) + g(Y,Z)\eta(X) - 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\} \\
&+ \frac{dr(Z)}{m-1}\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\}
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

olur. (5.1.4) te $X = Y = e_i$ alınıp $1 \leq i \leq m$ için toplama bakılırsa $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$dr(Z) = 0$$

olur ki, bu da r nin sabit olduğunu gösterir. Öyleyse a ve b de sabittir. □

Teorem 5.1.2. *Ricci tensörü η-paralel olan bir para-kenmotsu manifold, bir η-Einstein manifold olur.*

İspat. M, Ricci tensörü η-paralel olan bir para-kenmotsu manifold olsun. Bu durumda;

$$(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) = \nabla_X S(\varphi Y, \varphi Z) - S(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z)$$

olduğundan;

$$\nabla_X S(\varphi Y, \varphi Z) = S(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) + S(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) \tag{5.1.5}$$

olacaktır. $S(\varphi Y, \varphi Z) = S(Y,Z) + (m-1)\eta(Y)\eta(Z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\nabla_X\{S(\varphi Y, \varphi Z)\} &= \nabla_X S(Y,Z) + (m-1)\{(\nabla_X\eta)Y\eta(Z) + (\nabla_X\eta)Z\eta(Y)\} \\
&= \nabla_X S(Y,Z) + (m-1)\{g(X,Y)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y) \\
&- 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\}
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

ve benzer şekilde;

$$\begin{aligned} S(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) &= -S(X,Z)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) + S(\nabla_X Y, Z) \\ &+ (m-1)\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

ve

$$\begin{aligned} S(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) &= -S(X,Y)\eta(Z) + \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) + S(\nabla_X Z, Y) \\ &+ (m-1)\eta(\nabla_X Z)\eta(Y) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

bulunur. (5.1.6) ve (5.1.8) nolu denklemler, (5.1.5) e uygulandığında $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(Y,Z) &= -\eta(Y)S(X,Z) - \eta(Z)S(X,Y) - (m-1)(\nabla_X \eta)(Y)\eta(Z) \\ &+ (m-1)\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) - (m-1)(\nabla_X \eta)(Z)\eta(Y) \\ &+ (m-1)\eta(\nabla_X Z)\eta(Y) + 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

olur. (5.1.9) da Z yerine ξ alınıp işlem yapıldığında

$$S(X,Y) = (\frac{3m-1}{2})\eta(X)\eta(Y) - (\frac{m-1}{2})g(X,Y) + (\frac{m-1}{2})\nabla_X(\eta(Y)) \tag{5.1.10}$$

bulunur. (5.1.10) da X yerine φX, Y yerine φY yazılırsa;

$$S(\varphi X, \varphi Y) = -(\frac{m-1}{2})g(\varphi X, \varphi Y)$$

olur. (2.9.2) ve (2.9.12) kullanılırsa;

$$S(X,Y) + (m-1)\eta(X)\eta(Y) = -(\frac{m-1}{2})g(X,Y) + (\frac{m-1}{2})\eta(X)\eta(Y)$$

bulunur ki buradan;

$$S(X,Y) = -(\frac{m-1}{2})g(X,Y) - (\frac{m-1}{2})\eta(X)\eta(Y) \tag{5.1.11}$$

elde edilir. Bu da M nin bir η-Einstein manifold olduğunu gösterir. □

Teorem 5.1.3. *Bir weakly φ-simetrik para-kenmotsu manifold, η-Einstein manifolddur.*

İspat. M bir weakly φ-simetrik para-kenmotsu manifold olsun. Yani; M para-kenmotsu manifoldu, $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^2(\nabla_W R)(X,Y)Z &= A(W)\varphi^2(R(X,Y)Z)+B(X)\varphi^2(R(W,Y)Z)\\
&+ B(Y)\varphi^2(R(X,W)Z)+D(Z)\varphi^2(R(X,Y)W)\\
&+ g(R(X,Y)Z,W)\varphi^2(\rho)
\end{aligned}$$

şartını sağlasın. Burada ρ, D 1-formu ile birleştirilmiş vektör alanı, yani $\forall Z \in \chi(M)$ için $D(Z) = g(Z,\rho)$ dur. Bu son ifadede (2.9.1) nolu denklem kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
(\nabla_W R)(X,Y)Z-\eta[(\nabla_W R)(X,Y)Z]\xi &= A(W)[R(X,Y)Z-\eta(R(X,Y)Z)\xi]\\
&+ B(X)[R(W,Y)Z-\eta(R(W,Y)Z)\xi]\\
&+ B(Y)[R(X,W)Z-\eta(R(X,W)Z)\xi]\\
&+ D(Z)[R(X,Y)W-\eta(R(X,Y)W)\xi]\\
&+ g(R(X,Y)Z,W)[\rho-\eta(\rho)\xi] \qquad (5.1.12)
\end{aligned}$$

olur. (5.1.12) de Z yerine ξ yazılırsa ve (2.9.1) ve (2.9.12) nolu eşitliklerden faydalanılırsa;

$$\begin{aligned}
g(X,W)Y &- g(Y,W)X-R(X,Y)W-g(X,W)\eta(Y)\xi+g(Y,W)\eta(X)\xi-\eta(R(X,Y)W)\xi\\
&= A(W)\eta(X)Y-A(W)\eta(Y)X-A(W)\eta(X)\eta(Y)\xi+A(W)\eta(Y)\eta(X)\xi\\
&+ B(X)\eta(W)Y-B(X)\eta(Y)W+D(\xi)R(X,Y)W-D(\xi)\eta(Y)g(X,W)\\
&+ D(\xi)\eta(X)g(Y,W)+[\eta(X)g(Y,W)-\eta(Y)g(X,W)][\rho-\eta(\rho)\xi]
\end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse;

$$\begin{aligned}
[1+D(\xi)]R(X,Y)W &= g(X,W)Y-g(Y,W)X-g(X,W)\eta(Y)\xi+g(Y,W)\eta(X)\xi\\
&- g(X,W)\eta(Y)\xi+g(Y,W)\eta(X)\xi\\
&- A(W)\{\eta(X)Y-\eta(Y)X\}-B(X)\{\eta(W)Y-\eta(Y)W\}\\
&+ D(\xi)\eta(Y)g(X,W)-D(\xi)\eta(X)g(Y,W)\\
&- \eta(X)g(Y,W)\rho+\eta(X)\eta(\rho)g(Y,W)\xi\\
&+ \eta(Y)g(X,W)\rho-\eta(Y)\eta(\rho)g(X,W)\xi \qquad (5.1.13)
\end{aligned}$$

bulunur. M nin bir p noktasındaki ortonormal baz $\{e_i\}$ olmak üzere; (5.1.13) te $X = e_i$ alınıp (5.1.13) ün her iki tarafı e_i ile metrik çarpıma tabi tutulursa $1 \leq i \leq m$ için,

$$\begin{aligned}
[1+D(\xi)]S(Y,W) &= \eta(W)\eta(Y) - mg(Y,W) - 2\eta(W)\eta(Y) \\
&- 2g(Y,W) - \eta(\rho)g(Y,W) + \eta(Y)\eta(\rho)\eta(W) \\
&+ A(W)(m-1)\eta(Y) - B(\xi)\{\eta(W)\eta(Y) - \eta(Y)\eta(W)\} \\
&+ \eta(\rho)\eta(Y)\eta(W)\xi - \eta(\rho)g(Y,W)\xi + \eta(Y)\eta(W)\eta(\rho) \\
&- g(Y,W)\eta(\rho) \qquad (5.1.14)
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemde Y yerine φY, W yerine φW alınırsa ve

$$S(\varphi Y, \varphi W) = S(Y,W) + (m-1)\eta(Y)\eta(W)$$

eşitliği kullanılırsa, $\forall Y, W \in \chi(M)$ için

$$S(Y,W) = \frac{-(m+2)}{1+D(\xi)}g(Y,W) + \frac{3-D(\xi)(m-1)}{1+D(\xi)}\eta(Y)\eta(W)$$

olduğu görülür. Öyleyse M, bir η-Einstein manifolddur. □

Teorem 5.1.4. *$(M^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ weakly φ-Ricci simetrik para-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda M bir η-Einstein manifolddur.*

İspat. M para-kenmotsu manifoldu için

$$\varphi^2[(\nabla_X Q)Y] = A(X)\varphi^2(Q(Y)) + B(Y)\varphi^2(Q(X)) + S(Y,X)\varphi^2(\rho)$$

şartı sağlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Q)Y - \eta[(\nabla_X Q)Y] &= A(X)[Q(Y) - \eta(Q(Y))\xi] \\
&+ B(Y)[Q(X) - \eta(Q(X))\xi] \\
&+ S(Y,X)[\rho - \eta(\rho)\xi] \qquad (5.1.15)
\end{aligned}$$

olur. (5.1.15) in her iki tarafı bir $Z \in \chi(M)$ ile metrik çarpıma tabi tutulursa;

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X Q)Y, Z) - \eta((\nabla_X Q)Y)\eta(Z) &= A(X)[S(Y,Z) - \eta(Q(Y))\eta(Z)] \\
&+ B(Y)[S(X,Z) - \eta(Q(X))\eta(Z)] \\
&+ S(Y,X)[D(Z) - \eta(\rho)\eta(Z)]
\end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned} g(\nabla_X QY,Z) &- g(Q\nabla_X Y,Z)-\eta((\nabla_X Q)Y)\eta(Z) \\ &= A(X)[S(Y,Z)-\eta(Q(Y))\eta(Z)]+B(Y)[S(X,Z)-\eta(Q(X))\eta(Z)] \\ &+ S(Y,X)[D(Z)-\eta(\rho)\eta(Z)] \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde Y yerine ξ alınır, gerekli hesaplamalar yazılırsa;

$$\begin{aligned} (m-1)[g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)] &- S(X,Z)+(m-1)\eta(X)\eta(Z)+S(X,\xi)\eta(Z)-\eta(X)S(\xi,\xi)\eta(Z) \\ &= -(m-1)B(\xi)\eta(X)+(m-1)B(\xi)\eta(X)\eta(Z)+(m-1)\eta(X)D(Z) \\ &+ (m-1)\eta(X)\eta(\rho)\eta(Z) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned} S(X,Z) &= (m-1)g(X,Z)-(2m-2)\eta(X)\eta(Z)+(m-1)B(\xi)\eta(X) \\ &- (m-1)B(\xi)\eta(X)\eta(Z)-(m-1)\eta(X)D(Z)-(m-1)\eta(X)\eta(\rho)\eta(Z) \end{aligned}$$

olur. Bu denklemde X yerine φX, Z yerine φZ alınırsa;

$$S(\varphi X,\varphi Z)=(m-1)g(\varphi X,\varphi Z)$$

bulunur. (2.9.2) ve (2.9.12) kullanılırsa $\forall X,Z\in\chi(M)$ için

$$S(X,Z)=(m-1)g(X,Z)-(2m-2)\eta(X)\eta(Z)$$

elde edilir ki bu M nin bir η-Einstein manifold olduğunu gösterir. □

Teorem 5.1.5. *Lokal simetrik bir para-kenmotsu manifold, sabit negatif* -1 *eğriliklidir.*

İspat. Para-kenmotsu manifoldlar için elde edilen (2.9.10) nolu eşitlikten $\forall X,Y,W\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_W R)(X,Y)\xi=g(X,W)Y-g(Y,W)X-R(X,Y)W$$

olup, M para-kenmotsu manifoldu lokal simetrik ise $\nabla R=0$ dır. Bu durumda;

$$R(X,Y)W=-\{g(Y,W)X-g(X,W)Y\}$$

olur. Öyleyse M, sabit negatif -1 eğriliklidir. □

Teorem 5.1.6. $(M^m, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir para-kenmotsu manifold olsun. Eğer M, m-projektif flat ise M bir Einstein manifolddur.*

İspat. Bir M^m Riemann manifoldunun m-projektif eğrilik tensörü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$W^*(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY]$$

olup M, m-projektif flat ise yani; $W^* = 0$ ise

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{2m-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY]$$

olur. $Z = \xi$ alınırsa ve bölüm (2.9) da hesaplanılan eşitlikler kullanılırsa

$$\eta(X)Y - \eta(Y)X = \frac{1}{2m-2}[-(m-1)\eta(Y)X + (m-1)\eta(X)Y + \eta(Y)QX - \eta(X)QY]$$

bulunur. Bu son denklemde $X = \xi$ alınıp, her tarafı $W \in \chi(M)$ ile çarpılırsa $\forall Y, W \in \chi(M)$ için

$$S(Y,W) = -(m-1)g(Y,W)$$

elde edilir. Öyleyse M, Einstein manifolddur. □

5.2 Para-Kenmotsu Manifoldların Bazı Altmanifoldları

Tezin bu kısmında para-Kenmotsu manifoldların hemi-slant altmanifoldları incelendi. Bu kapsamda hemi-slant altmanifoldu oluşturan distribüsyonların integrallenebilirliği araştırıldı.

Lemma 5.2.1. *$\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin hemi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda; $\forall X, Y \in D_\perp$ için*

$$A_{\varphi Y}X = -A_{\varphi X}Y$$

dir.

İspat. Herhangi $X, Y \in D_\perp$ için $D_\perp$ anti-invaryant olduğundan $\varphi Y \subset T^\perp M$ olur. Bu durumda; $\forall Z \in TM$ için

$$g(A_{\varphi Y}X, Z) = g(h(X,Z), \varphi Y) = g(\varphi h(X,Z), Y) \tag{5.2.1}$$

olur. Öyleyse,

$$
\begin{aligned}
g(A_{\varphi Y}X,Z) &= g(\varphi h(X,Z),Y) \\
&= g(\varphi h(Z,X),Y) \\
&= g(\varphi(\bar{\nabla}_Z X - \nabla_Z X),Y) \\
&= g(\varphi\bar{\nabla}_Z X,Y) - g(\varphi\nabla_Z X,Y) \\
&= -g((\bar{\nabla}_Z\varphi)X,Y) - g(\bar{\nabla}_Z\varphi X,Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Weingarten denkleminden,

$$
g(A_{\varphi Y}X,Z) = -g((\bar{\nabla}_Z\varphi)X,Y) - g(A_{\varphi X}Z,Y) + g(\nabla^{\perp}_Z\varphi X,Y) \tag{5.2.2}
$$

elde edilir. *h* nın simetrikliğinden,

$$
\begin{aligned}
g(h(X,Y),N) &= g(h(Y,X),N) \\
g(A_N X,Y) &= g(A_N Y,X)
\end{aligned}
$$

olup

$$
g(A_{\varphi X}Z,Y) = g(A_{\varphi X}Y,Z) \tag{5.2.3}
$$

olduğu görülür. Bu durumda (2.9.3) ve (5.2.3) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
g(A_{\varphi Y}X,Z) + g(A_{\varphi X}Z,Y) &= -g((\bar{\nabla}_Z\varphi)X,Y) \\
g(A_{\varphi Y}X,Z) + g(A_{\varphi X}Y,Z) &= -g(-g(Z,\varphi X)\xi - \eta(X)\varphi Z,Y) \\
g(A_{\varphi Y}X + A_{\varphi X}Y,Z) &= \eta(X)g(\varphi Z,Y) = 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
A_{\varphi Y}X = -A_{\varphi X}Y
$$

elde edilir. □

Teorem 5.2.1. *$\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin total geodezik hemi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $D_{\perp}$ integrallenebilirdir.*

İspat. $\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin total geodezik hemi-slant altmanifoldu olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y) &(5.2.4)\\ \bar{\nabla}_Y X &= \nabla_Y X + h(Y,X) &(5.2.5)\end{aligned}$$

olup (5.2.4) ve (5.2.5) nolu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa h nın simetrikliğinden,

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{5.2.6}$$

elde edilir. P_1 ve P_2, sırasıyla $D_\perp$ ve D_θ üzerindeki doğal projeksiyonlar olmak üzere, herhangi bir $Z\in\chi(M)$ için

$$Z = P_1Z + P_2Z + \eta(Z)\xi$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\varphi Z = \varphi P_1 Z + \varphi P_2 Z$$

elde edilir. Bu durumda $\forall X,Y\in D_\perp$ ve $Z\in\chi(M)$ için (5.2.6) ve (2.9.3) nolu eşitlikler ile Lemma 5.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}g(\varphi[X,Y],Z) &= g([X,Y],\varphi Z)\\ &= g([X,Y],\varphi P_1Z+\varphi P_2Z)\\ &= g(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X,\varphi P_1Z+\varphi P_2Z)\\ &= g(\bar{\nabla}_X Y,\varphi P_1Z)+g(\bar{\nabla}_X Y,\varphi P_2Z)-g(\bar{\nabla}_Y X,\varphi P_1Z)\\ &- g(\bar{\nabla}_Y X,\varphi P_2Z)\\ &= g(\varphi\bar{\nabla}_X Y,P_1Z)+g(\varphi\bar{\nabla}_X Y,P_2Z)-g(\varphi\bar{\nabla}_Y X,P_1Z)\\ &- g(\varphi\bar{\nabla}_Y X,P_2Z)\\ &= g(\bar{\nabla}_X\varphi Y,P_1Z)-g((\bar{\nabla}_X\varphi)Y,P_1Z)+g(\bar{\nabla}_X\varphi Y,P_2Z)\\ &- g((\bar{\nabla}_X\varphi)Y,P_2Z)-g(\bar{\nabla}_Y\varphi X,P_1Z)+g((\bar{\nabla}_Y\varphi)X,P_1Z)\\ &- g(\bar{\nabla}_Y\varphi X,P_2Z)+g((\bar{\nabla}_Y\varphi)X,P_2Z)\\ &= g(-A_{\varphi Y}X+\nabla^\perp_X\varphi Y,P_1Z)+g(-A_{\varphi Y}X+\nabla^\perp_X\varphi Y,P_2Z)\\ &- g(-A_{\varphi X}Y+\nabla^\perp_Y\varphi X,P_1Z)-g(-A_{\varphi X}Y+\nabla^\perp_Y\varphi X,P_2Z)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2g(A_{\varphi Y}X, \varphi Z) \\
&= -2g(A_{\varphi Y}X, PZ) = -2g(h(X,PZ), \varphi Y) = 0
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda $\varphi[X,Y] \in \chi(M)^{\perp}$ olup $[X,Y] \in D_{\perp}$ dir. $\square$

Teorem 5.2.2. *$\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir hemi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $D_{\perp} \oplus D_{\theta}$ integrallenebilirdir.*

İspat. $\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir hemi-slant altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in D_{\perp} \oplus D_{\theta}$ için

$$(\nabla_X g)(Y,\xi) = \nabla_X g(Y,\xi) - g(\nabla_X Y,\xi) - g(Y,\nabla_X \xi)$$

olup buradan

$$g(\nabla_X Y,\xi) = -g(\nabla_X \xi, Y) \tag{5.2.7}$$

elde edilir. Bunun yanısıra $\forall X, Y \in D_{\perp} \oplus D_{\theta}$ için

$$g([X,Y],\xi) = g(\nabla_X Y,\xi) - g(\nabla_Y X,\xi) \tag{5.2.8}$$

olup (5.2.6), (5.2.7) ve (2.9.5) nolu eşitlikler (5.2.8) nolu eşitlikte kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
g([X,Y],\xi) &= -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) + g(Y,X) - \eta(X)\eta(Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. o halde $[X,Y] \in D_{\perp} \oplus D_{\theta}$ dır. $\square$

Teorem 5.2.3. *$\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir total geodezik hemi-slant altmanifoldu ise $D_{\perp} \oplus <\xi>$ integrallenebilirdir.*

İspat. P_1 ve P_2 sırasıyla $D_{\perp}$ ve D_{θ} üzerindeki doğal projeksiyonlar olmak üzere, $\forall X, Y \in D_{\perp} \oplus <\xi>$ için

$$X = P_1 X + \eta(X)\xi$$

$$Y = P_1 Y + \eta(Y)\xi$$

olarak yazılabilir. Öyleyse

$$\varphi X = \varphi P_1 X = F P_1 X \in \chi(M)^{\perp}$$

$$\varphi Y = \varphi P_1 Y = F P_1 Y \in \chi(M)^{\perp}$$

olur. $\forall X, Y \in D_{\perp} \oplus <\xi>$ ve $Z \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi[X,Y], Z) = g(\varphi \nabla_X Y - \varphi \nabla_Y X, Z)$$

elde edilir. (5.2.6) nolu eşitlikten,

$$\begin{aligned} g(\varphi[X,Y], Z) &= g(\varphi \nabla_X Y, Z) - g(\varphi \nabla_Y X, Z) \\ &= g(\bar{\nabla}_X \varphi Y - (\bar{\nabla}_X \varphi) Y, Z) - g(\bar{\nabla}_Y \varphi X - (\bar{\nabla}_Y \varphi) X, Z) \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

bulunur. (2.9.3) nolu denklem ve Weingarten denklemleri (5.2.9) nolu denklemde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} g(\varphi[X,Y], Z) &= -g(A_{\varphi Y} X, Z) + g(\nabla^{\perp}_X \varphi Y, Z) + g(X, \varphi Y)\eta(Z) \\ &+ \eta(Y) g(\varphi X, Z) + g(A_{\varphi X} Y, Z) - g(\nabla^{\perp}_Y \varphi X, Z) \\ &- g(Y, \varphi X)\eta(Z) - \eta(X) g(\varphi Y, Z) \\ &= g(A_{\varphi X} Y, Z) - g(A_{\varphi Y} X, Z) \\ &= g(h(Y,Z), \varphi X) - g(h(X,Z), \varphi Y) \end{aligned}$$

elde edilir. M total geodezik olduğundan $\varphi[X,Y] \in \chi(M)^{\perp}$ ve dolayısıyla $[X,Y] \in D_{\perp} \oplus <\xi>$ olur. $\square$

Teorem 5.2.4. *$\bar{M}$ bir para-Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin hemi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda D_θ integrallenebilirdir $\Leftrightarrow$ $\nabla^{\perp}_X FY + \nabla^{\perp}_Y FX + h(X, PY) - h(Y, PX) \in \mu \oplus FD_\theta$ dır.*

İspat. Öncelikle $\forall X,Y \in D_\theta$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],\xi) &= g(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X,\xi) \\ &= g(\overline{\nabla}_X Y,\xi) - g(\overline{\nabla}_Y X,\xi) \\ &= -g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) + g(\overline{\nabla}_Y \xi, X) \\ &= -g(X - \eta(X)\xi, Y) + g(Y - \eta(Y)\xi, X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bunun yanısıra $\forall X,Y \in D_\theta$ ve $U \in D_\perp$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],U) &= g(\bar{\nabla}_X Y,U) - g(\bar{\nabla}_Y X,U) \\ &= g(\varphi\bar{\nabla}_X Y,\varphi U) - g(\varphi\bar{\nabla}_Y X,\varphi U) \\ &= g(\bar{\nabla}_X \varphi Y - (\bar{\nabla}_X \varphi)Y,\varphi U) \\ &- g(\bar{\nabla}_Y \varphi X - (\bar{\nabla}_Y \varphi)X,\varphi U) \\ &= g(\bar{\nabla}_X PY,\varphi U) + g(\bar{\nabla}_X FY,\varphi U) + \eta(Y)g(\varphi X,\varphi U) \\ &- g(\bar{\nabla}_Y PX,\varphi U) + g(\bar{\nabla}_Y FX,\varphi U) + \eta(X)g(\varphi Y,\varphi U) \end{aligned}$$

olur. $\eta(X) = \eta(Y) = 0$ olup Gauss ve Weingarten denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g([X,Y],U) &= g(h(X,PY),\varphi U) + g(\nabla^\perp_X FY,\varphi U) \\ &- g(h(Y,PX),\varphi U) + g(\nabla^\perp_Y FX,\varphi U) \end{aligned}$$

olur. $U \in D_\perp$ olup $TM^\perp = FD_\perp \oplus FD_\theta \oplus \mu$ olduğundan $[X,Y] \in D_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\nabla^\perp_X FY + \nabla^\perp_Y FX + h(X,PY) - h(Y,PX) \in \mu \oplus FD_\theta$ olmasıdır. $\square$

6. LORENTZ KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda Lorentz Kenmotsu manifoldların bazı simetri şartları altında eğrilik özellikleri incelenmiştir. İkinci kısmında ise Lorentz Kenmotsu manifoldların $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekilde kontakt jenerik altmanifoldlarının geometrisi çalışılmış ve birtakım sonuçlara ulaşılmıştır.

6.1 Lorentz Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Bazı Eğrilik Özellikleri

Teorem 6.1.1. *Bir φ-simetrik Lorentz Kenmotsu manifold, sabit negatif -1 eğriliklidir.*

İspat. M bir φ-simetrik Lorentz Kenmotsu manifold olsun. Yani; M Lorentz Kenmotsu manifoldu $\forall\ W,X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = 0$$

şartını sağlasın. Bu durumda;

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi = 0 \qquad (6.1.1)$$

olur. (2.10.8) nolu eşitlikten

$$(\nabla_W R)(X,Y)\xi = Xg(Y,W) - Yg(X,W) + R(X,Y)W$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta((\nabla_W R)(X,Y)\xi)\xi &= \eta(X)g(Y,W)\xi - \eta(Y)g(X,W)\xi + \eta(R(X,Y)W)\xi \\
&= \eta(X)g(Y,W)\xi - \eta(Y)g(X,W)\xi + \eta(Y)g(X,W)\xi - \eta(X)g(Y,W)\xi \\
&= 0 \qquad (6.1.2)
\end{aligned}$$

olup (6.1.1) nolu denklemde Z yerine χ yazılıp bu son iki eşitlik kullanılırsa, $\forall X,Y,W \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)W = -\{g(Y,W)X - g(X,W)Y\}$$

olur ki bu da (2.10.13) nolu eşitlikten M nin sabit -1 eğrilikli olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 6.1.2. *M bir φ-rekürrent Lorentz Kenmotsu manifold olsun. Yani;* $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ *için*

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = \alpha(W)R(X,Y)Z$$

şartı sağlansın(α sıfırdan farklı 1-form). Eğer $\alpha = \eta$ ise M bir η-Einstein manifolddur.

İspat. M Lorentz Kenmotsu manifoldu $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = \alpha(W)R(X,Y)Z$$

şartını sağlasın. Bu durumda;

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi = \alpha(W)R(X,Y)Z$$

olup $Z = \xi$ alındığında

$$Xg(Y,W) - Yg(X,W) - R(X,Y)W = \alpha(W)\eta(X)Y - \alpha(W)\eta(Y)X$$

olur. Öyleyse,

$$R(X,Y)W = [\alpha(W)\eta(X) + g(X,W)]Y - [\alpha(W)\eta(Y) + g(Y,W)]X \qquad (6.1.3)$$

elde edilir. M nin bir p noktasındaki bir komşuluktaki ortonormal baz $\{e_i\}_{i=1,\dots,2n+1}$ olmak üzere, (6.1.3) de X yerine e_i alınıp, eşitliğin her iki tarafı e_i ile metrik çarpıma tabi tutulur ve $1 \le i \le 2n+1$ için toplam alınırsa $\forall Y,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S(Y,W) &= \sum_i (\alpha(W)\eta(e_i)g(Y,e_i) - \alpha(W)\eta(Y)g(e_i,e_i) \\ &+ g(e_i,W)g(Y,e_i) - g(Y,W)g(e_i,e_i)) \end{aligned}$$

olur. $\alpha = \eta$ olarak alındığında

$$S(Y,W) = (-2n+1)g(Y,W) + (-2n+1)\eta(Y)\eta(W)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 6.1.3. *(M,φ,ξ,η,g) bir Lorentz Kenmotsu manifold olsun. Eğer M, genelleştirilmiş Ricci-rekürrent ise yani M; $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \psi(X)S(Y,Z) + 2n\beta(X)g(Y,Z)$$

olacak şekilde ψ ve β 1-formları varsa 2 durum söz konusudur:

i-) *$\beta = \psi$ ise M bir Lorentz Einstein manifolddur.*

ii-) *$\beta - \psi = \eta$ ise M bir Lorentz η-Einstein manifolddur.*

İspat. *M* Lorentz Kenmotsu manifoldu genelleştirilmiş ricci-rekürrent olsun. Yani; (2.1.15) sağlansın. (2.1.15) te *Z* yerine ξ alınırsa,

$$\nabla_X S(Y,\xi) - S(\nabla_X Y,\xi) - S(Y,\nabla_X \xi) = \psi(X)S(Y,\xi) + 2n\beta(X)g(Y,\xi)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} & - \quad 2n[(\nabla_X \eta)Y + \eta(\nabla_X Y)] + 2n\eta(\nabla_X Y) + S(Y,X) + 2n\eta(X)\eta(Y) \\ & = \quad -2n\eta(Y)\psi(X) + 2n\beta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

olur. İşlemler sürdürüldüğünde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için;

$$S(Y,X) = -2ng(X,Y) + 2n\eta(Y)[\beta(X) - \psi(X)] \tag{6.1.4}$$

elde edilir. Bu durumda; (6.1.4) nolu denklemde

i-) $\beta = \psi$ alınırsa $S(Y,X) = -2ng(X,Y)$ olur ki bu, *M* nin Einstein manifold olduğunu gösterir.

ii-) $\beta(X) - \psi(X) = \eta(X)$ ise (6.1.4) nolu denklem,

$$S(Y,X) = -2ng(X,Y) + 2n\eta(X)\eta(Y)$$

haline dönüşür. Bu durumda *M* bir η-Einstein manifolddur. □

Teorem 6.1.4. *M bir konformal-simetrik Lorentz Kenmotsu manifold ise M bir η-Einstein manifolddur.*

İspat. $(2n+1)$-boyutlu bir semi-Riemann manifoldunun konformal eğrilik tensörü $\forall Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} C(Y,Z,W) &= R(Y,Z)W - \frac{1}{2n-1}\{S(Z,W)Y - S(Y,W)Z + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ\} \\ &+ \frac{r}{2n(2n-1)}\{g(Z,W)Y - g(Y,W)Z\} \end{aligned}$$

ile verilir. M konformal simetrik bir Lorentz Kenmotsu manifold olsun. Yani; $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X C)(Y,Z)W = 0$$

olsun. Buradan;

$$\begin{aligned} (\nabla_X C)(Y,Z)W &= (\nabla_X R)(Y,Z)W - \frac{1}{2n-1}\{(\nabla_X S)(Z,W)Y - (\nabla_X S)(Y,W)Z \\ &+ g(Z,W)\nabla_X QY - g(Y,W)\nabla_X QZ\} \\ &+ \frac{dr(X)}{2n(2n-1)}\{g(Z,W)Y - g(Y,W)Z\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse;

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y,Z)W &= \frac{1}{2n-1}\{(\nabla_X S)(Z,W)Y - (\nabla_X S)(Y,W)Z \\ &+ g(Z,W)\nabla_X QY - g(Y,W)\nabla_X QZ\} \\ &+ \frac{dr(X)}{2n(2n-1)}\{g(Z,W)Y - g(Y,W)Z\} \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitliğin her tarafı bir $U \in \chi(M)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} g((\nabla_X R)(Y,Z)W,U) &= \frac{1}{2n-1}\{(\nabla_X S)(Z,W)g(Y,U) - (\nabla_X S)(Y,W)g(Z,U) \\ &+ g(Z,W)(\nabla_X S)(Y,U) - g(Y,W)(\nabla_X S)(Z,U)\} \end{aligned}$$

olur. Bu son denklemde $W = \xi$ alınırsa;

$$\begin{aligned} g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U) + R(X,Y,Z,U) &= \frac{1}{2n-1}\{2ng(x,Z)g(Y,U) \\ +S(Z,X)g(Y,U) - 2ng(X,Y)g(Z,U) - S(Y,X)g(Z,U) &+ \eta(Z)(\nabla_X S)(Y,U) \\ -\eta(Y)(\nabla_X S)(Z,U)\} + \frac{dr(X)}{2n(2n-1)}&\{g(Y,U)\eta(Z) - g(Z,U)\eta(Y)\} \quad (6.1.5) \end{aligned}$$

bulunur. M nin bir p noktasındaki ortonormal baz $\{e_i\}$ olmak üzere (6.1.5) te $X = U = e_i$ alınır ve $1 \leq i \leq 2n+1$ için toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}
2ng(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z) + S(Y,Z) &= \frac{2n}{2n-1}\eta(Z)\eta(Y) + \frac{1}{2n-1}\sum_i S(Z,e_i)\eta(Y) \\
&- \frac{2n}{2n-1}\eta(Y)\eta(Z) - \frac{1}{2n-1}\sum_i S(Y,e_i)\eta(Z) \\
&+ \frac{1}{2n-1}\eta(Z)\sum_i (\nabla_X S)(Y,e_i) \\
&- \frac{1}{2n-1}\eta(Y)\sum_i (\nabla_{e_i} S)(Z,e_i) \\
&+ \frac{dr(X)}{2n(2n-1)}\{\eta(Y)\eta(Z) - \eta(Z)\eta(Y)\}
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemde Y yerine φY, Z yerine φZ alınır ve (1.10) nolu bölümdeki ilgili denklemlere başvurulursa

$$S(\varphi Y, \varphi Z) = -2ng(\varphi Y, \varphi Z)$$

olup, buradan

$$S(Y,Z) + 2n\eta(Y)\eta(Z) = -2ng(Y,Z) - 2n\eta(Y)\eta(Z)$$

elde edilir ki, böylece

$$S(Y,Z) = -2ng(Y,Z) - 4n\eta(Y)\eta(Z)$$

bulunur. Yani M, η-Einstein'dır. □

6.2 Lorentz Kenmotsu Manifoldların Bazı Altmanifoldları

Lemma 6.2.1. *$\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in D^{\perp}$ için*

$$A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X$$

dir.

İspat. $\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olacak şekilde kontakt jenerik altmanifoldu olsun. $\forall X,Y \in D^{\perp}$ ve $Z \in \chi(M)$ için,

$$g(A_{\varphi Y}X,Z) = g(h(X,Z),\varphi Y) = -g(\varphi h(X,Z),Y) \tag{6.2.1}$$

elde edilir. Bunun yanısıra,

$$\begin{aligned} g(A_{\varphi Y}X,Z) = -g(\varphi h(X,Z),Y) &= -g(\varphi h(Z,X),Y) \\ &= -g(\varphi \bar{\nabla}_Z X - \varphi \nabla_Z X, Y) \\ &= -g(\nabla_Z X, \varphi Y) - g(\varphi \bar{\nabla}_Z X, Y) \\ &= -g(\varphi \bar{\nabla}_Z X, Y) \\ &= g((\bar{\nabla}_Z \varphi)X, Y) - g(\bar{\nabla}_Z \varphi X, Y) \\ &= g(g(Z,\varphi X)\xi + \eta(X)\varphi Z, Y) \\ &- g(-A_{\varphi X}Z, Y) - g(\nabla^{\perp}_Z \varphi X, Y) \\ &= g(A_{\varphi X}Z, Y) \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

bulunur ve ayrıca,

$$\begin{aligned} g(A_{\varphi X}Z,Y) = g(h(Z,Y),\varphi X) &= g(h(Y,Z),\varphi X) \\ &= g(A_{\varphi X}Y,Z) \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

olur. (6.2.2) ve (6.2.3) ten

$$g(A_{\varphi Y}X,Z) = g(A_{\varphi X}Y,Z)$$

elde edilir. Buradan,

$$A_{\varphi Y}X = A_{\varphi X}Y$$

bulunur. □

Teorem 6.2.1. *$\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ integrallenebilirdir.*

İspat. $\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. $\forall X,Y \in D^{\perp}$ için $[X,Y] \in D^{\perp}$ olduğu gösterilmelidir. $\forall Z \in D$ için $\varphi Z \in D$

olup

$$\begin{aligned} g([X,Y],\varphi Z) &= -g(\varphi\bar{\nabla}_X Y,Z)+g(\varphi\bar{\nabla}_Y X,Z) \\ &= g((\bar{\nabla}_X\varphi)Y,Z)-g(\bar{\nabla}_X\varphi Y,Z)+g(\bar{\nabla}_Y\varphi X,Z)-g((\bar{\nabla}_Y\varphi)X,Z) \end{aligned}$$

bulunur. (2.10.2) den

$$\begin{aligned} g([X,Y],\varphi Z) &= g(X,\varphi Y)\eta(Z)-\eta(Y)g(\varphi X,Z)+g(A_{\varphi Y}X,Z) \\ &- g(\nabla_X^{\perp}\varphi Y,Z)-g(A_{\varphi X}Y,Z)+g(\nabla_Y^{\perp}\varphi X,Z) \\ &- g(Y,\varphi X)\eta(\xi)+\eta(X)g(\varphi Y,Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 6.2.1. den $A_{\varphi X}Y = A_{\varphi Y}X$ ve $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olduğundan,

$$g([X,Y],\varphi Z)=0$$

olup $D^{\perp}$ integrallenebilirdir. □

Teorem 6.2.2. *$\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$D - \mathit{integrallenebilirdir} \Leftrightarrow h(X,\varphi Y)-h(Y,\varphi X)=2g(X,\varphi Y)\xi$$

olmasıdır.

İspat. $\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. (2.10.2) den $\forall X,Y \in TM$ için

$$(\bar{\nabla}_X\varphi)Y = -\eta(Y)\varphi X + g(X,\varphi Y)\xi$$

olur. $(\bar{\nabla}_X\varphi)Y = \bar{\nabla}_X\varphi Y - \varphi\bar{\nabla}_X Y$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X\varphi Y-\varphi\bar{\nabla}_X Y &= -\eta(Y)\varphi X+g(X,\varphi Y)\xi \\ \bar{\nabla}_X PY+\bar{\nabla}_X FY-\varphi\nabla_X Y-\varphi h(X,Y) &= -\eta(Y)PX-\eta(Y)FX+g(X,\varphi Y)\xi \quad (6.2.4) \end{aligned}$$

bulunur. (6.2.4) nolu denklemde Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılır, elde edilen ifadenin teğet ve normal bileşenleri ayrıştırılırsa,

$$(\nabla_X P)Y = -\eta(Y)PX + A_{FY}X + th(X,Y) \quad (6.2.5)$$

ve

$$(\nabla_X F)Y = -\eta(Y)FX + g(X,\varphi Y)\xi - h(X,PY) + fh(X,Y) \tag{6.2.6}$$

olur. D nin integrallenebilirliğini gösterebilmek için $\forall X,Y \in D$ için $[X,Y] \in D$ olduğunu gösterilmelidir. Bu durumda $F[X,Y] = 0$ olduğu ispat edilirse $[X,Y] \in D$ olduğu da gösterilmiş olacaktır.

$$F[X,Y] = F\nabla_X Y - F\nabla_Y X$$

ve

$$(\nabla_X F)Y = \nabla_X^{\perp} FY - F\nabla_X Y$$

eşitlikleri gözönünde bulundurulursa, $Y \in D$ olduğundan $FY = 0$ ve $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ için $\eta(Y) = 0$ olduğuda düşünülürse

$$\begin{aligned} F\nabla_X Y &= -(\nabla_X F)Y \\ &= -g(X,\varphi Y)\xi + h(X,PY) - fh(X,Y) \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$F\nabla_Y X = -g(Y,\varphi X)\xi + h(Y,PX) - fh(X,Y) \tag{6.2.8}$$

bulunur. $X,Y \in D$ olduğundan $PX = \varphi X$ ve $PY = \varphi Y$ olup

$$F[X,Y] = -2g(X,\varphi Y)\xi + h(X,\varphi Y) - h(Y,\varphi X)$$

bulunur. O halde, D nin integrallenebilir olması için $F[X,Y] = 0$ olması gerek ve yeter koşul olduğundan,

$$h(X,\varphi Y) - h(Y,\varphi X) = 2g(X,\varphi Y)\xi$$

koşulu sağlanmalıdır. $\square$

Teorem 6.2.3. *$\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. Bu durumda, D integrallenebilir ve D nin integral manifoldları M de total geodeziktir $\Leftrightarrow$ $\forall X,Y \in D$ ve $Z \in D^{\perp}$ için*

$$g(h(X,Y),FZ) = 0$$

dır.

İspat. $\Rightarrow$: D integrallenebilir ve D nin integral manifoldları M de total geodezik olsun. $\forall X,Y \in D$ ve $Z \in D^{\perp}$ için (6.2.5) nolu eşitlik kullanılırsa,

$$\nabla_X PZ - P\nabla_X Z = A_{FZ}X + th(X,Z) \tag{6.2.9}$$

elde edilir. (6.2.9) nolu eşitliğin her iki tarafı bir $Y \in D$ ile metrik çarpıma tabi tutulursa

$$g(\nabla_X PZ, Y) - g(P\nabla_X Z, Y) = g(A_{FZ}X, Y) + g(th(X,Z), Y) \tag{6.2.10}$$

olur. $Z \in D^{\perp}$ için $PZ = 0$ ve $\nabla_D D^{\perp} \subset D^{\perp}$ olduğundan $\nabla_X Z \in D^{\perp}$ olup $P\nabla_X Z = 0$ dır. Bunun yanısıra $t(TM^{\perp}) \subset D^{\perp}$ olduğu gözönünde bulundurulursa (6.2.10) dan

$$g(A_{FZ}X, Y) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda,

$$g(h(X,Y), FZ) = 0$$

dır.

$\Leftarrow$: $\forall X,Y \in D$ ve $Z \in D^{\perp}$ için $g(h(X,Y),FZ) = 0$ olsun. $Z \in D^{\perp}$ olduğundan $FZ = \varphi Z$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),\varphi Z) &= -g(\varphi h(X,Y), Z) = 0 \\ &= -g(\varphi\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(\varphi\nabla_X Y, Z) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $g(\varphi\nabla_X Y, Z) = -g(\nabla_X Y, \varphi Z)$ ifadesinde $\nabla_X Y \in \chi(M)$ ve $\varphi Z \in \chi(M)^{\perp}$ olduğundan $g(\varphi\nabla_X Y, Z) = 0$ dır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),\varphi Z) &= -g(\varphi\bar{\nabla}_X Y, Z) = 0 \\ &= g((\bar{\nabla}_X \varphi)Y, Z) - g(\bar{\nabla}_X \varphi Y, Z) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.10.2) ifadesi ve $\xi \in \chi(M)^{\perp}$ olduğu gözönünde bulundurulursa $g((\bar{\nabla}_X \varphi)Y, Z) = 0$ olur. Öyleyse,

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),\varphi Z) &= -g(\bar{\nabla}_X \varphi Y, Z) = 0 \\ &= g(\nabla_X \varphi Y, Z) + g(h(X,\varphi Y), Z) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $h(X,\varphi Y)\in\chi(M)^{\perp}$ ve $Z\in\chi(M)$ olduğundan $g(h(X,\varphi Y),Z)=0$ olup sonuçta

$$g(\nabla_X\varphi Y,Z)=0$$

elde edilir ki, buradan $\nabla_X\varphi Y\in D$ dir.

Bunun yanısıra, kabulümüzden,

$$g(h(\varphi Y,\varphi X),\varphi Z)=0$$

olup buradan

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_{\varphi Y}\varphi X-\nabla_{\varphi Y}\varphi X,\varphi Z) &= 0\\ -g(\varphi\bar{\nabla}_{\varphi Y}\varphi X,Z)-g(\nabla_{\varphi Y}\varphi X,\varphi Z) &= 0\end{aligned}$$

olur. $g(\nabla_{\varphi Y}\varphi X,\varphi Z)=0$ dır. Öyleyse

$$-g(\varphi\bar{\nabla}_{\varphi Y}\varphi X,Z)=0 \tag{6.2.11}$$

elde edilir. Buradan

$$g((\bar{\nabla}_{\varphi Y}\varphi)(\varphi X),Z)-g(\bar{\nabla}_{\varphi Y}(\varphi^2X),Z)=0 \tag{6.2.12}$$

bulunur. (2.10.2) nolu eşitlik (6.2.12) de kullanılırsa

$$g((\bar{\nabla}_{\varphi Y}\varphi)(\varphi X),Z)=0 \tag{6.2.13}$$

elde edilir. (2.10.1) ve (2.10.11) nolu eşitlikler (6.2.13) te kullanılırsa

$$g(\nabla_{\varphi Y}X,Z)=0$$

bulunur. O halde $\nabla_{\varphi Y}X\in D$ dir. $\forall X,\varphi Y\in D$ için $\nabla_X\varphi Y\in D$ ve $\nabla_{\varphi Y}X\in D$ olduğundan $[X,\varphi Y]\in D$ olur. O halde, D integrallenebilirdir.

Şimdi, $\forall X,Y\in D$ ve $Z\in D^{\perp}$ için

$$\begin{aligned} 0=g(h(X,\varphi Y),FZ) &= g(\bar{\nabla}_X\varphi Y-\nabla_X\varphi Y,FZ)\\ &= g(\bar{\nabla}_X\varphi Y,FZ)\\ &= g((\bar{\nabla}_X\varphi)Y,FZ)+g(\varphi\bar{\nabla}_XY,FZ)\\ &= g(\varphi\bar{\nabla}_XY,FZ)\\ &= g(\varphi(\nabla_XY+h(X,Y)),FZ)\\ &= g(\varphi\nabla_XY,FZ)\end{aligned}$$

olur. Yani, $g(F\nabla_X Y, FZ) = 0$ elde edilir. $\nabla_X Y \in D^{\perp}$ olması durumunda bu eşitlik sağlanamaz. Ancak $\nabla_X Y \in D$ olduğunda $F\nabla_X Y = 0$ olur ki böylece ispat tamamlanmış olur. Yani, D nin herbir integral manifoldu M de total geodeziktir. $\square$

Sonuç 6.2.1. $\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik altmanifoldu olsun. Bu durumda D integrallenebilir ve D nin integral manifoldları M de total geodezik ise M nin ortalama eğrilik vektörü ξ doğrultusundadır.

İspat. D integrallenebilir ve D nin integral manifoldları M de total geodezik ise $\forall X, Y \in D$ ve $Z \in D^{\perp}$ için

$$g(h(X,Y), FZ) = 0$$

olduğundan $h(X,Y)$, ξ doğrultusundadır. Dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 6.2.4. *$\bar{M}$ bir Lorentz Kenmotsu manifold ve M de $\bar{M}$ nin kontakt jenerik normal altmanifoldu olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ in integral manifoldları M de total geodeziktir $\Leftrightarrow$ $\forall U, V \in D^{\perp}$ ve $X \in D$ için*

$$g(h(U,X), FV) = 0$$

dır.

İspat. $\Rightarrow)$: $D^{\perp}$ in integral manifoldları M de total geodezik olsun. Yani; $\forall U, V \in D^{\perp}$ için $\nabla_U V \in D^{\perp}$ olsun. (6.2.5) nolu eşitlikten,

$$\nabla_U PV - P\nabla_U V = A_{FV}U + th(U,V) \tag{6.2.14}$$

olur. $V \in D^{\perp}$ olduğundan $PV = 0$; $\nabla_U V \in D^{\perp}$ olduğundan $P\nabla_U V = 0$ olup buradan,

$$A_{FV}U + th(U,V) = 0 \tag{6.2.15}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı bir $X \in D$ ile çarpılır ve $th(U,V) \subset D^{\perp}$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$g(A_{FV}U, X) = 0 \tag{6.2.16}$$

olur ve buradan $\forall U, V \in D^{\perp}$ ve $X \in D$ için

$$g(h(U,X), FV) = 0$$

elde edilir.

$\Leftarrow) : \forall U, V \in D^{\perp}$ ve $X \in D$ için $g(h(U,X), FV) = 0$ olsun. $V \in D^{\perp}$ olduğundan $FV = \varphi V$ dir. Buna göre;

$$
\begin{aligned}
0 &= g(h(U,X), \varphi V) \\
0 &= -g(\varphi h(U,X), V) \\
0 &= -g(\varphi \bar{\nabla}_U X - \varphi \nabla_U X, V) \\
0 &= g(\bar{\nabla}_U \varphi X - (\bar{\nabla}_U \varphi) X, V) - g(\varphi \nabla_U X, V) \qquad (6.2.17)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (6.2.17) de $(\bar{\nabla}_U \varphi)X = 0$ ve $g(\varphi \nabla_U X, V) = 0$ olup geriye

$$g(\nabla_U \varphi X, Y) = 0 \qquad (6.2.18)$$

eşitliği kalır. Buda $\forall U \in D^{\perp}$ ve $\varphi X \in D$ için $\nabla_U \varphi X \in D$ olması demektir. Bu durumda M nin integral manifoldları $D^{\perp}$ de geodeziktir. □

KAYNAKLAR

[1] S. Tanno, *The Automorphism Groups Of Almost Contact Riemannian Manifolds*,**Tohoku Math. J.** 2, (1969) 21-38.

[2] K. Kenmotsu, *A Class Of Almost Contact Riemannian Manifolds*, **Tohoku Math. Journal** 24, No. 1 (1972) 93-103.

[3] G. Pitiş, *Geometry Of Kenmotsu Manifolds*, Publishing House of Transilvania University of Braşov, Braşov, (2007).

[4] D. Janssens, L. Vanhecke, *Almost Contact Structures And Curvature Tensors*, **Kadal Math. J.** 4, (1981) 1-27.

[5] J.A. Oubina, *New Class Of Almost Contact Metric Manifolds*, **Publ. Math. Debrecen** 32, (1985) 187-193.

[6] J.C. Marrera, *The Local Structure Of Trans-Sasakian Manifolds*, **Ann. D. Math. Pure Ed. Appl.** 4, (1992) 77-86.

[7] H. Öztürk, N. Aktan, C. Murathan, *On α-kenmotsu manifolds satisfying certain conditions*, **Balkan Society of Geometers**, Vol. 12, (2010) 115-126.

[8] N.S. Agashe, M.R. Chafle, *On Special Submanifolds Of A Riemannian Manifold*, **Tensor N.S.**, 50, (1991).

[9] E. Kılıç, B. Şahin, R. Güneş, *Curves associated with an $\bar{M}$-vector field on a semi-Riemann hypersurface M of a Lorentzian manifold $\bar{M}$*, **Tensor N.S.**, 62, (2000) 247-253.

[10] R. Atuçuran, *Bir Riemann Manifoldun Bazı Özel Altmanifoldları*, Kırıkkale Üni. Y.Lisans Tezi, (2008).

[11] V.A. Khan, M.A. Khan, S. Uddin, *Totally Umbilical Semi-invariant Submanifolds Of A Nearly Kenmotsu Manifold*, **Soochow J. of Math.**, Vol. 33, (2007) 563-568.

[12] S. Uddin, C. Özel, M.A. Khan, *Some Classification Results On Totally Umbilical Proper Slant And Hemi-slant Submanifolds Of A Nearly Kenmotsu Manifold*, **Int. J. of Physical Sciences**, 7(40), (2012) 5538-5544.

[13] M. Ahmed, J.B. Jun, *On Semi-invariant Submanifolds Of A Nearly Kenmotsu Manifold With A Semi-symmetric Non-metric Connection*, **Journal of the Chungcheong Math. Soc.**, 23(2), (2010).

[14] B. Najafi, N.H. Kashani, *On Nearly Kenmotsu Manifolds*, **Turkish Journal of Mathematics**, Vol. 37, (2012).

[15] B.B. Sinha, K.L.S. Prasad, *A Class Of Almost Para-contact Metric Manifold*, **Bull. Cal. Math. Soc.**, 87, (1995) 307-312.

[16] K.K. Dube, *Study Of Curvatures Of Para-Kenmotsu Manifold*, **Nepali Math. Sci. Rep.**, 15, (1996) No.1-2, 83-88.

[17] M. Kobayashi, *Contact Normal Submanifolds And Contact Generic Normal Submanifolds In Kenmotsu Manifolds*, **Revista Matematica** 4(1), (1991).

[18] U.C. De, A.K. Sengupta, *Generic Submanifolds Of A Lorentzian Para-Sasakian Manifold*, **Soochow Journal Mathematics** 27(1), (2001) 29-36.

[19] K. Sağlam, *Kenmotsu Manifoldlar*, Dumlupınar Üni. Y.Lisans Tezi (2008).

[20] S. Sular, *Kenmotsu Manifoldlar Ve Bunların Bazı Altmanifoldları*, Balıkesir Üni. Doktora Tezi, (2009).

[21] N. Öğütlü, *Slant Ve Semi-slant Altmanifoldlar*, Gazi Üni. Y.Lisans Tezi, (2010.

[22] Ü. Yıldırım, *Kenmotsu Manifoldların Slant Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine* , Gaziosmanpaşa Üni. Y.Lisans Tezi, (2010).

[23] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations Of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience Publishers, New York, (1963).

[24] H.H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri II*, Ankara University Press, Ankara, (1994).

[25] K. Yano, M. Kon, *Structures On Manifolds*, Series in Pure Mathematics, World Scientific Publishing Co., Singapure, (1964).

[26] A. Bejancu, *Geometry Of CR-Submanifolds*, D.Reidel Publ. Co., (1986).

[27] H.H. Hacısalihoğlu, *Tensör Geometri*,Ankara University Press, Ankara, (2003).

[28] M.D. Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, Boston, (1992).

[29] M.C. Chaki, R.K. Maity, *On Quasi Einstein Manifolds*, **Publ. Math. Debrecen** 57, (2000) 297-306.

[30] B.Y. Chen, *Geometry Of Submanifolds*,Pure and Applied Mathematics Vol. 22, M. Dekker, (1973).

[31] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker Inc., New York, (1972).

[32] J.B. Jun, U.C. De, G. Pathak, *On Kenmotsu Manifolds*, **J. Korean Math. Soc.** 42, (2005) No.3 435-445.

[33] B. O'Neill, *Semi Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, (1983).

[34] R.L. Bishop, B. O'Neill, *Manifolds Of Negative Curvature*, **Transactions of the American Mathematical Society**, Vol. 145, (1969).

[35] S.K. Chaubey, R.H. Ojha, *On The m-projective Curvature Tensor Of A Kenmotsu Manifold*, **Balkan Society of Geometers**, Vol. 12,(2000) 52-60.

[36] M.D. Leon, P.R. Rodrigues, *Methods Of Differential Geometry In Analytical Mechanics*, Elsevier, Netherlands, (1989).

[37] S. Tanno, *Almost Complex Structures In Bundle Spaces Over Almost Contact Manifolds*, **J. Math. Soc. Japan**, Vol. 17,No. 2 (1965) 167-186.

[38] D. Avik, *On Kenmotsu Manifold*, **Bulletin of Mathematical Analysis and Applications**, Vol. 2, Issue 3 (2010) 1-6.

[39] K.L. Sai Prasad, *Certain Classes Of Almost Contact Riemannian Manifolds*, International Mathematical Forum, 4, No. 16, (2009), pp.773 - 778.

[40] G.T. Sreenivasa, Venkatesha, C.S. Bagewadi, K. Naganagoud, *On Weakly Symmetric And Special Weakly Ricci Symmetric Lorentzian* β*-Kenmotsu Manifolds*, **Acta Universitatis Apulensis**, Vol. 19, (2009) 47-54.

[41] U.C. De, A. Yıldız, A.F. Yalınız, *On* φ*-recurrent Kenmotsu Manifolds*, **Turkish J. Math.** 33, (2009) 17-25.

[42] U.C. De, *On φ-symmetric Kenmotsu Manifolds*, **International Electronics Journal of Geometry**, Vol. 1, No. 1, (2008) 33-38.

[43] S.S. Shukla, M.K. Shukla, *On φ-ricci Symmetric Kenmotsu Manifolds*, **Novi Sad J. Math.**, Vol. 39, No. 2, (2009) 89-95.

[44] A. Yıldız, U.C. De, B.E. Acet, *On Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Curvature Condition*, **SUT Joournal of Math.**, Vol. 45, No. 2, (2009) 89-101.

[45] U.C. De, N. Guha, *On Generalized Recurrent Manifolds*, **Proc. Math. Soc.** 7, (1991) 7-11.

[46] C. Calin, *Kenmotsu Manifolds With η-parallel Ricci Tensor*, **Bull. Soc. Math. Banja Luka**, Vol. 10, (2003) 10-15.

[47] R.N. Singh, S.K. Pandey, G. Pandey, *On A Type Of Kenmotsu Manifold*, **Bulletin of Mathematical Analysis and Applications**, Vol. 4, Issue 1, (2012) 117-132.

[48] S.K. Hui, *On Weakly φ-symmetric Kenmotsu Manifolds*, **Acta Universitatis Palackianae Olomucensis**, Facultas Rerum Naturalium, Mathematica, Vol. 51, (2012).

[49] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, CRC Press, (1996).

[50] A. Bejancu, *Geometry Of CR-Submanifolds*, Kluwer Academic Publishers Group, (1946).

[51] W. Roter, *On Conformally Recurrent Ricci-recurrent Manifolds*, **Colloq. Math.** 46, (1982).

[52] A. Lotta, *Slant Submanifolds In Contact Geometry*, **Bull. Math. Soc. Roum.** 39, (1996) 183-198.

[53] V.A. Khan, M.A. Khan, *Pseudo-slant Submanifolds Of A Sasakian Manifold*, **Indian J.Pure Appl. Math.** 38, (2007) 31-42.

[54] S. Uddin, K.A. Khan, *Warped Product Semi-slant Submanifolds Of Trans-Sasakian Manifolds*, **Dif. Geo.-Dynamical Systems** Vol.12, (2010) 260-270.

[55] B. Ünal, *Doubly Warped Products*, **Diff. Geo. Appl.** 15, (2001) 253-263.

[56] R.L. Bishop, B. O'Neill, *Manifolds Of Negative Curvature*, **Trans. Amer. Math. Soc.** 145, (1969) 1-49.

[57] B. Şahin, *Warped Product Submanifolds Of Kaehler Manifolds With A Slant Factor*, **Annales Polonici Math.** Vol.95 no.3, (2009) 207-226.

ÖZGEÇMİŞ

Saadet Doğan 1981 yılında Malatya'da doğmuştur. İlk ve orta öğretimini Malatya'da tamamlamıştır. 1998'de İnönü Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü kazanmış ve 2003 yılında Adıyaman'da öğretmenliğe başlamıştır. Yüksek Lisansını İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalında 2008 yılında bitirmiş olup, doktora eğitimine de yine aynı yerde 2009 yılında başlamıştır. Öğretmenlik hayatına Hacı Hüseyin Kölük Anadolu Ticaret Lisesi'nde devam etmekte olup, evli ve üç çocuk annesidir.