

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KLASİK REGRESYON İLE BULANIK
REGRESYONUN KARŞILAŞTIRILMASI

İrem DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN

Eş-Danışman
Doç. Dr. Reşit ÇELİK

Ağustos, 2025

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KLASİK REGRESYON İLE BULANIK REGRESYONUN
KARŞILAŞTIRILMASI**

İrem DEMİR tarafından hazırlanan tez çalışması 05.08.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Doç. Dr. Reşit ÇELİK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Selçuk ALP, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğrt. Üyesi Ömer UYSAL, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Danışmanım Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN sorumluluğunda tarafımda hazırlanan KLASİK REGRESYON İLE BULANIK REGRESYONUN KARŞILAŞTIRILMASI başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İrem DEMİR

İmza

Sevdiklerime



TEŞEKKÜR

Çalışmamda bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, beni yüreklendiren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım tez danışmanım saygıdeğer hocam Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma esnasında bilgileriyle bana yol gösteren, benden yardımlarını ve desteğini esirgemeyen çok sevdiğim eş danışmanım değerli hocam Doç. Dr. Reşit ÇELİK'e teşekkürlerimi borç bilirim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan, bana akademik yönde yürüme şevki kazandıran Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümündeki tüm hocalarıma,

İlköğretim hayatımdan şu zamana dek derslerime giren, öğrenim sürecimin başından sonuna kadar ileriye dönük farklı bakış açıları kazanmamda destek sağlayan değerli tüm öğretmenlerime,

Araştırmanın konusunu oluşturan tezlerin yazarlarına ve danışmanlarına,

Destekleriyle bu güne gelmemi sağlayan ve benden manevi desteklerini esirgemeyen sevgili AİLEME,

Tez yazım sürecimin her aşamasında bilgilerini ve deneyimlerini içten bir şekilde benimle paylaşan arkadaşlarıma,

Çalışmam esnasında gereken noktalarda çeviri konusunda bana yardımcı olan Onur AVUNÇ'a, teşekkürlerimi sunuyorum.

İrem DEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTIMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	5
2 TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Bulanıklık ve Bulanık Mantık Kavramı	6
2.2 Bulanık Küme Teorisi	7
2.3 Üyelik Fonksiyonları ve Bulanık Sayılar	10
2.3.1 Üçgen Üyelik Fonksiyonu	10
2.3.2 Yamuk Üyelik Fonksiyonu	11
2.3.3 Gauss Üyelik Fonksiyonu	13
2.4 Bulanık Küme İşlemleri	14
2.5 α -Kesimleri Kavramı	14
3 KLASİK REGRESYON ANALİZİ	17
3.0.1 Hata Terimi	21
3.0.2 Parametrelerin En Küçük Kareler Tahmini	23
4 BULANIK REGRESYON	26
4.1 Regresyon Modelleri Ve Bulanık Veriler	28
4.2 Klasik Ve Bulanık Regresyon Arasındaki Farklılıklar	28
4.3 Bulanık Regresyon Analizinin Avantajları&Dezavantajları	29

4.4	Bulanık Regresyon Yöntemlerinin Sınıflandırılması	30
4.5	Bulanık Regresyon Yöntemleri	31
4.5.1	Doğrusal Programlama Temeline Dayanan Bulanık Regresyon Analizi	31
4.5.2	Bulanık En Küçük Kareler Yöntemine Dayanan Bulanık Regresyon Analizi	34
4.6	Zadeh'in Genişleme Prensibi ile Sınırların Belirlenmesi	36
5	ÖRNEKLER	38
5.1	Bulanık ve Klasik Doğrusal Regresyon Analizlerinin Karşılaştırılması	38
5.1.1	Bulanık Doğrusal Regresyon Analizi	38
5.1.2	Klasik Doğrusal Regresyon Analizi	40
5.1.3	BDRA & KDRA Karşılaştırması	42
6	SONUÇ	43
	KAYNAKÇA	45
A	EK BÖLÜMÜ	48
A.1	Matlab Çizimi	48
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	55

SİMGE LİSTESİ

y	Bağımlı Değişken
x	Bağımsız Değişken
\tilde{y}	Bulanık Bağımlı Değişken
\tilde{x}	Bulanık Bağımsız Değişken
\tilde{A}	Bulanık Küme
β	Doğrunun Eğimi
α	Doğrunun Keseni
e	Hata Terimi (Gözlem)
ε	Hata Terimi (Rastlantısal)
A_α	Kesme Kümesi
\sum	Toplam Sembolü
$\mu(x)$	Üyelik Fonksiyonu
c	Yayılm Miktarı
\hat{Y}	Y'nin Beklenen Değeri
$E(Y)$	Y'nin Beklenen Değeri
Y_i^L	\tilde{Y}_i nin Tahminlenen Alt Sınırı
Y_i^U	\tilde{Y}_i nin Tahminlenen Üst Sınırı

KISALTMA LİSTESİ

BDR	Bulanık Doğrusal Regresyon
BDRA	Bulanık Doğrusal Regresyon Analizi
BEKK	Bulanık En Küçük Kareler
BM	Bulanık Mantık
BRA	Bulanık Regresyon Analizi
BRY	Bulanık Regresyon Yöntemi
EKK	En Küçük Kareler
HFR	Hybrid Fuzzy Regression
KDR	Klasik Doğrusal Regresyon
KDRA	Klasik Doğrusal Regresyon Analizi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Klasik ve bulanık mantık şematik gösterimi	6
Şekil 2.2	Klasik mantıkta örnek sıcaklık grafiği	9
Şekil 2.3	Bulanık mantıkta örnek sıcaklık grafiği	9
Şekil 2.4	Üçgen (Triangular) Üyelik Fonksiyonu	10
Şekil 2.5	Yamuk (Trapezoidal) Üyelik Fonksiyonu	12
Şekil 2.6	Gauss Üyelik Fonksiyonu	13
Şekil 2.7	Yediye Yakın Sayılar	16
Şekil 3.1	Teslim hacmi için saçılım grafiği	18
Şekil 3.2	Teslim süresi ve teslim hacmi arasındaki doğrusal ilişki	19
Şekil 3.3	Noktalar uygun doğru çizimi	22
Şekil 4.1	Bulanık doğrusal regresyonda değişkenler arası ilişki	35
Şekil 4.2	Bulanık Regresyon Üst Sınırın Oluşumu	37
Şekil 4.3	Bulanık Regresyon Alt Sınırın Oluşumu	37
Şekil 5.1	BDR Veri Seti Grafiği	39
Şekil 5.2	KDR Veri Seti Grafiği	41
Şekil 5.3	KDRA & BDRA Karşılaştırmalı Grafik	42
Şekil A.1	Bulanık Veri Seti Grafiği Matlab Kodu	50
Şekil A.2	Bulanık Veri Seti Grafiği Matlab Çizimi	51
Şekil A.3	Klasik Veri Seti Grafiği Matlab Çizimi	53
Şekil A.4	Klasik Veri Seti Grafiği Matlab Kodu	54

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1	Bulanık küme işlemlerinin gösterimi.	14
Tablo 3.1	Örnek için veriler - 1987 yılı fiyatlarıyla, milyar TL.	24
Tablo 4.1	Klasik ve bulanık regresyon arasındaki farklılıklar.	29
Tablo 4.2	Bulanık regresyonun avantajları ve dezavantajları	29
Tablo 4.3	Bulanık regresyon yöntemleri karşılaştırmalı sınıflandırma	30
Tablo 4.4	Klasik ve Tanaka regresyon modellerinin karşılaştırılması	34
Tablo 5.1	Bulanık veri	38
Tablo 5.2	Klasik veri	40

KLASİK REGRESYON İLE BULANIK REGRESYONUN KARŞILAŞTIRILMASI

İrem DEMİR

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN
Eş-Danışman: Doç. Dr. Reşit ÇELİK

Bulanık mantık, 1965 senesinde Zadeh tarafından geliştirilmiş, belirsizlik içeren durumların analizinde kullanılan ve klasik (geleneksel) mantığın yetersiz kaldığı alanlarda seçenек sunan bir yaklaşımdır. Bu mantığın temelini bulanık kümeler oluşturmaktadır ve günümüzde pek çok sektörde olduğu gibi istatistiksel analizlerde de kullanılmaktadır.

Regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemek için kullanılan temel bir istatistiksel yöntemdir. Ancak verilerin kesin olmadığı ya da sistemde belirsizliklerin bulunduğu durumlarda bulanık regresyon analizi tercih edilmektedir. Bu analiz yöntemi, klasik regresyonun uygulanamadığı belirsiz yapılarda alternatif bir çözüm sunar.

Bu çalışmanın temel amacı, verilerin kesin değerler içermediği durumlarda, bulanık sayılar aracılığıyla bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya koymak ve bu ilişkiye dayalı tahminlerde bulunmak, örnek veri üzerinden klasik ve bulanık regresyon analizini karşılaştırarak tablo ve grafik yardımıyla yorumlamaktır.

Tezin birinci bölümünde, konuyla ilgili literatür incelemesine yer verilmiş ve çalışmanın amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümünde, bulanık mantık ve bulanık küme kavramları açıklanmış; ayrıca bulanık kümelerle gerçekleştirilen işlemler ile bulanık sayılar ve üyelik

fonksiyonları konularından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde klasik regresyon analizi örnek ve grafiklerle açıklanmış; hata terimi ve tahmini ile ilgili bilgiler sunulmuştur.

Dördüncü bölümde ise bulanık regresyon analizi ile bu analizde kullanılan yöntemler detaylı olarak ele alınmış; bulanık regresyon analizinin avantajları ve dezavantajlarına değinilmiştir.

Beşinci bölümde klasik ve bulanık regresyon bir örnek üzerinden karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölüm olan sonuç bölümünde ise incelenen yöntemler ve verilen örnekten elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Ekler kısmında ise verilen örneğin MATLAB kodu ve çizimine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık mantık, regresyon analizi, bulanık doğrusal regresyon analizi, bulanık regresyon analizi, bulanık en küçük kareler, klasik regresyon analizi.

ABSTRACT

COMPARISON OF CLASSICAL REGRESSION AND FUZZY REGRESSION

İrem DEMİR

Department of Maths
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. E. Mehmet ÖZKAN
Co-supervisor: Assoc. Prof. Dr. Reşit ÇELİK

The fuzzy logic was developed by Zadeh in 1965, is an approach used to analyze uncertain situations and it offers alternatives when classical (traditional) logic was disabled areas. The foundation of this logic is based on fuzzy sets. Nowadays they used in both of many sectors and statistical analysis widely.

The regression analysis is a fundamental statistical method used to obtain the relationship between the variables. However, the fuzzy regression analysis is preferred uncertain datas or the system contains uncertainties in the situations. This analysis method presents an alternative solutions when classical regression cannot be applied.

The main purpose of this study is to reveal the relationship between dependent and independent variables through fuzzy numbers in cases where the data does not contain certain values, to make predictions based on this relationship, to compare classical and fuzzy regression analysis on sample data and to interpret it with the help of tables and graphics.

In the first chapter of the thesis, it is presented obtaining of literature with related subject, and it defined the aim of the study.

In the second chapter, the concepts of fuzzy logic and fuzzy sets are explained. Also, it mentioned realization of operations with fuzzy sets, fuzzy numbers, and subjects of membership functions.

The third chapter, the classical regression analysis explained with examples and graphs and it presented informations with related error term and estimations.

In the fourth chapter, the fuzzy regression analysis and its methods are approached with details and it mentioned advantages and disadvantages of fuzzy regression analysis.

In the fifth chapter, the classical and the fuzzy regression are compared with an example.

In the sixth and final chapter, it compared methods and the results of based on the given example in the conclusion section.

In the appendix section, it mentioned the MATLAB code and drawing of based on the given example.

Keywords: Fuzzy logic, regression analysis, fuzzy linear regression analysis, fuzzy regression analysis, fuzzy least squares, classical regression analysis.

1.1 Literatür Özeti

Bulanık mantık kavramı ortaya atılana kadar geleneksel yani klasik mantığa göre bir ifadenin doğruluk değeri 0 veya 1 olmak üzere iki kesin değerden oluştuğu bilinmektedir. Bu iki değerli mantık kuramı, günlük hayatımızın karmaşık yapısını açıklamak için yetersiz kaldığı için bir takım durumları açıklamakta zorlanmaktadır. Geleneksel mantıkta belirsizlik bilimselliğin dışına itildiğinden günlük yaşamdaki bir dizi göreceli durumlar bilimsel olmanın dışında kalmıştır. Fakat 19. yüzyılın sonlarında Heisenberg tarafından belirsizlik kavramının öne sürülmesi, belirsizliğin bilimsel alanda kullanılmasına sebep olmuştur. Böylece çok değerlilik bilimsel alanda kullanılmaya başlanmıştır. İlk kez 1930 senesinde Lukasiewicz, üç değerli mantık sistemini öne sürmüştür. Aynı zamanda Black, sürekli değere sahip mantık sistemini önermiştir. Adı geçen isimler ilk kez çok değerli mantık sistemini başlatan isimler olmuştur. Fakat ilk sistemli çok değerli mantığın kurucusu Azerbaycan kökenli Prof. Dr. Lotfi A. Zadeh'tir [1, 2]. 1965'te Zadeh tarafından "Bulanık Kümeler" makalesinde ilk kez bulanık mantık kavramı ortaya atılmıştır [1, 3]. Zadeh, [1] adlı çalışmasında, bulanık mantığın günlük yaşamı nasıl daha iyi modelleyebileceğini düşünmüş ve insan zekası ile mantığı ilişkilendirerek insan zekasına yakın bir düşünme biçimi sunduğunu öne sürmüştür [1, 2].

Bulanık mantık, özellikle kontrol sistemleri, yapay zeka, veri analizi ve karar verme süreçlerinde kullanılır. Bunun yanı sıra, otomatik pilot sistemleri, akıllı ev sistemleri ve birçok mühendislik uygulamasında da önemli bir rol oynar. Bulanık mantık ile insan aklının yapabileceği çokça eylem bilgisayar destekli makineler ile gerçekleştirilebilir boyuta gelmiştir. Gün geçtikçe önemi artan bulanık mantık, günümüzde yapay zeka, akıllı ev sistemleri, otomotiv, bilgisayar destekli robotlar, elektronik aletler, veri analizi gibi pek çok alanda kullanıldığı üzere regresyon analizinde de kullanılmaktadır [2].

Zadeh'in bulanık kümeler kavramını ortaya koymasıyla birlikte, regresyon

modellerinde belirsiz ve bulanık bilgiyi dikkate alan yaklaşımlar geliştirilmeye başlanmış ve bu yaklaşımlar çeşitli bilim alanlarında başarıyla uygulanmıştır.

Bulanık regresyon analizi üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında, literatürdeki gelişmeler genel olarak aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

- Tanaka ve arkadaşları 1982 senesinde [4]'te bulanık modele sahip regresyon analizindeki ilk çalışmayı öne sürerek bulanık regresyon alanında önemli bir adım atmıştır. Bu modelde, doğrusal regresyon analizine bulanıklık kavramı entegre edilmiştir. Çalışmada, girdi (bağımsız) ve çıktı (bağımlı) değişkenlerinin bulanık olmadığı yani net ve kesin değerler olduğu kabul edilir. Ancak, sistem bilgisi bulanık olarak ele alınır. Bu durumda amaç, bağımlı değişkenin tahmin değerinin yayılmasını minimize etmek yani tahminlerin belirsizliğini en aza indirmek olarak belirlenmiştir. Modelin çözümü için lineer programlama tekniği kullanılır [5].
- Diamond 1988 yılında bulanık en küçük kareler yöntemini tanıtmıştır [6]. Peter Diamond bu çalışmasında klasik en küçük kareler yönteminin bulanık veri yapılarıyla nasıl genelleştirilebileceğini ele almış ve regresyon modellemesinde bulanıklıkla başa çıkmak için yeni bir yaklaşım sunmuştur. Bu çalışma, bulanık regresyon literatüründe önemli bir dönüm noktası olarak kabul edilir [7].
- Moskowitz ve Kim 1993 senesinde [8]'de, bulanık doğrusal regresyonda kullanılan bulanık parametrelerin yayılmaları incelemiş, parametrelerin belirsizliklerinin modelin sonuçlarına nasıl etki ettiğini belirtmiştir. Üyelik fonksiyonlarının yapısı ile H parametresi arasındaki ilişkiyi ele almışlardır. Ayrıca, farklı üyelik fonksiyonu türlerinin ve H değerinin, modelin yayılım hassasiyeti üzerindeki etkilerini detaylı olarak incelemişlerdir.
- Chang ve Lee'nin 1996 senesinde [9]'da öne sürdüğü "Genelleştirilmiş Bulanık Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi" (Generalized Fuzzy Weighted Least Squares Method), bilhassa aykırı değerlerin etkilerini yönetmeye yönelik bir yaklaşım sunar.
- Yang ve Ko 1997 senesinde, [10]'da basit doğrusal regresyon modeli için ağırlıklandırılmış bulanık en küçük kareler yöntemine dayanan yinelemeli (iteratif) bir algoritma önermiştir. Bu algoritma iki aşamalı bir yapıya sahiptir. İlk aşamada, gözlemlerin hangi sınıfa ait olduğunu belirlemek amacıyla uygun bir bulanık sınıflandırma yöntemi seçilmekte ve verilerin belirli bulanık kümelere ne derecede "üye" olduğunu ölçer ve üyelik değerleri hesaplanmaktadır. İkinci aşamada ise hesaplanmış olan bu üyelik değerleri regresyon analizinde ağırlık olarak kullanılır. Bu çalışmanın amacı belirsizlik içeren veya aykırı değerler barındıran

veri kümelerinde regresyon analizini daha sağlam düzeye getirmektedir.

- Chang'ın 1997 senesinde geliştirdiği bulanık tahminleme tekniği, zaman serilerinde mevsimselliği ele almayı hedeflemiştir. Mevsimsel bileşenlerin bulanık mantık kuralları kullanılarak tahminlenmesi zaman serisi verilerindeki karmaşıklıkları daha iyi modeller [11].
- Wang ve Tsaur 2000 senesinde [12]'de, Tanaka tarafından ortaya konulan ve bulanık olmayan bağımsız değişkenlerle bulanık bağımlı değişkenleri içeren regresyon modeline yönelik olarak, geliştirilmiş bir bulanık en küçük kareler yöntemi önermiştir.
- Ishibuchi ve Manabu'nun 2001 senesinde bulanık regresyon yönteminin simetrik üçgen bulanık sayılar ile sınırlı kalmasından ötürü meydana gelen bazı kısıtlamaların üstesinden gelmek amacıyla asimetric üçgen ve yamuk sayı tipine geçiş yaparak bulanık regresyon yöntemlerinin daha esnek bir şekilde gerçekleşmesini sağlamıştır. [13]'te bulanık regresyon ile klasik regresyon arasındaki farkları kapsamlı bir şekilde ele alarak bu iki yöntemin farklılıklarını detaylandırmıştır.
- Chang ve Bilal' in 2001 senesinde [14]'te, bulanık regresyon ile klasik regresyon arasındaki farkları incelemişlerdir. Çalışmada kapsamlı bir literatür taraması gerçekleştirilmiş ve bulanık regresyonun üç temel yaklaşımı özetlenmiştir. İlk yaklaşım, bulanıklığı en uygun ölçütler kullanarak en aza indirmeye odaklanmaktadır. İkinci yaklaşımda uygun kriter olarak hataların karelerinin toplamını minimize eden ölçütler kullanılmaktadır. Üçüncü yaklaşım ise verilerin belli aralıklar ile analiz edilmesini, sonuçların bu aralıklar ile değerlendirmesini içermektedir.
- Lee ve Chen 2001 senesinde [15]'te bulanık parametrelerle yapılan regresyon analizini genişleterek genelleştirilmiş bir bulanık doğrusal regresyon modeli önermişlerdir. Söz konusu modelde, bulanık parametrelerin belirlenebilmesi amacıyla doğrusal olmayan programlama yönteminden yararlanılmıştır.
- Tsaur ve arkadaşları 2002 senesinde [16]'da, senelik ve mevsimsel değişimin önemli olduğu endüstri alanında bulanık regresyon yönteminin uygulandığı bir metot öne atmışlardır. Ortalama tahmin hataları sırasıyla % 2,91 ve % 4,29 olarak hesaplanan iki zaman serisi analizine kıyasla, önerilen bulanık regresyon analizinde bu oran % 1,85'e düşmüştür.
- Wu ve Tseng 2002 senesinde [17]'de, en küçük kareler yaklaşımına dayalı

olarak, bulanık parametrelerin tahmin edildiği bir bulanık regresyon modeli geliştirmişlerdir [18].

Yang ve Lin 2002 senesinde [19]'da, hem bulanık bağımsız değişkenler hem de bulanık bağımlı değişkenler içeren yapılar için, bulanık en küçük kareler yaklaşımına dayalı iki farklı tahmin yöntemi önerilmiştir. Ayrıca, heterojen veri kümeleri ve aykırı gözlemleri tespit edebilmek amacıyla kümeleme analizinden faydalanılmıştır.

Yang ve Liu 2003 senesinde [20]'de ise etkileşimli bulanık doğrusal regresyon modelleri kapsamında, aykırı değerlere karşı dirençli bir bulanık en küçük kareler algoritması geliştirmiştir. Bu algorithmada, ortogonallik koşulları optimizasyon problemine kısıt olarak entegre edilmiştir.

Wu (2003) [21]'de, bulanık küme teorisinde yer alan çözüm benzerliği kavramını kullanarak, regresyon katsayılarının bulanık tahminlerini elde etmeye yönelik bir yöntem geliştirmiştir.

Hong, Hwang ve Ahn (2004) [22]'de, öğrenme algoritmalarını kullanarak, bulanık doğrusal regresyon modeli için alternatif bir tahminleme yaklaşımı sunmuştur.

Nasrabadi (2004) [23]'te, hem bağımlı hem de bağımsız değişkenlerin bulanık veya kesin olabileceği durumları dikkate alarak, matematiksel programlamaya dayalı bir tahminleme yöntemi önermiştir.

Hojati, Bector ve Smimou (2005) [24]'te, yalnızca bağımsız değişkenlerin bulanık olduğu durumlar ile hem bağımlı hem de bağımsız değişkenlerin bulanık olduğu senaryoları ele alarak, bulanık düşünce sistemi altında yeni bir tahmin yöntemi geliştirmiştir [18].

1.2 Tezin Amacı

Çalışmamın amacı aşağıda verilmiştir.

- * Bulanık mantık ve bulanık kümeler hakkında bilgi vermek,
- * Bulanık regresyon modelleri ve yöntemlerini detaylı olarak öğrenmek,
- * Bulanık regresyon uygulamalarını incelemek,
- * Bu konu ile ilgili ileriye yönelik yorumlar ortaya koymak,
- * Bulanık mantık kavramına dayalı regresyon yöntemleri ile klasik regresyon analizi karşılaştırılarak verileri tablo ve grafik yardımıyla yorumlamak.



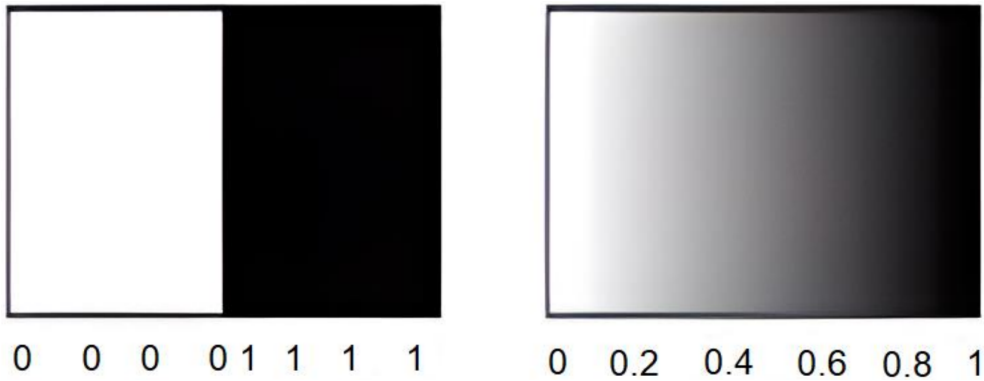
2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanıklık ve Bulanık Mantık Kavramı

Günlük yaşamda pek çok kelime kullanırız. Bu kelimelerin genelini yapısı bulanıktır. Büyük, küçük, sert, yumuşak, güçlü, zayıf, yakın, uzak, ucuz, çok ucuz, uygun, pahalı, çok pahalı, orta, oldukça fazla gibi bir çok sözel ifade bu kelimelere örnek olarak verilebilir. Bir durumu ifade ederken bu tür belirsiz, net olmayan sözel ifadeler kullanırız.

Bir odanın ışık alma durumuna göre aydınlık, loş veya karanlık ifadelerini kullanırız. Eğer telefonumuzun ekranına baktığımızda okumakta zorlanıyorsak ekran ışığını biraz açarız. Eğer hala okuma gücümüzü çekersek ışığını biraz daha artırır yeterinden fazla arttırdıysak biraz kısarız. Tüm bu olaylar, netlik içermeyen, belirsiz durumlara karşı insan beyninin olayları nasıl algılayıp değerlendirdiğine dair bir örnek olarak verilebilir [25].

Şekil 2.1,'de klasik mantık görselindeki renk geçişi keskin iken bulanık mantıkta durum tam tersi olup geçiş bulanıktır. Kesin sonuçlarda cevap ya 0 ya 1 iken bulanık sonuçların 0 ile 1 arasındaki tüm değerleri alabildiğini görmekteyiz [3].



Şekil 2.1 Klasik ve bulanık mantık şematik gösterimi

2.2 Bulanık Küme Teorisi

Zadeh, bulanıklığın temelde bir derecelendirme meselesi olduğunu öne sürmüş ve bu yaklaşımı bulanık kümeler aracılığıyla temellendirmeye çalışmıştır. Klasik (kesin) küme teorisinde, bir nesnenin bir kümeye ait olup olmaması net biçimde belirlenir; yani üyelik ya tamdır (1) ya da hiç yoktur (0). Bu yapı ikili (binary) bir mantığa dayanır [25, 26]. Ancak bulanık küme kavramı, bu ikili üyelik anlayışını genişleterek çok değerli (multi-valued) bir üyelik sistemine dönüştürür. Böylece bir elemanın bir kümeye aitliği, 0 ile 1 arasında değişen bir üyelik derecesiyle ifade edilir. Lotfi A. Zadeh tarafından 1965 yılında geliştirilen bulanık küme teorisi (fuzzy set theory), klasik üyelik kavramını kısmi üyelik dereceleri ile genelleştirerek daha esnek bir yapı sunmuştur.

Bulanık kümeler, her ögenin bir kümeye aitliğini $[0,1]$ aralığında tanımlayan bir üyelik fonksiyonu (membership function) aracılığıyla ifade edilir. Burada “0” değeri ögenin kümeye hiç ait olmadığını, “1” değeri ise tam olarak ait olduğunu belirtirken; aradaki değerler, ögenin kümeye kısmen ait olduğunu gösterir (Zadeh, 1965).

Bu kavramı daha iyi anlamak için günlük yaşamdan bazı örnekler verilebilir. Örneğin, çeşitli elmalardan oluşan bir “elmalar” kümesi düşünelim. Bu elmaların tamamı bu kümeye tam üyedir. Ancak bir elmanın bir parçası yendiğinde, artık bu elma hâlâ bir elma mıdır sorusu ortaya çıkar. Her ısırıkla birlikte elma olma özelliği biraz daha kaybolur. Bu durumda elma, artık klasik anlamda “tam üye” ya da “üye değil” olarak tanımlanamayabilir; ama “kısmen elma” olarak ifade edilebilir [26].

Benzer şekilde, bir cetveli alıp ikiye böldüğümüzde, ortaya çıkan parça hâlâ bir cetvel olabilir. Ancak bu bölme işlemini sürdürdükçe, nesnenin “cetvel” olma niteliği giderek azalır. Nihayetinde nesne, cetvel olmaktan tamamen çıkabilir. Bu tür sınırları belirsiz kavramlar için bulanık kümeler, daha gerçekçi bir modelleme sunmaktadır [1, 25, 26].

Herhangi bir bulanık küme, elemanlarının kümeye aitlik derecelerini belirten bir karakteristik fonksiyon ya da üyelik fonksiyonu aracılığıyla ifade edilebilir [25].

Tanım 2.1. Bulanık Küme

Bir bulanık küme olan \tilde{A} , U üzerinde tanımlanır ve her bir elemana $[0,1]$ aralığında bir değer atayan bir üyelik fonksiyonu “ $\mu_A(x)$ ” ile ifade edilir. Bu nedenle \tilde{A} kümesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \{x, \mu_A(x) / x \in U\} \\ \mu_A &: X \rightarrow [0, 1]\end{aligned}\tag{2.1}$$

Bulanık küme tanımı sayesinde, klasik kümelerden farklı olarak bir elemanın kümeye aitliği mutlak değil, dereceli olarak değerlendirilir.

Bulanık olarak tanımlanan problemlerin çözüm sürecinde, üyelik fonksiyonları önemli bir rol oynar. Bir elemanın ilgili kümeye ne ölçüde dahil olduğunu belirleyen bu fonksiyonların çıktısına üyelik derecesi adı verilir. Üyelik derecesi, μ_A , x ögesinin bulanık kümeye ne düzeyde ait olduğunu gösterir. \tilde{A} kümesine ait üyelik dereceleri aşağıda verilmiştir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in X, \\ (0, 1) & x \text{ kısmen } A \text{ kümesinin elamanıdır}, \\ 0, & x \notin X. \end{cases} \quad (2.2)$$

Bu denklemlerde; U, kesin küme olan uzay kümesini, x ise U kümesinin elemanlarını temsil etmektedir ve kesin sayıdır. $\mu_A(x)$ ise x in \tilde{A} bulanık kümesindeki üyelik değeridir. x in, \tilde{A} kümesine ne derecede üye olduğunu temsil etmektedir [25, 27].

Örnek:

Şekil 2.2’de yer alan sıcaklık grafiği, klasik mantık çerçevesinde oluşturulmuştur. Bu grafikte sıcaklık değerleri, 0°C ile 25°C aralığında *soğuk*, 25°C ile 50°C aralığında ise *sıcak* olarak tanımlanmıştır. Klasik küme anlayışına göre geçişler ani ve keskindir. Bu nedenle 24°C ve 26°C sıcaklık değerleri için üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi hesaplanır :

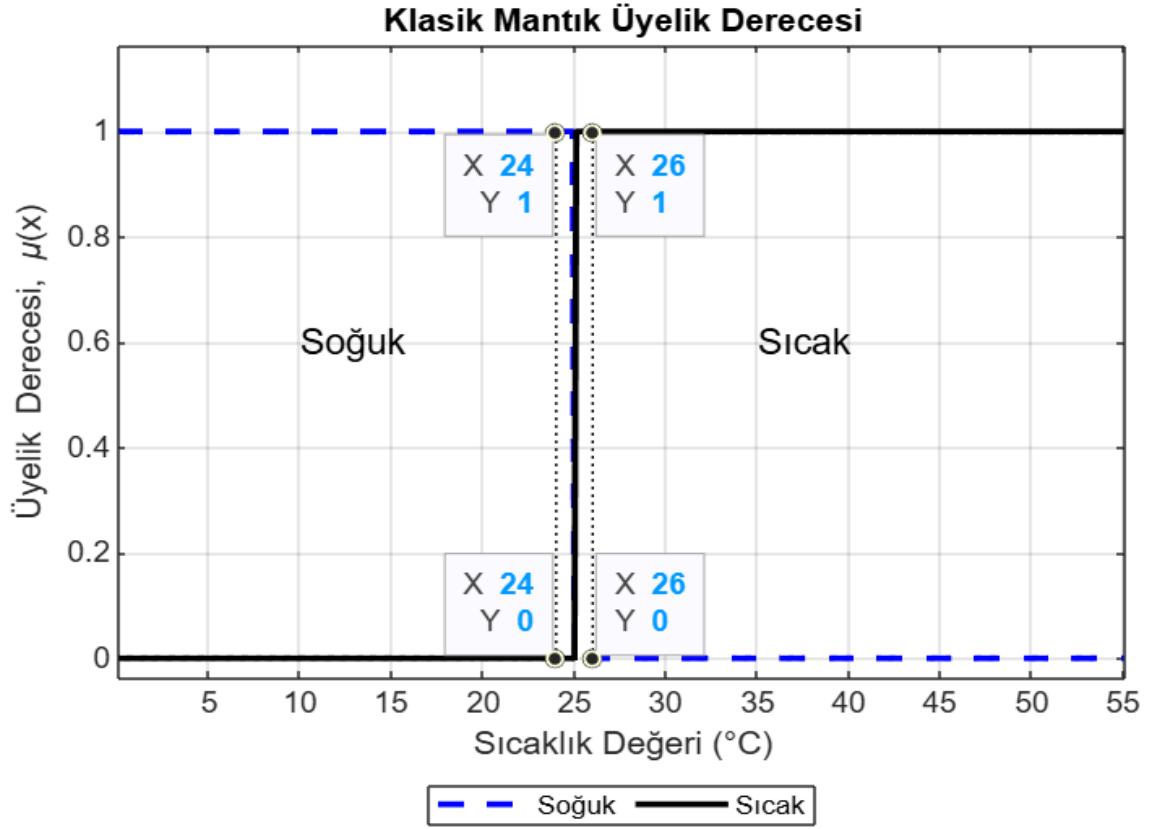
$$\mu_{\text{soğuk}}(24) = 1, \quad \mu_{\text{sıcak}}(24) = 0, \quad \mu_{\text{soğuk}}(26) = 0, \quad \mu_{\text{sıcak}}(26) = 1$$

Bu durumdan hareketle, 24°C yalnızca “soğuk” ve 26°C yalnızca “sıcak” olarak değerlendirilir. Klasik mantığın katı sınırları gereği, 24.99°C için üyelik değeri hâlâ 0, 26.01°C için ise 1 kabul edilmektedir. Sadece 0.01°C’lik bir fark bile sıcaklığın tamamen farklı bir kümeye dahil edilmesine neden olmaktadır [28].

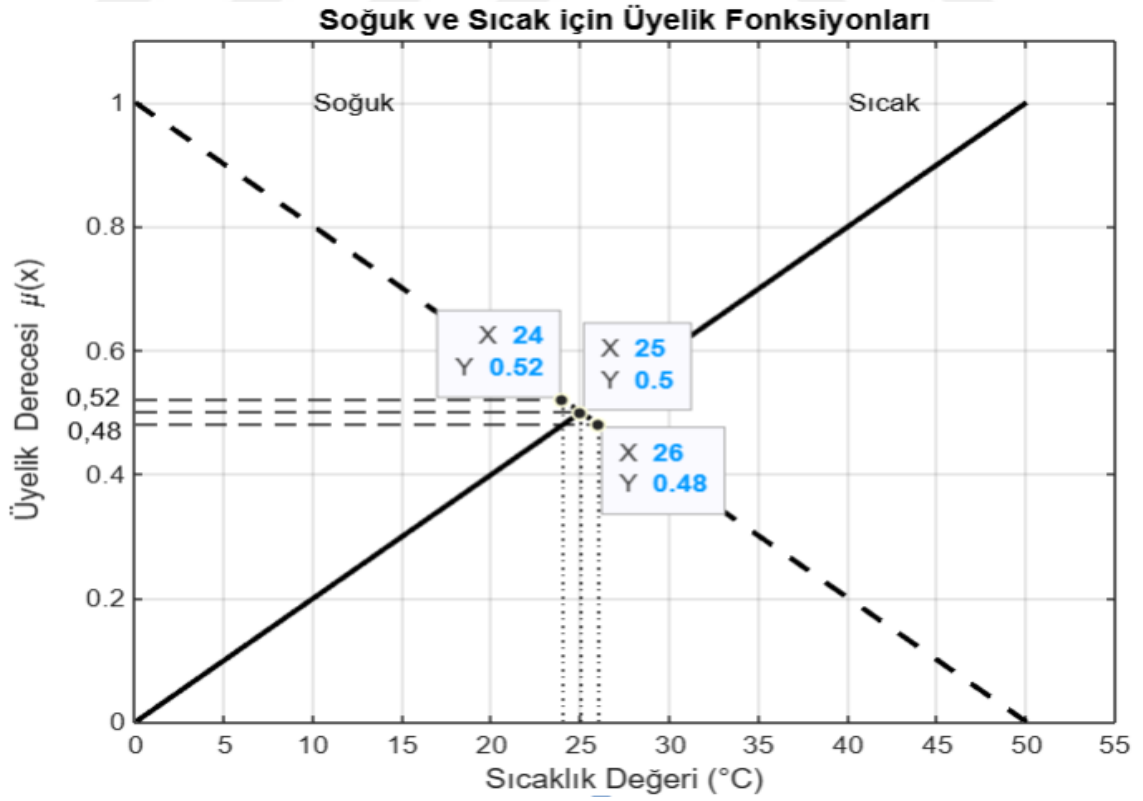
Bunun aksine, Şekil 2.3’te gösterilen bulanık mantık temelli sıcaklık grafiğinde *soğuk* ve *sıcak* kümeleri arasında yumuşak geçişler yer alır. Bu grafikte aynı sıcaklık değerleri için hesaplanan üyelik fonksiyonları şu şekildedir:

$$\mu_{\text{soğuk}}(24) = 0.52, \quad \mu_{\text{sıcak}}(24) = 0.48, \quad \mu_{\text{soğuk}}(26) = 0.48, \quad \mu_{\text{sıcak}}(26) = 0.52$$

Bu hesaplamalar, 24°C’nin hem *soğuk* hem de *sıcak* kümelerine kısmen ait olabileceğini ortaya koyar. Aynı şekilde, klasik mantıkta yalnızca “1” olan üyelik değeri bulanık mantıkta örneğin 0.48 gibi ara değerler de olabilir.



Şekil 2.2 Klasik mantıkta örnek sıcaklık grafiği



Şekil 2.3 Bulanık mantıkta örnek sıcaklık grafiği

Bu örnek, klasik mantığın sadece 0 ve 1 değerleriyle sınırlı olduğunu; buna karşın bulanık mantığın $[0, 1]$ aralığındaki tüm değerleri kapsayabildiğini göstermektedir. Bu sayede sistemler daha esnek ve gerçek dünya koşullarına daha uygun şekilde modellenebilir [3].

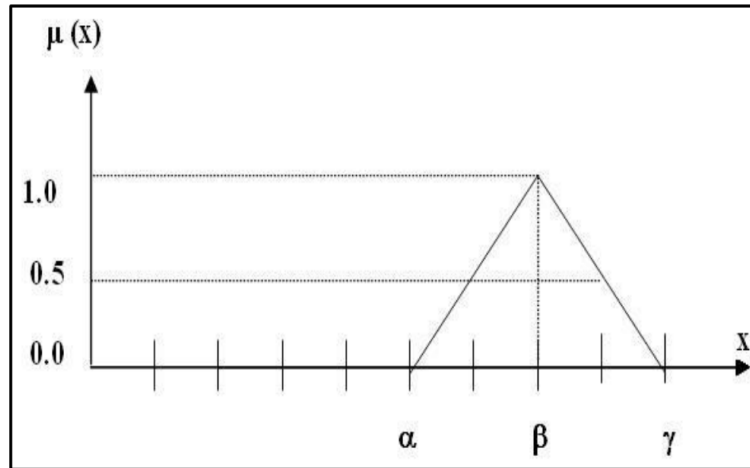
Bulanık mantığa dayalı bir sistemin ilk adımı, verilerin bulanıklaştırılmasıdır. Bu aşamada sayısal veriler, uygun üyelik fonksiyonları yardımıyla $[0, 1]$ aralığında değerlere dönüştürülür[27].

2.3 Üyelik Fonksiyonları ve Bulanık Sayılar

Bulanık kümeler, aynı zamanda üyelik fonksiyonları aracılığıyla tanımlanabilir. Bu fonksiyonlar, çoğunlukla normal ve dışbükey özelliklere sahiptir ve bu özellikler doğrultusunda matematiksel olarak ifade edilebilirler. En yaygın kullanılan üyelik fonksiyonu türleri üçgensel, yamuksal ve Gauss eğrisi şeklinde olanlardır. Bununla birlikte, bazı özel geçiş bölgelerinde daha karmaşık biçimlere sahip üyelik fonksiyonları da geliştirilmiştir [29].

2.3.1 Üçgen Üyelik Fonksiyonu

Üyelik fonksiyonları arasında en basit ve yaygın kullanılan türlerinden biri olan üçgensel üyelik fonksiyonu tanımlamak için alt sınır, üst sınır ve tepe noktası olmak üzere üç karakteristik değer kullanılır (Şekil 2.4) [29].



Şekil 2.4 Üçgen (Triangular) Üyelik Fonksiyonu

Üçgen bulanık sayılar, $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ biçiminde ifade edilen özel bir bulanık küme türüdür. Bu gösterimde:

- α : Kümenin olası en küçük değeri (başlangıç noktası),

- β : Elemanın kümeye tam olarak ait olduğu değer (en yüksek üyelik derecesi),
- γ : Kümenin olası en büyük değeri (bitiş noktası) olarak tanımlanır. [30]

Bu küme için üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır: [29]

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ \frac{\gamma-x}{\gamma-\beta}, & \beta \leq x \leq \gamma \\ 0, & x > \gamma \end{cases} \quad (2.3)$$

veya daha kısa bir ifade ile,

$$\mu(x) = \max \left[\min \left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, 1, \frac{\sigma-x}{\sigma-\gamma} \right), 0 \right] \quad (2.4)$$

olur.

Bu tanımda β noktasında üyelik değeri 1'e ulaşırken, α ve γ noktalarında bu değer 0 olmaktadır. Üyelik fonksiyonunun grafiği üçgen şeklini aldığı için bu tür kümeler "üçgen bulanık sayı" olarak adlandırılmaktadır.

Burada α ve γ parametreleri dayanağın değişim aralığını, β ise üyelik derecesi 1 olan kısmı, yani bulanık kümenin çekirdek (öz) bölgesini temsil eder [29, 31].

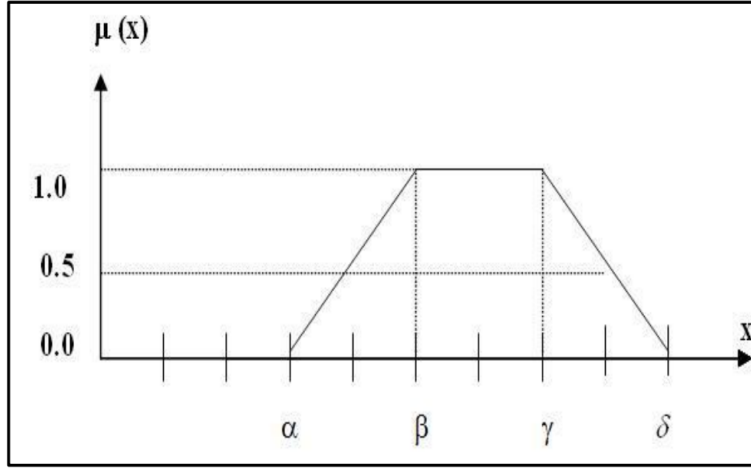
2.3.2 Yamuk Üyelik Fonksiyonu

Yamuk üyelik fonksiyonunun dayanak ve öz kısımlarını belirleyen dört temel değere sahiptir. Bu değerler sırasıyla α , β , γ ve θ olup şekil 2.5de gösterilmiştir. Bu üyelik fonksiyonunun matematiksel ifadesi aşağıdaki denklemle verilmiştir [29].

$$\mu(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} 0, & x < \alpha, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1, & \beta \leq x \leq \gamma, \\ \frac{\theta-x}{\delta-\gamma}, & \gamma \leq x \leq \delta, \\ 0, & x \geq \delta. \end{cases} \quad (2.5)$$

veya daha kısaca,

$$\mu(x) = \max \left[\min \left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \frac{\delta-x}{\delta-\gamma} \right), 0 \right] \quad (2.6)$$



Şekil 2.5 Yamuk (Trapezoidal) Üyelik Fonksiyonu

şeklinde yazılabilir [29, 31].

Parametrelerin Anlamı

- α : Üyelik derecesi bu noktadan itibaren 0'dan artmaya başlar.
- β : Üyelik derecesinin 1'e ulaştığı alt eşik.
- γ : Üyeliğin 1 olduğu son noktadır. Üyelik derecesi bu noktadan itibaren azalmaya başlar.
- δ : Üyeliğin tekrar 0'a düştüğü bitiş noktasıdır.

Fonksiyonun Davranışı

- $[\alpha, \beta]$ aralığında: Üyelik derecesi doğrusal olarak 0'dan 1'e yükselir.
- $[\beta, \gamma]$ aralığında: Üyelik derecesi sabit kalır ve 1 olur. Bu aralık öz (*çekirdek*) kısmı temsil eder.
- $[\gamma, \delta]$ aralığında: Üyelik derecesi doğrusal olarak 1'den 0'a düşer.

Özel Durumlar

- Eğer $\beta = \gamma$ ise, fonksiyon üçgensel üyelik fonksiyonu haline gelir.
- Eğer $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ ise, bu durum yalnızca tek bir noktada 1 değerini alan **tekil (kesin)** üyeliği ifade eder [29].

2.3.3 Gauss Üyelik Fonksiyonu

Gauss üyelik fonksiyonu, değişkenin bir kümeye olan aitlik derecesini simetrik ve yumuşak geçişli bir yapı ile tanımlayan bir üyelik fonksiyonu türüdür. Matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

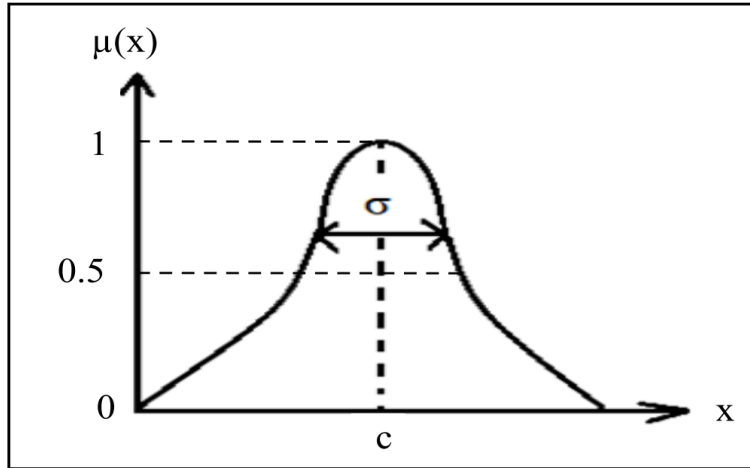
$$\mu(x; c, \sigma) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.7)$$

Parametrelerin Anlamı

- c : Eğrinin tepe noktasıdır. Bu noktada üyelik derecesi maksimumdur, yani $\mu(x) = 1$. Bu değer, değişkenin kümeye tam olarak ait olduğu noktayı temsil eder.
- σ : Eğrinin yayılım genişliğini belirleyen parametredir. İstatistikteki *standart sapma* kavramına karşılık gelir. σ arttıkça eğri yatayda genişler; σ azaldıkça eğri daralır.

Fonksiyonun Özellikleri

- $\mu(x)$, $x = c$ noktasında maksimum değere (1) ulaşır.
- Fonksiyon simetrik yapıdadır [29].



Şekil 2.6 Gauss Üyelik Fonksiyonu

2.4 Bulanık Küme İşlemleri

Bulanık küme işlemlerinin gösterimi 2.1’de özetlenmiştir [3].

Tablo 2.1 Bulanık küme işlemlerinin gösterimi.

Küme Gösterimi	Küme İşlemi	Küme Açıklaması
Eşitlik ($A=B$)	$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$	A ve B kümeleri aynı üyelik fonksiyonuna sahipse, eşittir.
Kesişim ($A \cap B$)	$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X$	Her bir eleman için A ve B kümelerindeki üyelik değerlerinin en küçüğü alınır.
Birleşim ($A \cup B$)	$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X$	Her bir eleman için A ve B kümelerindeki üyelik değerlerinin en büyüğü alınır.
Kapsama ($B \subseteq A$)	$\mu_B(x) \leq \mu_A(x), \forall x \in X$	A kapsar B’yi yani B kümesi, A kümesinin alt kümesidir; her eleman için B’nin üyeliği A’dan büyük veya eşittir.
Tümleyen Alma (A')	$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$	A kümesinin tamamlayıcı, her elemanın üyelik değerinin 1’den çıkarılmasıyla elde edilir.

2.5 α -Kesimleri Kavramı

Bulanık bir kümenin α -kesimi, üyelik fonksiyon değeri α veya daha yüksek olan elemanlardan oluşan klasik (bulanık olmayan) bir kümedir. Seçilen her $\alpha \in (0, 1]$ değeri, farklı bir α -kesim kümesi oluşturur. Her α düzeyi, üyelik fonksiyonunun belirli bir kesitini ifade eder.

Eğer $\alpha_1 < \alpha_2$ ise, bu durumda $A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$ kapsama ilişkisi geçerli olur. Başka bir deyişle, α değeri arttıkça, α -kesimi ile elde edilen klasik kümede yer alan eleman sayısı azalır.

Matematiksel olarak α -kesimi şu şekilde ifade edilir:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1] \quad (2.8)$$

Özellikle:

- $\alpha = 0$ için $A_0 = U$ (evrensel küme),
- $\alpha = 1$ için $A_1 = \text{kernel}(A)$ [32]

Bulanık sayılarda α -kesimleri, bu sayılarla cebirsel işlemler yapılabilmesi için gereklidir.

- $\alpha = 1$ olduğunda bulanık sayı, bir gerçek sayıya,
- $\alpha = 0$ olduğunda ise tam bulanık, yani aralık sayıya dönüşür,
- $0 < \alpha < 1$ aralığında ise, aynı bulanık sayının α seviyesinde kesilmesi ile ortaya kesik bulanık küme çıkacaktır.

Bir bulanık kümenin α -kesimindeki alt ve üst sınırlar sırasıyla α^- ve α^+ ile gösterilir. Bu durumda:

$$\tilde{A}_\alpha = [\alpha^-, \alpha^+] \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir [33].

Örnek:

Evrensel küme olarak $[0, 12]$ aralığında tanımlı olan *yediye yakın* sayılar, şekil üzerinde belirtilen üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanmıştır. Bu doğrultuda, $\alpha = 0,25$ ve $\alpha = 0,75$ düzeyleri için elde edilen α -kesim kümeleri klasik küme gösterimiyle şu şekilde ifade edilebilir:

$$\alpha = 0,25 \quad , \quad A_{0,25} = \{x \in U \mid 4 \leq x \leq 10\} \quad (2.10)$$

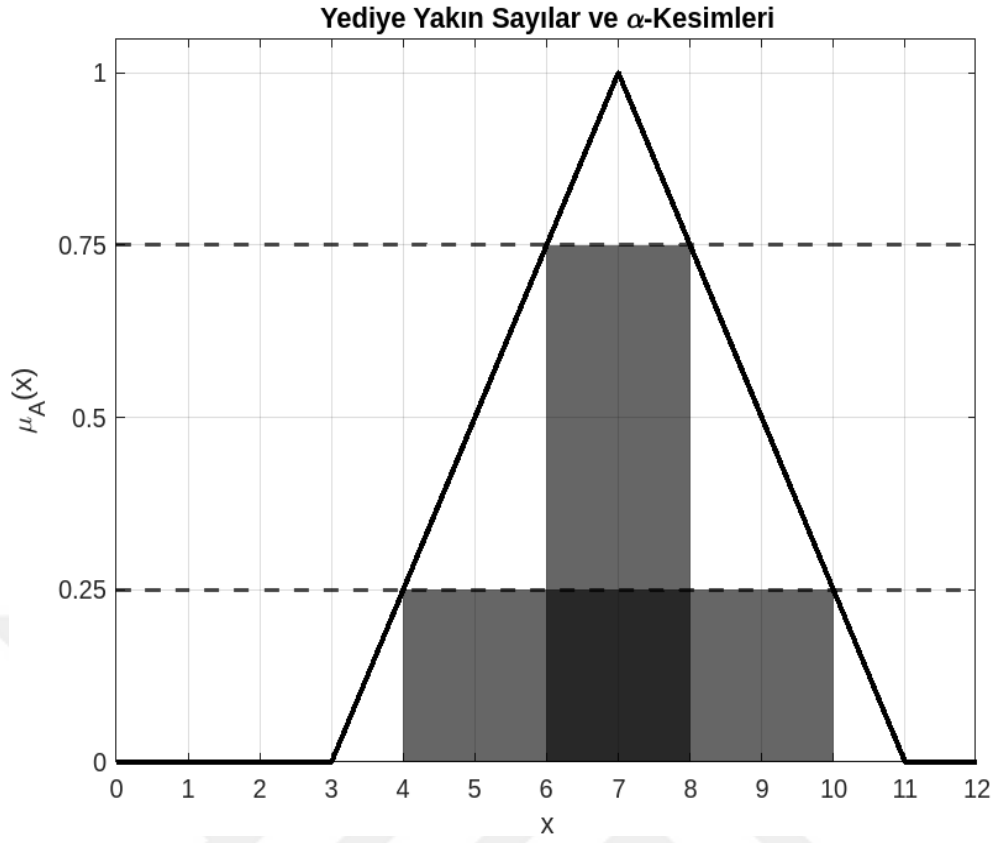
$$\alpha = 0,75 \quad , \quad A_{0,75} = \{x \in U \mid 6 \leq x \leq 8\} \quad (2.11)$$

Bulanık kümenin $\alpha = 0,25$ ve $\alpha = 0,75$ düzeyleri α -kesimindeki alt ve üst sınırlar sırasıyla 4, 6 ve 10, 8 olduğundan

$$\tilde{A}_{0,25} = [4, 10] \quad (2.12)$$

$$\tilde{A}_{0,75} = [6, 8] \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir [33].



Şekil 2.7 Yediye Yakın Sayılar

3

KLASİK REGRESYON ANALİZİ

Regresyon analizinin temel amacı, değişkenler arasındaki ilişkiyi fonksiyonel bir yapı içerisinde inceleyerek bu ilişkiyi anlamlı bir model aracılığıyla açıklamaktır [34]. Mühendislik, biyoloji, ekonomi, işletme vb. pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır [35].

Regresyon analizi, değişkenlerden birinin ya da bir değişkenin belirli bir kategorisininin sabit tutulması durumunda, diğer değişkenin bu sabit düzeye göre nasıl değiştiğini incelemeye dayanan istatistiksel bir yöntemdir. Modern istatistikte regresyon, bilinen değerlerden yola çıkarak bilinmeyen değerleri tahmin etme aracı olarak da tanımlanabilir.

Örneğin, bir öğretmen öğrencilerin derse devam durumları ile akademik başarıları arasındaki ilişkiyi analiz etmek amacıyla regresyon analizinden faydalanabilir. Bu analiz sonucunda elde edilen model, genellikle regresyon eğrisi olarak adlandırılır.

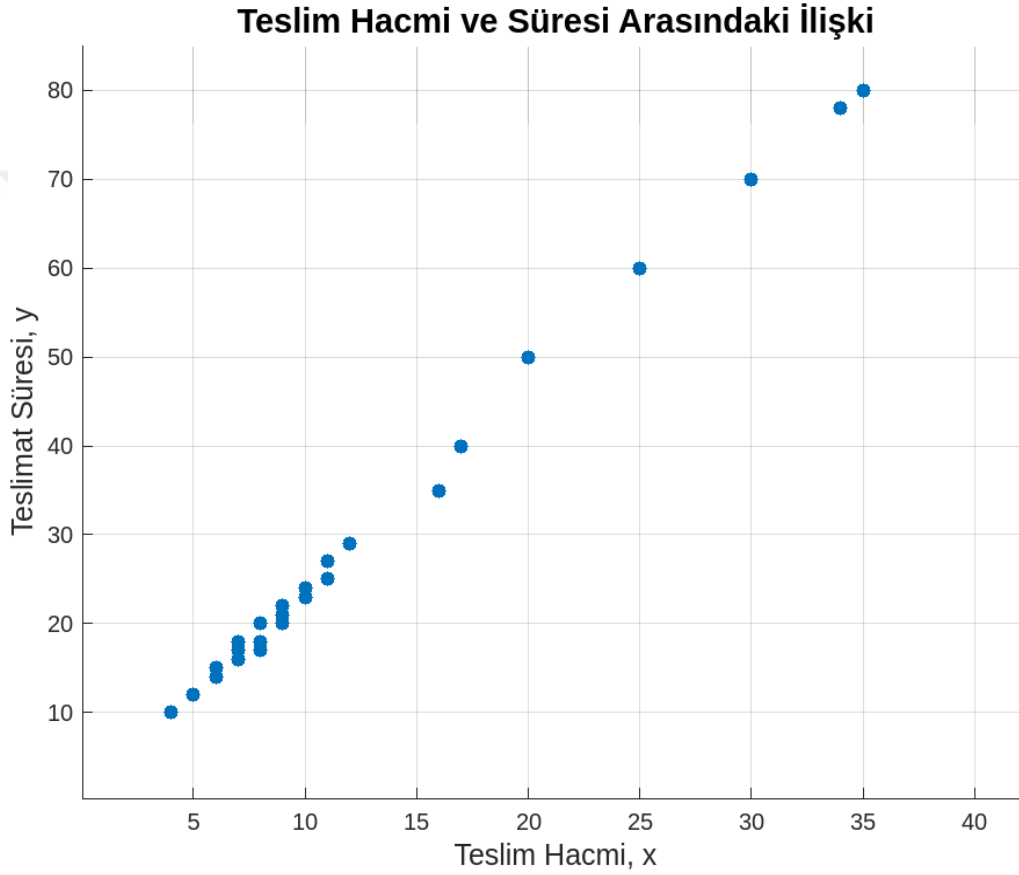
Regresyon, aynı zamanda yordama (tahmin) amacıyla da kullanılmaktadır. Bilinen veriler yardımıyla bilinmeyen durumlar hakkında geleceğe yönelik çıkarımlarda bulunmak, istatistiksel yordama sürecini oluşturur. Yordama işleminin doğruluğu ise değişkenler arasındaki korelasyon katsayısına bağlıdır.

Eğer iki değişken arasındaki korelasyon değeri 0 (sıfır) ise, bu durum aralarında istatistiksel olarak anlamlı bir ilişki bulunmadığını gösterir. Ancak korelasyon katsayısının sıfırdan farklı olması, değişkenler arasında belli bir ilişkinin varlığına işaret eder ve yapılan tahminlerin daha az hatalı olmasını sağlar. Korelasyonun +1.00 veya -1.00 gibi uç değerlere yakın olması, güçlü ve başarılı bir yordama yapılabileceğini gösterir. Buna karşın korelasyon değeri ± 1.00 'den uzaklaştıkça tahminlerdeki hata payı artar [34].

Regresyon analizinin uygulanabileceği durumlardan biri, otomatik satış makinelerine ürün teslimi ve bakım süreçlerinin değerlendirilmesidir. Örneğin, bir içecek firmasında yeni işe başlayan bir endüstri mühendisi, otomatik satış

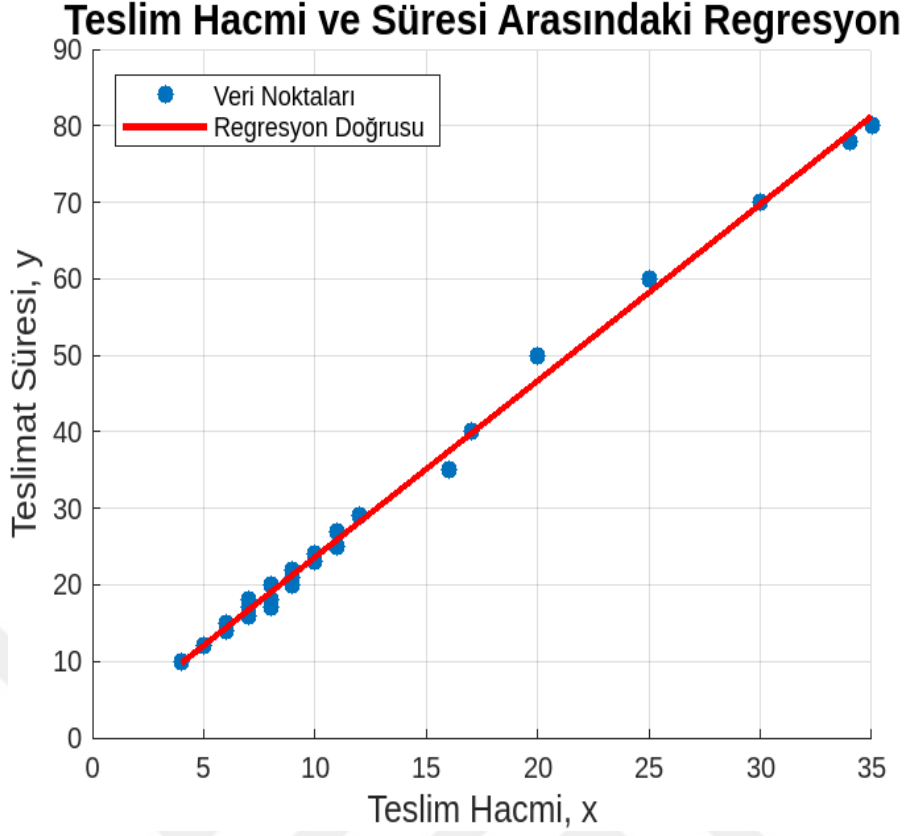
makinelerine yapılan ürün teslimatlarının ve bu makinelerin servis işlemlerinin süresini analiz etmek istemektedir. Mühendis, teslimat süresi ile teslim edilen ürünün hacmi (kutu sayısı) arasında bir ilişki olabileceğini düşünmektedir.

Bu düşüncesini test etmek maksadıyla, otomatik satış makinelerine sahip perakende satış noktaları arasından rastgele seçilen 25 mağaza ziyaret edilmiştir. Her bir noktada, teslimat süresi (dakika cinsinden) ile teslim hacmini gözlemlenmiştir. Elde edilen bu 25 veriden oluşturulan grafik, şekil (3.1)'de bir saçılım diyagramı olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Teslim hacmi için saçılım grafiği

Grafik incelendiğinde, teslimat süresi ile teslim hacmi arasında anlamlı bir ilişki olduğu gözlemlenmektedir. Veri noktaları mükemmel bir doğrusal çizgi oluşturmamakla birlikte, genel bir doğrusal eğilim sergilediği dikkat çekmektedir. Bu ilişki, şekil (3.2)'de doğrusal regresyon doğrusu ile temsil edilmiştir.



Şekil 3.2 Teslim süresi ve teslim hacmi arasındaki doğrusal ilişki

y teslim süresini ve x de teslim hacmini temsil etsin. Bu durumda bu iki değişkeni ilişkilendiren doğrunun denklemini aşağıdaki gibi olacaktır:

$$y = \alpha + \beta x \quad (3.1)$$

Burada, α **kesim noktası**, β **eğimdir**. Veri noktaları tam olarak düz bir çizgi üzerine düşmemektedir. Dolayısıyla (3.1) denklemini bunu açıklayacak şekilde değiştirilmelidir.

y'nin gözlenen değerleriyle, $(\alpha + \beta x)$ doğrusu arasındaki fark ε hatası olsun. ε 'u istatistiksel bir **hata** olarak değerlendirmek uygundur; diğer bir deyişle modelin verilere tam olarak uymasında başarısız olmasını açıklayan **rastgele bir değişkendir**. Hatanın kaynağı teslim süresi üzerinde etkili olan diğer etkenlerle, ölçüm hatalarıyla ve diğer bazı etmenlerle açıklanabilir. Dolayısıyla, teslim süresi verileri için daha mantıklı bir model aşağıdaki gibidir:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad (3.2)$$

Denklem (3.2) **doğrusal regresyon modeli** olarak adlandırılmaktadır.

Denklem (3.2), yalnızca bir bağımsız değişkeni içerdiğinden **basit doğrusal regresyon modeli** olarak adlandırılmaktadır [36].

Birden çok bağımsız değişken içeren bir model kullanıldığında, modelin genel durumu

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad (3.3)$$

ve i ' ninci gözlem için ilişki

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad (3.4)$$

biçimini alır.

Bundan sonra kullanılacak matris notasyonunda uyum sağlaması amacıyla, parametreler β lar cinsinden gösterilirse ve bütün değerleri 1 olan X_{i0} değişkeni de eklenirse, model;

$$y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad (3.5)$$

olarak genel şeklini alır [37].

Bir bağımlı ve k bağımsız değişken arasındaki fonksiyonel yapı

$$y_i = \sum_{j=1}^k x_{ij} \beta_j + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır [35].

Bu denklem **çoklu doğrusal regresyon modeli** olarak adlandırılır. Çünkü birden fazla bağımsız değişken vardır [36]. Bağımsız değişken sayısı bir olduğunda model **basit doğrusal regresyon**, iki veya daha fazla bağımsız değişken içerdiğinde ise **çoklu doğrusal regresyon** olarak adlandırılır[34]. Doğrusal terimi, y ' nin x ' in doğrusal bir fonksiyon olmasından değil, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ parametrelerinde doğrusal olduğunu göstermek için kullanılmıştır [36].

Burada

y_i , i ' ninci değer için bağımlı değişken değeri,

$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$, k bağımsız değişken değeri,

e_i , rassal (raslantısal) hata miktarı,

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, regresyon katsayılarıdır.

Eşitlik(3.5)'te tanımlanan regresyon modeli matris gösterimi ise

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (3.7)$$

ya da

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

şeklindedir. Burada

Y: nx1 boyutlu bağımlı değişken için gözlemlerin vektörü,

X: [nx(m+1)] boyutlu bağımsız değişkenlere ilişkin matris,

β : [(m+1)x1] boyutlu regresyon katsayılarının vektörü,

ε : (nx1) boyutlu hata vektörüdür [35].

3.0.1 Hata Terimi

İki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi veren matematiksel işlev

$$y = \alpha + \beta x \quad (3.9)$$

olarak gösterilir. X'e bir değer verildiğinde Y için bir tek değer bulunur.

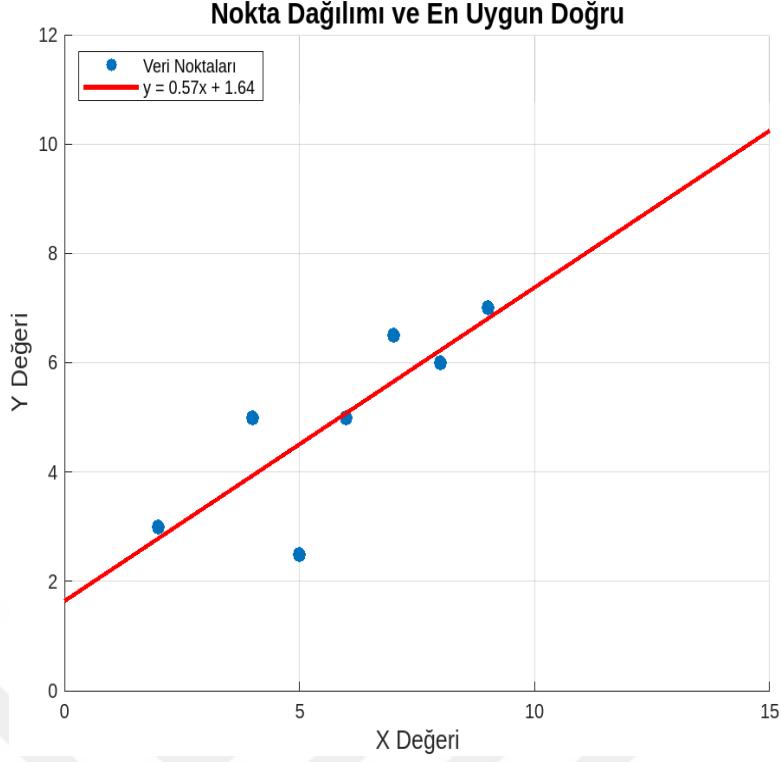
3.9 nolu modelde Y, X için verilen bir değere göre $y = \alpha + \beta x$ olarak elde edilir. Bulunan bu Y değeri \hat{Y} veya E(Y) ile gösterilir. Yani bulunan değer Y'nin beklenen değeridir ve model doğrusaldır.

Mevcut verilerin gözlenen değerlerinin yardımıyla bilinmeyen parametreler bazı varsayımlar altında tahmin edilir ve uygun denklem elde edilir. Bu tür bir süreç için en basit örnek; $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ gözlem çiftlerinin bulunduğu noktalara uyan bir doğru çizgisinin bulunuşudur.

Aynı nesne üzerinde yapılan iki ayrı ölçümün gözlenen değerleri X ve Y arasındaki doğrusal ilişkiyi bulmak için kullanılan doğru denklemlerinde her X değeri için bulunan Y değerleri ile her X değerine karşılık gözlenen Y değeri aynı değildir. Bu yüzden iki değişken arasındaki gerçek ilişki

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad (3.10)$$

olarak kabul edilir.



Şekil 3.3 Noktalar uygun doğru çizimi

ε_i olarak gösterilen rastlantısal hata terimi; değişkenler arasındaki açıklanamayan kısmı, modelde içerilmeyen (dışlanmış) değişkenleri, işlevsel biçime benzetmeden doğan hataları gösterir.

Bilinmeyen α ve β parametrelerin tahminleri olan a ve b yardımıyla gözlenen X değerleriyle elde edilen \hat{Y} değerleri, Y lerin tahmin ve beklenen değerleridir. Yani,

$$\hat{Y}_i = E(Y_i) = a + bX_i \quad (3.11)$$

\hat{Y} ve Y_i arasındaki fark

$$e_i = Y_i - E(Y_i) = Y_i - a - bX_i \quad (3.12)$$

buradan

$$Y_i = a + bX_i + e_i \quad (3.13)$$

şeklini alır.

Buradaki e_i değerleri, gözlem sırasındaki gözlem sırasındaki ölçme hataları ile modeldeki eksik ve boşlukları da kapsar. Böylece e_i fark terimleri, gerçek modeldeki rastlantısal hata terimi, ε nı kapsayan rastlantısal bir değişkendir ve ε nun özelliklerine sahiptir [37].

3.0.2 Parametrelerin En Küçük Kareler Tahmini

Bilinmeyen parametreler α ve β 'in tahmin için çeşitli yöntemler vardır. Bunlardan en çok ve en sık kullanılan en küçük kareler (EKK) yöntemidir [37]. Bu tahmin yönteminde, gözlenmiş Y_i değerleri ile regresyon doğrusu arasındaki farklarının karelerinin toplamını en az (minimum) eden yol aranır [36, 37].

(3.12) nolu denlemdaki farkların kareleri toplamı alınarak

$$S = \sum_{i=1}^N [Y_i - E(Y_i)]^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - a - bX_i)^2 \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) nolu denklemi en az eden a ve b değerlerini en küçük kareler tahmin edicisi olarak elde etmek için S'nin a ve b ye göre kısmi türevlerini alınarak 0'a eşitlensin.

$$\sum Y_i = na + b \sum X_i \quad (3.15)$$

$$\sum X_i Y_i = a \sum X_i + b \sum (X_i)^2 \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu denklemlere normal denklemler adı verilir. Buradan a ve b için normal denklemler çözüldüğünde

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{N}}{\sum (X_i)^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}} \quad (3.17)$$

elde edilir. Aynı tahmin ediciyi ortalamadan farklar cinsinden elde etmek amacıyla

$$\frac{\sum X_i}{N} = \bar{X} \quad , \quad \frac{\sum Y_i}{N} = \bar{Y}$$

olmak üzere $x_i = (X_i - \bar{X})$ ve $y_i = (Y_i - \bar{Y})$ olarak

$$\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum x_i y_i \quad (3.18)$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum (x_i)^2 \quad (3.19)$$

olarak (3.18) ve (3.19), (3.17) nolu denklemde yerine konarak

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum (x_i)^2} \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.15) nolu denklem a'ya göre çözüldüğünde

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \quad (3.21)$$

elde edilir [37].

Örnek:

Tablo 3.1 Örnek için veriler - 1987 yılı fiyatlarıyla, milyar TL.

Yıl	GSMH	Toplam Tüketim
(i)	X_i	Y_i
1987	75,019	58,728
1988	76,108	57,793
1989	77,347	57,453
1990	84,592	64,719
1991	84,887	65,956
1992	90,323	68,209
1993	97,677	73,599
1994	91,733	67,451
1995	99,028	70,352
1996	106,080	77,014
1997	114,874	84,554
1998	119,303	86,011
1999	112,044	83,290
2000	119,145	89,404
2001	107,783	80,089
2002	116,338	82,216
2003	123,165	86,344
2004	135,308	94,077
2005	145,651	103,372
2006	154,343	108,344
2007	120,916	83,462
Toplam	2251,662	1642,438

$$Y_i = a + bX_i + e_i \quad (3.22)$$

modelinde 1987 ve 2007 yılları arasında

Y_i = Toplam tüketim, 1987 fiyatlarıyla,

X_i = Gayri safi milli hasıla, 1987 fiyatlarıyla olmak üzere tablo 3.1 'deki verilerden yararlanarak,

$$\sum X_i = 2251,662 \quad , \quad \sum Y_i = 1642,438 \quad (3.23)$$

$$\bar{X} = \frac{2251,662}{21} = 107,222 \quad , \quad \bar{Y} = \frac{1642,438}{21} = 78,211 \quad (3.24)$$

$$\sum X_i Y_i = 3698216,044 \quad , \quad \sum X_i^2 = 5069983,988 \quad (3.25)$$

elde edilir.

Regresyon katsayıları:

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{N}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}} = \frac{3698216,044 - \frac{(2251,662)(1642,438)}{21}}{5069983,988 - \frac{(2251,662)^2}{21}} = 0,729433476 \quad (3.26)$$

$$a = \bar{Y} - b \cdot \bar{X} = 78,211 - 0,729433476 \cdot 107,222 = -78,2113 \quad (3.27)$$

Regresyon doğrusu:

$$\hat{Y}_i = -78,2113 + 0,729433476 \cdot X_i \quad (3.28)$$

olmak üzere a ve b parametreleri en küçük kareler yöntemiyle hesaplanır [37].



Regresyon analizi, tüm bilim dallarında değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve geleceğe yönelik tahminlerde bulunmak amacıyla yaygın olarak kullanılan istatistiksel bir yöntemdir. Klasik regresyon analizinin temelinde rastlantısallık yer almakta olup, bu yöntemden sağlıklı sonuçlar elde edilebilmesi için kullanılan verinin kesin ve belirli olması beklenmektedir. Ancak, gerçek yaşamda belirsizlikler ve kesin olmayan bilgiler sıklıkla karşılaşılan durumlardır. Bilimsel ve teknolojik alanlardaki gelişmeler, klasik regresyon yaklaşımının bu tür belirsizlikleri açıklamakta yetersiz kaldığını ortaya koymuş; bu doğrultuda daha esnek ve gerçekliğe daha yakın modellerin geliştirilmesi ihtiyacını doğurmuştur [38]. Bu çerçevede, Zadeh tarafından geliştirilen bulanık küme teorisine dayanan ve klasik doğrusal regresyon analizinin genişletilmiş bir versiyonu olan Bulanık Regresyon Analizi (BRA) önerilmiştir [1, 38]. Bu yöntem, belirsizlik içeren verilerin analizinde daha gerçekçi ve esnek çözümler sunmaktadır [38].

Bir sistemin bulanık yapısının modellenmesi gerektiğinde, bu durum bulanık doğrusal bir fonksiyonla temsil edilebilir ve buna bağlı olarak Bulanık Doğrusal Regresyon Analizi (BDRA) geliştirilir. Klasik regresyon analizinin yetersiz kaldığı bazı durumlar, bulanık regresyon analizleriyle daha etkin biçimde çözülebilir. Bu durumlar şu şekilde özetlenebilir:

- Gözlem verilerinin sayıca yetersiz olması,
- Regresyon varsayımlarının doğruluğunun test edilmesinde zorluk yaşanması,
- Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin belirsiz olması,
- Gözlemlenen olayların frekanslarının net olmayışı,
- Verilerin normal dağılmaması veya değişkenler arası ilişkinin doğrusal olmaması.

Regresyon analizlerinde, bağımsız değişken(ler)in bağımlı değişken üzerindeki etkisi katsayılar yardımıyla analiz edilir. Doğrusal regresyon modeli genellikle $y = \alpha^t x$ biçiminde tanımlanır. Ancak uygulamada, gözlemlenen değerlerle tahmin edilen değerler arasında sapmalar oluşur. Bu sapmalar $\tilde{y}_i - y_i = \varepsilon_i$ şeklinde ifade edilerek minimuma indirgenmeye çalışılır. Bu amaca yönelik olarak çeşitli **bulanık regresyon yöntemleri** geliştirilmiştir [39].

Bulanık regresyon analizi, klasik regresyon analizinin belirsizlik içeren durumlara uyarlanmış bir genellemesi olarak kabul edilir ve farklı alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu analiz türü iki temel yaklaşıma dayanır: [35]

1. Tanaka vd. (1982) tarafından geliştirilen doğrusal programlama temelli yaklaşım,
2. Diamond (1988) tarafından önerilen, klasik regresyonun genişletilmiş biçimi olan Bulanık En Küçük Kareler (BEKK) yaklaşımı.

İlk bulanık doğrusal regresyon modeli, Tanaka, Uejima ve Asai (1982) tarafından geliştirilmiştir. Bu modele göre, gözlemlerle tahmin edilen değerler arasındaki farklılıklar yalnızca ölçüm hatalarından değil, aynı zamanda sistem parametrelerinin ya da regresyon katsayılarının bulanıklığından da kaynaklanabilir. Bu nedenle, modelde regresyon katsayıları bulanık sayılar olarak tanımlanmakta; bu da bağımlı değişkenin bulanık bir sayı biçiminde ifade edilmesine neden olmaktadır.

Yöntemin dikkat çeken yönlerinden biri, her bir gözlemin sahip olduğu üyelik derecesiyle katsayı tahmin sürecine katkı sağlamasıdır. Bu çerçevede, tahmin edilen bulanık değer simetrik üçgensel üyelik fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\tilde{Y}_i = (y_i, e_i) \quad (4.1)$$

Genel olarak bulanık regresyon modelleri iki şekilde yapılandırılabilir:

- Değişkenler arası ilişkilerin bulanık olduğu modeller,
- Değişkenlerin kendisinin bulanık tanımlandığı modeller.

Modelin uyumunun sağlanması için iki yöntem ön plana çıkar:

- Bulanık katsayıların toplam yayılımını minimize eden ve modelin belirsizliğini azaltmayı amaçlayan olasılıksal modeller,

- Model çıktısıyla gözlemlenen çıktı arasındaki uzaklığı, merkez ve yayılımları dikkate alarak minimize eden BEKK yaklaşımı [39].

4.1 Regresyon Modelleri Ve Bulanık Veriler

Regresyon modellerinde bulanıklığın dikkate alınması durumunda birkaç durum mümkün olabilir:

(a) Parametreler ve bağımsız değişkenler x_i 'nin klasik gerçek değerli olduğu varsayılır, ancak bağımlı değişken bulanıktır, yani \tilde{y}_i bulanık sayılardır.

(b) Bağımsız değişkenler x_i ve bağımlı değişkenler y_i 'nin değerleri klasik gerçek sayılardır ancak parametreler bulanık sayılardır yani \tilde{A}_n .

$$y_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_{i1} + \dots + \tilde{A}_n x_{in} \quad (4.2)$$

(c) Giriş değişkenleri x_i 'nin değerleri bulanık sayılar \tilde{x}_i 'dir ve diğer tüm nicelikler klasik gerçek sayılardır.

(d) Çıkış değişkenleri gibi girdi değişkenleri de bulanıktır ve parametreler klasik gerçek değerlidir:

$$\tilde{y}_i = A_0 + A_1 \tilde{x}_{i1} + \dots + A_n \tilde{x}_{in} \quad (4.3)$$

ve veri seti $(\tilde{x}_{i1}, \dots, \tilde{x}_{ik}; \tilde{y}_i)$ dir.

(e) Dikkate alınan tüm büyüklükler bulanıktır:

$$\tilde{y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \tilde{x}_{i1} + \dots + \tilde{A}_n \tilde{x}_{in} \quad (4.4)$$

Yukarıda açıklanan olasılıklar genel doğrusal modeller için de geçerlidir. Yukarıdaki durumların tümü uyarlanabilir.

Bulanık veriler durumunda tahmin prosedürlerinin geliştirilmesi için farklı yaklaşımlar vardır. En doğrudan yaklaşım uzatma ilkesine dayanmaktadır. [40]

4.2 Klasik Ve Bulanık Regresyon Arasındaki Farklılıklar

Bulanık ve klasik regresyon analizi arasındaki temel farklar 4.1'de özetlenmiştir [41].

Tablo 4.1 Klasik ve bulanık regresyon arasındaki farklılıklar.

	Klasik Regresyon Analizi	Bulanık Regresyon Analizi
Veriler	Sadece kesin(net) sayılar	Bulanık ve kesin sayıları bir arada kullanılır.
Model	$y = \alpha + \beta x$ (kesin katsayılar)	$\tilde{Y} = \tilde{A}X + \tilde{B}$ (bulanık katsayılar)
Hata Terimi	Rastlantısal hata (ε) (Regresyon modeli ile elde edilen tahminler ile gözlemlenen veriler arasındaki uyumsuzluklar, gözlem hatası olarak değerlendirilir.)	Bulanıklıktan ötürü hata yok. (Aynı türden uyumsuzluklar, model yapısındaki bulanıklığın bir yansıması olarak kabul edildiğinden, bu durum bir sorun olarak değerlendirilmez.)
Kullanım Yeri	Net ilişkilerde kullanılır.	Belirsiz ve sözel verilerde kullanılır.

4.3 Bulanık Regresyon Analizinin Avantajları&Dezavantajları

Bulanık regresyon analizinin avantajları olduğu gibi bir kısım dezavantajları da bulunmaktadır. 4.2’de özetlenmiştir [41].

Tablo 4.2 Bulanık regresyonun avantajları ve dezavantajları

Bulanık Regresyonun	
Avantajları	Dezavantajları
• Belirsizlikleri modelleyebilir.	• Yorumlanması zor olabilir. (Elde edilen regresyon katsayıları genellikle bulanık sayılar olduğundan, yorumlamak klasik regresyon kadar sezgisel değildir.)
• Dilsel verilerle uyumludur. ("Yüksek gelir", "orta yaş", "düşük risk" gibi nitel ifadelerle yapılan analizlere olanak tanır.)	• Hesaplama karmaşıktır. (Bazı bulanık regresyon yöntemleri karmaşık matematiksel işlemler ve optimizasyon gerektirir, bu da hesaplama süresini uzatabilir.)
• Veri gürültüsüne karşı dayanıklıdır. (Verilerdeki küçük değişimlerin veya hataların etkisi, bulanık yapı sayesinde yumuşatılabilir.)	• Standartlaştırma eksikliği vardır. (Farklı bulanık regresyon türleri ve algoritmaları vardır; hangisinin kullanılacağına karar vermek, uygulama alanına göre değişebilir ve standart bir yaklaşım olmayabilir.)
• İnsan yargısını dahil edebilir. (Uzman görüşlerinin ya da tahminlerin modele katılmasını sağlar. Bu, özellikle mühendislik ve sosyal bilimlerde faydalıdır.)	• Doğruluk ölçümü karmaşıktır. (Bulanık sonuçların performansını değerlendirmek için kullanılan ölçütler, klasik metriklere göre daha az yaygındır ve yoruma açık olabilir.)

4.4 Bulanık Regresyon Yöntemlerinin Sınıflandırılması

Bulanık regresyon yöntemleri temel olarak bulanık değişkenlerin modelde nasıl kullanıldığına göre sınıflandırılır [5, 9, 41, 42].

Tablo 4.3 Bulanık regresyon yöntemleri karşılaştırmalı sınıflandırma

Yöntem Türü	Özellikleri	Örnek Çalışma
Girdisi Kesin - Çıktısı Bulanık Olan BRY	Bağımsız değişkenler: kesin Bağımlı değişken: bulanık	Tanaka, Uejima ve Asai (1982), Özelkan (2000), Hojati-Bector-Smimou (2005)
Girdisi Bulanık-Çıktısı Bulanık Sayı Olan BRA	Bağımsız değişkenler: bulanık Bağımlı değişken: bulanık	Sakawa ve Yano (1992), Hojati-Bector-Smimou (2005), Yang-Lin (2002), Diamond (1988)
Hibrit Bulanık Regresyon (HFR)	Bağımsız değişkenler: kesin veya bulanık Bağımlı değişken: kesin veya bulanık Katsayılar: kesin veya bulanık Açıklama: Farklı türdeki veri yapıları aynı modelde esnek biçimde birleştirilir.	Chen (2004), Lin, Lee (2008)
Yapay Zeka Tabanlı Bulanık Regresyon Yöntemleri	Bulanık Sinir Ağları (FNN) Uyarlanabilir Nöro-Bulanık Çıkarım Sistemi (ANFIS) Bulanık Genetik Regresyon (FGR) Açıklama: Makine öğrenmesi, yapay sinir ağları ve genetik algoritmalar gibi yapay zeka teknikleri ile bulanık regresyonun entegrasyonudur. Yapay zeka ile bulanık regresyon birleşimi	Jang (1993), Nauck , Kruse (1999)

4.5 Bulanık Regresyon Yöntemleri

4.5.1 Doğrusal Programlama Temeline Dayanan Bulanık Regresyon Analizi

4.5.1.1 Olasılıksal Model (Tanaka Modeli)

Tanaka ve arkadaşlarının geliştirdikleri modelde, girdi değişkenleri kesin (kesin sayılarla ifade edilen) olup, çıktı değişkenleri bulanık olarak tanımlanmıştır. Bu modelin asıl amacı, regresyon denklemini oluştururken bulanık katsayıların yayılımını (belirsizlik aralığını) mümkün olduğunca azaltmaktır. Böylece, elde edilen modelin toplam bulanıklığı en aza indirilerek daha güvenilir ve dar kapsamlı tahminler yapılması hedeflenmiştir [43].

Tanaka yaklaşımı, bir tür olasılıksal model olup modeldeki bulanık elemanların **simetrik üçgensel bulanık sayılar** olduğu varsayılmaktadır. Bu bağlamda:

- y_i : üçgensel bulanık sayının merkezi (bulanık ortalama),
- e_i : yayılım (belirsizlik) miktarıdır.

Modelde kullanılan h faktörü, alt ve üst regresyon doğruları arasındaki konumu ifade eder. Eğer simetrik üçgensel bulanık sayılar söz konusuysa, $h = 1$ alınarak tahmin değeri tam ortalanır. Ancak gözlemlenen değerlerin model tarafından yapılan tahmin aralığında kalabilmesi için h değerinin 1'e çok yakın olmaması önerilir.

h değeri azaldıkça güven seviyesi azalır ve üyelik dereceleri düşer. h , α -düzey kümesinin tersidir: h arttıkça destek bölgesi genişlerken, α düzeyi azaldıkça bu bölge daralır. Bu nedenle h , modelin güven düzeyini denetlemede önemli bir parametredir. Genellikle $h = 0,5$ değeri önerilse de, duruma bağlı olarak değişebilir. Uygun h değeri, farklı noktalarda analizler yapılarak belirlenmelidir.

Önemli bir özellik olarak, h farklı değerler olsa bile bulanık ortalama değişmez. h değerinin belirlenmesi analiste bırakılmıştır ve sabit bir ölçüt bulunmamaktadır [39, 44, 45].

Üyelik Fonksiyonu

Simetrik üçgensel üyelik fonksiyonuna sahip bir bulanık sayının üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y - x^t \alpha|}{c^t |x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, y = 0 \\ 0, & x = 0, y \neq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Burada:

- α : bulanık sayının merkezi,
- c : yayılım vektörü,
- $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^t$.

Eğer $c^t |x| \leq |y - x^t \alpha|$ ise, $\mu_Y(y) = 0$ olur [38, 39].

Modelleme Adımları

1. **Model Tanımı:** Veriler, bulanık doğrusal regresyon modeli ile ifade edilir:

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_1 x_{i1} + \dots + \tilde{A}_n x_{in} = \tilde{A} x_i \quad (4.6)$$

Burada $\tilde{A} = (\alpha, c)$, yani bulanık regresyon katsayılarıdır.

2. **Uyum Derecesinin Ölçülmesi:** Tahmin edilen değerlerin, gözlenen verileri kapsayıp kapsamadığı h düzeyinde test edilir:

$$Y_i^h = \{y \mid \mu_{Y_i}(y) \geq h\}, \quad \tilde{Y}_i^h = \{y \mid \mu_{\tilde{Y}_i}(y) \geq h\} \quad (4.7)$$

Modelin genel uyumu $\min_j(\bar{h}_j)$ ile değerlendirilir.

3. **Kesinsizlik Ölçütü:** Bulanık modelin toplam belirsizliği şu şekilde ifade edilir:

$$J = c_1 + c_2 + \dots + c_n \quad (4.8)$$

Amaç, J değerini minimize edecek \tilde{A} parametrelerini elde etmektir. Bu işlem, $h_i \geq H$ olacak şekilde çözülür.

4. **h Değerinin Hesaplanması:** Her bir veri noktası için h_i değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\tilde{h}_i = 1 - \frac{|y_i - x_i^t \alpha|}{\sum_j c_j |x_{ij}| - e_i} \quad (4.9)$$

Bu süreç, Tanaka yaklaşımına dayalı bulanık regresyon analizinin temelini oluşturmakta ve model parametrelerinin belirsizlik altında optimize edilmesine olanak tanımaktadır [39, 44].

Olasılıksal Modelin Eksiklikleri

Tanaka, Uejima ve Asai (1982) tarafından geliştirilen bulanık doğrusal regresyon modeli, klasik doğrusal regresyonun varsayımlarını karşılayamayan belirsiz sistemler için önemli bir alternatif sunmaktadır. Ancak bu modelin bazı sınırlılıkları ve eleştiriye açık yönleri de bulunmaktadır:

1. **En Küçük Kareler Yöntemi ile Bağlantısızlık:** Tanaka modeli, doğrusal regresyon benzeri bir yapı sunsa da, çözümde doğrusal programlama teknikleri kullanılmıştır. Ancak, klasik regresyon analizinde kullanılan en küçük kareler yöntemine ilişkin herhangi bir açıklama yapılmamış; artıklar yardımıyla modelin veriyle ne ölçüde uyum sağladığına dair bir ölçüt verilmemiştir.
2. **Aykırı Gözlemlere Karşı Hassasiyet:** Model, uç değerlerin etkisine oldukça açıktır. Aykırı değerler, tahmin edilen bulanık aralıkların aşırı genişlemesine neden olarak modelin güvenilirliğini azaltabilir.
3. **Bulanık Aralıkların Yorumlanabilirliği:** Modelin çıktısı olan bulanık tahmin aralıklarının ne şekilde yorumlanacağı net olarak ortaya konmamıştır. Bu da modelin uygulamalarda yorumlama gücü yaratmasına neden olmaktadır.
4. **Önceden Belirlenen Tahmin Değerleri:** Tanaka yaklaşımında, modelin çıktısı olan tahmin değeri genellikle analist tarafından önceden belirlenmektedir. Bu durum, modelin öngörü yeteneğini kısıtlayarak, daha çok açıklayıcı değil tanımlayıcı bir yapı ortaya koymaktadır.
5. **Çoklu Bağlantılılık Eğilimi:** Bağımsız değişken sayısı arttıkça model, çoklu bağlantılılık (multicollinearity) sorununa açık hale gelmektedir. Bu durum, katsayıların doğruluğunu ve modelin kararlılığını zayıflatabilir.
6. **Referans Noktasına Bağımlılık:** Bağımsız değişkenlerin merkezi yerine ortalamadan sapma değerleri kullanıldığında, modelin çıktısı belirgin şekilde

değişmektedir. Bu da modelin, bağımlı olduğu referans noktasına göre farklı sonuçlar üretebileceğini göstermektedir [39].

Tablo 4.4 Klasik ve Tanaka regresyon modellerinin karşılaştırılması

Özellik	Klasik Regresyon	Tanaka (1982)
Hata Tanımı	Artık (residual)	Katsayı belirsizliği (yayılım)
Uyum Ölçütü	En Küçük Kareler (EKK)	Toplam yayılım minimizasyonu
Tahmin Sonucu	Nokta tahmini	Üçgensel bulanık aralık
Varsayımlar	Normal dağılım, sabit varyans	Gerekli değil
Aykırı Gözlemlere Duyarlılık	Orta düzey	Yüksek
Veri Tipi	Kesin	Bulanık

4.5.2 Bulanık En Küçük Kareler Yöntemine Dayanan Bulanık Regresyon Analizi

Bulanık en küçük kareler yöntemi, klasik en küçük kareler yaklaşımının bulanık küme teorisi çerçevesinde genişletilmiş bir türevidir. Bu yaklaşım, ilk kez Diamond tarafından önerilmiş ve bulanık parametrelerin tahmini amacıyla kullanılmıştır. Yöntemin temel hedefi, tahmin edilen bulanık bağımlı değişken değerleri ile gözlemlenen bulanık veriler arasındaki uzaklığı en aza indirmektir [38].

Bulanık regresyon modelini, klasik istatistiksel regresyonla uyumlu hale getirmek için izlenebilecek yöntemlerden biri, her iki modeli aynı doğrusal yapı üzerine inşa etmektir. Geleneksel doğrusal regresyon modeli, tek bir bağımsız değişken için şu şekilde ifade edilir:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

Bulanık regresyon yaklaşımında ise, değişkenlerden biri veya her ikisi bulanık sayılarla gösterilerek model şu şekilde yazılır:

$$\tilde{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde{X}_i + \tilde{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

Bu yapı klasik modele benzemekle beraber, belirsizliği de modelleme imkânı sağlar.

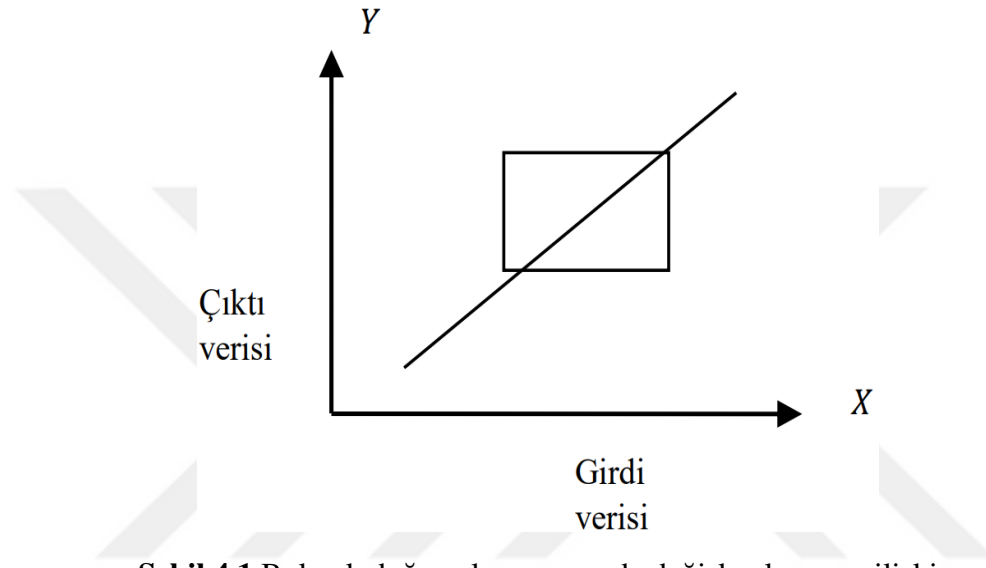
Modelin hata terimi şu şekilde tanımlanabilir:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \tilde{X}_i \quad (4.12)$$

Bu temel alınarak, klasik en küçük kareler yöntemine benzer şekilde, toplam hata karelerinin minimize edilmesini amaçlayan hedef fonksiyon oluşturulur:

$$\min \sum_{i=1}^n \left(\tilde{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \tilde{X}_i \right)^2 \quad (4.13)$$

Bu çerçevede bulanık regresyon, klasik regresyonla uyumlu şekilde analiz edilebilir. Bu yaklaşımın bir örneği olarak, üçgensel bulanık sayılar arasında mesafe ölçümü esaslı Diamond (1988) BEKK modeli gösterilebilir [39, 46].



Şekil 4.1 Bulanık doğrusal regresyonda değişkenler arası ilişki

4.5.2.1 Diamond Modeli

Bulanık en küçük kareler regresyonunun uygulanmasında kullanılan yaklaşımlardan biri, uzaklık ölçütlerine dayalı yöntemlerdir. Bu alandaki öncülerden olan Diamond (1988), uzaklık kavramını kullanarak bulanık en küçük kareler regresyonunu ilk kez uygulayan araştırmacılardan biridir. Geliştirdiği yöntem, literatürde en yaygın kullanılan yaklaşımlardan biri olmuştur. Temelinde, iki üçgensel bulanık sayı arasındaki L^2 metriği aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$d(\langle m_1, l_1, r_1 \rangle, \langle m_2, l_2, r_2 \rangle)^2 = (m_1 - m_2)^2 + ((m_1 - l_1) - (m_2 - l_2))^2 + ((m_1 + r_1) - (m_2 + r_2))^2 \quad (4.14)$$

Verilen üçgensel bulanık sayıların sol ve sağ yayılımları, merkez değerleriyle birlikte ele alındığında, iki bulanık sayı arasındaki uzaklığın hesaplanmasında bir ölçüt olarak kullanılır.

Model, $\tilde{Y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_i + \tilde{\varepsilon}_i$ $i = 1, \dots, n$ formunu alır ve $S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{y}_i, \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_i)$ aşağıdaki şekilde optimize edilir:

$$\sum_{i=1}^n (y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_{im})^2 + (y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1l}x_{il})^2 + (y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1r}x_{ir})^2 \quad (4.15)$$

Burada, $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_0$ bulanık parametrelerinin tahminlerini bulmak için $\beta_{0l}, \beta_{0m}, \beta_{0r}, \beta_{1l}, \beta_{1m}, \beta_{1r}$ 'ye göre türevler alınır;

$$\hat{\tilde{\beta}}_1 = (\hat{\beta}_{1l}, \hat{\beta}_{1m}, \hat{\beta}_{1r}) \quad , \quad \hat{\tilde{\beta}}_0 = (\hat{\beta}_{0l}, \hat{\beta}_{0m}, \hat{\beta}_{0r}) \quad (4.16)$$

$$\bar{x}_l = \frac{\sum_{i=1}^n x_{il}}{n} \quad , \quad \bar{x}_m = \frac{\sum_{i=1}^n x_{im}}{n} \quad , \quad \bar{x}_r = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ir}}{n} \quad (4.17)$$

$$\bar{y}_l = \frac{\sum_{i=1}^n y_{il}}{n} \quad , \quad \bar{y}_m = \frac{\sum_{i=1}^n y_{im}}{n} \quad , \quad \bar{y}_r = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir}}{n} \quad (4.18)$$

olmak üzere,

$$\hat{\beta}_{1l} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{il}y_{il} - n\bar{x}_l\bar{y}_l}{\sum_{i=1}^n x_{il}^2 - n\bar{x}_l^2} \quad , \quad \hat{\beta}_{0l} = \bar{y}_l - \hat{\beta}_{1l}\bar{x}_l \quad (4.19)$$

$$\hat{\beta}_{1m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{im}y_{im} - n\bar{x}_m\bar{y}_m}{\sum_{i=1}^n x_{im}^2 - n\bar{x}_m^2} \quad , \quad \hat{\beta}_{0m} = \bar{y}_m - \hat{\beta}_{1m}\bar{x}_m \quad (4.20)$$

$$\hat{\beta}_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ir}y_{ir} - n\bar{x}_r\bar{y}_r}{\sum_{i=1}^n x_{ir}^2 - n\bar{x}_r^2} \quad , \quad \hat{\beta}_{0r} = \bar{y}_r - \hat{\beta}_{1r}\bar{x}_r \quad (4.21)$$

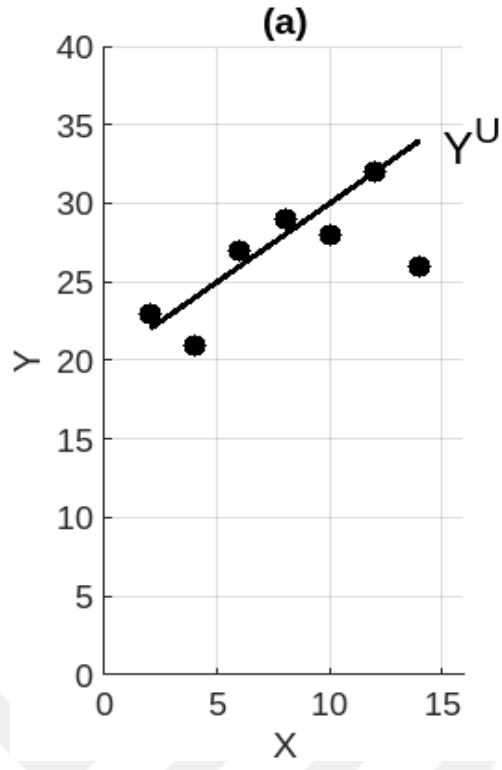
olarak tanımlanır [39].

4.6 Zadeh'in Genişleme Prensibi ile Sınırların Belirlenmesi

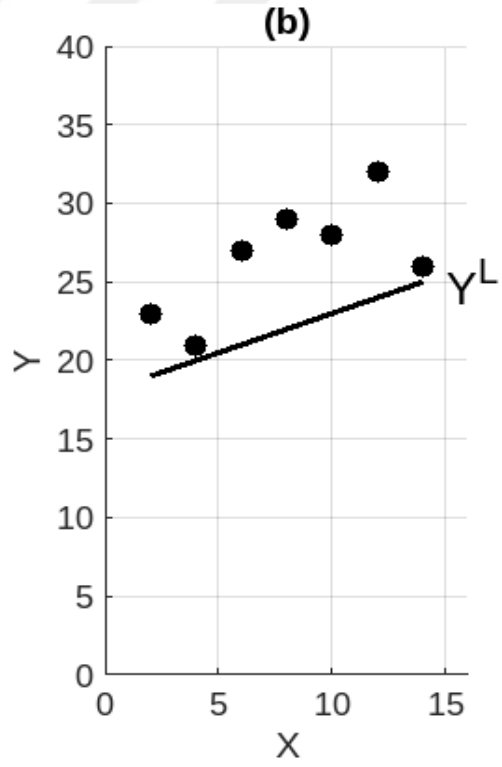
Bulanık regresyon analizinde, alt ve üst sınırlar ile yayılım değerlerinin belirlenmesinde Zadeh'in genişleme prensibinden yararlanılır. Herhangi bir veri çifti (X_i, Y_i) için, şekil (4.2) ve şekil (4.3) de gösterildiği gibi Y^U (üst sınır) ve Y^L (alt sınır) regresyon doğruları oluşturulmaktadır. Bu kapsamda:

- **Alt sınır** (Y^L): Veri kümesindeki bazı noktaların altından geçecek şekilde çizilen doğrusal regresyon hattıdır.
- **Üst sınır** (Y^U): Aynı şekilde, bazı noktaların üzerinden geçen doğrusal regresyon hattıdır.

Sınırlar sezgisel olarak belirlenmekte ve bu doğrular, seçilen veri noktaları üzerinden geçirilerek elde edilmektedir. Böylece Y^U ve Y^L doğrularının denklemleri belirlenir.



Şekil 4.2 Bulanık Regresyon Üst Sınırın Oluşumu



Şekil 4.3 Bulanık Regresyon Alt Sınırın Oluşumu

5.1 Bulanık ve Klasik Doğrusal Regresyon Analizlerinin Karşılaştırılması

5.1.1 Bulanık Doğrusal Regresyon Analizi

Veri Seti:

Tablo 5.1 Bulanık veri

x_i	$\tilde{y}_i = \langle m_i, l_i, r_i \rangle$
6.15	$\langle 2.5, 0.17, 0.40 \rangle$
9.00	$\langle 2.0, 0.17, 0.45 \rangle$
12.00	$\langle 3.0, 0.30, 0.50 \rangle$
12.15	$\langle 2.5, 0.25, 0.53 \rangle$
15.00	$\langle 3.0, 0.13, 0.46 \rangle$
15.19	$\langle 3.5, 0.35, 0.63 \rangle$
17.55	$\langle 3.5, 0.27, 0.72 \rangle$
20.48	$\langle 4.0, 0.32, 0.61 \rangle$

$$\tilde{a} = \langle 1.3079, 0.9208, 1.0510 \rangle$$

$$\tilde{b} = \langle 0.1259, 0.0707, 0.0820 \rangle$$

Tanaka'nın doğrusal bulanık regresyon modeli için verilmiş olan bu örnekte

x_i : Girdi verisi (bağımsız değişken)

\tilde{y}_i : Bulanık çıktı ($\langle m_i, l_i, r_i \rangle$ biçiminde, üçgensel bulanık sayı)

m_i : Merkez değer

l_i : sol yayılma (bulanıklık)

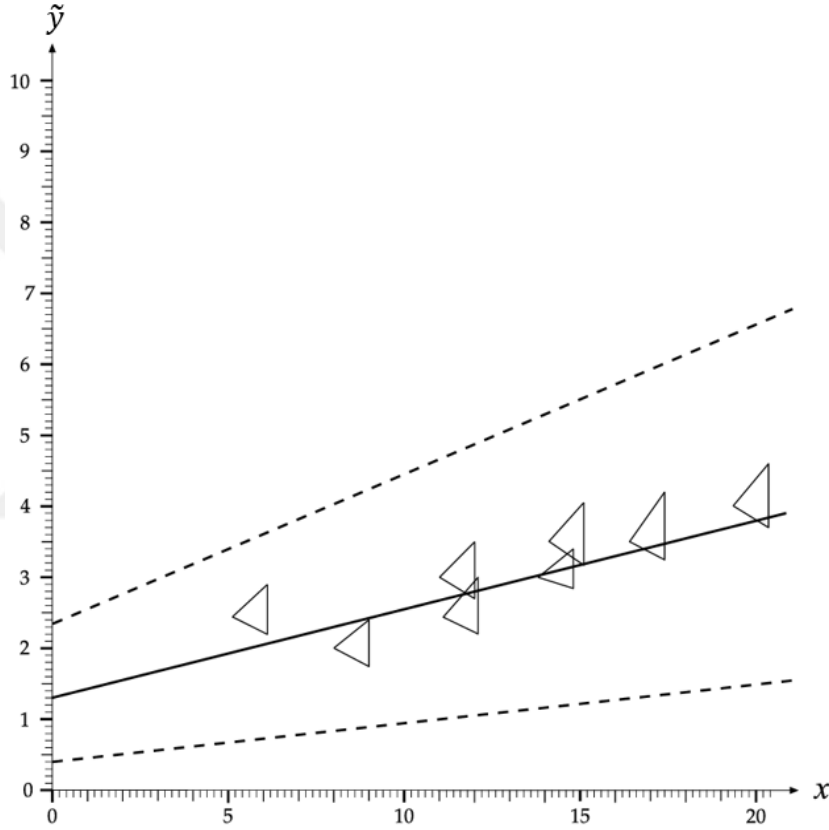
r_i : sağ yayılma (bulanıklık)

Genelleştirilmiş Bulanık Regresyonu Formülü: $E(Y) = \hat{a} + \hat{b}x$

x için merkez, sol ve sağ genişmeli doğrusal bir fonksiyon olan $\tilde{f}(x)$ bulanık doğrusunu elde ederiz.

$$\tilde{f}(x) = \langle 1.3079, 0.9208, 1.0510 \rangle + \langle 0.1259, 0.0707, 0.0820 \rangle x \quad (5.1)$$

[40]



Şekil 5.1 BDR Veri Seti Grafiği

Şekil 5.1'de bulanık veriler $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_8$ ve bulanık regresyon çizgisi gösterilmektedir.

Kesintisiz çizgi $\tilde{f}(x)$ 'in seviye eğrisidir. Kesikli çizgiler $\tilde{f}(x)$ 'in desteklerinin alt ve üst uçlarının bağlantılarıdır [40].

5.1.2 Klasik Doğrusal Regresyon Analizi

Tablo 5.1’de verilen \tilde{y}_i değerleri, $\langle m_i, l_i, r_i \rangle$ biçiminde ifade edilen üçgensel bulanık sayılardır. Burada l_i ve r_i sırasıyla sol ve sağ yayılım değerlerini temsil etmektedir. Eğer l_i ve r_i yayılım değerleri dikkate alınmaksızın yalnızca merkez değer (m_i) esas alınır, elde edilen y_i çıktıları kesin (bulanık olmayan) değerlerden oluşur ve bu değerler tablo 5.2’de sunulmuştur.

Veri Seti:

Tablo 5.2 Klasik veri

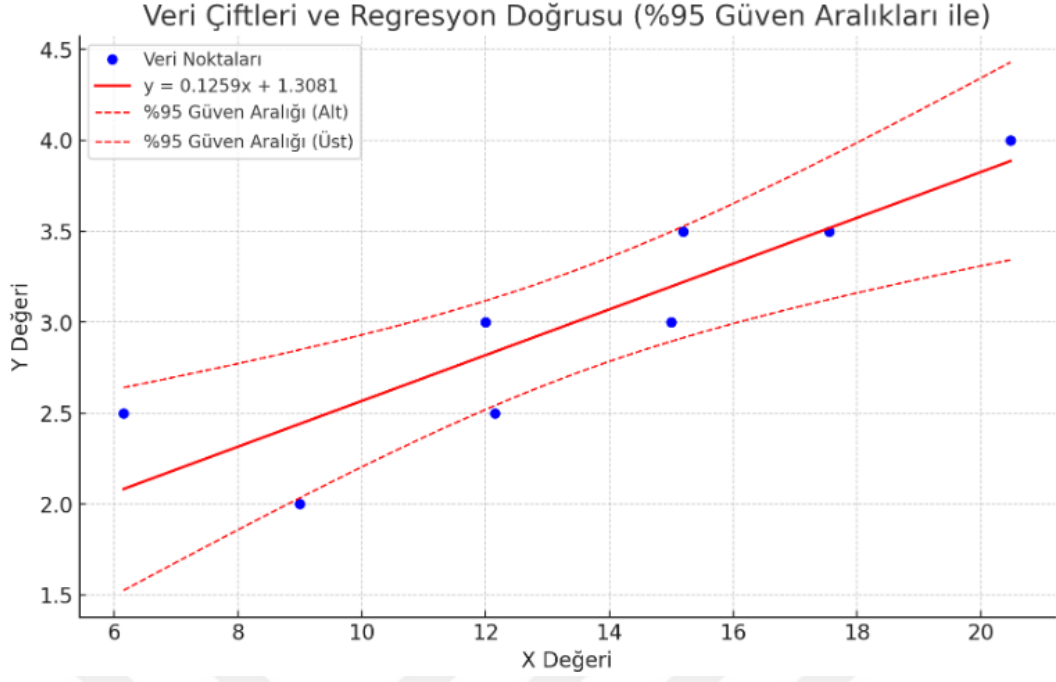
x_i	y_i
6.15	2.5
9.00	2.0
12.00	3.0
12.15	2.5
15.00	3.0
15.19	3.5
17.55	3.5
20.48	4.0

(x_i, y_i) veri çiftleri için MATLAB ortamında regresyon doğrusunu çizen kod, **Ekler** bölümünde verilmiş olup, şekil A.4 da gösterilmiştir. Kod, hem regresyon doğrusunu (%95 güven aralıkları ile) hem de gözlem verilerini çizecek şekilde hazırlanmış ayrıca doğrusal regresyon denklemini hesaplayarak grafiğe eklemektedir (şekil 5.2).

Kod çalıştırıldığında:

- **Mavi noktalar**, (x_i, y_i) veri çiftlerini temsil etmektedir. Gerçek gözlem değerleridir.
- **Kırmızı kesik çizgiler**, %95 güven aralıklarını temsil etmektedir. Bu aralıklar, seçilen x değerinde modelin tahmin ettiği ortalama y değerinin %95 olasılıkla bulunabileceği sınırları gösterir.
- **Kırmızı çizgi**, en küçük kareler yöntemi ile elde edilen regresyon doğrusunu göstermektedir.

İstatistiksel olarak, hem eğim hem de sabit terim %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunmuştur ($p < 0.05$). Kesikli çizgilerin arasındaki mesafe uç noktalara doğru genişler; bu, tahmin belirsizliğinin uç değerlerde arttığını gösterir.



Şekil 5.2 KDR Veri Seti Grafiği

Bu veri seti için regresyon doğrusu denklemi:

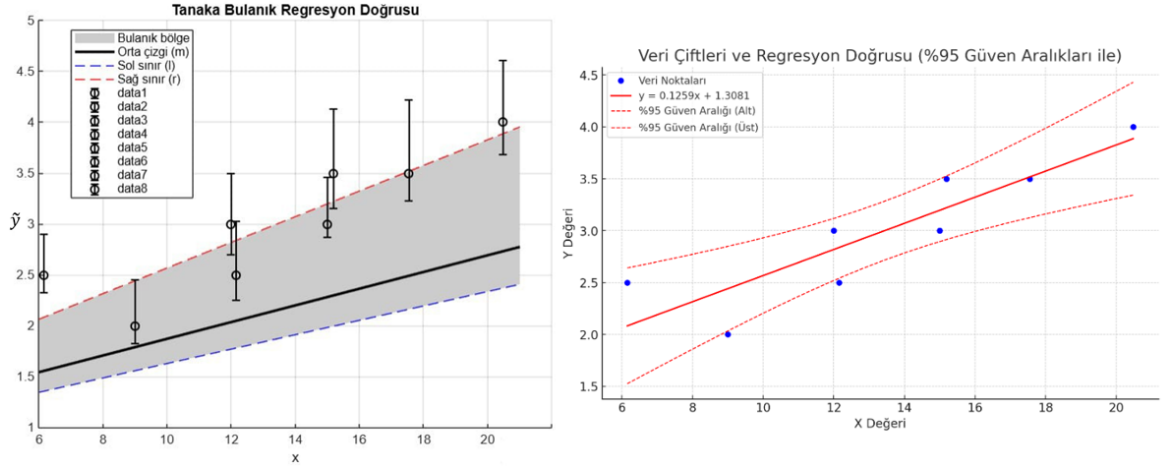
$$y = 1.3081 + 0.1259x \quad (5.2)$$

şeklindedir.

Burada, regresyon katsayıları sırasıyla **sabit terim** (a) = 1.3081 ve **eğim** (b) = 0.1259 olarak bulunmuştur.

5.1.3 BDRA & KDRA Karşılaştırması

Çalışmanın bu kısmında aynı veri seti kullanılarak hem klasik doğrusal regresyon analizi hem de bulanık doğrusal regresyon analizi uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, her iki yöntemin tahmin performanslarının ve model yapılarının karşılaştırılmasına imkân tanımaktadır. Her iki yönteme ait regresyon doğruları ve veri noktalarının yer aldığı grafikler, ilgili şekillerde sunulmuş ve görsel olarak karşılaştırma yapılmasına olanak sağlanmıştır (şekil 5.3).



Şekil 5.3 KDRA & BDRA Karşılaştırmalı Grafik

Bulanık regresyon yöntemleri, belirsizlik içeren verilerle çalışmak ve sonuçlarını tahmin etmek için kullanılan bir tekniktir. Bu yöntemler, geleneksel regresyon tekniklerinin eksik kaldığı veya yetersiz olduğu durumlarda tercih edilebilir.

Belirsizlik içeren verilerle çalışmak, esneklik gerektiren karmaşık ilişkileri modellemek veya uzman bilgisi ve sezgiyi entegre etmek gerektiğinde bulanık regresyon yöntemleri tercih edilebilir. Bu yöntemler, geleneksel regresyon tekniklerinin sınırlarını aşabilir ve daha sağlam tahminler yapabilir.

Klasik (basit) doğrusal regresyon **nokta çiftleri** üzerinde kurulur. Her gözlem (x_i, y_i) bir noktadır. Basit doğrusal regresyon bu noktalara en uygun doğrusal **fonksiyonu** bulmayı amaçlar ($y = a + bx$). Genelde hata terimi üzerinde optimize edilir ve verilerin kesin olduğu varsayılır.

Bulanık doğrusal regresyonda nokta çiftleri yerine **bağıntı** (ilişki) kullanılır. Yani noktalar değil, bulanık kümeler arasında bir ilişki tanımlanır. Örnek vermek gerekirse, girdi x değeri bir aralık olabilir (bulanık sayı), çıktısı y değeri de aynı şekilde bir bulanık aralıkla tanımlanır. Bu yüzden fonksiyon yerine ilişki (relation) yaklaşımı daha uygundur. Kartezyen düzlemde noktalar yerine bulanık kümelerin kapsadığı alanlar çalışılır.

Özellikle çok değişkenli durumda ve gözlemler çoksa, klasik regresyon sabit parametreler üzerinden gidip belirsizlikleri göz ardı eder. Bulanık doğrusal regresyon, belirsizlikleri modele dahil ederek daha gerçekçi ve esnek bir modelleme sağlar. Parametreler (örneğin eğim ve sabit terim) artık birer bulanık sayı olabilir.

Kısaca, kesin ve tekil eşlemeler ($x \rightarrow y$) fonksiyon, belirsiz ve birden çok değere karşılık gelen eşlemeler ($x \rightarrow$ bir aralık $\rightarrow y$) bağıntı belirtir.

Bu çalışmada bulanık mantık kavramı detaylı şekilde açıklanmış, basit doğrusal regresyon ve bulanık regresyon yöntemleri ayrıntılı biçimde incelenmiş, örnekler

bölümünde çalışmalardan alınan veriler kullanılmıştır. Bu çalışma sonucunda, çok sayıda gözlemi olan ikiden çok bağımsız değişken varsa bulanık doğrusal regresyon yöntemlerini kullanmanın daha sağlıklı olduğunu söyleyebiliriz.



KAYNAKÇA

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, c. 8, no. 3, ss. 338–353, 1965.
- [2] A. Gültekin ve diğ., "Klasik Mantıktan Bulanık Mantığa Yapay Zekâ Serüveni," *Bingöl Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi (BUSBED)*, c. 11, no. 22, ss. 697–714, 2021.
- [3] H. Yılmaz M. E. Şahin, "Bulanık Mantık Kavramına Genel Bir Bakış," *Takvim-i Vekayi*, c. 11, no. 1, ss. 94–129, 2023.
- [4] H. Tanaka, S. Uejima K. Asai, "Fuzzy linear regression models," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, c. 12, no. 6, ss. 903–907, 1982.
- [5] S. S. Yanartaş, "Bulanık Regresyonda Kullanılan Yöntemler," yük. lis. tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.
- [6] D. İçen, "Bulanık Doğrusal Regresyon Analizi," yük. lis. tezi, Hacettepe Üniversitesi, 2010.
- [7] D. P., "Fuzzy least squares," *Information Sciences*, c. 46, no. 3, ss. 141–157, 1988.
- [8] H. Moskowitz K.-K. Kim, "On assessing fuzzy regression models," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 54, no. 1, ss. 1–20, 1993.
- [9] C.-H. Chang E. Lee, "Fuzzy linear regression analysis using fuzzy weighted least squares," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 82, no. 3, ss. 341–349, 1996.
- [10] M.-S. Yang C.-H. Ko, "On fuzzy least squares regression analysis," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 79, no. 3, ss. 343–356, 1996.
- [11] P.-C. Chang, C.-H. Liu C.-Y. Fan, "Seasonal time series forecasting by a novel fuzzy decision tree model," *Decision Support Systems*, c. 24, no. 3, ss. 217–227, 1997.
- [12] H.-T. Wang R.-C. Tsaur, "Fuzzy regression model with fuzzy outputs," *Cybernetics and Systems*, c. 31, no. 7, ss. 787–801, 2000.
- [13] H. Ishibuchi H. Tanaka, "Fuzzy regression using asymmetric membership functions," *International Journal of Approximate Reasoning*, c. 27, no. 3, ss. 201–225, 2001.
- [14] C.-H. Chang M. Bilal, "Comparison of fuzzy regression approaches," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 123, no. 3, ss. 343–355, 2001.
- [15] S. Lee S. Chen, "A new method for fuzzy regression analysis," *Information Sciences*, c. 132, no. 1–4, ss. 125–135, 2001.

- [16] R.-C. Tsaur, W.-C. Huang C.-C. Chiu, "Application of fuzzy regression model to seasonal time series forecasting," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 131, no. 1, ss. 113–129, 2002.
- [17] W.-L. Wu F.-K. Tseng, "Least-squares estimation of fuzzy parameters in regression models," *Applied Mathematics and Computation*, c. 128, no. 1, ss. 35–50, 2002.
- [18] Ş. Yurtçu Y. İçağa, "Bulanık Doğrusal Regresyona Genel Bir Bakış," *Yapı teknolojileri elektronik dergisi*, c. 3, no. 2, ss. 37–43, 2007.
- [19] M. S. Yang D. K. J. Lin, "Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input and output data," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 126, no. 3, ss. 355–369, 2002.
- [20] M. S. Yang S. F. Liu, "Fuzzy least-squares regression with interactive fuzzy variables," *Information Sciences*, c. 150, no. 3-4, ss. 173–191, 2003.
- [21] H. C. Wu, "A fuzzy regression model with fuzzy input based on solution similarity," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 135, no. 2, ss. 287–299, 2003.
- [22] D. H. Hong, C. Hwang B. Ahn, "Fuzzy linear regression analysis using a learning algorithm," *Fuzzy Sets and Systems*, c. 138, no. 2, ss. 283–291, 2004.
- [23] E. Nasrabadi A. M. Nasrabadi, "Fuzzy linear regression with fuzzy and crisp input and output variables using mathematical programming," *Applied Mathematics and Computation*, c. 149, no. 1, ss. 173–184, 2004.
- [24] M. Hojati, C. R. Bector K. Smimou, "A new approach for fuzzy linear regression with fuzzy input and output data under fuzzy thinking," *Fuzzy Optimization and Decision Making*, c. 4, no. 4, ss. 301–315, 2005.
- [25] İ. H. Altaş, "Bulanık mantık: bulanıklılık kavramı," *Enerji, Elektrik, Elektromekanik-3e*, c. 62, ss. 80–85, 1999.
- [26] İ. Karataş, "Bulanık mantık ile klasik ve sembolik mantık ilişkisi (karşılaştırılması)," *European Journal of Educational and Social Sciences*, c. 3, no. 2, ss. 144–163, 2018.
- [27] M. Sanca, H. Artun O. Murat, "Fen Eğitiminde Bulanık Mantık Uygulamaları Neden Kullanılmalıdır?" *Ulusal Eğitim Akademisi Dergisi*, c. 6, no. 1, ss. 130–144, 2022.
- [28] A. Korucu, "Bulanık Mantık Problemleri İçin Türkçe Görsel Bir Arayüz Tasarımı," yük. lis. tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2007.
- [29] Z. Şen, *Bulanık mantık ilkeleri ve modelleme*. Su Vakfı, 2020.
- [30] G. Değirmenci M. N. Uğural, "Bulanık CPM İle Doğrusal Programlama: İnşaat Endüstrisinde Bir Vaka Çalışması," *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, c. 10, no. 2, ss. 466–481, 2022.
- [31] F. Karataş, İ. Koyuncu, T. Murat M. Alçın, "Bulanık mantık üyelik fonksiyonlarının fpga üzerinde gerçekleştirilmesi," *Bilgisayar Bilimleri ve Teknolojileri Dergisi*, c. 1, no. 1, ss. 1–9, 2020.
- [32] M. M. Özkan, *Bulanık Hedef Programlama*. Ekin, 2003.

- [33] T. Paksoy, N. Yapıcı Pehlivan E. Özceylan, *Bulanık Küme Teorisi*. Nobel, 2013.
- [34] M. E. Tabar, A. C. Başara Y. Şişman, “Çoklu regresyon ve yapay sinir ağları ile Tokat ilinde konut değerlendirme çalışması,” *Türkiye Arazi Yönetimi Dergisi*, c. 3, no. 1, ss. 1–7, 2021.
- [35] K. Ş. Kula, T. E. Dalkılıç A. Apaydın, “Bağımlı değişkenin simetrik bulanık sayı olması durumunda parametre tahmini,” *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, c. 3, no. 2, ss. 54–62, 2010.
- [36] M. A. Erar, *Doğrusal Regresyon Analizine Giriş*. Nobel, 2013.
- [37] M. Öztürkcan, *Regresyon Analizi*. Maltepe Üniversitesi Yayınları, 2009.
- [38] İ. Duygu S. Günay, “Türkiye’deki İşsizlik Oranının Bulanık Doğrusal Regresyon Analiziyle Tahmini,” *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, c. 8, no. 1, ss. 10–26, 2015.
- [39] S. Toprak, A. Arife Z. F. Toprak, “SMRGT yöntemi ile bulanıklaştırılmış veriler için bulanık doğrusal regresyon,” *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, c. 31, no. 3, ss. 1–7, 2015.
- [40] R. Viertl, *Statistical Methods for Fuzzy Data*. John Wiley Sons, Ltd., 2011.
- [41] N. Aydoğdu, “Bulanık regresyon analizi ile Aydın ili konut fiyatlarını etkileyen değişkenlerin belirlenmesi,” yük. lis. tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 2020.
- [42] D. Nauck R. Kruse, “Obtaining interpretable fuzzy classification rules from medical data,” *Artificial Intelligence in Medicine*, c. 16, no. 2, ss. 149–169, 1999.
- [43] S. Ay, “Bir Fabrikada Satış Miktarının Bulanık Doğrusal Ve Karesel Model İle Tahmini,” yük. lis. tezi, Başkent Üniversitesi, 2016.
- [44] S. Eını, “Bulanık Doğrusal Regresyon Uygulaması,” yük. lis. tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.
- [45] L. İşbilen Yücel, “Bulanık Regresyon: TÜrkiyede 1980-2004 Döneminde Kayıt Dışı Ekonominin Bulanık Yöntemlerle Tahminine İlişkin Bir Uygulama,” yük. lis. tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 2005.
- [46] M. Diomand, “Fuzzy least squares regression,” *Soft Computing*, c. 2, no. 1, ss. 45–52, 1988.

A.1 Matlab Çizimi

Tanaka'nın bulanık doğrusal regresyon modeli ile elde edilen bulanık doğrusal fonksiyonu için MATLAB kodu hem regresyon çizgisini hem de gözlem verilerini (bulanık aralıklarıyla birlikte) çizecek şekilde hazırlanmıştır.

Matlab Kodu:

```
% Veriler
```

```
x = [ 6.15 , 9.00 , 12.00 , 12.15 , 15.00 , 15.19 , 17.55 , 20.48 ];
```

```
m = [ 2.5 , 2.0 , 3.0 , 2.5 , 3.0 , 3.5 , 3.5 , 4.0 ]; % Merkez
```

```
l = [ 0.17 , 0.17 , 0.30 , 0.25 , 0.13 , 0.35 , 0.27 , 0.32 ]; % Sol
```

```
r = [ 0.40 , 0.45 , 0.50 , 0.53 , 0.46 , 0.63 , 0.72 , 0.61 ]; % Sağ
```

```
% Katsayılar (a, b) için üçlü değerler (L, M, R)
```

```
a_L = 0.9208; a_M = 1.0510; a_R = 1.3079;
```

```
b_L = 0.0707; b_M = 0.0820; b_R = 0.1259;
```

```
% x eksenini
```

```
x_fit = linspace(6, 21, 100);
```

```
% Regresyon doğruları
```

```
y_L = a_L + b_L * x_fit;
```

```
y_M = a_M + b_M * x_fit;
```

```
y_R = a_R + b_R * x_fit;
```

```
% Grafik
```

```
figure;
```

```

hold on;

% Bulanık bölge (fuzzy region)

fill([x_fit, fliplr(x_fit)], [y_L, fliplr(y_R)], [0.8 0.8 0.8], 'EdgeColor', 'none',
'DisplayName', 'Bulanık bölge');

% Orta çizgi

plot(x_fit, y_M, 'k-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Orta çizgi (m)');

% Sol ve sağ sınırlar

plot(x_fit, y_L, 'b-', 'DisplayName', 'Sol sınır (l)');

plot(x_fit, y_R, 'r-', 'DisplayName', 'Sağ sınır (r)');

% Gerçek gözlem verileri (error bar ile)

for i = 1:length(x)
errorbar(x(i), m(i), l(i), r(i), 'ko', 'CapSize', 6, 'LineWidth', 1.2);
end

% Eksenler ve açıklamalar

xlabel('x');

ylabel('y*(x)');

title('Tanaka Bulanık Regresyon Doğrusu');

legend('Location', 'northwest');

grid on;

hold off;

```

```

>> % Veriler
x = [6.15, 9.00, 12.00, 12.15, 15.00, 15.19, 17.55, 20.48];
m = [2.5, 2.0, 3.0, 2.5, 3.0, 3.5, 3.5, 4.0]; % Merkez
l = [0.17, 0.17, 0.30, 0.25, 0.13, 0.35, 0.27, 0.32]; % Sol
r = [0.40, 0.45, 0.50, 0.53, 0.46, 0.63, 0.72, 0.61]; % Sağ

% Katsayılar (a, b) için üçlü değerler (L, M, R)
a_L = 0.9208; a_M = 1.0510; a_R = 1.3079;
b_L = 0.0707; b_M = 0.0820; b_R = 0.1259;

% x eksenini
x_fit = linspace(6, 21, 100);

% Regresyon doğruları
y_L = a_L + b_L * x_fit;
y_M = a_M + b_M * x_fit;
y_R = a_R + b_R * x_fit;

% Grafik
figure;
hold on;

% Bulanık bölge (fuzzy region)
fill([x_fit, fliplr(x_fit)], [y_L, fliplr(y_R)], [0.8 0.8 0.8], 'EdgeColor', 'none', 'DisplayName', 'Bulanık bölge');

% Orta çizgi
plot(x_fit, y_M, 'k-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Orta çizgi (m)');

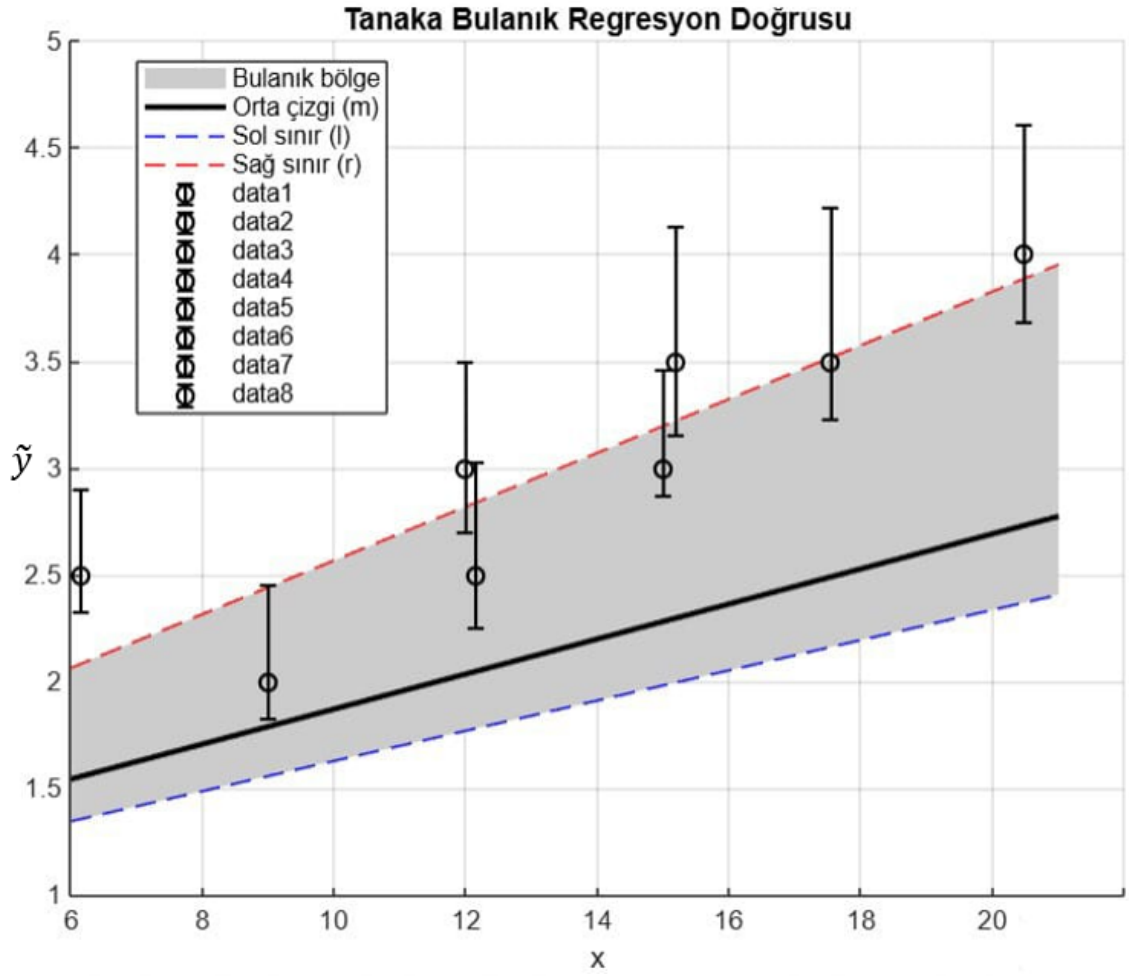
% Sol ve sağ sınırlar
plot(x_fit, y_L, 'b--', 'DisplayName', 'Sol sınır (l)');
plot(x_fit, y_R, 'r--', 'DisplayName', 'Sağ sınır (r)');

% Gerçek gözlem verileri (error bar ile)
for i = 1:length(x)
    errorbar(x(i), m(i), l(i), r(i), 'ko', 'CapSize', 6, 'LineWidth', 1.2);
end

% Eksenler ve açıklamalar
xlabel('x');
ylabel('y*(x)');
title('Tanaka Bulanık Regresyon Doğrusu');
legend('Location', 'northwest');
grid on;
hold off;

```

Şekil A.1 Bulanık Veri Seti Grafiği Matlab Kodu



Şekil A.2 Bulanık Veri Seti Grafiği Matlab Çizimi

- **Siyah çizgi:** Merkez regresyon doğrusu
- **Mavi ve kırmızı çizgiler:** Alt ve üst sınırlar (bulanık kapsama aralığı)
- **Gri bölge:** Tahminin bulanık belirsizlik alanı

Tablo 5.2'deki veri çiftleri için MATLAB kodu hem regresyon doğrusunu (%95 güven aralıkları ile) hem de gözlem verilerini çizecek şekilde hazırlanmıştır.

Matlab Kodu:

```
% Veri
x = [6.15, 9, 12, 12.15, 15, 15.19, 17.55, 20.48];
y = [2.5, 2, 3, 2.5, 3, 3.5, 3.5, 4];
% Regresyon katsayıları (b0 = sabit, b1 = eğim)
X = [ones(length(x), 1) x(:)];
b = X \ y(:); % En küçük kareler çözümü
y_fit = X * b;
% %95 güven aralıkları için hesaplama
n = length(x);
y_hat = X * b;
resid = y(:) - y_hat;
s_err = sqrt(sum(resid.^ 2) / (n - 2));
x_pred = linspace(min(x), max(x), 100)';
X_pred = [ones(length(x_pred), 1) x_pred];
y_pred = X_pred * b;
% t-değeri (iki kuyruklu, %95 güven aralığı)
alpha = 0.05;
t_val = tinv(1 - alpha/2, n - 2);
% Standart hata
SE_y = s_err * sqrt(1/n + (x_pred - mean(x)).^ 2 / sum((x - mean(x)).^ 2));
% Güven aralıkları
y_upper = y_pred + t_val * SE_y;
y_lower = y_pred - t_val * SE_y;
% Grafik
```

```

figure;

plot(x, y, 'o', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'b', 'DisplayName', 'Veri
Noktaları');

hold on;

plot(x_pred, y_pred, 'r-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('y = %.4fx +
%.4f', b(2), b(1)));

plot(x_pred, y_upper, 'r-', 'LineWidth', 1, 'DisplayName', '%95 Güven Aralığı
(Üst)');

plot(x_pred, y_lower, 'r-', 'LineWidth', 1, 'DisplayName', '%95 Güven Aralığı
(Alt)');

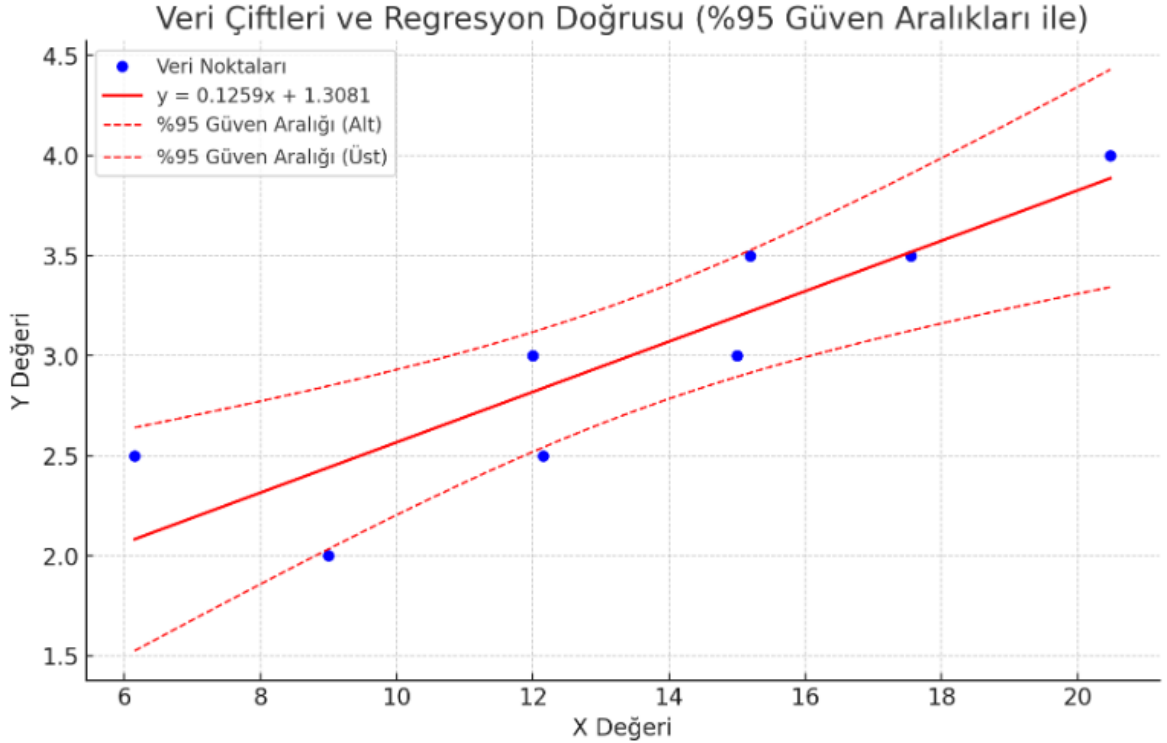
grid on;

xlabel('X Değeri');

ylabel('Y Değeri');

title('Veri Çiftleri ve Regresyon Doğrusu (%95 Güven Aralıkları ile)');
legend('Location', 'northwest');

```



Şekil A.3 Klasik Veri Seti Grafiği Matlab Çizimi

```

>> % Veri
x = [6.15, 9, 12, 12.15, 15, 15.19, 17.55, 20.48];
y = [2.5, 2, 3, 2.5, 3, 3.5, 3.5, 4];

% Regresyon katsayıları (b0 = sabit, b1 = eğim)
X = [ones(length(x), 1) x(:)];
b = X \ y(:); % En küçük kareler çözümü
y_fit = X * b;

% %95 güven aralıkları için hesaplama
n = length(x);
y_hat = X * b;
resid = y(:) - y_hat;
s_err = sqrt(sum(resid.^2) / (n - 2));

x_pred = linspace(min(x), max(x), 100)';
X_pred = [ones(length(x_pred), 1) x_pred];
y_pred = X_pred * b;

% t-değeri (iki kuyruklu, %95 güven aralığı)
alpha = 0.05;
t_val = tinv(1 - alpha/2, n - 2);

% Standart hata
SE_y = s_err * sqrt(1/n + (x_pred - mean(x)).^2 / sum((x - mean(x)).^2));

% Güven aralıkları
y_upper = y_pred + t_val * SE_y;
y_lower = y_pred - t_val * SE_y;

% Grafik
figure;
plot(x, y, 'o', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'b', 'DisplayName', 'Veri Noktaları'); hold on;
plot(x_pred, y_pred, 'r-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', sprintf('y = %.4fx + %.4f', b(2), b(1)));
plot(x_pred, y_upper, 'r--', 'LineWidth', 1, 'DisplayName', '%95 Güven Aralığı (Üst)');
plot(x_pred, y_lower, 'r--', 'LineWidth', 1, 'DisplayName', '%95 Güven Aralığı (Alt)');
grid on;
xlabel('X Değeri');
ylabel('Y Değeri');
title('Veri Çiftleri ve Regresyon Doğrusu (%95 Güven Aralıkları ile)');
legend('Location', 'northwest');

```

Şekil A.4 Klasik Veri Seti Grafiği Matlab Kodu

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. R. Çelik, E. Mehmet Özkan, İ. Demir, "Fuzzy Regression Analysis"
8th International Hybrid Conference on Mathematical Advances and
Applications (ICOMAA-2025), 7-9 May 2025.

