

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN BAŞLANGIÇ
SIÇRAMALI PROBLEMLER İÇİN NÜMERİK ALGORİTMALAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasret HATTABINOĞLU
Danışman: Prof. Dr. Hakkı DURU

VAN – 2025

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN BAŞLANGIÇ
SIÇRAMALI PROBLEMLER İÇİN NÜMERİK AGORİTMALAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasret HATTABINOĞLU

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR (Başkan)

Prof. Dr. Hakkı Duru (Danışman)

Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞCIOĞLU (Üye)

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda **Prof. Dr. Hakkı DURU** danışmanlığında, **Hasret HATTABINOĞLU** tarafından sunulan “**Singüler Pertürbe Özellikli Lineer Olmayan Başlangıç Sıçramalı Problemler için Nümerik Algoritmalar**” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 30 /07 / 2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

İmza:

Üye: Prof. Dr. Hakkı DURU

İmza:

Üye: Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun / / tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Hasret HATTABINOĞLU



ÖZET

SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN BAŞLANGIÇ SİÇRAMALI PROBLEMLER İÇİN NÜMERİK ALGORİTMALAR

HATTABINOĞLU, Hasret
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Hakkı Duru
Ağustos 2025, 45 sayfa

Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli lineer olmayan başlangıç sıçramalı problemler ele alınmaktadır. İncelenen problemin kuazilinearizasyon metodu kullanılarak lineerleştirme yapılarak lineerleştirilmiş problem için asimptotik değerlendirmesi yapılmaktadır yani çözümün başlangıç verilerine bağlı olduğu gösterilmektedir. Daha sonra adaptif noktalardan oluşan şebeke üzerinde, lineer baz fonksiyonları kullanılarak kalan terimi integral biçiminde olan kuadratür kuralları uygulanarak fark şemaları kurulmaktadır. Fark şemasının kararlılığı ve hata değerlendirmesi yapılmaktadır. Nümerik çözümün sürekli problemin çözümüne yakınsama oranı tespit edilerek örnek problem üzerinde bilgisayar program kodları yazılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Başlangıç sıçramalı problem, Fark şeması, Singüler pertürbe



ABSTRACT

NUMERICAL ALGORITHMS FOR NON-LINEAR SINGULARLY PERTURBED INITIAL JUMPED PROBLEMS

HATTABINOĞLU, Hasret
M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Hakkı DURU
August 2025, 45 pages

This study addresses singularly perturbed nonlinear initial-jump problems. The examined problem is first linearized using the quasilinearization method, followed by an asymptotic analysis of the linearized problem, demonstrating the solution's dependence on initial data. Subsequently, difference schemes are constructed on adaptive grids using linear basis functions, with quadrature rules applied to the residual term in integral form. The stability analysis and error estimation of the difference scheme are performed. The convergence rate of the numerical solution to the exact solution of the continuous problem is determined, and computer codes are implemented for a sample problem.

Keywords: Difference scheme, Initial jump problem, Singular perturbation

TEŞEKKÜR

Bu tez alıőmasında, her tŒrlŒ ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ok kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Hakkı Duru'ya sonsuz teőekkŒrlerimi sunarım. alıőmamda kŒŒk bile olsa emeği geen arkadaőlarım ve Œęretmenlerime, hayatımın her anında ve Œzelikle eğitimim konusunda aba sarf eden arkamda dimdik duran ok kıymetli aileme, alıőmalarım boyunca yanımda olan beni cesaretlendiren değerli eőim Hakim HATTABINOğLU'na ve sevgili kŒŒk oğlum Zeyd Őmer'e teőekkŒr ederim.

2025

Hasret HATTABINOğLU



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
EKLER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞİ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	5
3. ÖN BİLGİLER	7
3.1 Kuadratür Formülleri	7
4. ASİMPOTİK DEĞERLENDİRMELER	11
5. FARK ŞEMASI.....	15
5.1 Fark Şemasının Kurulması.....	15
6. HATA DEĞERLENDİRMESİ	23
6.1 Bakhvalov Şebeke Noktaları.....	27
6.2 Bakhvalov Şebeke İçin Hata Değerlendirmesi	28
7. SAYISAL ÖRNEKLER.....	31
8. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR.....	39
EKLER	41
ÖZ GEÇMİŞ.....	45



ÇİZELGELER LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 7.1 Değişken katsayılı lineer problemin $N = 1024$ ve $N = 2048$ nokta sayıları ve bazı ε değerleri için yakınsama oranları	33
Çizelge 7.2 Yarı lineer problemin $N = 1024$ ve $N = 2048$ nokta sayıları ve bazı ε değerleri için yakınsama oranları.....	35



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 7.1 Sabit katsayılı problemin $\varepsilon = 2 - 3$ ve $\varepsilon = 2 - 6$ değerleri için grafiği	31
Şekil 7.2 Lineer problemin farklı $\varepsilon = 2 - 3, 2 - 4, 2 - 5, 2 - 6$ değerleri için grafiği	33
Şekil 7.3 Lineer olmayan problemin farklı $\varepsilon = 2 - 2, 2 - 3, 2 - 5, 2 - 7, 2 - 9$ değerleri için grafiği	35





SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
ε	Pertürbasyon Parametresi
\hbar_j	Adım Uzunluğu
L	Diferansiyel Operatörü
τ	Şebeke adımı
R_j	Kalan terim
u	Problemin kesin çözümü
$u^{(k)}(t)$	$u(t)$ fonksiyonunun k. mertebeden türevi
y	Problemin yaklaşık çözümü
$v_{t,j}$	$v(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki ileri fark türevi
$v_{\bar{t},j}$	$v(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki geri fark türevi
$v_{i,j}$	$v(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki merkezi fark türevi
\hat{z}	z fonksiyonunun t_{j+1} noktasındaki değeri $z(t_{j+1})$
\check{z}	z fonksiyonunun t_{j-1} noktasındaki değeri $z(t_{j-1})$
\bar{w}	Düzgün olmayan şebeke



EKLER DİZİNİ

	Sayfa
Ek 1. Lineer problem için bilgisayar programı.....	41
Ek 2. Lineer olmayan problem için bilgisayar programı.....	42





1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞİ

Bu çalışmada lineer olmayan başlangıç sıçramalı singüler pertürbe özellikli

$$\varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' = f(t, u), t \in (0, T] \quad (1.1)$$

$$u(0) = A, t \in [0, T] \quad (1.2)$$

$$\frac{du}{dt}(0) = \frac{B}{\varepsilon}, t \in [0, T] \quad (1.3)$$

problem ele alınmaktadır. Burada $0 < \varepsilon < 1$ pertürbasyon parametresi, $a(t) \geq a > 0$ ve f fonksiyonları yeterince düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca $f(t, u)$ fonksiyonu Lipshitz şartını sağlar ve M sabit olmak üzere $\left| \frac{\partial f(t, \tilde{u})}{\partial u} \right| \leq M$ şartı sağlanır.

Bu tür problemler bilimin birçok alanındaki araştırma nesnelerinin modellenmesinde ortaya çıkar. Bir yaya bağlı kütleli bir boyutlu hareketinin modellenmesiyle ilgili problemdir. Tekil pertürbasyon problemler en yüksek mertebeli terimi pertürbasyon parametresi içeren problemler olarak bilinmektedirler. Küçük bir parametreye bağlı olarak en yüksek mertebeli türevin katsayısının küçülmesi, çözümlerde sınır katmanlarında hızlı değişimlere yol açan tekil pertürbasyon davranışını tetikler. Sınır katmanlarında gözlemlenen bu ani değişimler nedeniyle klasik fark şemaları, türevlerin potansiyel olarak sınırsız büyümesi sonucunda kararsızlık gösterebilir. Bu yüzden, ağırlık fonksiyonu ve integral kalan terimi içeren interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak yeni fark şemaları geliştirilmiştir. Ağırlık (baz) fonksiyonları, yüksek mertebeli türevler için kalan terimleri sıfıra indirecek biçimde seçilir; bu, yöntemin önemli bir avantajını oluşturur. İlave olarak, kuadratür kurallarının integral kalan terim içermesi, integral operatörünün doğal avantajları dolayısıyla çözüm fonksiyonu ve türevlerine gelen koşulların hafiflemesine yol açar. Yöntemimizin bir diğer güçlü yönü de budur.

Bu tip problemlerde çözümün tanım alanının bazı kesimlerinde oldukça hızlı değiştiği görülür. Bu da demektir ki çözüm, problemin karakterine uygun başlangıç ya da sınır katmanı denilen bölgelere sahiptir ki bu bölgelerde çok hızlı değişir. Bu bölgeler dışında ise yavaş değişmektedir. Sınır veya başlangıç katmanlarında çözümün türevleri hızlı büyüme eğilimindedir. Klasik algoritmalar, çözümün türevi bu katmanlarda hızlı büyüdüğünden kararlı olmaz. Dolayısıyla, bu tip problemlerin nümerik çözümleri için

kararlı algoritmalara ihtiyaç duyulmaktadır (Roos vd., 2008; Nayfeh, 1993; Miller vd., 1996; O'Malley, 1991).

Kopteva (2006), çalışmasında tekil pertürbasyonlu yarı-doğrusal reaksiyon-difüzyon problemlerine yönelik sayısal yöntemlerin, çözümde keskin katmanlar ortaya çıktığında hatalı sonuçlar üretebileceği konusunda uyarıda bulunmaktadır. Böyle durumlarda doğru sayısal çözümler elde etmenin etkili bir yolu, katmanların bulunduğu bölgelerde çok ince ve katman-uyumlu ağların kullanılmasıdır.

Eğer katman yerleri önceden biliniyorsa, bu doğrultuda tasarlanmış bir ağ önceden oluşturulabilir (Bakhvalov, 1969; Miller vd., 1996; Roos vd., 1996). Bu bilgi genellikle mevcut olmadığından, tercih edilen yaklaşım adaptif bir algoritmadır: başlangıçta basit bir ağ ile başlanır; ardından çözümde katmanlar algılanır ve sadece ara çözümler ile mevcut ağ üzerinde çalışarak katmana uyarlanmış yeni bir ağ oluşturulur (Kopteva, 2006).

1905'teki makalesinde viskoz akışkanların katı yüzeylerle etkileşimini inceleyen Ludwig Prandtl sınır tabaka teorisini (Grenzschichttheorie) bir akışkanlar dinamiği teorisi olarak ortaya koymuştur. Bu makalede “Problemin en önemli sorusu, akışkanın katı cisim duvarlarındaki davranışdır. Sınır tabakasındaki fiziksel süreçleri yeterince tanımlamak için, akışkanın duvarda yapışkan olduğunu (hızın sıfır veya cisim hızına eşit) varsaymak gerekir. Sürtünme çok küçükse ve akışkanın duvar boyunca kat ettiği mesafe çok uzun değilse, duvara çok yakın bölgelerde hız normal değerine ulaşır. Bu dar geçiş katmanında, küçük sürtünme katsayısına rağmen keskin hız gradyanları belirgin etkiler yaratır.” diyerek ilk defa sınır tabakası ifadesini kullanmıştır (Friedrich ve Wasow, 1946).

Singüler pertürbasyon terimini Friedrich ve Wasow (1946), makalesinde “Bu doğadaki problemlere Singüler (tekil) pertürbasyon problemleri adını veriyoruz. Uygulama örnekleri; mekanik sistemlerde esnek bağlı kütlelerin salınımlarında, kütlelerden birinin diğerlerine göre çok küçük olduğu durumlarda, elektrik devrelerinde bir devre gözünün endüktansının veya kapasitesinin çok küçük olduğu salınım durumlarında, tekil pertürbasyon problemleri ortaya çıkmaktadır.” diyerek ortaya attı.

Ele alınan probleme yakın bazı çalışmalardan birisi Schatz ve Wahlbin (1983), yayınladığı makalesidir. Bu makalede ikinci mertebeden tekil pertürbasyonlu reaksiyon-difüzyon eliptik sınır değer problemleri, sıfıncı mertebeden denklemlere dejenere olabilen durumlar için ele alınmıştır. Problemin gerçek anlamda ikinci mertebeden bir

denklemden tekil pertürbasyonlu bir forma kadar değişmesi sürecinde, tekil durumları özel olarak ele almadan uygulanan standart Galerkin sonlu elemanlar yönteminin davranışını incelemiştir (Schatz ve Wahlbin, 1983).

O'Malley (1988), makalesinde doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri için tekil pertürbasyonlu başlangıç değer problemleri incelemiştir, sert (stiff) diferansiyel denklem sistemlerinin çözümüne yönelik sayısal algoritmaların geliştirilmesinde kullanılan analiz yöntemleriyle paralellik gösterdiğini ifade etmiştir. Bu makalesinde, söz konusu iki önemli araştırma alanının birleştirilmesinin sağladığı avantajları vurgulamayı amaçlamıştır. Çalışmasında, asimptotik ve sayısal analizler, kararlılık ve kontrol teorisi ile uygulamalı matematiksel modelleme alanlarına dağılmış çeşitli literatürü ilişkilendirmiştir (O'Malley, 1988). Yine O'Malley, adi diferansiyel tekil pertürbasyon problemlerinin asimptotik olarak çözümlerini vermiş ve tekil pertürbasyon metodları üzerinde çalışmıştır (O'Malley, 1974; 1991).

Kopteva, düzgün (smooth) bir iki boyutlu bölgede tanımlı yarı doğrusal (semilinear) bir reaksiyon-difüzyon denklemine, örtüşen Schwarz bölge ayrışım yöntemi uygulanmıştır. Sınır katmanı alt bölgesinde Bakhvalov ve Shishkin tipi kat uyumlu ağlar üzerinde sonlu fark yöntemi, iç alt bölgede ise yarı düzgün Delaunay üçgenlemesi üzerinde yığık kütleli (lumped-mass) lineer sonlu elemanlar kullanmıştır. İteratif yöntem için, $\varepsilon \in (0,1]$ aralığında maksimum norma göre hata tahminleri sunulmuştur. Özellikle, $\varepsilon \leq C|\ln h|^{-1}$ koşulu sağlandığında, bir tek iterasyonun ε 'dan bağımsız olarak maksimum normda ikinci dereceden yakınsama sağladığını göstermiştir (Kopteva ve Pickett, 2012).

Miller vd. (2000), tekil pertürbasyon sınır değer problemleri için üstel katsayılı sonlu fark metodları önermişlerdir. Tekil pertürbasyon içeren çeşitli problemlere yönelik basit örnekler sunmakta ve bu problemlerin sayısal çözümlerine dair bazı temel konular tartışmaktadır. Bu problemlerin, çözümde keskin katmanlar oluştuğunda, standart sayısal yöntemlerle tamamen tatmin edici bir şekilde çözülemeyeceği vurgulanmaktadır. Bu durum, tekil pertürbasyon parametresi ne olursa olsun, yöntemlerin parametreye bağı olmaksızın tutarlı performans gösteren bir biçimde çalışması gerektiğini ortaya koymaktadır.

Amiraliyev ve Duru (1999), birinci ve ikinci türevde küçük bir parametre içeren lineer ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem başlangıç değeri problemi ele alınmıştır.

Başlangıç sıçramalı tekil pertürbasyon problemini üstel katsayılı fark şeması kurarak düzgün ağ üzerinde incelemiştir. Bakhvalov (1969), tekil pertürbasyon problemleri için sınır katmanı uyumlu düğüm noktaları içeren kat uyumlu ağ üzerinde algoritmalar sunmuştur. Bakhvalov'un bu çalışmasıyla, sınır katmanı içeren tekil pertürbasyon problemlerinde kat-uyumlu ağ (Bakhvalov mesh) kavramını literatüre kazandırmış ve bu sayede ϵ -parametresine bağımlı olmayan, yüksek doğruluklu sayısal çözümler sunmanın yolunu açmıştır. Takip eden yıllarda yapılan çok sayıda araştırma uygulamalar, interpolasyon teknikleri, yüksek mertebe fark şemaları bu yöntemi daha verimli, daha doğru ve daha geniş uygulamalı hale getirmiştir.

Boglaev küçük bir parametre nedeniyle tekil pertürbasyon gösteren yarı lineer problem için Boglaev tip Bakhvalov ağ üzerinde nümerik algoritma önermiştir. Küçük bir parametrenin en yüksek türevle çarpıldığı bir sınır değer problemi bağlamında, yaklaşık sayısal çözüm yöntemleri sunar. Bu yöntemler, yarı lineer yapıya sahip problemlerde pertürbasyon parametresine bağımlı olmayan hata davranışı göstermeyi amaçlar (Boglaev, 1984).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Çalışmada, başlangıç sıçramalı tekil pertürbasyon problemi ele alınmaktadır. Çalışmanın temel amacı, bu tür problemler için sonlu fark algoritması sunmaktır. Sürekli problemin asimptotik değerlendirmesi yapılarak kararlılığı incelenmektedir. Ayrık problemin hata değerlendirmesi ayrık normlara göre incelenmektedir.

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş ve Literatür bildirisi. Bu bölümünde problem tanıtılmakta, ele alınan problem hakkında literatür tanıtılmaktadır.

İkinci bölüm materyal ve yöntem bölümü olup sonlu fark şeması oluşturulurken sonlu fark algoritması oluşturma yöntemi tanıtılmaktadır. Sonlu fark algoritması interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak inşa edilmektedir. İnterpolasyon kuadratür kuralları kalan terimi integral biçiminde olup baz fonksiyonları içermektedir. Baz fonksiyonları en yüksek mertebeli türev içeren terimde metot hatasını sınırlayacak biçimde seçilir. Kalan terimin integral biçiminde olması çözümün türevleri üzerine (süreklilik gibi) ağır şartları hafifletmektedir. Sonlu fark algoritması kat uyumlu ağ üzerinde kurulmaktadır.

Üçüncü bölüm olan ön bilgiler bölümü olup çalışmada kullanılacak lemma ve eşitsizlikler verilmektedir. Lemma ve eşitsizlikler ispatsız olarak verilmektedir.

Dördüncü bölümde problemin başlangıç verilerine bağlı olduğu asimptotik değerlendirmelerle ispatlanmaktadır.

Beşinci bölümde adaptif noktalardan oluşan ağ üzerinde lineer baz fonksiyonları kullanılarak kalan terimi integral biçiminde olan kuadratür formülleri yardımıyla sonlu fark şeması kurulmaktadır.

Altıncı bölümde ayrık asimptotik değerlendirmelerle hatanın kalan terime bağlı olduğu gösterilmektedir. Hata oranının $O(N^{-1})$ olduğu ispatlanmaktadır.

Sekizinci ve son bölüm Tartışma ve Sonuç bölümüdür. Ulaşılan sonuçlar bu bölümde irdelenmektedir.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde problemimizin çözümünde kullanılacak kuadratur formülleri ve bazı eşitsizlikler verilmektedir.

3.1 Kuadratur Formülleri

Aşağıda verilmiş olan kuadratur formülleri, fark şemalarının kurulmasında ve incelenmesinde kullanılacaktır.

Lemma 3.1 Buradaki $p(x)$ fonksiyonu ağırlık(baz) fonksiyonu ve f türevi integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f[a, b] \int_a^b p(x)dx - \int_a^b dxp'(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)K_n(x, \xi)d\xi \quad n = 0,1 \quad (3.1)$$

Burada

$$R^*(f) = - \int_a^b dxp'(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)K_n(x, \xi)d\mu, \\ K_n(x, \xi) = T_n(x - \xi) - (x - a)b - a^{-1}T_n(b - \xi)$$

$T_n(\lambda)$ kesme kuvvet fonksiyonu

$$T_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

olur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

μ Eşitsizliği

Aşağıda verilen

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \mu > 0.$$

eşitsizliği doğrudur (Amiraliyev ve Duru, 2002; Amirali ve Amirali, 2023).

Gronwall İntegral Eşitsizliği

$u(t)$ azalmayan fonksiyon, $p(s)$, $q(s)$ sürekli fonksiyonlar;

$$u(t) \leq v_0 + \int_0^t [w(s)v(s) + q(s)]ds, \quad w(t) \geq 0$$

ise;

$$u(t) \leq v_0 \exp\left(\int_0^t w(\eta)d\eta\right) + \int_0^t q(s)\exp\left(\int_0^t w(\eta)d\eta\right)ds, \quad w(t) \geq 0.$$

(Amiraliyev ve Duru, 2002).

Fark türevleri

$v(x)$ fonksiyonu düzgün olmayan şebeke üzerinde tanımlı şebeke fonksiyonu olmak üzere

$$\tau_j = t_j - t_{j-1}; \quad \bar{h}_j = \frac{\tau_{j+1} + \tau_j}{2}$$

olacak şekilde

$$v(t_j + \tau_{j+1}) = v(t_j) + \tau_{j+1}v'(t_j) + \frac{\tau_{j+1}^2}{2}v''(t_{j+1}) + O(\tau_{j+1}^3) \quad (3.2)$$

$$v(t_j - \tau_j) = v(t_j) - \tau_j v'(t_j) + \frac{\tau_j^2}{2} v''(t_j) + O(\tau_j^3) \quad (3.3)$$

(3.2)'den

$$v_t = \frac{v_{j+1} - v_j}{\tau_{j+1}} = v'(t_j) + \frac{\tau_{j+1}}{2} v''(t_{j+1}) + O(\tau_{j+1}^2) \quad (3.4)$$

ve (3.3)'den

$$v_{\bar{t}} = \frac{v_j - v_{j-1}}{\tau_j} = v'(t_j) - \frac{\tau_j}{2} v''(t_j) + O(\tau_j^2) \quad (3.5)$$

elde ederiz. (3.4) ve (3.5) taraf tarafa toplayarak

$$v_t^\circ = \frac{v_t + v_{\bar{t}}}{2} = v'(t_j) + \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{4} v''(t_j) + O(\hbar_j^2)$$

düzgün olmayan şebekede merkezi fark türevini elde ederiz. Tekrar (3.2) ve (3.3)'ü taraf tarafa çıkararak

$$v(t_j + \tau_{j+1}) - v(t_j - \tau_j) = (\tau_{j+1} + \tau_j) v'(t_j) + \left(\frac{\tau_{j+1}^2}{2} - \frac{\tau_j^2}{2} \right) v''(t_j) + O(\hbar_j^3)$$

ve $(\tau_{j+1} + \tau_j)$ terimine bölersek

$$\frac{v(t_j + \tau_{j+1}) - v(t_j - \tau_j)}{(\tau_{j+1} + \tau_j)} = v'(t_j) + \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{2} v''(t_j) + O(\hbar_j^2)$$

yazılır. Buradan bir başka merkezî fark türevi elde edilir:

$$v_t^\circ = \frac{v_{j+1} - v_j}{2\hbar_j} = v'(t_j) + \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{2} v''(t_j) + O(\hbar_j^2).$$

Ayrıca (3.4) ve (3.5)'i taraf tarafa çıkararak düzgün olmayan şebekede aşağıdaki ikinci fark türevini buluruz:

$$v_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{v_t - v_{\bar{t}}}{\hbar_j} = v''(t_j) + O(\hbar_j).$$

Bundan başka

$$v(t_j + \hbar_j) = v(t_j) + \hbar_j v'(t_j) + \frac{\hbar_j^2}{2} v''(t_j) + O(\hbar_j^3)$$

açılımından aşağıdaki fark türevi elde edilir:

$$v_{\bar{t},j} = \frac{v_{j+1} - v_j}{\hbar_j} = v'(t_j) + \frac{\hbar_j}{2} v''(t_j) + O(\hbar_j^2)$$

(Samarskii,2001).

4. ASİMPOTİK DEĞERLENDİRMELER

Önce sağ taraf fonksiyonunu

$$f(t, u) = f(t, 0) + \frac{\partial f(t, \tilde{u})}{\partial u} u$$

biçiminde yazabiliriz, burada $u = \gamma \tilde{u}$ olup $0 < \gamma < 1$ olur. (1.1)-(1.3) problemini aşağıdaki biçimde lineer pertürbe özellikli başlangıç sızramalı problem olarak yazabiliriz:

$$Lu := \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' - b(t)u = F(t) \quad (4.1)$$

$$u(0) = A \quad (4.2)$$

$$u'(0) = \frac{B}{\varepsilon} \quad (4.3)$$

Burada

$$b(t) = \frac{\partial f(t, \tilde{u})}{\partial u}, F(t) = f(t, 0)$$

deriz. Asimptotik değerlendirme için aşağıdaki Lemmayı ifade ispat edelim.

Lemma 2.1. (1.1)-(1.3) probleminin u fonksiyonu ve türevleri için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$|u^{(k)}(t)| \leq C \varepsilon^{-k} \left\{ \delta_* + \max_{0 \leq s \leq t} |F(s)| + \int_0^t |F'(s)| ds \right\}, 0 \leq t \leq T \quad k = 0, 1, 2. \quad (4.4)$$

Burada

$$\delta_*^2 = |B^2 + b(0)A^2 - 2F(0)A|$$

olacaktır.

İspat: (4.1) denkleminin $2u'(t)$ ile iç çarpımı

$$(Lu, 2u'(t)) = (F(t), 2u'(t))$$

biçiminde yazarız. Buradan

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' - b(t)u, 2u'(t)) &= 2(F(t), u'(t)) \\ 2\varepsilon^2(u'', u'(t)) + 2\varepsilon(a(t)u', u'(t)) - 2(b(t)u, u'(t)) &= 2(F(t), u'(t)) \\ \varepsilon^2 \frac{d}{dt}(u'(t), u'(t)) + 2\varepsilon(a(t)u', u'(t)) + \frac{d}{dt}(b(t)u, u) + \\ 2(b'(t)u, u) & \\ &= 2 \frac{d}{dt}(F, u) - 2(F', u) \end{aligned}$$

elde ederiz. İç çarpımdaki integrasyon işleminden sonra

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(u'(t))^2 + b(t)u^2 + 2\varepsilon(a(t)u', u'(t)) - 2F(t)u(t) + 2(b'(t)u, u). \\ = \varepsilon^2[u'(0)]^2 + b(0)u^2(0) - 2F(0)u(0) - 2(F', u) \end{aligned}$$

buluruz. Buradan ve $a(t) \geq a > 0$ ve $b(t) \geq \beta > 0$ özelliklerinden

$$\begin{aligned} 2\varepsilon|(a(t)u', u'(t))| &\geq 2\varepsilon\alpha \int_0^t (u'(s))^2 ds \\ 2|(b'(t)u, u)| &\leq 2 \max_{0 \leq s \leq t} |b'(t)| \int_0^t |u(s)|^2 ds \\ (F', u) &\leq \mu \int_0^t |F'(s)|^2 ds + \frac{1}{4\mu} \int_0^t |u(s)|^2 ds \\ F(t)u(t) &\leq \mu F^2(t) + \frac{1}{4\mu} u^2(t) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon^2|u'(t)|^2 + \beta|u|^2 - \mu F^2(t) - \frac{1}{4\mu} u^2(t) \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2F(0)A + \mu \int_0^t |F'(s)|^2 ds + 2\varepsilon\alpha \int_0^t (u'(s))^2 ds \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\mu} \int_0^t |u(s)|^2 ds + 2 \max_{0 \leq s \leq t} |b'(t)| \int_0^t |u(s)|^2 ds$$

elde edilir. Burada $\mu < \beta$ seçilirse (μ keyfi)

$$\varepsilon^2 |u'(t)|^2 + |u|^2 \leq C_0 \left\{ \varphi(t) + \int_0^t \left[\varepsilon (u'(s))^2 + |u(s)|^2 \right] ds \right\} \quad (4.5)$$

diferansiyel eşitsizliği bulunur. Burada

$$\varphi(t) = B^2 + b(0)A^2 - 2F(0)A + F^2(t) + \int_0^t |F'(s)|^2 ds$$

$$\delta(t) = \varepsilon^2 |u'(t)|^2 + |u|^2$$

denirse (4.5) ifadesinden

$$\delta(t) \leq C_0 \left\{ \varphi(t) + \int_0^t \delta(s) ds \right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Gronwall eşitsizliğinden ve $\delta_*^2 = |B^2 + b(0)A^2 - 2F(0)A|$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \delta(t) &\leq C_0 \varphi(t) + C_0^2 \int_0^t \varphi(s) e^{C_0(t-s)} ds \leq C_0 \max_{[0,t]} |\varphi(s)| e^{C_0 t} \\ &\leq C_1 \left\{ \delta_*^2 + \int_0^t |F'(s)| ds + \max_{[0,t]} F^2(s) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) ifadesinden (4.4) değerlendirmesi $k = 0,1$ için ispatlanmış olur. $k = 2$ durumu için (4.1) denkleminde (4.4) değerlendirmesinin doğruluğu çıkar.



5. FARK ŞEMASI

Bu bölümde nümerik algoritma olarak fark Şemaları kullanılacaktır. Fark Şemalarının inŐasında interpolasyon kuadratür kurallarından faydalanılacaktır. Kullanılan interpolasyon kuadratür kurallarındaki baz fonksiyonları lineer baz fonksiyonlarıdır. Baz fonksiyonları en yüksek mertebeden türevli terimin yaklaşık türevindeki metot hatasını sınırlayacak Şekilde seçilmektedir. Burada kullanılacak Şebeke Bakhvalov Őebekedir. Fark Şemaları bu iki Şebeke üzerinde kurulmaktadır. Önce $[0, T]$ aralığında ayrık noktalar kümesini yazalım. $\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{t_j: t_j = 0, T\}$ olur. ω_N kümesi üzerinde tanımlı bir v fonksiyonu için $v_j = v(t_j)$ olmak Őartıyla

$$v_t = \frac{v_{j+1} - v_j}{\tau_{j+1}}, v_{\bar{t}} = \frac{v_j - v_{j-1}}{\tau_j}, v_{\dot{t}} = \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{\tau_j}$$
$$v_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{\bar{h}_j} (v_t - v_{\bar{t}}), v_{\dot{t}} = \frac{v_{j+1} - v_j}{\bar{h}_j}$$

gösterimlerini sunabiliriz (Samarskii, 2001).

5.1 Fark Şemasının Kurulması

(4.1) denklemini bir $\bar{h}_j^{-1} \varphi_j(t)$ baz fonksiyonuyla çarpıp $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ aralığında integre edersek

$$(Lu, \bar{h}_j^{-1} \varphi_j(t)) = (f(t, u), \bar{h}_j^{-1} \varphi_j(t))$$

eŐitlięini elde ederiz. Bu eşitliği daha açık yazarsak

$$\begin{aligned} & \bar{h}_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varepsilon^2 u'' \varphi_j(t) dt + \varepsilon \bar{h}_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} a(t) u' \varphi_j(t) dt \\ & = \bar{h}_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(t, u) \varphi_j(t) dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

yazarız. Burada $\varphi_j(t)$ fonksiyonu

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \varphi_j^{(1)}(t) = \frac{t - t_{j-1}}{t_j}, & t \in [t_{j-1}, t_j] \\ \varphi_j^{(2)}(t) = \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1}}, & t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & t \notin [t_{j-1}, t_{j+1}] \end{cases}$$

biçiminde olup aşağıdaki $\varphi_j^{(1)}(t)$ ve $\varphi_j^{(2)}(t)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümüdür.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 [\varphi_j^{(1)}(t)]'' = 0, & t \in [t_{j-1}, t_j] \\ \varphi_j^{(1)}(t_{j-1}) = 0, \varphi_j^{(1)}(t_j) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 [\varphi_j^{(2)}(t)]'' = 0, & t \in [t_j, t_{j+1}] \\ \varphi_j^{(2)}(t_j) = 1, \varphi_j^{(2)}(t_{j+1}) = 0, \end{cases}$$

(4.1) eşitliğinde soldaki birinci terim için kısmi integrasyon ve (3.1) interpolasyon kuadratür kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} \hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varepsilon^2 u'' \varphi(t) dt &= \varepsilon^2 \hbar^{-1} u' \varphi_j(t) \Big|_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} - \hbar^{-1} \varepsilon^2 \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u' \varphi_j'(t) dt \\ &= -\hbar_j^{-1} \varepsilon^2 \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u' \varphi_j'(t) dt \\ &= -\hbar_j^{-1} \varepsilon^2 \left\{ \int_{t_{j-1}}^{t_j} u' \varphi_j^{(1)'}(t) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} u' \varphi_j^{(2)'}(t) dt \right\} \\ &= -\hbar_j^{-1} \varepsilon^2 \left\{ u_{\bar{t},j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)'}(t) dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \varphi_j^{(1)''} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u''(\eta) K_1(t, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + u_{t,j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)'}(t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \varphi_j^{(2)''} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u''(\eta_j) K_1(t, \eta) d\eta \right\} dt. \end{aligned}$$

$\varphi_j(t)$ fonksiyonunun özelliklerinden

$$\varepsilon^2 \hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u''(t) \varphi(t) dt = \varepsilon^2 u_{\bar{t}\bar{t}} \quad (5.2)$$

yazabiliriz.

(4.1) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terim için (3.1) kuadratr formülünü uygulayarak

$$\begin{aligned} \varepsilon \hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} a(t) u' \varphi(t) dt &= \varepsilon \hbar^{-1} a_j \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u' \varphi_j(t) dt + R_{a,j} \\ &= \hbar_j^{-1} \varepsilon a_j \left\{ \int_{t_{j-1}}^{t_j} u' \varphi_j^{(1)} dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} u' \varphi_j^{(2)} dt \right\} + R_{a,j} \\ &= \hbar_j^{-1} \varepsilon a_j \left[u_{\bar{t}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)} dt + u_t \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)} dt \right] + R_1^{(0)} + R_{a,j} \\ &= \hbar_j^{-1} \varepsilon a_j \left[u_t \frac{\tau_{j+1}}{2} + u_{\bar{t}} \frac{\tau_j}{2} \right] + R_1^{(0)} + R_{a,j} \\ &= \frac{\hbar_j^{-1}}{2} \varepsilon a_j [u_{j+1} - u_j + u_j - u_{j-1}] + R_1^{(0)} + R_{a,j} \\ &= \varepsilon a_j u_{\bar{t}} + R_1^{(0)} + R_{a,j} \end{aligned} \quad (5.3)$$

yazabiliriz. Burada

$$R_{a,j} = \hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a(t_j)] u' \varphi(t) dt \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} R_1^{(0)} &= \hbar_j^{-1} \varepsilon a_j \left\{ \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \varphi_j^{(1)'}(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} u''(\eta) K_1(t, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \varphi_j^{(2)'}(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} u''(\eta) K_1(t, \eta) d\eta \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ayrıca $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)} dt$ ve $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)} dt$ integralleri

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)} dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} dt = \frac{(t - t_{j-1})^2}{2\tau_j} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = \frac{\tau_j}{2}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)} dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1} - t}{\tau_{j+1}} dt = \frac{(t_{j+1} - t)^2}{2\tau_{j+1}} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \frac{\tau_{j+1}}{2}$$

olur. Buradan

$$\hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt = \hbar_j^{-1} \left(\frac{\tau_j}{2} + \frac{\tau_{j+1}}{2} \right) = 1$$

bulunur. Burada $u_t = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\hbar_j}$ olup merkezi fark türevidir.

(4.1) denklemin sağ tarafındaki terim için

$$\begin{aligned} \hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(t, u) \varphi_j(t) dt &= \hbar_j^{-1} f(t_j, u_j) \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt + R_{f,j} \\ &= f(t_j, u_j) + R_{f,j} \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} R_{f,j} &= \hbar_j^{-1} \left\{ \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t, u) - f(t, u_j)] \varphi_j(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t, u_j) - f(t_j, u_j)] \varphi_j(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

(3.3) başlangıç şartı için benzer biçimde (3.1) denklemini $\varphi_0(t)$ baz fonksiyonuyla çarpıp $[t_0, t_1]$ aralığında integral alırsak

$$\int_{t_0}^{t_1} \varepsilon^2 u'' \varphi_0(t) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a(t) \varphi_0(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, u) \varphi_0(t) dt \quad (5.8)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\varphi_0(t)$ fonksiyonu

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \varphi_0^{(2)}(t) = \frac{t_1 - t}{\tau_1}, & t \in [t_0, t_1] \\ 0, & t \notin [t_0, t_1] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_0^{(2)}(t)}{dt^2} = 0, & t \in (t_0, t_1) \\ \varphi_0^{(2)}(t_0) = 1, \varphi_0^{(2)}(t_1) = 0 \end{cases}$$

probleminin çözümüdür. Yukarıdakilere benzer yolla, (5.8) ifadesinin sol taraftaki birinci terimden

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \int_{t_0}^t u'' \varphi_0(t) dt &= -\varepsilon^2 u' \varphi_0(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} u' \varphi_0'(t) dt \\ &= \varepsilon^2 u'(0) + \varepsilon^2 u_{t,0} \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) dt = \varepsilon B - \varepsilon^2 u_{t,0} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Soldaki ikinci terimden

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a(t) u'(t) \varphi_0^{(2)}(t) dt &= \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} u'(t) \varphi_0^{(2)}(t) dt + r_{a,0} \\ &= \varepsilon a_0 u_{t,0} \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0^{(2)}(t) dt + r_1^{(1)} + r_{a,0} \\ \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a(t) u'(t) \varphi_0^{(2)}(t) dt &= \frac{\tau_1}{2} \varepsilon a_0 u_{t,0} + r_1^{(0)} + r_{a,0} \end{aligned} \quad (5.9)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} r_1^{(0)} &= \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} dt (\varphi_0^{(2)}(t))' \int_{t_0}^{t_1} u^{(\eta)} K(t, \eta) d\eta \\ r_{a,0} &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [a(t) - a(t_0)] u'(t) \varphi_0^{(2)}(t) dt, \\ \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0^{(2)}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{t_1 - t}{\tau_1} dt = -\frac{(t_1 - t)^2}{2\tau_1} \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{\tau_1}{2}. \end{aligned}$$

(5.8) ifadesinin sağ tarafı için

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, u) \varphi_0(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, u) \varphi_0^{(2)}(t) dt = \frac{\tau_1}{2} f(t_0, u_0) + r_{f,0}$$

sonucu bulunur. Burada

$$\begin{aligned} r_{f,0} &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, u) - f(t_0, u)] \varphi_0^{(2)}(t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [f(t_0, u) - f(t_0, u_0)] \varphi_0^{(2)}(t) dt \end{aligned}$$

Bu sonuçları birleştirirsek aşağıdaki problem ele edilir.

$$\ell_h^* u := \varepsilon B - \left[\varepsilon^2 - \frac{h_1}{2} \varepsilon a_0 \right] u_{t,0} + r_j = \frac{\tau_1}{2} f(t_0, u_0) \quad (5.10)$$

Burada

$$r_j = r_1^{(0)} + r_{a,0} - r_{f,0}.$$

(5.2), (5.3), (5.6) ve (5.10) ifadelerinden (3.1)-(3.3) problemini

$$\ell_h u = \varepsilon^2 u_{\bar{t}\bar{t}} + \varepsilon a_j u_t = f(t_j, u_j) + R_j, j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (5.11)$$

$$u(0) = A \quad (5.12)$$

$$\ell_h^* u := \varepsilon B - \left[\varepsilon^2 - \frac{h_1}{2} \varepsilon a_0 \right] u_{t,0} + r_j = \frac{\tau_1}{2} f(t_0, u_0) \quad (5.13)$$

biçiminde yazarız. Burada

$$R_j = R_{f,j} - R_1^{(0)} - R_{a,j}, r_j = r_{f,0} - r_1^{(0)} - r_{a,0}.$$

(5.11)-(5.13) probleminde kalan terimleri atarak sonlu fark problemini elde ederiz:

$$\ell_h y = \varepsilon^2 y_{\bar{t}\bar{t}} + \varepsilon a_j y_t = f(t_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (5.14)$$

$$y_0 = A \quad (5.15)$$

$$\ell_h^* y := \varepsilon B - \left[\varepsilon^2 - \frac{\tau_1}{2} \varepsilon a_0 \right] y_{t,0} = \frac{\tau_1}{2} f(t_0, y_0) \quad (5.16)$$





6. HATA DEĞERLENDİRMESİ

u ve y sırayla (5.11)-(5.12) ve (5.14)-(5.16) problemlerinin çözümleri olsun. $z = y - u$ diyelim. Buradan taraf tarafa çıkarırsak

$$\ell_h z = \varepsilon^2 z_{\bar{t}\bar{t}} + \varepsilon a_j z_t^\circ = f(t_j, y_j) - f(t_j, u_j) + R_j, j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (6.1)$$

$$z(0) = z_0 = 0 \quad (6.2)$$

$$\ell_h^* z := \varepsilon B - \left[\varepsilon^2 - \frac{\tau_1}{2} \varepsilon a_0 \right] z_{t,0} = \frac{\tau_1}{2} [f(t_0, y_0) - f(t_0, u_0)] + r_j \quad (6.3)$$

problemini elde ederiz. Burada $\tilde{z}_j = \gamma u + (1 - \gamma)y, 0 < \gamma < 1$ olmak üzere ortalama değer teoreminden

$$f(t_j, y_j) - f(t_j, u_j) = \frac{\partial f(t_j, \tilde{z}_j)}{\partial u} (y_j - u_j) = \frac{\partial f(t_j, \tilde{z}_j)}{\partial u} z_j,$$

ve

$$[f(t_0, y_0) - f(t_0, u_0)] = \frac{\partial f(t_0, \tilde{z}_0)}{\partial u} (y_0 - u_0) = \frac{\partial f(t_0, \tilde{z}_0)}{\partial u} z_0 = 0$$

yazabiliriz. $b(t_j) = -\frac{\partial f(t_j, \tilde{z}_j)}{\partial u}$ dersek (6.1)-(6.3) problemi

$$\ell_h u = \varepsilon^2 z_{\bar{t}\bar{t}} + \varepsilon a_j z_t^\circ + b_j z_j = R_j, j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (6.4)$$

$$z(0) = z_0 = 0 \quad (6.5)$$

$$\ell_h^* z := \varepsilon B - \left[\varepsilon^2 + \frac{\tau_1}{2} \varepsilon a_0 \right] z_{t,0} = r_j \quad (6.6)$$

lineer problemine dönüşür. Sürekli problem için yapılan işlemlerin benzerleri ayrık biçimde yapmak suretiyle aşağıdaki lemma yazılabilir.

Lemma 6.1. z (6.4) ve (6.6) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\Delta_0 |z_{t,j}| + |z_{j+1} + z_j| \leq C \left\{ \Delta_0 |z_{t,0}| + \max_{1 \leq j \leq N-1} |R_j| + \tau_j \sum_{j=1}^{N-2} |R_{t,j}| \right\} \quad (6.7)$$

eşitsizliği $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için sağlanır. Burada $\Delta_0 = \max(\varepsilon, \tau_j)$ olur (Amiraliyev ve Duru, 1999).

İspat : (6.4) denklemini z_t° ile çarpıp, elde edilen eşitlikte

$$z_{\bar{t}t} z_t^\circ = \frac{1}{2} (z_t^2)_{\bar{t}}$$

$$b z z_t^\circ = \frac{1}{8} b ((\hat{z} + z)^2)_{\bar{t}} - \frac{\tau_j^2}{8} b (z_t^2)_{\bar{t}} = \frac{1}{8} b ((\hat{z} + z)^2)_{\bar{t}} - \frac{\tau_j^2}{8} b (z_t^2)_{\bar{t}} - \frac{1}{8} b_{\bar{t}} ((z + \check{z})^2)$$

bağıntıları dikkate alınırsa, aşağıdaki özdeşlikleri elde ederiz;

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 (p z_t^2)_{\bar{t}} + \varepsilon a z_t^\circ + \frac{1}{8} b ((\hat{z} + z)^2)_{\bar{t}} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 q z_t^2 + \frac{1}{8} b_{\bar{t}} ((z + \check{z})^2) + R z_t^\circ \quad (6.8)$$

burada

$$p = -\frac{\tau_j^2}{4\varepsilon^2} b, q = -\frac{\tau_j^2}{4\varepsilon^2} b_{\bar{t}}, \hat{z} = z(t_{j+1}), \check{z} = z(t_{j-1}).$$

(6.4) bağıntısını $2\tau_j$ ile çarpıp $j = 1$ 'den $j = s$ 'ye kadar toplamını alalım

$$2\tau_j \sum_{j=1}^s R_j z_{t,j}^\circ = R_s (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) - \tau_j \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j)$$

formülünü kullanırsak

$$\varepsilon^2 p_s z_{t,s}^2 + 2\varepsilon \tau_j \sum_{j=1}^s a_j z_{t,j}^\circ + \frac{1}{2} b_s (z_{s+1} + z_s)^2 = \varepsilon^2 p_0 z_{t,0}^2 + \frac{1}{4} b_0 (z_1 + z_0)^2$$

$$\begin{aligned}
& -R_1(z_1 + z_0) + R_s(z_{s+1} + z_s) + \tau_j \sum_{j=1}^s \left\{ \varepsilon^2 q_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_{\bar{t},j} (z_j + z_{j-1})^2 \right\} \\
& -\tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j), s \leq N - 1
\end{aligned} \tag{6.9}$$

elde edilir. Böylece,

$$0 < c_0 \leq p \leq c_1, |q| \leq C_0, \tau_j \leq \varepsilon \tag{6.10}$$

$$c_0 \tau_j^2 \leq \varepsilon^2 p \leq c_1 \tau_j^2, \varepsilon^2 |q| \leq C_0 \tau_j^2, \tau_j > \varepsilon \tag{6.11}$$

eşitsizlikleri kolayca görülebilir. Şimdi (6.9) eşitsizliğinden, (6.10) ve (6.11) dikkate alınmak koşuluyla aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir:

$$\delta_s \leq \delta_* + \tau_j \sum_{j=1}^s \{d_j \delta_{j-1} \rho_j\}, s \leq N - 1. \tag{6.12}$$

burada

$$\begin{aligned}
\delta_s &= \varepsilon^2 p_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_j (z_{j+1} + z_j)^2 \\
\delta_* &= C_0 \delta_0 + C \max_{1 \leq N-1} |R_j|^2, C_0 > 1 \\
|\rho_j| &\leq C |R_{t,j}| |z_{j+1} + z_j|, j = 1, 2, \dots, s - 1
\end{aligned}$$

için ve

$$\rho_s = 0, 0 \leq d_j \leq c, j = 1, 2, \dots, s$$

için (6.12) eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği fark benzerinin uygulanmasıyla

$$\delta_s = \delta_* \exp \left[\tau_j \sum_{i=1}^s d_i \right] + \tau_j \sum_{i=1}^s |\rho_i| \exp \left[\tau_j \sum_{j=i+1}^s d_j \right] \leq C (\Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leq N-1} |R_j|^2) +$$

$$\tau \sum_{i=1}^{s-1} |R_{t,i}| |z_{j+1} + z_j|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da (6.7) sonucunu verir (Amirali ve Duru, 2002).

Lemma 6.2 R ve r kesme terimleri için

$$\begin{aligned} \Delta_0 |z_{t,0}| &\leq C \tau_1 \\ \|R\|_{C(\omega_N)} &\leq C \tau_j \\ \tau_j \sum_{j=1}^{N-2} |R_{t,j}| &\leq C \tau_j \end{aligned}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat. Bu lemmanın ispatı R ve r 'nin

$$\begin{aligned} R_j &= R_{f,j} - R_1^{(0)} - R_{a,j}, \\ R_{a,j} &= \hbar_j^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a(t_j)] u'(t) \varphi(t) dt \\ R_1^{(0)} &= \hbar_j^{-1} \varepsilon a_j \left\{ \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \varphi_j^{(1)'}(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} u''(\eta) K_1(t, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \varphi_j^{(2)'}(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} u''(\eta) K_1(t, \eta) d\eta \right\} \\ R_{f,j} &= \hbar_j^{-1} \left\{ \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t, u) - f(t, u_j)] \varphi_j(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t, u_j) - f(t_j, u_j)] \varphi_j(t) dt \right\} \\ r_j &= r_{f,0} - r_1^{(0)} - r_{a,0} \\ r_1^{(0)} &= \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} dt (\varphi_0^{(2)}(t))' \int_{t_0}^{t_1} u'(\eta) K(t, \eta) d\eta \\ r_{a,0} &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [a(t) - a(t_0)] u'(t) \varphi_0^{(2)}(t) dt, \\ r_{f,0} &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, u) - f(t_0, u)] \varphi_0^{(2)}(t) dt \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [f(t_0, u) - f(t_0, u_0)] \varphi_0^{(2)}(t) dt$$

ifadelerinde (4.4)'deki u ve türevlerinin değerlendirilmesi yerine konularak kolayca görülür (Amirali ve Duru, 2002).

Teorem 6.1. Eğer u (3.1) – (3.3) probleminin kesin çözümü ve y de (5.14)-(5.17) probleminin yaklaşık çözümü ise,

$$\max_{1 \leq j \leq N} |y_j - u_j| \leq C\tau \quad (6.13)$$

şeklindeki hata değerlendirmesi doğru olur.

İspat:

$$z_{j+1} = \frac{(z_{j+1} + z_j)}{2} + \frac{\tau z_{t,j}}{2}$$

özdeşliğinden

$$|z_{j+1}| \leq \frac{|z_{j+1} + z_j|}{2} + \frac{\Delta_0 |z_{t,j}|}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada lemma (6.1) ve (6.2) sonuçları kullanılırsa (6.10) doğruluğu hemen çıkar (Amirali ve Duru, 2002).

6.1 Bakhvalov Şebeke Noktaları

ω_N şebekesinin Bakhvalov şebeke noktaları Boglaev tarafından önerildiği biçimde belirlenmektedir. $[0, T]$ aralığını $[0, T] = [0, \sigma] \cup [\sigma, T]$ biçiminde iki aralığın birleşimi şeklinde yazalım. Burada geçiş noktası $\sigma = \min\left(\frac{T}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon \ln|\varepsilon|\right)$ biçiminde belirlenir (Boglaev, 1984). Buradan şebeke noktaları aşağıdaki biçimde yazılır:

$$t_j = \begin{cases} -\alpha^{-1}\varepsilon \ln\left(1 - (1 - \varepsilon)\frac{2j}{N}\right), j = 0, \dots, \frac{N}{2}, t_j \in [0, \sigma]; \sigma < \frac{T}{2} \text{ ise} \\ -\alpha^{-1}\varepsilon \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}}\right)\frac{2(j-1)}{N}\right), j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, t_j \in [0, \sigma], \sigma = \frac{T}{2} \text{ ise} \\ \sigma + \left(j - \left(\frac{N}{2}\right)\right)h^{(1)}, j = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, t_j \in [\sigma, T], h^{(1)} = \frac{2(T - \sigma)}{N} \end{cases}$$

(Boglaev, 1984). Bakhvalov şebeke noktalarına adaptif şebeke noktaları da denir. Şebeke noktaları, sınır katı doğuran fonksiyonlardan logaritmik olarak elde edildiği için sınır katı fonksiyonunun davranışına uygun olarak belirlenir. Bunun için adaptif noktalı şebeke de denir. Kurulan fark şemasının noktaları adaptif şebeke noktalarıdır.

6.2 Bakhvalov Şebeke İçin Hata Değerlendirmesi

$[0, T]$ aralığını $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, T]$ alt aralıklara böleriz.

$[0, \sigma]$ aralığındaki t_i noktaları için iki durum var: $\sigma = \frac{T}{2}$ $\sigma < \frac{T}{2}$. İlk olarak $t_j \in [0, \sigma]$

için $\sigma = \frac{T}{2}$ durumuna bakalım.

$$\tau_j = t_j - t_{j-1} = \alpha^{-1}\varepsilon \left[\ln 1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\right)\frac{2(j-1)}{N} - \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\right)\right)\frac{2j}{N} \right]$$

j 'ye göre ortalama değer teoremini uygularsak

$$\begin{aligned} \tau_j &= \alpha^{-1}\varepsilon \frac{4\left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}}\right)^2 N^{-2}}{\left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}}\right)\frac{2j_*}{N} - 1} \leq \alpha^{-1}\varepsilon \frac{4\left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}}\right)^2 N^{-2}}{\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\right)\frac{2j_*}{N}} \\ &\leq \frac{\alpha^{-1}\varepsilon}{j_*} 2\left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}}\right)N^{-1} \leq 2\alpha^{-1}\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}}\right)N^{-1} \\ &\leq 2\alpha^{-1}N^{-1} \leq CN^{-1} \end{aligned}$$

Şimdi de $\sigma < \frac{T}{2}$ durumundaki her $t_j \in [0, \sigma]$ noktaları için

$$\tau_j = t_j - t_{j-1} = \alpha^{-1} \varepsilon \left[\ln 1 - (1 - \varepsilon) \frac{2^{(j-1)}}{N} - \ln(1 - (1 - \varepsilon) \frac{2^j}{N}) \right]$$

yazalım. j 'ye göre ortalama değer teoremini uygularsak

$$\begin{aligned} \tau_j &= \alpha^{-1} \varepsilon \frac{4(1 - \varepsilon)^2 N^{-2}}{(1 - \varepsilon) \frac{2^{j_*}}{N} - 1} \leq \alpha^{-1} \varepsilon \frac{4(1 - \varepsilon)^2 N^{-2}}{(1 - \varepsilon) \frac{2^{j_*}}{N}} \\ &\leq \frac{2\alpha^{-1}}{j_*} \varepsilon (1 - \varepsilon) N^{-1} \leq 2\alpha^{-1} N^{-1} \leq CN^{-1} \end{aligned}$$

buluruz. Şimdi de $t_j \in [\sigma, T]$ için

$$\tau^{(1)} = t_j - t_{j-1} = \frac{2(\tau - \sigma)}{N} j - \frac{2(\tau - \sigma)}{N} (j - 1) = 2(\tau - \sigma) N^{-1} \leq CN^{-1}$$

bulunur.



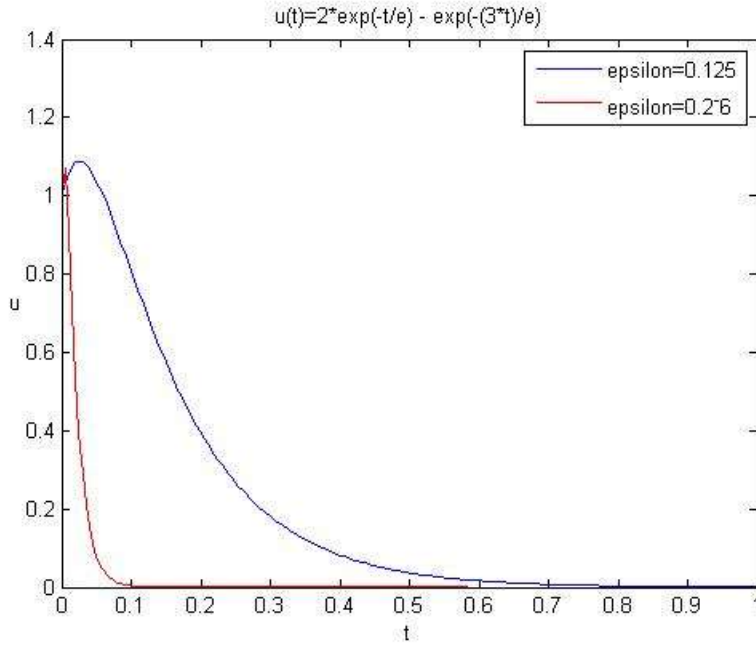
7. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde sabit katsayılı lineer problem, değişken katsayılı lineer problem ve yarı lineer problem olmak üzere üç örnek verilmektedir.

Örnek 7.1. Sabit katsayılı lineer problem için

$$\varepsilon^2 u'' + 4\varepsilon u' = -3u, u(0) = 1, u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}$$

örnek problemi ele alalım. Probleminin çözümü $u(t) = 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - e^{-\frac{3t}{\varepsilon}}$ olup farklı $\varepsilon = 2^{-3}$ ve $\varepsilon = 2^{-6}$ değerleri için grafiği aşağıdaki biçimdedir:



Şekil 7.1 Sabit katsayılı problemin $\varepsilon = 2^{-3}$ ve $\varepsilon = 2^{-6}$ değerleri için grafiği

Örnek 7.2. Değişken katsayılı lineer problem için örnek problem

$$\varepsilon^2 u'' + 2\varepsilon(t+2)u' + (t^2 + 4t + 3 + \varepsilon)u = f(t), u(0) = 1, u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}$$

biçiminde olsun. Burada

$$f(t) = (1 - \varepsilon)t^4 + 4t^3 + (3 + 5\varepsilon)t^2 + \varepsilon 8t + 2\varepsilon^2$$

olur (Amiraliyev ve Duru, 1999).

Buna göre kovma yöntemi katsayıları

$$\begin{aligned}\bar{A}_j &= \frac{1}{h_j} \left(\frac{\varepsilon^2}{\tau_j} - \frac{\varepsilon a_j}{2} \right), \bar{B}_j = \frac{1}{h_j} \left(\frac{\varepsilon^2}{\tau_{j+1}} + \frac{\varepsilon a_j}{2} \right), \\ \bar{C}_j &= \frac{\varepsilon^2}{h_j} \left(\frac{1}{\tau_{j+1}} + \frac{1}{\tau_j} \right) - b(t_j), \bar{F}_j = -f(t_j),\end{aligned}$$

olur ve buna göre başlangıç şartı için

$$y_1 = y_0 + \frac{\tau_1^2 f(t_0) - 2\tau_1 \varepsilon B}{\varepsilon \tau_1 a_0 - 2\varepsilon^2} = A + \frac{\tau_1^2 f(t_0) - 2\tau_1 \varepsilon B}{\varepsilon \tau_1 a_0 - 2\varepsilon^2}$$

yazılır. Buradan da

$$A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = -F_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

fark şemasından

$$y_{j+1} = -\frac{\bar{F}_j}{\bar{B}_j} + \frac{\bar{C}_j y_j}{\bar{B}_j} - \frac{\bar{A}_j y_{j-1}}{\bar{B}_j}$$

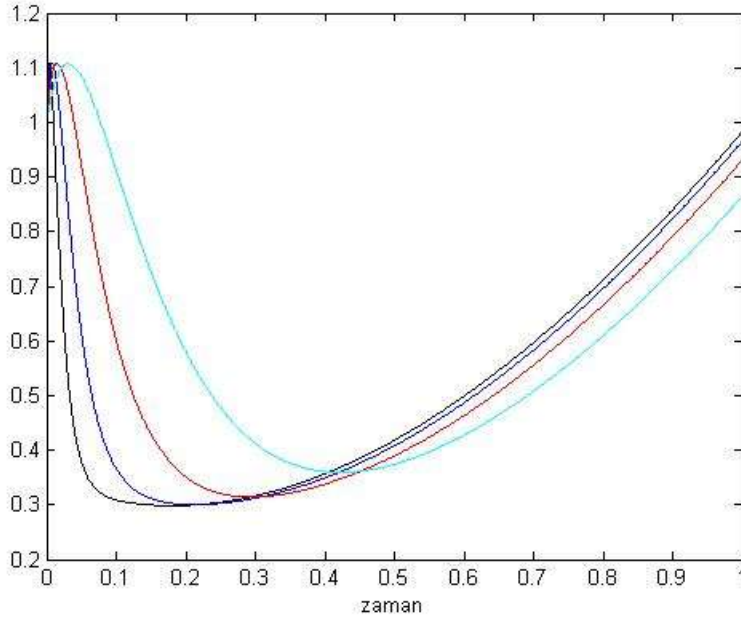
yazabiliriz. Lineer problem için algoritma

$$\begin{aligned}y_0 &= A \\ y_1 &= A + \frac{\tau_1^2 f(t_0) - 2\tau_1 \varepsilon B}{\varepsilon \tau_1 a_0 - 2\varepsilon^2} \\ y_{j+1} &= -\frac{\bar{F}_j}{\bar{B}_j} - \frac{\bar{C}_j y_j}{\bar{B}_j} + \frac{\bar{A}_j y_{j-1}}{\bar{B}_j}, j = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

kurulur ve $y_j, j = 2, 3, \dots$ değerleri ardışık biçimde hesaplanır.

Çizelge 7.1 Değişken katsayılı lineer problemin $N = 1024$ ve $N = 2048$ nokta sayıları ve bazı ε değerleri için yakınsama oranları

ε	$N = 1024$			$N = 2048$		
	r_0	r_1	p	r_0	r_1	p
2^{-2}	0.0006089	0.0003036	1.004084	0.0003036	0.0001516	1.002039
2^{-3}	0.0007194	0.0003585	1.004709	0.0003585	0.0001790	1.002350
2^{-4}	0.0007758	0.0003865	1.005009	0.0003865	0.0001929	1.002500
2^{-5}	0.0008043	0.0004007	1.005158	0.0004007	0.0002000	1.002573
2^{-6}	0.0008186	0.0004078	1.005229	0.0004078	0.0002036	1.002609
2^{-7}	0.0008258	0.0004114	1.005266	0.0004114	0.0002053	1.002627
2^{-8}	0.0008294	0.0004132	1.005285	0.0004132	0.0002062	1.002636



Şekil 7.2 Lineer problemin farklı $\varepsilon = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için grafiği

Örnek 7.3. Yarı lineer problem için örnek aşağıdaki biçimdedir:

$$\varepsilon^2 u'' + \varepsilon 2(t+2)u' = f(t, u)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}$$

Burada

$$f(t, u) = (t^2 + 4t + \varepsilon)u + u^2 + (t^2 - 6 + \varepsilon)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (t^2 + 10t + 3 + \varepsilon)e^{-\frac{3t}{\varepsilon}}.$$

(5.16) başlangıç şartını açık biçimde yazarsak

$$y_1 = y_0 + \frac{\tau_1^2 f(t_0, y_0) - 2\tau_1 \varepsilon B}{\varepsilon \tau_1 a_0 - 2\varepsilon^2}$$

elde ederiz. (5.15) şartında $y_0 = A$ olduğundan bu değeri yerine yazdığımızda y_1 değerini

$$y_1 = A + \frac{\tau_1^2 f(t_0, y_0) - 2\tau_1 \varepsilon B}{\varepsilon \tau_1 a_0 - 2\varepsilon^2}$$

buluruz. (5.14) ifadesini açık biçimde

$$A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = -F_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

yazalım. Burada

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= \frac{1}{\hbar_j} \left(\frac{\varepsilon^2}{\tau_j} - \frac{\varepsilon a_j}{2} \right) \\ \bar{B}_j &= \frac{1}{\hbar_j} \left(\frac{\varepsilon^2}{\tau_{j+1}} + \frac{\varepsilon a_j}{2} \right) \\ \bar{C}_j &= \frac{\varepsilon^2}{\hbar_j} \left(\frac{1}{\tau_{j+1}} + \frac{1}{\tau_j} \right), \quad \bar{F}_j = f(t_j, y_j) \end{aligned}$$

olur. Buradan (7.1) ifadesini

$$y_{j+1} = -\frac{\bar{F}_j}{\bar{B}_j} - \frac{\bar{C}_j y_j}{\bar{B}_j} + \frac{\bar{A}_j y_{j-1}}{\bar{B}_j}$$

biçiminde yazılır. $y_j, j = 2, 3, \dots$ değerlerini

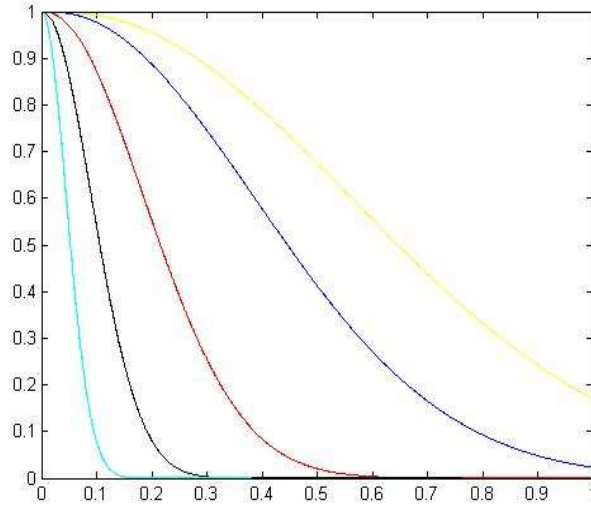
$$y_0 = A$$

$$y_1 = A + \frac{\tau_1^2 f(t_0, y_0) - 2\tau_1 \varepsilon B}{\varepsilon \tau_1 a_0 - 2\varepsilon^2}$$

$$y_{j+1} = -\frac{\bar{F}_j}{\bar{B}_j} + \frac{\bar{C}_j y_j}{\bar{B}_j} - \frac{\bar{A}_j y_{j-1}}{\bar{B}_j}, j = 2, 3, \dots \text{ ardışık biçimde hesaplarız.}$$

Çizelge 7.2 Yarı lineer problemin $N = 1024$ ve $N = 2048$ nokta sayıları ve bazı ε değerleri için yakınsama oranları

ε	$N = 1024$			$N = 2048$		
	r_0	r_1	p	r_0	r_1	p
2^{-2}	0.0001324	0.0000663	0.998088	0.0000663	0.0000332	0.999039
2^{-3}	0.0001600	0.0000801	0.998292	0.0000801	0.0000401	0.999140
2^{-4}	0.0001755	0.0000878	0.998545	0.0000878	0.0000439	0.999266
2^{-5}	0.0001842	0.0000922	0.998762	0.0000922	0.0000461	0.999374
2^{-6}	0.0001890	0.0000946	0.998930	0.0000946	0.0000473	0.999460
2^{-7}	0.0001917	0.0000959	0.999054	0.0000959	0.0000480	0.999521
2^{-8}	0.0001932	0.0000967	0.999145	0.0000967	0.0000484	0.999566
2^{-9}	0.0002405	0.0000971	1.308616	0.0000971	0.0000486	0.999600



Şekil 7.3 Lineer olmayan problemin farklı $\varepsilon = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-5}, 2^{-7}, 2^{-9}$ değerleri için grafiği



8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada matematiksel modeller bilimin birçok alanında araştırma konularının anlaşılması için temel çerçeve olarak kullanılmakta olan singüler pertürbe özellikli lineer olmayan başlangıç sıçramalı problemler ele alınmış ve bu problemlere yönelik sayısal bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Önerilen yöntem, adaptif düğüm noktalarından oluşan şebeke üzerinde (Bakhvalov şebeke) kurulan sonlu fark şemasıdır.

Tekil pertürbasyonlu doğrusal olmayan reaksiyon-difüzyon problemleri, en yüksek dereceli türev teriminin pozitif küçük bir parametre bulunduran problemler olarak adlandırılır. Dolayısıyla, bu sorunlara ait çözümler tanım bölgesi içinde çeşitli şekillerde kendini gösterir. Kısaca tanım bölgesinin farklı kısımlarında çeşitli davranışlar gösterebilir. Çözümün, bu geçiş katmanlarında hızlı(swift) değişimler gösterirken, öteki bölgelerde düzenli ve durağan değişimler sergilediği açıktır. Bu nedenle, tekil pertürbasyonlu problemlerin çözümünde önemli zorluklar ortaya çıkar. Bu özellikler, sayısal çözümlerde de kendini gösterir. Sonuç olarak, sınır katmanlarındaki çözümün sınırsız türevleri nedeniyle klasik sayısal yöntemlerden türetilen algoritmalar kararsız hale gelir. Bu sorunlar bağlamında, yüksek derecede doğruluk sağlayan fark şemalarının oluşturulması, bu hataların değerlendirilmesi ve ϵ 'ya göre düzgün yakınsak sayısal yöntemlerin uygulanması büyük önem taşımaktadır.

Lineer olmayan ve başlangıç sıçramalı tekil pertürbasyon problemine ilişkin belirli asimptotik yaklaşımlar geliştirilmiş ve bu yaklaşımlar, çözümün başlangıç koşullarına bağlı olduğunu ortaya koymuştur.

Tekil pertürbasyon lineer olmayan başlangıç sıçramalı problemler için adaptif noktalardan oluşan şebeke üzerinde, lineer baz fonksiyonlarıyla kalan terimi integral formda tanımlanan kuadratür kuralları uygulanmış ve bu sayede fark şemaları geliştirilmiştir. Burada seçilen baz fonksiyonları metot hatasını sınırlamaktadır. Kalan terimlerin integral biçiminde olması çözüm üzerine daha hafif şartların gelmesini temin eder, çözümün ve türevlerinin sürekli olması yerine sınırlı olma şartı gibi.

Lineer olmayan problemimiz kuazilinearizasyon metodu kullanılarak lineerleştirme yapılmıştır.

Sonuç olarak tezin amacı düzgün olmayan şebekelerde fark şemaları kurmak ve nümerik bir çözüm sunmaktadır. Singüler pertürbe özellikli lineer olmayan başlangıç

sıçramalı problemler için kararlı algoritmalar inşa ederek bilimin araştırma konularının matematik modeli olan bu tür diferansiyel denklemlerin teknolojide kullanılır hale gelmesini sağlamaktadır.



KAYNAKLAR

- Amirali, G., Amirali, I. (2023). *Nümerik analiz, teori ve uygulamalarla*. Seçkin Yayınevi, Ankara, Türkiye.
- Amirali, G., Duru, H. (2002). *Nümerik analiz*. Pegem A Yayıncılık, Ankara. 1-371.
- Amiraliyev, G., Duru, H. (1999). A uniformly convergent finite difference method for a singularly perturbed initial value problem. *Applied Mathematics and Mechanics*, 20(4), 379-387.
- Amiraliyev, G. M., Duru, H. (2002). *Nümerik analiz*. Pegem Yayıncılık.
- Bakhvalov, N.S. (1969). The optimization of methods of solving boundary value problem with a small parameter for the highest-order differential. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(4), 139–166.
- Boglaev, I. P. (1984). Approximate solution of a non-linear boundary value problem with a small parameter for the highest-order differential. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 24(6), 30-35.
- Friedrichs, K. O., Wasow, W. (1946). Singular perturbations of nonlinear oscillations. *Duke Mathematical Journal*, 367–381.
- Kopteva, N. (2006). Maximum norm a posteriori error estimates for a 1D singularly perturbed semilinear reaction–diffusion problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 27(3), 576-592.
- Kopteva, N., Pickett, M. (2012). A second-order overlapping schwarz method for a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem, *Mathematics of Computation*, 81(277), 81-105.
- Miller, J. J. H., Farrell, P. A., Hegarty, A. F., O’Riordan E., Shishkin, G. I. (2000). *Robust computational techniques for boundary layers*. New York. CRC Press.
- Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I. (1996). *Fitted numerical methods for singular perturbation problems*. World Scientific, Singapore.
- Nayfeh, A. H. (1993). *Introduction to perturbation techniques*., Wiley, New York.
- O’Malley, R.E. (1974). Introduction to singular perturbations. *Academic Press*, New York, ABD.
- O’Malley, R.E. (1988). On nonlinear singularly perturbed initial value problems. *Siam Review*, 30(2), 193–212.
- O’Malley, R. E. (1991). *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York.
- Prandtl, L. (1905). Über flüssigkeits-bewegung bei kleiner reibung. **Verhandlungen, III Int. Math. Kong.** Tuebner, Leibzig. 484-491.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L. (1996). *Numerical methods for singularly perturbed differential equations, convection-diffusion and flow problems*. Springer-Verlag: Berlin.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L. (2008). *Robust numerical methods for Singularly Perturbed differential equation: convection-diffusion and flow problems*. Springer-Verlag: Berlin, 604.
- Samarskii, A. A. (2001). *The theory of difference schemes*. Marcel Dekker, New York.
- Schatz, A. H., Wahlbin L. B. (1983). **On the finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems in two and one dimensions**. Ithaca, New York. 47-89.



EKLER

Ek 1. Linear problem için bilgisayar programı

```
clc,clear all
a=@(t) 2*(t+2);
b=@(t) (t.^2+4*t+3+eps);
f=@(t) (1-eps*t.^4+4*t.^3+(3+5*eps).*t^2+eps*8*t+2*eps^2);
eps=2^-3;
M=512;
s0=0; sN=1;
A=1;
B=1;
alfa=1.25;
for l=1:3
    %Bakhvalov düğüm noktalarının belirlenmesi
    sigma=min((sN-s0)/2,abs((eps*log(eps))/alfa));
    h1=(sN-sigma)/(M/2);
    s(1)=s0;
    s(M+1)=sN;
    for k=2:M
        if ((k<=M/2+1)&&(sigma<(sN-s0)/2))
            s(k)=-eps*log(1-(1-eps)^2*(k-1)/M)/alfa;
        end
        if (k<=M/2+1)&&(sigma==(sN-s0)/2);
            s(k)=-eps*log(1-(1-exp(-alfa*sN/(2*eps)))^2*(k-1)/M)/alfa;
        end
        if ((k>M/2+1)&&(k<=M+1))
            s(k)=sigma+((k-1)-M/2)*h1;
        end
    end
    for k=2:M+1
        h(k)=s(k)-s(k-1);
    end
    for k=2:M
        h2(k)=(h(k+1)+h(k))/2;
    end
    y(1)=A;
    y(2)=y(1)+(h(2).^2.*f(s(1))-2*h(2)*eps*B)./(eps*h(2)*a(1)-2*eps^2);
    for k=2:M
        A1(k)=1./h2(k).*(eps^2./h(k)-eps.*feval(a,s(k))/2);
        B1(k)=1./h2(k).*(eps^2./h(k+1)+eps.*feval(a,s(k))/2);
        C1(k)=eps^2./h2(k).*(1./h(k+1)+1./h(k))-feval(b,s(k));
        F1(k)=-feval(f,s(k));
    end
end
```

```

        y(k+1)=- (F1(k) -C1(k) .*y(k)+A1(k) .*y(k-1)) ./B1(k);
    end
    switch l
        case 1
            w1=y;
        case 2
            W2=y;
    end
    M=2*M;
end
M=M/8;
t=s(1:1:4*M+1);
plot(t,y,'c')
% legend('epsilon=2^-6')
xlabel('zaman')
hold on
y12=W2(1:2:2*M+1);
e0=abs(w1(1)-y12(1));
for k=2:M+1
    e0=max(e0,abs(w1(k)-y12(k)));
end
y3=y(1:4:4*M+1);
e1=abs(y12(1)-y3(1));
for k=2:M
    e1=max(e1,abs(y12(k)-y3(k)));
end
r=log(e0/e1)/log(2);
fprintf('N=%4d  r0=%10.8f  r1=%10.8f  p=%10.8f\n',M,e0,e1,r);

```

Ek 2. Linear olmayan problem için bilgisayar programı

```

clc,clear all
a=@(t) 2*(t+2);
fu=@(t,u) (t.^2+4*t+eps)+2.*u;
f=@(t,u) (t.^2+4*t+eps) .*u+u.^2+(t.^2-6+eps) .*...
    exp(-t/eps)+(t.^2+10*t+3+eps) .*exp(-3*t/eps);
% ft=@(t,u)
eps=2^-9;
M=2048;
s0=0; sN=1;
A=1;
B=1;
alfa=1.25;
for l=1:3
    %Bakhvalov düğüm noktalarının belirlenmesi
    sgm=min((sN-s0)/2,abs((eps*log(eps))/alfa));

```

```

h1=(sN-sgm) / (M/2);
s(1)=s0;
s(M+1)=sN;
for k=2:M
    if ((k<=M/2+1) && (sgm<(sN-s0)/2))
        s(k)=-eps*log(1-(1-eps)*2*(k-1)/M)/alfa;
    end
    if (k<=M/2+1) && (sgm==(sN-s0)/2);
        s(k)=-eps*log(1-(1-exp(-alfa*sN/(2*eps))))*2*(k-1)/M)/alfa;
    end
    if ((k>M/2+1) && (k<=M+1))
        s(k)=sgm+((k-1)-M/2)*h1;
    end
end
%
x
for k=2:M+1
    h(k)=s(k)-s(k-1);
end
%
h
for k=2:M
    h2(k)=(h(k+1)+h(k))/2;
end
y(1)=A;

y(2)=y(1)+(h(2).^2*f(s(1),y(1))+2*eps*B*h(1))./(eps*h(2)*a(1)+2*eps.^2);
    for k=3:M
        w(k)=0;
    end
    for j=1:3
        for k=2:M
            %
                wx=(w(i+1)-w(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
                A1(k)=eps^2./(h2(k).*h(k))-
eps*feval(a,s(k))./(2.*h2(k));

B1(k)=eps^2./(h2(k).*h(k+1))+eps*feval(a,s(k))./(2.*h2(k));
                C1(k)=eps^2./h2(k).*(1./h(k+1)+1./h(k))-
feval(fu,s(k),w(k));
                F1(k)=-
feval(f,s(k),w(k))+feval(fu,s(k),w(k)).*w(k);
                y(k+1)=-(F1(k)-C1(k).*y(k)+A1(k).*y(k-1))./B1(k);
            end
            w(k)=y(k);
        end
    end
    switch 1
        case 1

```

```

        w1=y;
    case 2
        w2=y;
    end
    plot(s,y,'c')
    hold on
    M=2*M;
end
M=M/8;
y12=w2(1:2:2*M+1);
e0=abs(w1(1)-y12(1));
for k=2:M+1
    e0=max(e0,abs(w1(k)-y12(k)));
end
y3=y(1:4:4*M+1);
e1=abs(y12(1)-y3(1));
for k=2:M
    e1=max(e1,abs(y12(k)-y3(k)));
end
r=log(e0/e1)/log(2);
fprintf('N=%4d  e0=%10.7f  e1=%10.7f  p=%10.6f\n',M,e0,e1,r);

```

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hasret HATTABINOĞLU

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite : Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Fakülte : Fen Edebiyat Fakültesi

Bölüm : Matematik

Mezuniyet Yılı : 2021



VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih. 18/08/2025

Tez başlığı SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN BAŞLANGIÇ SIÇRAMALI PROBLEMLER İÇİN NÜMERİK ALGORİTMALAR

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 40 (kırk) sayfalık kısmına ilişkin, 18/08/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNİTİN adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %19 (on dokuz) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

18.08.2025

Adı soyadı: Hasret HATTABINOĞLU

Öğrenci no: 21610001340

Anabilim dalı: Matematik

Programı: YÜKSEK LİSANS

Statüsü: (X) Yüksek lisans () Doktora

DANIŞMAN

ENSTİTÜ ONAYI

Prof. Dr. Hakkı DURU

UYGUNDUR

UYGUNDUR

