

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**





KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

“Fibonacci Sayı Dizisi Benzeri Sayı Dizilerinin Özelliklerinin Genelleştirilmesi” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali Hikmet DEĞER’e ve bilim insanı olma yolundaki ilk adımlarımı atarken kıymetli bilgileriyle ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER’e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, eğitim öğretim hayatımda katkısı olan tüm hocalarıma ve tez çalışması süresinde de hiçbir yardımdan kaçınmayan arkadaşlarım Doç. Dr. Barbaros ATMACA, Arş. Gör. Esin ERTÜRK ATMACA, Doç. Dr. Fatih ÇELİK ve Sinem ÇELİK’e teşekkür ederim.

Bu çalışmayı kaleme alırken, araştırma görevlisi olarak görev yapmakta olduğum Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümü’nde akademik yolculuğuma anlam katan ve beni her fırsatta bilimsel üretkenliğe teşvik eden değerli hocam Prof. Dr. Ahmet BOZ’a özel bir teşekkür borçluyum. Kendisi, bu tezin konusuyla doğrudan ilgili olmasa bile, araştırmaya olan tutkusu ve öğrencilerine verdiği değerle bana her zaman ilham vermiş, sunduğu ortam ve desteğiyle motivasyonumu yüksek tutmuştur. Kendisine derin saygılarımı ve kalpten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu tez çalışması boyunca bölümde bana her türlü yardımlarını esirgemeyen başta Anabilim Dalı Başkanım Sayın Prof. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR olmak üzere, bölümümüzdeki tüm öğretim üyelerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak eğitim hayatımda yanımda olan aileme ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana sağladığı maddi destekten dolayı TÜBİTAK’a teşekkür ederim.

Kübra SERT

Trabzon 2025

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Fibonacci Sayı Dizisi Benzeri Sayı Dizilerinin Özelliklerinin Genelleştirilmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ali Hikmet Değer’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 09/07/2025

Kübra SERT

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Özel Sayı Dizileri.....	2
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	8
2.1. Bazı Özel Sayı Dizilerinin Polinomları.....	8
2.2. Gibonacci Sayı Dizisi.....	14
2.3. Özel Gibonacci İlişkisi ve Genelleştirilmesi	18
2.4. Yeni Bir Rekürans Bağıntısı	43
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	47
4. SONUÇLAR	48
5. ÖNERİLER.....	49
6. KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

FİBONACCİ SAYI DİZİSİ BENZERİ SAYI DİZİLERİNİN ÖZELLİKLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Kübra SERT

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2025, 50 Sayfa

Bu çalışmada, özel sayı dizileri kapsamında yer alan Fibonacci, Lucas ve Gibonacci dizileri teorik yönleriyle incelenmiştir. Öncelikle ilgili dizilere ait tanımlar, temel özellikler ve literatürdeki önemli sonuçlar sunularak konunun matematiksel temelleri oluşturulmuştur. Söz konusu diziler arasında yapısal ilişkiler değerlendirilmiş; ayrıca bu dizilere ait Binet formülleri ve çeşitli toplam formülleri detaylı biçimde ele alınmıştır. Çalışmanın ana odağını oluşturan Gibonacci dizisi, klasik tanımının ötesine geçilerek, özel başlangıç koşulları altında genelleştirilmiş ve bu yeni yapı üzerinde analitik incelemeler gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, dizilerin alternatif hesaplama yöntemleri önerilmiş ve sayısal örneklerle desteklenmiştir. Tüm bu kuramsal sonuçlar Maple™ 17 bilgisayar yazılımı aracılığıyla doğrulanmış ve uygulamalı olarak da gösterilmiştir. Son olarak, yeni bir sayı dizisinin alternatif olarak toplam sembolü kullanılarak nasıl ifade edilebileceği üzerine değerlendirmelerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayı dizisi, Lucas sayı dizisi, Gibonacci sayı dizisi,

rekürans bağıntısı, Binet formülü

Master Thesis

SUMMARY

GENERALIZATION OF PROPERTIES OF FIBONACCI- LIKE NUMBER
SEQUENCES

Kübra SERT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Ali Hikmet DEĞER
2025, 50 Pages

In this study, special number sequences, namely the Fibonacci, Lucas, and Gibonacci sequences, are examined from a theoretical perspective. Initially, definitions, fundamental properties, and significant results from the literature related to these sequences are presented to establish a solid mathematical foundation. Structural relationships among these sequences are evaluated, and detailed discussions of their Binet formulas and various summation identities are provided. The primary focus of the study is the Gibonacci sequence, which is generalized beyond its classical definition under specific initial conditions. Analytical investigations of this generalized structure are conducted. Additionally, alternative computational methods for these sequences are proposed and supported with numerical examples. All theoretical findings are validated and illustrated through the Maple™ 17 computer algebra system. Finally, an alternative expression of a new number sequence using summation notation is explored and evaluated as a general approach.

Key Words: Fibonacci number sequence, Lucas number sequence, Gibonacci number
sequence, recurrence relation, Binet formula

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1 Pascal Üçgeni.....	10
Şekil 2 Pascal Üçgeninde F_7	11
Şekil 3 Lucas Sayıları	14
Şekil 4 Maple™ 17 Kodları	32



TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Tavşan Çifti Sayısı	1
Tablo 2. Fibonacci Sayıları	3
Tablo 3. Lucas Sayıları	5
Tablo 4. Fibonacci Polinomları	9
Tablo 5 Lucas Polinomları	13
Tablo 6 Maple™ 17 Örneği	41
Tablo 7. Bazı G_m değerleri.....	42

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- F_n : n . Fibonacci Sayısı
 L_n : n . Lucas Sayısı
 G_n : n . Gibonacci Sayısı
 α : Altın Oran
OEIS : The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
(Tamsayı Dizileri Elektronik Ansiklopedisi)



1. GENEL BİLGİLER

Milattan önce sayı kavramını ifade etmek için insanlar parmakları, çubukları, düğüm atılmış ipleri ve taşları kullanmışlardır. Zaman içerisinde sayı kavramı gelişerek sayı dizilerini oluşturmuştur ve günümüze kadar gelmiştir. Literatürde birçok sayı dizisi mevcuttur. Bunlardan en bilineni aritmetik ve geometrik sayı dizileridir. Ancak bu çalışmada aritmetik ve geometrik sayı dizilerinden ziyade özel sayı dizileri ile ilgilenilecektir.

Fibonacci, Lucas ve Gibonacci sayı dizileri, sıradan sayı dizilerinden farklı olup, birçok uygulaması olan özel sayı dizileridir. Bu sayı dizilerinin en popüler olanı Fibonacci sayı dizisidir. İtalyan matematikçi, Leonardo Pisano veya Pisalı Leonard olarak bilinen Leonardo Fibonacci, 1202 yılında ilk ve en ünlü eseri Liber Abaci'yi yazmıştır. Kitapta tavşanların üreme problemi ilgi çekmektedir. Problem şu şekildedir; bir erkek, bir dişi yeni doğan tavşanlar olsun. Bir yılda kaç tavşan çifti olur? Burada dikkat edilecek hususlar şunlardır: Tavşanlar ölümsüz, her çiftin olgunlaşması 1 ay sürüyor ve her çift, ikinci aydan başlayarak her ay karışık bir çift üretiyor. Bu üç durum ele alınarak hesaplama yapılması gerekir. Örneğin ocak ayında bir dişi ve bir erkek tavşanın yeni doğduğu varsayalım. Bu tavşan çiftinin olgunlaşması bir ay sürer. Bu nedenle şubat ayında tavşan çifti sayısı hâlâ aynıdır. Yani 1 çift tavşan vardır. Mart ayında bu tavşan çifti yeni bir çift doğurur. Toplam 2 çift tavşan olur. Nisan ayında 3 çift tavşan olur. Mayıs ayında 5 çift tavşan olur. Bu şekilde giderek artarlar. Aylara göre tavşanlar hakkındaki sayısal veriler Tablo 1 ile verilmiştir.

Tablo 1. Tavşan Çifti Sayısı

	Aylar	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
Bireyler													
Yetişkin		0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Yavru		1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Toplam		1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tablo 1.'i dikkatli incelendiğinde ardışık iki ayın verilerinin toplamı hep bir sonraki ayın verisini vermektedir. Örneğin temmuz ve ağustos ayının verilerinin toplamı eylül ayının verisini vermektedir.

1.1. Özel Sayı Dizileri

Bu bölümde en çok bilinen sayı dizilerinin tanımları ve özellikleri ele alınacaktır. bu özel sayı dizileri şunlardır: Fibonacci, Lucas ve Giboanacci. Hem teorik hem de pratik olarak incelenecektir.

Tanım 1.1.1. (Thomas, 2018) $F_1 = 1, F_2 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere;

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$$

rekürans bağıntısı n . Fibonacci sayı dizisidir.

OEIS'te A000045 kodu ile yer almaktadır. Birkaç n değeri için inceleyelim.

$$\begin{aligned} n = 3 &\Rightarrow F_3 = F_{3-1} + F_{3-2} = F_1 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ n = 4 &\Rightarrow F_4 = F_{4-1} + F_{4-2} = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ n = 5 &\Rightarrow F_5 = F_{5-1} + F_{5-2} = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 \\ n = 6 &\Rightarrow F_6 = F_{6-1} + F_{6-2} = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 \\ n = 7 &\Rightarrow F_7 = F_{7-1} + F_{7-2} = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eder.

Tablo 2. Fibonacci Sayıları

n	F_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
⋮	⋮

Teorem 1.1.2 (Thomas, 2018) Fibonacci dizisine ait

$$x^2 - x - 1 = 0$$

karakteristik polinomun kökleri sırası ile α ve β ise

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Fibonacci dizisi için Binet formülüdür.

Teorem 1.1.2’de bulunan

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Altın oran olarak bilinen değer α ’dır. Buradan

$$\alpha\beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1 \text{ ve } \alpha + \beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

olduğu gözlemlenir.

Ardışık iki Fibonacci sayısının oranı; yani $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ “Altın Oran” olarak bilinmektedir ve yaklaşık olarak 1,618 sayısına eşittir. Bu oranın nesnelere üzerindeki etkisi daha estetik olduğu yönündedir. Ek olarak matematikte ve mimaride muhteşem sonuçlar veren bu oran doğada da sıkça karşımıza çıkar. Mesela tütün bitkisinin yaprak düzeninde Fibonacci dizisi mevcuttur, ışığı en verimli şekilde almak için bu şekilde dizilir.

Tanım 1.1.3 (Thomas, 2018) $L_1 = 1, L_2 = 3$ başlangıç koşulları olmak üzere;

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 3$$

rekürans bağıntısı n . Lucas sayı dizisidir.

OEIS’de A000032 kodu ile yer almaktadır. Birkaç n değeri için inceleyelim.

$$\begin{aligned} n = 3 &\Rightarrow L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4 \\ n = 4 &\Rightarrow L_4 = L_3 + L_2 = 4 + 3 = 7 \\ n = 5 &\Rightarrow L_5 = L_4 + L_3 = 7 + 4 = 11 \\ n = 6 &\Rightarrow L_6 = L_5 + L_4 = 11 + 7 = 18 \\ n = 7 &\Rightarrow L_7 = L_6 + L_5 = 18 + 11 = 29 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eder. Lucas sayıları Tablo 3.’de verilmiştir.

Tablo 3. Lucas Sayıları

n	L_n
1	1
2	3
3	4
4	7
5	11
6	18
7	29
8	47
9	76
10	123
⋮	⋮

Lucas sayıları için Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

Teorem 1.1.4 (Thomas, 2018) Konjektör

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

dir.

İspat: $n \geq 3$ için Fibonacci rekürans bağıntısından faydalanarak yerine yazılsın, o halde

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n+1} F_{i-1} &= \sum_{i=2}^{n+1} F_{i+1} - F_i \\ &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + (F_5 - F_4) + \cdots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}) \\ &= F_{n+2} - F_2 \end{aligned}$$

$$= F_{n+2} - 1$$

■

Örnek 1.1.5. $n = 8$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 F_i &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 \\ &= 54 \\ &= F_{10} - 1 \end{aligned}$$

sağladığı görülür.

Teorem 1.1.6 (Thomas, 2018)

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

(Lucas, 1876)

dir.

Mesela $n = 7$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 F_i^2 &= F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 + F_7^2 \\ &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 \\ &= 273 \\ &= F_7 F_8 \end{aligned}$$

sağlandığı kolaylıkla görülür.

Fibonacci ve Lucas sayıları için bazı özdeşlikler mevcuttur. Bunlardan birkaçı şunlardır: (Thomas, 2018)

- $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

- $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $L_n = F_{n+2} + F_{n-2}$
- $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$
- $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, n \geq 1$ (Cassini Formülü)
- $F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n$
- $L_{n+1}^2 - L_{n-1}^2 = 5F_{2n}$
- $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+2}$
- $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^n$
- $L_{n+2} - L_{n-2} = 5F_n$
- $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2}$
- $F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2} = F_{2n-1}$ (Lucas,1876)
- $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ (Shub,1950)

Tanım 1.1.10 (Thomas, 2018) $G_1 = a$ ve $G_2 = b$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$G_n = \{a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, \dots\}$$

şeklinde devam eden sayı dizisine Gibonacci sayı dizisi denir.

Literatürde Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi olarak da bilinir. Fibonacci sayı dizisi ile aynı rekürans bağıntısına sahiptir. Ancak Gibonacci sayı dizisinde başlangıç koşulları farklıdır. Genel ifadelerdir, bir başka deyişle başlangıç koşulları keyfi değerlerdir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Bazı Özel Sayı Dizilerinin Polinomları

Sayı dizilerinin polinomları ile ilgili literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır. Birçok yazar Fibonacci polinomları ve Lucas polinomlarını incelemiştir. Mesela E. Lucas önemli birçok sonuçlar elde etmiştir (Lucas, E., 1878). Zhang Wenpeng ve Yi Yuan $F_n(x)$ ile ilgili birçok özdeşlikler tanımlamışlardır (Yuan, Y. & Zhang, W., 2002). İlerleyen yıllarda Fibonacci ve Lucas sayılarının kuvvetlerinin toplamını, toplam sembolü altında özdeşlikler ile ifade etmişlerdir (Ozeki, K., 2008), (Prodinger, H., 2008).

Tanım 2.1.1 (Thomas, 2019) $n \geq 2$ ve başlangıç koşulları $g_0(x) = 0$ ve $g_1(x) = 1$;

$$g_n(x) = xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

şeklinde olan rekürans bağıntısına $g_n(x) = F_n(x)$ Fibonacci Polinomu denir.

İlk birkaç Fibonacci polinomlarını hesaplandığında

$n = 1$ için

$$\begin{aligned} F_1(x) &= xF_0(x) + F_{-1}(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$n = 2$ için ise $F_1(x) = 1$ eşitlinden yararlanarak

$$\begin{aligned} F_2(x) &= xF_1(x) + F_0(x) \\ &= x \end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 3$ için $F_1(x) = 1$ ve $F_2(x) = x$ eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} F_3(x) &= xF_2(x) + F_1(x) \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 4$ için $F_3(x) = x^2 + 1$ ve $F_2(x) = x$ eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} F_4(x) &= xF_3(x) + F_2(x) \\ &= x(x^2 + 1) + x \\ &= x^3 + 2x \end{aligned}$$

elde edilir. Tablo 4.'te ilk 10 Fibonacci polinomları verilmiştir, verilen rekürans bağıntısına göre devam ettirilebilir.

Tablo 4. Fibonacci Polinomları

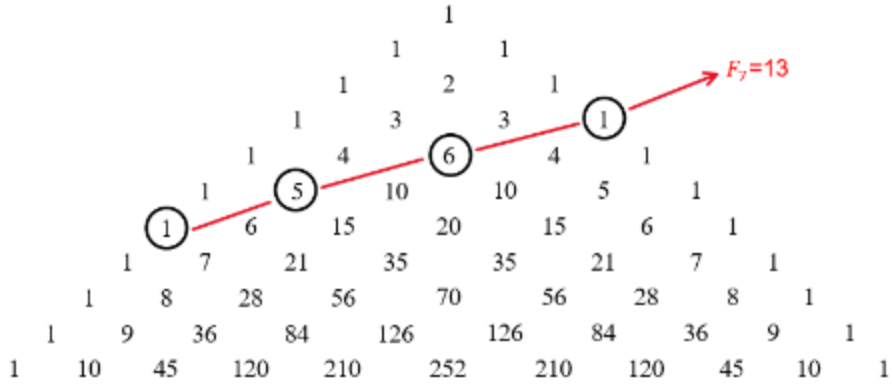
n	$F_n(x)$
1	1
2	x
3	$x^2 + 1$
4	$x^3 + 2x$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$
6	$x^5 + 4x^3 + 3x$
7	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
8	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$
9	$x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$
10	$x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$

(Thomas, 2019)Fibonacci polinomlarını elde etmek için alternatif formül

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}$$

şeklinde verilir.

Örnek 2.1.2. $n = 6$ için

Şekil 2 Pascal Üçgeninde F_7

Teorem 2.1.3. (Azarian, 2012)

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}$$

'dir.

Mesela $n = 5$ için $F_6 = 8$ 'dir. Teorem 2.1.3'e göre

$$\begin{aligned} F_{5+1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} \binom{5-i}{i} \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{5-i}{i} = \binom{5-0}{0} + \binom{5-1}{1} + \binom{5-2}{2} \\ &= 1 + 4 + 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$F_6 = 8$ olduğu görülür. Bir başka n değeri için incelendiğinde; örneğin $n = 10$ için bilindiği üzere $F_{11} = 89$. Teorem 2.1.3'e göre

$$\begin{aligned}
F_{10+1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{10}{2} \rfloor} \binom{10-i}{i} \\
&= \binom{10-0}{0} + \binom{10-1}{1} + \binom{10-2}{2} + \binom{10-3}{3} + \binom{10-4}{4} + \binom{10-5}{5} \\
&= 1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 \\
&= 89
\end{aligned}$$

$F_{11} = 89$ elde edilir.

Tanım 2.1.4 (Thomas, 2018) $n \geq 2$ ve başlangıç koşulları $\varphi_0(x) = 2$ ve $\varphi_1(x) = x$;

$$\varphi_n(x) = x\varphi_{n-1}(x) + \varphi_{n-2}(x)$$

şeklinde olan rekürans bağıntısına $\varphi_n(x) = L_n(x)$ Lucas Polinomu denir.

İlk birkaç Lucas polinomlarını hesaplanırsa; mesela $n = 1$ için zaten başlangıç koşulu olduğu için doğrudan $L_1(x) = x$ alınır.

$n = 2$ için ise $L_1(x) = x$ eşitlinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= xL_1(x) + L_0(x) \\
&= x^2 + 2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 3$ için $L_1(x) = x$ ve $L_2(x) = x^2 + 2$ eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= xL_2(x) + L_1(x) \\
&= x^3 + 3x
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 4$ için $L_2(x) = x^2 + 2$ ve $L_3(x) = x^3 + 3x$ eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
L_4(x) &= xL_3(x) + L_2(x) \\
&= x(x^3 + 3x) + x^2 + 2 \\
&= x^4 + 4x^2 + 2
\end{aligned}$$

elde edilir. Tablo 5’te ilk 10 Lucas polinomları verilmiştir, verilen rekürans bağıntısına göre devam ettirilebilir.

Tablo 5 Lucas Polinomları

n	$L_n(x)$
1	x
2	$x^2 + 2$
3	$x^3 + 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x$
10	$x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$

(Thomas, 2018) Lucas polinomlarını elde etmek için alternatif formül

$$L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}$$

şeklinde verilir.

Mesela $n = 6$ için

$$\begin{aligned} L_6 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{6}{2} \rfloor} \frac{6}{6-i} \binom{6-i}{i} x^{6-2i} \\ &= \frac{6}{6} \binom{6}{0} x^6 + \frac{6}{5} \binom{5}{1} x^4 + \frac{6}{4} \binom{4}{2} x^2 + \frac{6}{3} \binom{3}{3} x^0 \\ &= 1x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 \end{aligned}$$

elde edilir. $L_6 = 1x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$ olduğu Tablo 5'de de görülmektedir. Başka bir n için incelendiğinde mesela $n = 9$

$$\begin{aligned} L_9 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{9}{2} \rfloor} \frac{9}{9-i} \binom{9-i}{i} x^{9-2i} \\ &= \frac{9}{9} \binom{9}{0} x^9 + \frac{9}{8} \binom{8}{1} x^7 + \frac{9}{7} \binom{7}{2} x^5 + \frac{9}{6} \binom{6}{3} x^3 + \frac{9}{5} \binom{5}{4} x \\ &= x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x \end{aligned}$$

Burada da ek olarak şu söylenebilir: Elde edilen polinomun katsayıları toplamı Lucas sayısını verir. Verilen örneğe devam edilecek olursa aranan aslında L_9 'dır. Elde edilen $\boxed{1}x^9 + \boxed{9}x^7 + \boxed{27}x^5 + \boxed{30}x^3 + \boxed{9}x$ bu polinomunun katsayıları toplamı

$$L_9 = \boxed{1} + \boxed{9} + \boxed{27} + \boxed{30} + \boxed{9} = 76$$

şeklinde aranan L_9 Lucas sayısını verdiği gözlemlenir. Şekil 3.'te de görülmektedir.

2	2																				
1	1	2																			
3	1	3	2																		
4	1	4	5	2																	
7	1	5	9	7	2																
11	1	6	14	16	9	2															
18	1	7	20	30	25	11	2														
29	1	8	27	50	55	36	13	2													
47	1	9	35	77	105	91	49	15	2												
76	1	10	44	112	182	196	140	64	17	2											

Şekil 3 Lucas Sayıları

2.2. Gibonacci Sayı Dizisi

Fibonacci sayı dizisinin rekürans bağıntısını sağlayan ancak keyfi başlangıç koşulları olan sayı dizisi incelenecektir. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin özellikleri ele alınacaktır.

A. T. Benjamin ve J. J. Quinn tarafından ortaya atılan, bilindiği üzere $G_1 = a, G_2 = b$ başlangıç koşulları

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, n \geq 3 \text{ için}$$

olan sayı dizisi Gibonacci $\{G_n\}$ sayı dizisidir. (Benjamin, A. T. & Quinn, J. J., 2003)

Gibonacci sayı dizisini karakterize eden teoremler ele alınacaktır. Öncelikle dizinin daha önceki çalışmalardan elde edilen temel ve en çok bilinen özdeşliklerinden bahsedilecektir. Şimdi Gibonacci sayı dizisinin birkaç adımını şu şekildedir:

$$\begin{aligned} G_3 &= G_2 + G_1 = b + a \\ G_4 &= G_3 + G_2 = 2b + a \\ G_5 &= G_4 + G_3 = 3b + 2a \\ G_6 &= G_5 + G_4 = 5b + 3a \\ G_7 &= G_6 + G_5 = 8b + 5a \\ G_8 &= G_7 + G_6 = 13b + 8a \\ G_9 &= G_8 + G_7 = 21b + 13a \\ G_{10} &= G_9 + G_8 = 34b + 21a \\ &\vdots \end{aligned}$$

dikkat edilirse a ve b 'nin katsayıları ardışık olarak Fibonacci sayıları olduğu görülür.

Teorem 2.2 1. (Thomas, 2018) Gibonacci sayı dizi $\{G_n\}$ ve $n \geq 3$ için

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1} \quad (1)$$

'dir.

İspat: $n = 1$ için incelendiğinde

$$\begin{aligned} G_1 &= aF_{1-2} + bF_{1-1} \\ &= aF_{-1} + bF_0 \\ &= a \end{aligned}$$

burada negatif indisli Fibonacci sayılarını $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ özdeşliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned} F_{-1} &= (-1)^{1+1}F_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $G_1 = a$ olarak elde edildi.

$n = 2$ için bakıldığında

$$\begin{aligned} G_2 &= aF_{2-2} + bF_{2-1} \\ &= aF_0 + bF_1 \\ &= b \end{aligned}$$

elde edilir ve sonuçlar doğrudur. Her $k \geq 3$ için

$$G_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}, k \geq 3$$

ifadesi doğru olsun. Burada son incelenmesi gereken durum $k + 1$ için doğru olup olmadığı durumudur. Klasik tanımdan ilerlendiğinde

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= (aF_{k-2} + bF_{k-1}) + (aF_{k-3} + bF_{k-2}) \\ &= a \underbrace{(F_{k-2} + F_{k-3})}_{F_{k-1}} + b \underbrace{(F_{k-1} + F_{k-2})}_{F_k} \\ &= aF_{k-1} + bF_k \end{aligned}$$

o halde tümevarım ilkesine göre ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. Gibonacci sayı dizi $\{G_n\}$ olmak üzere

$$\sum_{s=1}^n G_{k+s} = G_{n+k+2} - G_{k+2}$$

'dir.

İspat: $n = 1$ için

$$\sum_{s=1}^1 G_{k+s} = G_{1+k+2} - G_{k+2}$$

sağ taraf:

$$G_{1+k+2} - G_{k+2} = G_{k+3} - G_{k+2} = (G_{k+2} + G_{k+1}) - G_{k+2} = G_{k+1}$$

elde edilir. Sağ taraf ve sol tarafın eşitliği kolaylıkla görülmektedir. $n = m$ için

$$\sum_{s=1}^m G_{k+s} = G_{m+k+2} - G_{k+2}$$

ifadesi doğru olsun. O halde $n = m + 1$ için doğru olup olmadığı incelenmelidir. Sol taraf

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{m+1} G_{k+s} &= \left(\sum_{s=1}^m G_{k+s} \right) + G_{k+m+1} \\ &= (G_{m+k+2} - G_{k+2}) + G_{k+m+1} \\ &= (G_{m+k+2} + G_{k+m+1}) - G_{k+2} \\ &= (G_{m+k+3}) - G_{k+2} \end{aligned}$$

'dir. Dolayısıyla

$$\sum_{s=1}^{m+1} G_{k+s} = (G_{m+k+3}) - G_{k+2}$$

'dir. Bu da tam olarak:

$$\sum_{s=1}^{m+1} G_{k+s} = G_{(m+1)+k+2} - G_{k+2}$$

eşittir. Yani $n = m + 1$ için de doğrudur. Böylece tüm $n \in \mathbb{N}$ için ispatlanmış olur. Tümevarım ilkesine göre ispat tamamlanmıştır.

2.3. Özel Gibonacci İlişkisi ve Genelleştirilmesi

A. F. Horadam 1960'larda Fibonacci dizisinin genel halleri olan, yani aynı türde bir lineer rekürans ilişkisi ile tanımlanan dizileri sistematik biçimde incelemiş ve önemli katkılarda bulunmuştur (Horadam, 1961). Onun çalışmaları Horadam Dizileri olarak da bilinir ve Gibonacci dizilerini kapsar. Bu bölümde Gibonacci sayı dizisinin daha çok üzerine durulacaktır. Fibonacci reküransının genelleştirilmesi sonucu oluşan özgün bir Gibonacci sayı dizisi çalıştılar (Değer, A. H. & Köroğlu, T., 2021). Bu Gibonacci sayı dizisinde başlangıç koşullarını özel olarak Fibonacci sayı dizisinin bazı terimleri kullanılarak özgün bazı sonuçlar elde ettiler. Fibonacci sayı dizisinin çift indisli terimlerini, Gibonacci rekürans bağıntısında başlangıç koşulları olarak kullanılarak, Binet formülüne benzer bir formül ürettiler.

$G_1 = F_{2n}$ ve $G_2 = F_{2n+2}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$G_m = \left(\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) F_{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) F_{2n+2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m \\ + \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} F_{2n} + F_{2n+2} \right) \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m$$

ve

$$G_m = \left(\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) L_{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) L_{2n+2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m \\ + \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} L_{2n} + L_{2n+2} \right) \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m$$

şeklindedir.

Bu özdeşliklere alternatifi olarak

$$G_m = \left(\frac{F_{2n} - F_{2n+1} \beta}{\alpha - \beta} \right) \alpha^m + \left(\frac{F_{2n+1} \alpha - F_{2n}}{\alpha - \beta} \right) \beta^m$$

özdeşliği verilebilir.

İspat: Gibonacci klasik rekürans bağıntısında ve (1) denklemini ile birleşerek yerine yazıldığında

$$G_m = G_{m-1} + G_{m-2} = aF_{m-2} + bF_{m-1}$$

Burada bulunan a ve b değerleri sırasıyla G_1 , ve G_2 'dir, yani başlangıç koşullarıdır. Yerine yazıldığında;

$$G_m = F_{2n}F_{m-2} + F_{2n+2}F_{m-1} \quad (2)$$

elde edilir. Bu rekürans ilişkisinin karakteristik denklemi ise

$$x^2 - x - 1 = 0$$

'dir ve bu karakteristik denklemin kökleri ise

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

'dir. Buradan genel çözüm

$$G_m = A\alpha^m + B\beta^m \quad (3)$$

şeklinde elde edilir. Sırasıyla $m = 1, m = 2$ için yerine yazıldığında özel olarak alınan başlangıç koşulları olduğu görülür:

$$G_1 = A\alpha + B\beta = F_{2n} \quad (4)$$

$$G_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = F_{2n+2} \quad (5)$$

yani $G_1 = F_{2n}$ ve $G_2 = F_{2n+2}$. (4) ve (5) denklemlerinden A, B elde edilmelidir. Öncelikle

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \alpha$$

şeklinde yazılabileceğinden iş daha da kolaylaşacaktır. Benzer şekilde

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \beta$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (5) denkleminde yerine yazıldığında

$$A(1 + \alpha) + B(1 + \beta) = F_{2n+2}$$

$$A + A\alpha + B + B\beta = F_{2n+2}$$

(4) denkleminde ile toparlanacak olursa

$$A + B + \underbrace{A\alpha + B\beta}_{F_{2n}} = F_{2n+2}$$

$$A + B + F_{2n} = F_{2n+2}$$

$$A + B = F_{2n+2} - F_{2n} \quad (6)$$

elde edilen (6) denklemi için klasik Fibonnaci rekürans bağıntısı yerine olan

$$F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$$

ifade (6) denkleminde yerine yazıldığında

$$A + B = F_{2n+1} \quad (7)$$

denkleminde dönüşür. Buradan $B = F_{2n+1} - A$ elde edilir. Bu da (4) denkleminde yerine yazıldığında;

$$A\alpha + (F_{2n+1} - A)\beta = F_{2n}$$

$$A\alpha + F_{2n+1}\beta - A\beta = F_{2n}$$

$$A(\alpha - \beta) = F_{2n} - F_{2n+1}\beta$$

şekline getirilir. Bilindiği üzere $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ 'dir, yerine yazılırsa

$$A \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{5}} = F_{2n} - F_{2n+1}\beta$$

$$A = \frac{F_{2n} - F_{2n+1}\beta}{\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{F_{2n} - F_{2n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. (7) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{F_{2n} - F_{2n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} + B = F_{2n+1}$$

olur ve B gerekli tüm işlemler sonrası yalnız bırakıldığında

$$B = \frac{F_{2n+1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - F_{2n}}{\sqrt{5}}$$

olur. Son olarak A, B elde edildiğinden (3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$G_m = \left(\frac{F_{2n} - F_{2n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \alpha^m + \left(\frac{F_{2n+1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - F_{2n}}{\sqrt{5}} \right) \beta^m$$

elde edilmiş olur. Düzenlenecek olursa

$$G_m = \left(\frac{F_{2n} - F_{2n+1} \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^m + \left(\frac{F_{2n+1} \alpha - F_{2n}}{\sqrt{5}} \right) \beta^m \quad (8)$$

veya

$$G_m = \left(\frac{F_{2n} - F_{2n+1} \beta}{\alpha - \beta} \right) \alpha^m + \left(\frac{F_{2n+1} \alpha - F_{2n}}{\alpha - \beta} \right) \beta^m \quad (9)$$

olarak genelleştirilir.

Örnek 2.3.1: $n = 2$ için ele alındığında $G_1 = F_4, G_2 = F_6$ başlangıç koşulları olmak üzere G_3 kaçtır?

I. Yol: Bilindiği üzere $G_3 = G_1 + G_2 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$ olarak doğrudan gözlemlenebilir.

II. Yol: (2) denkleminde yerine yazıldığında

$$G_m = G_1 F_{m-2} + G_2 F_{m-1}$$

$$G_m = F_{2n} F_{m-2} + F_{2n+2} F_{m-1}$$

buradan

$$G_3 = F_4F_1 + F_6F_2 = 3 * 1 + 8 * 1 = 11$$

elde edilir

III. Yol: Verilen G_m genelleştirmesi $m = 3$ için (8) denkleminde değerler yerine yazılsın, o halde

$$\begin{aligned}
 G_3 &= \left(\frac{F_4 - F_5 \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^3 + \left(\frac{F_5 \alpha - F_4}{\sqrt{5}} \right) \beta^3 \\
 &= \left(\frac{F_4 - F_5 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_5 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - F_4}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 \\
 &= \left(\frac{3 - 5 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 + \left(\frac{5 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - 3}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 \\
 &= \left(\frac{3 - \frac{5 - 5\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \right) (2 + \sqrt{5}) + \left(\frac{\frac{5 + 5\sqrt{5}}{2} - 3}{\sqrt{5}} \right) (2 - \sqrt{5}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \right) (2 + \sqrt{5}) + \left(\frac{-1}{2\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \right) (2 - \sqrt{5}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} + 5 + \frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} + 5 - \frac{5\sqrt{5}}{2} \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

Gerçekten de (8) denkleminde verilen $m = 3$ ve $n = 2$ değerleri için, yerine yazıldığında $G_3 = 11$ elde edilir.

Örnek 2.3.2: $G_1 = F_{2n}$, $G_2 = F_{2n+2}$ başlangıç koşulları olmak üzere $n = 7$ için G_5 kaçtır?

$$G_m = G_1F_{m-2} + G_2F_{m-1}$$

$$G_m = F_{2n}F_{m-2} + F_{2n+2}F_{m-1}$$

buradan

$$G_5 = F_{14}F_3 + F_{16}F_4 = 377 * 2 + 987 * 3 = 3715$$

elde edilir. (8) denkleminde verilen değerler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
G_5 &= \left(\frac{F_{14} - F_{15} \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^5 + \left(\frac{F_{15} \alpha - F_{14}}{\sqrt{5}} \right) \beta^5 \\
&= \left(\frac{F_{14} - F_{15} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 + \left(\frac{F_{15} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - F_{14}}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 \\
&= \left(\frac{377 - 610 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 + \left(\frac{610 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - 377}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 \\
&= \left(\frac{72}{\sqrt{5}} + 305 \right) \left(\frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} \right) + \left(\frac{-72}{\sqrt{5}} + 305 \right) \left(\frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} \right) \\
&= \frac{792}{2\sqrt{5}} + 180 + \frac{3355}{2} + \frac{1525\sqrt{5}}{2} - \frac{792}{2\sqrt{5}} + 180 + \frac{3355}{2} - \frac{1525\sqrt{5}}{2} \\
&= 3715
\end{aligned}$$

gerçekten de (8) denkleminde verilen $n = 7$ ve $m = 5$ değerleri için, yerine yazıldığında da $G_5 = 3715$ elde edilir.

Örnek 2.3.1 ve Örnek 2.3.2.'te bahsi geçen bulgular, Maple™ 17 ortamında metodolojik bir yaklaşım ile hesaplama prosedürlerinin düzenli bir şekilde uygulanması sonucunda elde edilebilir. Özetlemek gerekirse Maple™ 17 programında bütün hesaplama adımları titizlikle uygulanarak algoritmalar aracılığıyla aynı neticeye ulaşılabılır. Burada ilk olarak yapılması gereken iş Fibonacci sayı dizisini tanımlanıp, ardından verilen G_m genelleştirmesini Maple™ 17 programında tanımlamaktır. Son olarak Örnek 2.3.1 ve Örnek 2.3.2. için denenip, sonuçları karşılaştırmaktır. Maple™ 17 programındaki kod akışı şu şekildedir:

> restart;

```

> fibonacci:= proc(n)
local a, b, i, temp;
a:=0;
b:=1;
if n=0 then return a;
end if;
if n=1 then return b;
end if;
for i from 2 to n do
temp := a+b;
a:=b;
b:= temp;
end do;
return b;
end proc:
> F_2n:= proc(n)
return fibonacci(2*n);
end proc:
> F_2n1:= proc(n)
return fibonacci(2*n+1);
end proc:
> F_2n2:= proc(n)
return fibonacci(2*n+2);
end proc:
> alpha:= (1+sqrt(5))/2;
beta:= (1-sqrt(5))/2;

```

$$\alpha := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$\beta := \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

```

>G[m] := (m, n) ->G[m] = ((F_2n(n) -
(F_2n1(n)) * beta) / sqrt(5)) * (alpha) ^m + (((F_2n1(n)) * (alpha) -
(F_2n(n))) / sqrt(5)) * (beta) ^m;

```

$$G_m := (m, n) \rightarrow G_m = \frac{(F_{2n(n)} - F_{2n1(n)} \beta) \alpha^m}{\sqrt{5}} + \frac{(F_{2n1(n)} \alpha - F_{2n(n)}) \beta^m}{\sqrt{5}}$$

> **G[m] (3, 2) ;**

$$G_3 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \sqrt{5} \right) \sqrt{5} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \sqrt{5} \right) \sqrt{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^3$$

> **simplify(G[m] (3, 2)) ;**

$$G_3 = 11$$

> **simplify(G[m] (5, 7)) ;**

$$G_5 = 3715$$

Benzer şekilde Gibonacci sayı dizisinde başlangıç koşullarını özel olarak bu defa Lucas sayı dizisinin bazı terimleri kullanılarak özgün bazı sonuçlar elde edildi. Lucas sayı dizisinin çift indisli terimlerini, Gibonacci rekürans bağıntısında başlangıç koşulları olarak kullanılarak, Binet formülüne benzer bir formül de şu şekildedir:

$G_1 = L_{2n}$ ve $G_2 = L_{2n+2}$ başlangıç koşulları olmak üzere;

$$G_m = \left[\frac{L_{2n} - L_{2n+1} \beta}{\sqrt{5}} \right] \alpha^m + \left[\frac{L_{2n+1} \alpha - L_{2n}}{\sqrt{5}} \right] \beta^m$$

'dir.

İspat: Gibonacci klasik rekürans bağıntısı ve (1) denklemi ile birleşerek yerine yazıldığında

$$G_m = G_{m-1} + G_{m-2} = aF_{m-2} + bF_{m-1} \quad (10)$$

elde edilir. Burada bulunan a ve b değerleri sırasıyla G_1, G_2 'dir. Yerine yazıldığında;

$$G_m = L_{2n}F_{m-2} + L_{2n+2}F_{m-1}$$

elde edilir. Bu rekürans ilişkisinin karakteristik denklemi ise

$$x^2 - x - 1 = 0$$

'dir ve bu karakteristik denklemin kökleri ise

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

'dir. Buradan genel çözüm (3) denkleminde olduğu gibi

$$G_m = C\alpha^m + D\beta^m \quad (11)$$

'dir. Sırasıyla $m = 1, m = 2$ için özel olarak alınan başlangıç koşullarıdır, yani $G_1 = L_{2n}$ ve $G_2 = L_{2n+2}$

$$G_1 = C\alpha + D\beta = L_{2n} \quad (12)$$

$$G_2 = C\alpha^2 + D\beta^2 = L_{2n+2} \quad (13)$$

(12) ve (13) denklemlerinden C, D elde edilmelidir. Öncelikle

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \alpha$$

şeklinde yazılabileceği bilinmektedir. Benzer şekilde

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \beta$$

şeklinde yazılabileceği bilinmektedir. Dolayısıyla (13) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} C(1 + \alpha) + D(1 + \beta) &= L_{2n+2} \\ C + C\alpha + D + D\beta &= L_{2n+2} \end{aligned}$$

(12) denkleminde hareketle toparlanacak olursa

$$C + D + \underbrace{C\alpha + D\beta}_{L_{2n}} = L_{2n+2}$$

$$C + D = L_{2n+2} - L_{2n} \quad (14)$$

elde edilir. Lucas rekürans bağıntısı yerine yazılabilir. Yani

$$L_{2n+2} - L_{2n} = L_{2n+1}$$

(14) denkleminde yerine yazıldığında

$$C + D = L_{2n+1} \quad (15)$$

denkleminde dönüşür. Buradan $D = L_{2n+1} - C$ elde edilir. Bu da (12) denkleminde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} C\alpha + (L_{2n+1} - C)\beta &= L_{2n} \\ C\alpha + L_{2n+1}\beta - C\beta &= L_{2n} \\ C(\alpha - \beta) &= L_{2n} - L_{2n+1}\beta \end{aligned}$$

şekline getirildi. Bilindiği üzere $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ 'tir, yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} C \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{5}} &= L_{2n} - L_{2n+1}\beta \\ C\sqrt{5} &= L_{2n} - L_{2n+1}\beta \\ C &= \frac{L_{2n} - L_{2n+1}\beta}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak düzenlenirse

$$C = \frac{L_{2n} - L_{2n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}}$$

şeklinde bulunur. (15) denkleminde yerine yazılırsa ve D yalnız bırakılırsa

$$\frac{L_{2n} - L_{2n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} + D = L_{2n+1}$$

ve D gerekli tüm işlemler sonra yalnız bırakılırsa

$$D = \frac{L_{2n+1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - L_{2n}}{\sqrt{5}}$$

elde edilmiş olur. Nihayetinde C, D elde edildiğinden (11) denkleminde yerine yazılırsa;

$$G_m = \left(\frac{L_{2n} - L_{2n+1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \alpha^m + \left(\frac{L_{2n+1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - L_{2n}}{\sqrt{5}} \right) \beta^m$$

elde edilmiş olur. Düzenlenecek olursak

$$G_m = \left(\frac{L_{2n} - L_{2n+1} \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^m + \left(\frac{L_{2n+1} \alpha - L_{2n}}{\sqrt{5}} \right) \beta^m \quad (16)$$

olarak genelleştirilir.

Örnek 2.3.3: $G_1 = L_{2n}$, $G_2 = L_{2n+2}$ başlangıç koşulları olmak üzere ve $n = 2$ için ele alındığında G_3 kaçtır?

I.Yol:

$$\begin{aligned} G_m &= G_1 F_{m-2} + G_2 F_{m-1} \\ G_m &= L_{2n} F_{m-2} + L_{2n+2} F_{m-1} \end{aligned}$$

buradan

$$G_3 = L_4 F_1 + L_6 F_2 = 7 * 1 + 18 * 1 = 25$$

elde edilir.

(16) denklemini ele alınsın, o halde

$$\begin{aligned} G_3 &= \left(\frac{L_4 - L_5 \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^3 + \left(\frac{L_5 \alpha - L_4}{\sqrt{5}} \right) \beta^3 \\ &= \left(\frac{7 - 11 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 + \left(\frac{11 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - 7}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \\ &= \left(\frac{7 - \frac{11 - 11\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \right) (2 + \sqrt{5}) + \left(\frac{\frac{11 + 11\sqrt{5}}{2} - 7}{\sqrt{5}} \right) (2 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{3}{2\sqrt{5}} + \frac{11}{2} \right) (2 + \sqrt{5}) + \left(\frac{-3}{2\sqrt{5}} + \frac{11}{2} \right) (2 - \sqrt{5}) \\
&= \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2} + 11 + \frac{11\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2} + 11 - \frac{11\sqrt{5}}{2} \\
&= 25
\end{aligned}$$

Gerçekten de (16) denkleminde verilen $n = 2$ ve $m = 3$ değerleri için $G_3 = 25$ elde edildiği gözlemlenir.

Örnek 2.3.4: Başlangıç koşulları sırasıyla $G_1 = L_{42}, G_2 = L_{44}$ için G_{37} kaçtır?

$$\begin{aligned}
G_{37} &= L_{42}F_{35} + L_{44}F_{36} \\
&= (599074578)(9227465) + (1568397607)(14930352) \\
&= 5527939700884770 + 23416728348467664 \\
&= 28944668049352434
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu sonuç ile verilen özdeşliğin eşitliği kıyaslanacaktır. (16) denkleminde yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
G_{37} &= \left(\frac{L_{42} - L_{43} \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^{37} + \left(\frac{L_{43} \alpha - L_{42}}{\sqrt{5}} \right) \beta^{37} \\
&= \left(\frac{599074578 - 969323029 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{37} \\
&\quad + \left(\frac{969323029 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - 599074578}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{599074578 - 969323029 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{54018521 + 24157817\sqrt{5}}{2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{969323029 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - 599074578}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{54018521 - 24157817\sqrt{5}}{2} \right) \\
&= 28944668049352434
\end{aligned}$$

elde edilir. Maple™ 17 programı aracılığıyla gerçekleştirilen hesaplamalar sonucunda elde edilen veriler Şekil 4. Maple™ 17 Kodları'nda sunulmuştur. Şekil 4. incelendiğinde, aynı sonuca ulaşıldığı açıkça gözlemlenmektedir.

```

> restart;
> L:= proc(n)
  if n=0 then 2
  elif n=1 then 1
  else L(n-1) + L(n-2)
  end if;
end proc;
> L_2n:= proc(n)
  return L(2*n);
end proc;
> L_2n1:= proc(n)
  return L(2*n+1);
end proc;
> L_2n2:= proc(n)
  return L(2*n+2);
end proc;
> alpha:= (1+sqrt(5))/2;

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \quad (1)$$

> beta:= (1-sqrt(5))/2;

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \quad (2)$$

> G[m]:= (m,n) -> G[m] = ((L_2n(n) - (L_2n1(n)) * beta) / sqrt(5)) * (alpha)^m
+ (((L_2n1(n)) * (alpha) - (L_2n(n))) / sqrt(5)) * (beta)^m;

$$G_m := (m,n) \rightarrow G_m = \frac{(L_2n(n) - L_2n1(n) \beta) \alpha^m}{\sqrt{5}} + \frac{(L_2n1(n) \alpha - L_2n(n) \beta)^m}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

> simplify(G[m](3,2));

$$G_3 = 25 \quad (4)$$

> simplify(G[m](37,21));

$$G_{37} = 28944668049352434 \quad (5)$$


```

Şekil 4 Maple™ 17 Kodları

A. H. Değer ve T. Köroğlu'nun Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin çift indisli terimlerinden elde ettikleri kapalı formül bu alandaki güncel ve önemli çalışmalardan birisidir. Literatürde Gibonacci sayı dizisi üzerine yapılan birçok farklı kapalı formüllerde mevcuttur.

Önerme 2.3.5: (Değer, A. H. & Köroğlu, T., 2021) $G_1 = F_{2n}$ ve $G_2 = F_{2n+2}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$G_m = \left(\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) F_{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) F_{2n+2} \right) \alpha^m \\ + \left(\left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) F_{2n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \right) F_{2n+2} \right) \beta^m$$

'dir.

İspat:

$$G_1 = A\alpha + B\beta = F_{2n}$$

$$G_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = F_{2n+2}$$

olduğu bildiğinden G_1 eşitliğini β^2 , G_2 eşitliğini de β ile çarpılırsa

$$A\alpha\beta^2 + B\beta\beta^2 = F_{2n}\beta^2$$

$$A\alpha^2\beta + B\beta^2\beta = F_{2n+2}\beta$$

elde edilir. Ardından $\beta G_2 - \beta^2 G_1$ işlemi uygulandığında;

$$A(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2) = F_{2n+2}\beta - F_{2n}\beta^2$$

$$A = \frac{F_{2n+2}\beta - F_{2n}\beta^2}{(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2)} \\ = \frac{F_{2n+2}\beta - F_{2n}(\beta + 1)}{\beta - \alpha} \\ = \frac{F_{2n+2}\beta - F_{2n}\beta - F_{2n}}{\beta - \alpha} \\ = \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)F_{2n} - F_{2n}}{-\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)F_{2n}}{-\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n}}{-\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

düzenlenecek olursa;

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n} \right] \\
&= \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)F_{2n+2} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)F_{2n} \\
&= \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)F_{2n} - \left(\frac{\sqrt{5}-5}{10}\right)F_{2n+2} \\
&= \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n} - \left(\frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+2}
\end{aligned}$$

'dir. Yani;

$$A = \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+2}$$

olarak elde edilir. B ise

$$\begin{aligned}
G_2 &= A\alpha^2 + B\beta^2 = F_{2n+2} \\
A(\alpha + 1) + B(\beta + 1) &= F_{2n+2} \\
A\alpha + A + B\beta + B &= F_{2n+2} \\
\underbrace{A\alpha + B\beta}_{F_{2n}} + A + B &= F_{2n+2} \\
B &= F_{2n+2} - F_{2n} - A \\
B &= F_{2n+2} - F_{2n} - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+2}
\end{aligned}$$

$$B = \left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+2}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $G_m = A\alpha^m + B\beta^m$ 'de yerine yazılırsa

$$G_m = \left[\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+2} \right] \alpha^m \\ + \left[\left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+2} \right] \beta^m$$

elde edilir.

Örnek 2.3.1 ve Örnek 2.3.2'de denendiğinde aynı sonuçları verdiği görülür. Maple™ 17 programı üzerinde incelendiğinde de aynı sonuçlar gözlemlenir. Maple™ 17 programı için kodları şu şekildedir:

```
> restart;
> fibonacci:= proc(n)
local a, b, i, temp;
a:=0;
b:=1;
if n=0 then return a; end if;
if n=1 then return b; end if;
for i from 2 to n do
temp := a+b;
a:=b;
b:= temp;
end do;
return b;
end proc;
> F_2n:= proc(n)
return fibonacci(2*n);
end proc;
> F_2n1:= proc(n)
```

```

return fibonacci(2*n+1);
end proc:
> F_2n2:= proc(n)
return fibonacci(2*n+2);
end proc:

```

```

> G[m]:= (m,n) -> G[m] = (((3*sqrt(5)/10 - 1/2)*F_2n(n) + (1/2 -
sqrt(5)/10)*(F_2n2(n))))*(alpha)^m + (((-3*sqrt(5)/10 -
1/2)*F_2n(n) + (1/2 + sqrt(5)/10)*F_2n2(n)))*(beta)^m;

```

$$\begin{aligned}
G_m := (m, n) \rightarrow G_m = & \left(\left(\frac{3}{10} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) F_{2n}(n) + \left(\frac{1}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{10} \sqrt{5} \right) F_{2n2}(n) \right) \alpha^m + \left(\left(-\frac{3}{10} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) F_{2n}(n) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \sqrt{5} \right) F_{2n2}(n) \right) \beta^m
\end{aligned}$$

```

> alpha:= (1+sqrt(5))/2;

```

$$\alpha := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

```

> beta:= (1-sqrt(5))/2;

```

$$\beta := \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

```

> simplify(G[m](3,2));

```

$$G_3 = 11$$

```

> simplify(G[m](5,7));

```

$$G_5 = 3715$$

Önerme 2.3.6: $G_1 = L_{2n}$ ve $G_2 = L_{2n+2}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$G_m = \left(\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) L_{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) L_{2n+2} \right) \alpha^m \\ + \left(\left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) L_{2n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \right) L_{2n+2} \right) \beta^m$$

‘dir.

İspat: Önerme 2.3.5 ispatına benzer yöntemlerle kolaylıkla gerçekleştirilebilir.

Önerme 2.3.7: $G_1 = F_{2n+1}$ ve $G_2 = F_{2n+3}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$G_m = \left(\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) F_{2n+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) F_{2n+3} \right) \alpha^m \\ + \left(\left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right) F_{2n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \right) F_{2n+3} \right) \beta^m$$

‘dir.

İspat: $G_m = K\alpha^m + S\beta^m$ ifadesinden yola çıkılarak

$$G_1 = K\alpha + S\beta = F_{2n+1}$$

$$G_2 = K\alpha^2 + S\beta^2 = F_{2n+3}$$

olduğu bildiğinden G_1 eşitliğini β^2 , G_2 eşitliğini de β ile çarpılırsa

$$K\alpha\beta^2 + S\beta\beta^2 = F_{2n+1}\beta^2$$

$$K\alpha^2\beta + S\beta^2\beta = F_{2n+3}\beta$$

elde edilir. Ardından $\beta G_2 - \beta^2 G_1$ işlemi uygulandığında;

$$K(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2) = F_{2n+3}\beta - F_{2n+1}\beta^2$$

$$K = \frac{F_{2n+3}\beta - F_{2n+1}\beta^2}{(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_{2n+3}\beta - F_{2n+1}(\beta + 1)}{\beta - \alpha} \\
&= \frac{F_{2n+3}\beta - F_{2n+1}\beta - F_{2n}}{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+1} - F_{2n+1}}{-\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)F_{2n+1}}{-\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+3} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+1}}{-\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

düzenlenecek olursa;

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+3} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)F_{2n+1} \right] \\
&= \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)F_{2n+3} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)F_{2n+1} \\
&= \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)F_{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-5}{10}\right)F_{2n+3} \\
&= \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+3}
\end{aligned}$$

'dir. Yani;

$$K = \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+3}$$

olarak elde edilir. S ise

$$G_2 = K\alpha^2 + S\beta^2 = F_{2n+3}$$

$$K(\alpha + 1) + S(\beta + 1) = F_{2n+3}$$

$$K\alpha + K + S\beta + B = F_{2n+3}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{K\alpha + S\beta}_{F_{2n+1}} + K + S &= F_{2n+3} \\ S &= F_{2n+3} - F_{2n+1} - K \\ S &= F_{2n+3} - F_{2n+1} - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+3} \\ S &= \left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+3} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $G_m = K\alpha^m + S\beta^m$, de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} G_m &= \left[\left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+3} \right] \alpha^m \\ &\quad + \left[\left(-\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)F_{2n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)F_{2n+3} \right] \beta^m \end{aligned}$$

elde edilir.

Dijital ortamda yani daha önce de kullanılan Maple™ 17 programı üzerinde Önerme 2.3.7 tanımlanıp, birkaç örnek ile incelendiğinde de gerçek sonuçlar gözlemlenir. Kodları şu şekildedir:

```
> restart;
> fibonacci:= proc(n)
  local a, b, i, temp;
    a:=0;
    b:=1;
    if n=0 then return a;
  end if;
    if n=1 then return b;
  end if;
  for i from 2 to n do
    temp := a+b;
    a:=b;
    b:= temp;
  end do;
end proc;
```

```

    end do;
return b;
end proc:
> F_2n1:= proc(n)
return fibonacci(2*n+1);
end proc:
> F_2n3:= proc(n)
return fibonacci(2*n+3);
end proc:
> alpha:= (1+sqrt(5))/2;
beta:= (1-sqrt(5))/2;

```

$$\alpha := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$\beta := \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

```

> G[m]:= (m,n) -> G[m] = ((3*sqrt(5)/10 - 1/2)*F_2n1(n) + (1/2 -
sqrt(5)/10) *F_2n3(n)) * (alpha)^m + ((-3*sqrt(5)/10 -
1/2)*F_2n1(n) + (1/2 + sqrt(5)/10)*F_2n3(n)) * (beta)^m;

```

$$\begin{aligned}
G_m := (m, n) \rightarrow G_m = & \left(\left(\frac{3}{10} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) F_{2n1}(n) + \left(\frac{1}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{10} \sqrt{5} \right) F_{2n3}(n) \right) \alpha^m + \left(\left(-\frac{3}{10} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) F_{2n1}(n) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \sqrt{5} \right) F_{2n3}(n) \right) \beta^m
\end{aligned}$$

```

> G[m](3,5);

```

$$\begin{aligned}
G_3 = & \left(\frac{17}{5} \sqrt{5} + 72 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^3 + \left(-\frac{17}{5} \sqrt{5} + 72 \right) \left(\frac{1}{2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^3
\end{aligned}$$

```

> simplify(G[m](3,5));

```

$$G_3 = 322$$

> **simplify(G[m](5,7));**

$$G_5 = 6011$$

Maple™ 17 program dilinde yapılan örnekler içerisinde $m = 3, n = 5$ için sonucun 322 olduğu gözlemlenmiştir. Gerçekten de $G_1 = F_{2*5+1} = F_{11} = 89$, $G_2 = F_{2*5+3} = F_{13} = 233$ ve buradan $G_3 = G_1 + G_2 = 89 + 233 = 322$ 'dir. Benzer şekilde $m = 5, n = 7$ için sonucun 6011 olduğu gözlemlenmiştir. Başlangıç koşulları olarak $G_1 = F_{2*7+1} = F_{15} = 610$ ve $G_2 = F_{2*7+3} = F_{17} = 1597$ şekilde alınmıştır. Tablo 6 Maple™ 17 örneğine göre de 5. Terim 6011 olduğu görülmektedir.

Tablo 6 Maple™ 17 Örneği

m	G_m
1	610
2	1597
3	2207
4	3804
5	6011

Önerme2.3.8: $G_1 = L_{2n+1}$ ve $G_2 = L_{2n+3}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$G_m = \left(\frac{L_{2n+1} - L_{2n+2} \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^m + \left(\frac{L_{2n+2} \alpha - L_{2n+1}}{\sqrt{5}} \right) \beta^m$$

'dir.

Örnek 2.3.9: $n = -5$ için ele alındığında $G_1 = L_{-9}$, $G_2 = L_{-7}$ başlangıç koşulları olmak üzere G_5 kaçtır?

Önerme 2.3.8.'den faydalanmak gerekirse

$$\begin{aligned}
 G_m &= \left(\frac{L_{-9} - L_{-8} \beta}{\sqrt{5}} \right) \alpha^5 + \left(\frac{L_{-8} \alpha - L_{-9}}{\sqrt{5}} \right) \beta^5 \\
 &= \left(\frac{76 - (-47) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 + \left(\frac{(-47) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - 76}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 \\
 &= 239
 \end{aligned}$$

Tablo 7. Bazı G_m değerleri

m	G_m
1	-76
2	-29
3	-105
4	-134
5	-239

Sonuç 2.3.10: (Değer, A. H. & Köroğlu, T., 2021) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^m G_i = G_{m+2} - F_{2n+2}$$

'dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m G_i &= \sum_{i=1}^m (G_{i+2} - G_{i+1}) = (G_3 - G_2) + (G_4 - G_3) + \cdots + (G_{m+2} - G_{m+1}) \\
 &= G_{m+2} - G_2
 \end{aligned}$$

$$= G_{m+2} - F_{2n+2}$$

2.4. Yeni Bir Rekürans Bağıntısı

Bu bölümde, şu ana kadar ele alınan genelleştirmelerden tamamen bağımsız, yeni bir rekürans bağıntısı tanıtılacaktır. Bu bağıntının çözümü ve elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak sunulacaktır. Böylece, ilgili problemlere farklı, bir çözüm perspektifi kazandırılması hedeflenmektedir.

$K_0 = 1$ başlangıç koşulu olmak üzere

$$K_s = 9K_{s-1} + 6s \quad (17)$$

yeni rekürans bağıntısıdır. Bu reküransa göre sayı dizisinin ilk birkaç adımı

$$\begin{aligned} s = 1 &\Rightarrow K_1 = 9K_{1-1} + 6 * 1 = 9K_0 + 6 = 15 \\ s = 2 &\Rightarrow K_2 = 9K_{2-1} + 6 * 2 = 9K_1 + 12 = 147 \\ s = 3 &\Rightarrow K_3 = 9K_{3-1} + 6 * 3 = 9K_2 + 18 = 1341 \\ s = 4 &\Rightarrow K_4 = 9K_{4-1} + 6 * 4 = 9K_3 + 24 = 12093 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eder.

(17) denklemini lineer rekürans bağıntısı olduğu için genel çözümü kolaylıkla elde edilir. Burada genel çözümünü bulmak için homojen kısmın çözümü ve özel çözümden faydalanılır. Bu iki çözümü toplayarak genel çözüm elde edilir. O halde (17) denkleminin

$$K_s^{(H)} = A9^s$$

homojen kısmının çözümüdür.

$$K_s^{(P)} = Bs + C$$

özel çözüm olarak alınabilir. Buradan A, B ve C baş katsayıları bulunarak genel çözüm yazılır. (17) denkleminde özel çözüm yerine yazılırsa

$$K_s = 9K_{s-1} + 6s \Rightarrow Bs + C = 9(B(s-1) + C) + 6s$$

$$Bs + C = 9Bs - 9B + 9C + 6s$$

burada s terimleri:

$$B = 9B + 6$$

$$B = -\frac{3}{4}$$

elde edilir. Sabit terimlerden de:

$$C = -9B + 9C$$

$$C = -9\left(-\frac{3}{4}\right) + 9C$$

$$C = -\frac{27}{32}$$

elde edilir. Genel çözüm ise

$$K_s^{(G)} = K_s^{(H)} + K_s^{(P)} = A9^s + Bs + C$$

$$K_s^{(G)} = A9^s - \frac{3}{4}s - \frac{27}{32}$$

şeklini alır. Buradan A , başlangıç koşulu olan $K_0 = 1$ genel çözümde yerine yazıldığında elde edilir. O halde

$$1 = A - \frac{27}{32}$$

$$A = \frac{59}{32}$$

'dir. Genel çözüm ise

$$K_s^{(G)} = \frac{59}{32} 9^s - \frac{3}{4} s - \frac{27}{32}$$

'dir. (17) denkleminin genel çözümdür. Bu şekilde de hesaplamalar yapılabilir ki yine aynı verilere sahip olunacaktır.

Sonuç 2.4.1: (17) denklemini

$$K_s = 9^s + 6 \sum_{m=1}^s m 9^{s-m}$$

'dir.

İspat: $s = 1$ için

$$K_0 = 9^0 + 6 \sum_{m=1}^0 m 9^{0-m} = 1$$

başlangıç doğrudur. $s = n$ için doğru olsun o zaman

$$K_n = 9^n + 6 \sum_{m=1}^n m 9^{n-m}$$

'dir. Varsayım bu şekilde. Son olarak $s = n + 1$ için incelenecek olursa

$$K_{n+1} = 9^{n+1} + 6 \sum_{m=1}^{n+1} m 9^{n+1-m}$$

rekürans bağıntısını yani $K_{n+1} = 9K_n + 6(n+1)$ kullanıp, varsayım ile birlikte yazılacaktır. Yani;

$$K_{n+1} = 9 \left(9^n + 6 \sum_{m=1}^n m 9^{n-m} \right) + 6(n+1)$$

$$\begin{aligned}
&= 9^{n+1} + 6 \sum_{m=1}^n m 9^{n+1-m} + 6(n+1) \\
&= 9^{n+1} + 6 \left(\sum_{m=1}^n m 9^{n+1-m} + (n+1) 9^{(n+1)-(n+1)} \right) \\
&= 9^{n+1} + 6 \left(\sum_{m=1}^{n+1} m 9^{n+1-m} \right)
\end{aligned}$$

olur. Düzenlenecek olursa

$$K_{n+1} = 9^{n+1} + 6 \left(\sum_{m=1}^{n+1} m 9^{n+1-m} \right)$$

dir. Tüm $s \geq 0$ için

$$K_s = 9^s + 6 \sum_{m=1}^s m 9^{s-m}$$

doğrudur. Tümevarım ilkesi gereği ispat tamamlanmıştır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada öncelikle Fibonacci, Lucas ve Gibonacci sayı dizilerine ait tanımlar ve temel teoremler sunulmuş; bu sayı dizileri üzerine literatürde yapılmış çeşitli çalışmalar incelenmiştir. Bu bağlamda, söz konusu dizilere ilişkin önemli özellikler ve aralarındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Özellikle, bu dizilere ait Binet formülleri ve bazı toplama formülleri ayrıntılı biçimde değerlendirilmiştir.

Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin polinom temsilleri analiz edilerek yapısal özellikleri ortaya konmuş, daha sonra çalışmanın esas odak noktası olan Gibonacci sayı dizisine geçilmiştir. Gibonacci dizisi özel başlangıç koşulları altında genelleştirilmiş ve bu genelleştirme üzerine yeni bir yaklaşım geliştirilmiştir. Ayrıca, alternatif bir hesaplama yöntemi önerilmiş ve bu yöntem çeşitli örnekler üzerinde uygulanarak değerlendirilmiştir.

Çalışmada elde edilen sonuçlar, Maple™ 17 yazılım ortamında test edilmiş ve teorik olarak elde edilen formüllerin doğruluğu bilgisayar destekli hesaplamalarla teyit edilmiştir. yazılımında test edilmiş ve teorik hesaplamalar ile yazılım çıktılarının uyumlu olduğu gözlemlenmiştir Ayrıca Gibonacci dizisinin toplam sembolü kullanılarak nasıl ifade edilebileceği gösterilmiş ve bu yaklaşımın sunduğu avantajlar gösterilmiştir. Bu bulgular, Gibonacci sayı dizisinin hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından taşıdığı potansiyeli ortaya koymaktadır.

4. SONUÇLAR

- 1) Benzer temellere dayanan ancak farklı bir yaklaşımla Gibonacci dizisine ilişkin alternatif bir formül ortaya koyulmuştur.
- 2) Gibonacci sayı dizisinin başlangıç koşullarını farklı şekillerde başlangıç ele alarak benzer yaklaşımla alternatif bir formül ortaya koyulmuştur.
- 3) Verilen alternatif çözümler örnekler üzerinde de incelenmiştir.
- 4) Verilen genel çözümlerin literatürle ilişkisi incelenmiştir.
- 5) Teorem ve önermelerin bazı örneklerle uygulaması verilmiştir.

5. ÖNERİLER

Yüksek tezi olarak sunulan bu çalışmada, keyfi başlangıç koşulları seçilerek sayı dizileri geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu tez konusu ile çalışma yapmak isteyen araştırmacılara ve uygulayıcılara iletmek istenen öneriler aşağıdaki gibi belirtilmiştir:

- Bu çalışmada elde edilen geliştirmelerin diğer sayı diziler (Pell, Pell-Lucas, Tribonacci, Jacobsthal vs.) için geçerli olup olmadığı araştırılabilir.
- Örnekler için daha büyük verilere ulaşmak istenildiğinde matematik programlarından yararlanılabilir. Dijital ortamda istenilen verileri elde etmek için Python, Matlab gibi matematik programlarından da, gerekli algoritmalar aracılığıyla veriler daha hızlı elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Azarian, M. K. (2012). Fibonacci Identities as Binomial Sums. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 7, s. 1871-1876.
- Benjamin, A. T. & Quinn, J. J. (2003). Proofs that really count: the art of combinatorial proof.
- Değer, A. H. & Köroğlu, T. (2021). Gibonacci Number Sequences Created with Fibonacci and Lucas Sequences and Their Properties. 3. *Uluslararası Türk Dünyası Mühendislik ve Fen Bilimleri Kongresi*, (s. 505-511). Turkey.
- Horadam, A. F. (1961). A Generalized Fibonacci Sequence. *The American Mathematical Monthly*, s. 455-459.
- Lucas, E. (1878). Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *American Journal of Mathematics*, s. 289-321.
- Ozeki, K. (2008). On Melham's Sum. *The Fibonacci Quarterly*, s. 107-110.
- Prodinger, H. (2008). On a sum of Melham and its variants. *The Fibonacci Quarterly*, 46(3), s. 207-215.
- Thomas, K. (2018). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (2 b., Cilt 1). Hoboken, New Jersey, ABD: John Wiley & Sons, Inc.
- Thomas, K. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (Cilt 2). Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Yuan, Y. & Zhang, W. (2002). Some identities involving the Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 40(4), s. 314-318.

ÖZGEÇMİŞ

Kübra SERT, İlk, orta ve lise eğitimini Gaziantep'te tamamladı. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimine başladı. 2021 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı. 2024 yılından itibaren Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik anabilim dalında araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. İyi derece İngilizce bilmektedir.

