T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE BAZI YENİ KARAKTERİZASYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA MERT

DENİZLİ, TEMMUZ - 2025

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE BAZI YENİ KARAKTERİZASYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA MERT

DENİZLİ, TEMMUZ - 2025

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Mustafa MERT

ÖZET

MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE BAZI YENİ KARAKTERİZASYONLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MUSTAFA MERT
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. CANAN HAZAR GÜLEÇ)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2025

A ve B iki toplanabilme metodu ve $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum x_n$ serisi A toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi B toplanabilir ise ε dizisine toplanabilme çarpanı denir ve $\varepsilon \in (A, B)$ ile gösterilir.

$|\bar{N}, p_n|$ toplanabilme metodu ile $|C, \alpha|_k$ toplanabilme metodu genel olarak birbirinden bağımsızdır. Bu nedenle $(|C, \alpha|_k, |\bar{N}, p_n|)$ tipinde uygun toplanabilme çarpanlarını araştırmak doğaldır. Bu doğrultuda toplanabilme çarpanları ile ilgili yapılan bazı önemli çalışmalara yer verilmiştir.

$|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilme metodu $A = (a_{nv})$ çarpımsal matrisi kullanılarak $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metoduna ve $|C, \alpha|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metodu ise $|C, -1|_k$ metodu ile $\alpha \geq -1$ aralığına genişletilmiştir. Bu metotlar üzerine toplanabilme çarpanları ile ilgili yapılan bazı çalışmaları genişletmek amacıyla $|C, -1|_k$ ve $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metotları üzerine bazı toplanabilme çarpanları karakterize edilecektir. Böylece bilinen sonuçlar genişletilmiş olacaktır.

ANAHTAR KELİMELER: Mutlak Toplanabilme Metotları, Toplanabilme Çarpanları, İçerme Bağıntıları.

ABSTRACT

SOME NEW CHARACTERIZATIONS ON ABSOLUTE SUMMABILITY FACTORS
MSC THESIS
MUSTAFA MERT
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR CANAN HAZAR GÜLEÇ)

DENİZLİ, JULY 2025

Let A and B be two summability methods and let $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ be a sequence of complex numbers. If $\sum \varepsilon_n x_n$ is summable B whenever $\sum x_n$ is summable A, then the sequence ε is said to be a summability factor of type (A, B), and it is denoted by $\varepsilon \in (A, B)$.

The summability method $|\bar{N}, p_n|$ and the summability method $|C, a|_k$ are generally independent of each other. Therefore, it is natural to search for suitable summability factors of the type $(|C, a|_k, |\bar{N}, p_n|)$. In this direction, some important studies made on summability factors have been given.

The $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ summability method has been extended to the $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ summability method by using the multiplicative matrix $A = (a_{nv})$ and the $|C, a|_k$ absolute Cesàro summability method has been extended to the interval $a \geq -1$ by the $|C, -1|_k$ method. In order to expand the studies on summability factors made with these methods, the summability factors related to $|C, -1|_k$ and $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ summability methods will be characterized. Thus, known results will be expanded.

KEYWORDS: Absolute Summability Methods, Summability Factors, Inclusion Relations.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{\varepsilon} \in (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$	:	A dan B ye toplanabilme çarpanı
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	:	X den Y ye olan matrislerin sınıfı
$(\boldsymbol{s_n})$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$\boldsymbol{\omega}$	:	Kompleks değerli bütün dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\ell_k}$	:	k-mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\ell}_\infty$	:	Kompleks değerli sınırlı dizilerin uzayı
$\boldsymbol{c}$	:	Kompleks değerli yakınsak dizilerin uzayı

ÖNSÖZ

Bu yola çıkmamda bana ilham verip öncülük eden kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e ve bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde pozitif enerjisi ve güler yüzü ile zaman, mekan, mesai mefhumu gözetmeksizin yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Canan HAZAR GÜLEÇ'e ve bugünlere gelmemde üzerimdeki haklarını asla ödeyemeyeceğim kıymetli anneme ve rahmetli babama, bana vermiş olduğu destek ve göstermiş olduğu sabrıyla yanımda olan kıymetli eşime ve canım kızlarıma teşekkür eder saygılarımı sunarım.

1. GİRİŞ

Matematiksel analizin en temel ve en derin problemlerinden biri olan serilerin toplanabilirliği, özellikle klasik anlamda ıraksak olan serilere anlamlı limit değerleri atayabilme çabaları, modern analizin şekillenmesinde kritik bir rol oynamıştır. Bu kapsamda mutlak toplanabilme kavramı, yalnızca serinin kendisinin değil aynı zamanda terimlerinin mutlak değerlerinin de toplanabilir olması gerekliliği ile diğer toplanabilme yöntemlerinden ayrışarak analizin birçok dalında vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir.

Mutlak toplanabilmenin önemi, Fourier serileri teorisinden fonksiyonel analize, harmonik analizden sayılar teorisine kadar geniş bir yelpazede kendini göstermektedir. Özellikle Banach uzayları teorisi fonksiyonel analizde önemli sonuçlar için temel sağlar. Mutlak toplanabilir diziler kümesi (ℓ_1 uzayı), modern analizin gelişimini etkileyen özellikleriyle bu tür uzayların bir örneğini oluşturur. Bu durum, mutlak toplanabilme teorisinin salt teorik matematikle sınırlı kalmayıp uygulamalı matematik ve mühendislik problemlerinde de yaygın kullanım bulduğunu göstermektedir.

Toplanabilme teorisinin gelişim sürecine bakıldığında, mutlak toplanabilme kavramının matematikçileri en çok meşgul eden konulardan biri olduğu görülür. Riemann'ın koşullu yakınsak seriler üzerine yaptığı çalışmalar, bu alanda adeta bir dönüm noktası oluşturmuştur. Daha sonra Hardy, Littlewood ve Tauber gibi matematikçilerin çalışmaları, bu teorinin sınırlarını genişletmiş ve uygulama alanlarını çeşitlendirmiştir.

Mutlak toplanabilme metotları denildiğinde akla ilk gelen Cesàro, Abel ve Borel toplanabilme yöntemleri, klasik analizin temel taşları arasında yer alır. Bu yöntemler, ıraksak serilere anlamlı değerler atayabilme yetenekleriyle dikkat çeker. Özellikle Cesàro toplanabilme, kısmi toplamların aritmetik ortalamasını alarak birçok ıraksak seriye sonlu bir değer atayabilir. Abel toplanabilme ise kuvvet serileri aracılığıyla tanımlanır. Borel toplanabilme ise üstel fonksiyonlar kullanarak daha güçlü bir toplanabilme yöntemi sunar.

Toplanabilme çarpanları teorisi, farklı toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri inceleyen matematiksel analizin önemli bir alanıdır. A ve B iki toplanabilme metodu ve $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. $\sum a_n$ serisi A toplanabilir olduğu zaman $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi B toplanabilir ise $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ dizisine toplanabilme çarpanı denir ve $\varepsilon \in (A, B)$ ile gösterilir.

Rhoades ve Savas (2004), $\varepsilon \in (|\bar{N}, p_n|_k, |T|)$ ve $\varepsilon \in (|T|_k, |\bar{N}, p_n|)$ için mutlak toplanabilme çarpanlarını karakterize etmişlerdir, burada T pozitif terimli alt üçgensel matristir.

İçerme bağıntıları ise farklı toplanabilme yöntemleri arasındaki ilişkileri ortaya koyar. Silverman-Toeplitz teoremi gibi temel sonuçlar, hangi toplanabilme yöntemlerinin diğerlerinden daha güçlü olduğunu belirlememizi sağlar.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. U boştan farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : U \times U \to U$$

$$(u, v) \to u + v$$

ve

$$\cdot : \mathbb{F} \times U \to U$$

$$(\alpha, u) \to \alpha u$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleri $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall u, v, t \in U$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir U kümesine **lineer uzay** (veya **vektör uzayı**) denir:

A1) $u + v \in U$,

A2) $u + (v + t) = (u + v) + t$,

A3) $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde bir tek $\theta \in U$ vardır,

A4) $u + (-u) = (-u) + u = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-u) \in U$ vardır,

A5) $u + v = v + u$,

A6) $\alpha u \in U$,

A7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

A8) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, A9) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$,

A10) $1u = u$, $1 \in \mathbb{F}$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise U kümesine sırasıyla reel lineer uzay ve kompleks lineer uzay denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.2. U, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve V kümesi de U'nun bir alt kümesi olsun. $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall x, y \in V$ için $\alpha x + \beta y \in V$ ise V ye U'nun bir lineer alt uzayı denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.3. U, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir kompleks lineer uzay olsun ve $\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}$; $x \to \|x\|$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in U$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

$N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

$N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlanıyorsa bu durumda $\|\cdot\|$ fonksiyonuna U üzerinde bir norm ve $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay adı verilir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.4. $(U, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun ve U uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Ayrıca, $x \in U$ olsun. Bu durumda, verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ile gösterilir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.5. X ve Y kompleks lineer uzaylar olsun. Eğer $L : X \to Y$ dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$L(x + y) = L(x) + L(y)$$

$$L(\alpha x) = \alpha\, L(x)$$

şartlarını sağlıyorsa L ye X uzayından Y uzayına bir lineer operatör veya lineer dönüşüm adı denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.6. X ve Y normlu uzaylar ve $L : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in X$ için,

$$\|L(x)\| \leq c\, \|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir ve L operatörünün normu

$$\|L\| = sup \left\{ \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} : x \neq \theta, x \in X \right\}$$

ile tanımlıdır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.7. X ve Y normlu uzaylar ve $L : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. L operatörü X ve Y arasında normu koruyan, bire-bir ve örten ise L operatörüne bir izometrik izomorfizm denir. Bu durumda X ve Y uzaylarına lineer izomorfiktirler denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Bu çalışma boyunca $k > 1$ olmak üzere; k^* , k nın eşleniğini gösterecektir. Yani;

$\frac{1}{k} + \frac{1}{k^*} = 1$ olacaktır. Ayrıca $k = 1$ için $\frac{1}{k^*} = 0$ olur

Tanım 2.1.8. Reel veya kompleks terimli dizilerin kümesi

$$\omega = \{x = (x_n) : x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{F}, n \to x(n) = x_n\}$$

ile tanımlanır. ω kümesi

$$\big((x_k), (y_k)\big) \to (x_k + y_k) \text{ ve } \big(\alpha, (x_k)\big) \to (\alpha x_k)$$

ikili işlemleri ile $\mathbb{F}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

Ayrıca ω uzayının herhangi bir lineer alt uzayına dizi uzayı denir (Boss ve Peter 2000). Aynı zamanda aşağıdaki uzaylar ω nın temel alt uzayları olup doğal normlarına göre birer Banach uzaylarıdır.

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_v) \in \omega \ : \ \sup_v |x_v| \ < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_v) \ \in \omega \ : \lim_{v \to \infty} x_v = s \, , \qquad s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\ell_k = \left\{ x = (x_v) \in \omega \ : \sum_{v=1}^{\infty} |x_v|^k < \infty \, , \ k \geq 1 \right\}$$

$$bv = \left\{ x = (x_v) \in \omega \ : \sum_{v=1}^{\infty} |x_v - x_{v-1}| < \infty \, , \ x_{-1} = 0 \right\}$$

$$b_s = \left\{ x = (x_v) \in \omega \ : \left(\sum_{v=1}^{n} x_v \right) \in \ell_\infty \right\}$$

$$c_s = \left\{ x = (x_v) \in \omega \ : \left(\sum_{v=1}^{n} x_v \right) \in c \right\}$$

Örneğin, ℓ_k uzayının doğal normu;

$$\|x\| = \left(\sum_{v=1}^{\infty} |x_v|^k \right)^{1/k} \quad k \geq 1$$

dir.

Tanım 2.1.9. X bir dizi uzayı olmak üzere tam lineer metrik uzay olsun. Eğer $\forall n \geq 0$ için $p_n : X \to \mathbb{C}$; $p_n(x) = (x_n)$ ile tanımlı koordinat fonksiyoneli sürekli ise X dizi uzayına $FK - uzayı$ denir (Malkowsky and Rakočević 2000).

Normlu $FK -$ uzayına ise $BK - uzayı$ adı verilir (Malkowsky and Rakočević 2000).

Tanım 2.1.10. X ve Y iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Her $x = (x_k) \in X$ dizisi ve $\forall n \geq 0$ için,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin A- dönüşüm dizisi adı verilir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $Ax = (A_n(x)) \in Y$ ise bu durumda A matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına bir matris dönüşümü denir ve $A \in (X, Y)$ veya $A : X \to Y$ ile gösterilir (Maddox 1970).

Aynı zamanda her matris dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

Tanım 2.1.11. Her $k, n \geq 0$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ ise A matrisine üçgenseldir denir (Malkowsky and Rakočević 2000).

2.2. Toplanabilme Metotları

Mutlak toplanabilme, seriler teorisinde yakınsaklık kavramının genişletilmiş bir formu olarak karşımıza çıkar. Bu kavram, özellikle ıraksak serilere anlamlı değerler atanmasına ve yakınsaklık hızının iyileştirilmesine olanak tanır. Hardy (1949) ve Zygmund (1959) gibi matematikçilerin çalışmaları, mutlak toplanabilmenin temel teorisini şekillendirmiştir. Toplanabilme metotları, yakınsaklık kriterlerini genişletir ve uygulamalı matematikte önemli rol oynar. Örneğin, Cesàro ve Abel toplanabilme yöntemleri, klasik yakınsaklık kriterlerini genişleterek Fourier analizi ve sayısal yöntemlerdeki uygulamalara kapı açmıştır. Aşağıda, temel mutlak toplanabilme metotlarına yer verilmiştir ve bu tanımlarda söz konusu olan $\sum a_k$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir seriyi ve (s_n) ise bu serinin kısmi toplamlar dizisini gösterecektir.

Tanım 2.2.1. (Cesàro Toplanabilme Metodu) (s_n) ve (na_n) dizilerinin α. $(\alpha > -1)$ mertebeden ve $n \geq 1$ için n. dereceden (C, α) Cesàro ortalamaları sırasıyla

$$\sigma_n^{a} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k \qquad (2.2.1)$$

ve

$$\tau_n^a = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{a-1} \, k a_k$$

ile tanımlansın, burada

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} \quad \text{ve} \quad A_0^\alpha = 1$$

ile verilir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^a = s$ ise $\sum a_n$ serisi s değerine (C, a) Cesàro toplanabilirdir denir (Hardy 1949). Burada $(2.2.1)$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-k}^{a-1}}{A_n^\alpha} \ , & 0 \leq k \leq n \\ 0 \ , & k > n \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bu matrise aynı zamanda a. mertebeden Cesàro matrisi denir. Özel olarak $a = 1$ için $(C, 1)$ Cesàro ortalaması elde edilir, yani (s_n) ve (na_n) dizilerinin $(C, 1)$ Cesàro ortalamaları sırasıyla

$$\sigma_n^1 = \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$$

ve

$$\tau_n^1 = \tau_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

ile verilir. Ayrıca σ_n^1 dönüşümüne karşılık gelen matris

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \ , & 0 \leq k \leq n \\ 0 \ , & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Flett (1957) $a > -1$ için $|C,a|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metodunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.2. $1 \leq k < \infty$, $a > -1$ ve $\forall n \geq 0$ için σ_n^a dönüşümü (2.2.1) ile verilsin. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n^a - \sigma_{n-1}^a|^k < \infty \,, \;\; \sigma_{-1}^a = 0 \qquad (2.2.2)$$

ise $\sum a_n$ serisine $|C,a|_k$ mutlak Cesàro toplanabilirdir denir. Bu metot özel olarak; $k = 1$ için $|C,a|$ toplanabilme metoduna (Fekete 1911), $a = 1$ için ise $|C,1|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir.

Kogbetliantz'ın (1925)

$$\tau_n^a = n\,(\sigma_n^a - \sigma_{n-1}^a)$$

eşitliği göz önüne alınırsa (2.2.2) koşulu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \, |\tau_n^a|^k < \infty$$

koşuluna indirgenir.

Son zamanlarda Sarıgöl (2016a), $a > -1$ için $|C,a|_k$ mutlak Cesàro toplanabilen tüm serilerin $|C_a|_k$ uzayını

$$|C_a|_k = \left\{ a = (a_k) : \; \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{1/k} A_n^a} \sum_{k=1}^{n} k A_{n-k}^{a-1} a_k \right|^k < \infty \right\}$$

ile tanımlamıştır ve bu uzayın topolojik yapısını incelemiş ve bu uzay üzerinde bazı matris sınıflarını karakterize etmiştir. Böylece yeni bir çalışma alanı da doğmuştur.

(C,a) Cesàro toplanabilme metodu genellikle $a \geq -1$ aralığı için çalışılsa da dikkat edilirse Flett'in (1957) $|C,a|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metodu $a > -1$ için tanımlıdır. Yukarıdaki tanım $\alpha = -1$ durumu için geçerli olmadığından Thorpe (1986) tarafından $(C, -1)$ Cesàro toplanabilme metodu ayrıca tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.3. $\sum a_n$ sonsuz serisi verilsin ve (T_n) dönüşüm dizisi

$$T_0 = a_0 \text{ ve } T_n = \sum_{v=0}^{n-1} a_v + (n+1)a_n \ , n \geq 1 \qquad (2.2.3)$$

ile tanımlansın. Bu durumda (T_n) dizisi bir s sayısına yakınsak ise $\sum a_n$ serisi s sayısına $(C, -1)$ Cesàro toplanabilirdir denir (Thorpe 1986).

Bu tanım göz önüne alarak $\alpha = -1$ durumu için $|C, -1|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metodu Hazar ve Sarıgöl (2018) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.4. $\sum a_n$ sonsuz seri olsun ve (T_n) dönüşüm dizisi (2.2.3) ile verilsin. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \qquad (2.2.4)$$

ise $\sum a_n$ serisine $|C, -1|_k$ mutlak Cesàro toplanabilirdir denir (Hazar ve Sarıgöl 2018).

Tanım 2.2.5. (p_n) terimleri negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $n \to \infty$ için

$$P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \to \infty$$

olsun. Bu durumda

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \qquad (2.2.5)$$

ile tanımlı (t_n) dönüşüm dizisine (s_n) dizinin (R, p_n) Riesz ortalaması veya $(\bar{N}, p_n)$ ağırlıklı ortalaması denir. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} t_n = s$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine (R, p_n) veya $(\bar{N}, p_n)$ toplanabilirdir denir (Hardy 1949).

Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n} & , \ 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \ k > n \end{cases}$$

ile verilir.

Tanım 2.2.6. $\sum a_n$ sonsuz seri olsun ve (t_n) dönüşüm dizisi (2.2.5) ile verilsin. Bu durumda, $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty.$$

koşulu sağlanıyorsa, $\sum a_n$ serisine $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir denir (Bor 1985).

Son zamanlarda özel matrisler yerine genel matrisler, n veya P_n/p_n çarpanı yerine keyfi bir çarpan alınarak bu metotlar Sarıgöl (2010) tarafından aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

Tanım 2.2.7. $\sum a_n$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan sonsuz bir seri ve (θ_n) negatif olmayan terimlerin bir dizisi olsun. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} |A_n(s) - A_{n-1}(s)|^k < \infty \qquad (2.2.6)$$

ise $\sum a_n$ serisine $|A, \theta_n|_k$ toplanabilirdir denir (Sarıgöl 2010).

(p_n) pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ olsun ve ağırlıklı ortalama matrisi $A = (a_{nv})$

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_v}{P_n} & , \ 0 \leq v \leq n \\ 0 & , \ v > n \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda (2.2.6) ifadesinde $A(s) = (A_n(s))$ dönüşüm dizisinde A matrisi yerine ağırlıklı ortalama matrisini alınırsa

$$A_n(s) = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v$$

olur. Ayrıca

$$s_v = \sum_{r=0}^{v} x_r$$

olduğundan

$$A_n(s) = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{r=0}^{v} x_r = \frac{1}{P_n}\sum_{r=0}^{n} x_r \sum_{v=r}^{n} p_v$$

bulunur. Dikkat edilirse

$$\sum_{v=r}^{n} p_v = p_r + p_{r+1} + \cdots + p_n = P_n - P_{r-1}$$

olduğundan

$$A_n(s) = \frac{1}{P_n}\sum_{r=0}^{n} x_r\,(P_n - P_{r-1})$$

olarak yazılır. Benzer şekilde

$$A_n(s) - A_{n-1}(s) = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{r=1}^{n} P_{r-1} x_r \tag{2.2.7}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi (2.2.7) ifadesi (2.2.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n} P_{r-1} x_r \right|^k < \infty$$

ifadesi bulunur. Bu durumda $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n} P_{r-1} x_r \right|^k < \infty \qquad (2.2.8)$$

sağlanıyor ise $\sum x_n$ serisine $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilirdir denir Sulaiman (1992).

Yani, özel olarak $|A, \theta_n|_k$ toplanabilme metodunda A ağırlıklı ortalama matrisi alınırsa $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilme metodu elde edilir.

Ayrıca özel olarak $|A, \theta_n|_k$ toplanabilme metodunda A ağırlıklı ortalama matrisi ve $\theta_n = P_n/p_n$ ve $\theta_n = n$ yazılırsa sırasıyla $|A, P_n/p_n|_k = |\bar{N}, p_n|_k$ (Bor 1985), $|A, n|_k = |R, p_n|_k$ (Sarıgöl 1993a) metotları bulunur.

$|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ metodu ile toplanabilen tüm serilerin $\left|\bar{N}_p^{\theta}\right|_k$ uzayı

$$\left|\bar{N}_p^{\theta}\right|_k = \left\{ x = (x_r) : \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n} P_{r-1} x_r \right|^k < \infty \right\}$$

ile tanımlanmıştır (Sarıgöl 2011a).

$|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilme metodu $A = (a_{nv})$ çarpımsal matrisi kullanılarak $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metoduna aşağıdaki gibi genişletilmiştir (Sarıgöl 2016b).

Tanım 2.2.8. $\sum x_v$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan sonsuz bir seri ve (θ_n) negatif olmayan terimlerin bir dizisi olsun. Ayrıca $\hat{a} = (\hat{a}_n)$ ve $a = (a_v)$ reel sayıların herhangi iki dizisi olsun. Bu durumda $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \hat{a}_n \sum_{v=0}^{n} a_v x_v \right|^k < \infty \qquad (2.2.9)$$

ise $\sum x_v$ serisine $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilirdir denir (Sarıgöl 2016b, Gökçe ve Güleç 2019).

Burada $A = (a_{nv})$ çarpımsal matrisi veya diğer bir adı ile genelleştirilmiş ortalama matrisi

$$a_{nv} = \begin{cases} \hat{a}_n a_v \ , & 0 \le v \le n \\ 0 \ , & v > n \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Böylece burada $\hat{a} = (\hat{a}_n)$ ve $a = (a_v)$ reel sayıların herhangi iki dizisi olmak üzere mutlak ağırlıklı toplanabilen serilerin $\left|\bar{N}_p^\theta\right|_k$ uzayı $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ ile toplanabilen tüm serilen uzayı olan $\left|A_f^\theta\right|_k$ seri uzayına aşağıdaki gibi genişletilmiştir:

$$\left|A_f^\theta\right|_k = \left\{ x = (x_v) : \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \hat{a}_n \sum_{v=0}^{n} a_v x_v \right|^k < \infty \right\}.$$

$\left|\bar{N}_p^\theta\right|_k$ uzayında $\hat{a}_n = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}$ ve $a_v = P_{v-1}$ seçilirse $\left|A_f^\theta\right|_k$ kümesini elde ederiz.

Şimdi ise bu çalışmada önemli rol oynayacak aşağıdaki lemmaları verelim:

Lemma 2.2.9. $1 < k < \infty$ olsun. Bu takdirde, $A \in (\ell_k, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nv}| \right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır (Sarıgöl 2015).

Lemma 2.2.10. $1 \le k < \infty$ olsun. Bu takdirde, $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_k)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_v \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nv}|^k < \infty$$

olmasıdır (Maddox 1970).

3. TOPLANABİLME ÇARPANLARI

Tanım 3.1. A ve B iki toplanabilme metodu ve $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum x_n$ serisi A toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi B toplanabilir ise ε dizisine toplanabilme çarpanı denir ve $\varepsilon \in (A, B)$ ile gösterilir (Sarıgöl ve Bor 1995).

A ve B iki toplanabilme metodu olsun. (A, B) tipinde bir toplanabilme çarpanı

$$(A,B) = \left\{\varepsilon = (\varepsilon_n) : \sum x_n \text{ serisi } A \text{ toplanabilir olduğunda} \sum \varepsilon_n x_n \text{ serisi } B \text{ toplanabilirdir} \right\}$$

ile ifade edilebilir.

Mutlak toplanabilme çarpanları ve bu metotların karşılaştırılması günümüze kadar Bor ve Kuttner (1989), Bosanquet ve Das (1979), Chow (1954), Flett (1957), Mazhar (1971), Rhoades ve Savas (2004), Sulaiman (1992), Mehdi (1960), Sarıgöl (1993a, 1993b, 2011a, 2011b, 2015), ve Sarıgöl ve Bor (1995) gibi bir çok yazar tarafından incelenmiştir.

$|\bar{N}, p_n|$ toplanabilme metodu ile $|C, \alpha|_k$ toplanabilme metodu genel olarak birbirinden bağımsızdır. Bu nedenle $(|C, \alpha|_k, |\bar{N}, p_n|)$ tipinde uygun toplanabilme çarpanlarını araştırmak doğaldır. Aşağıda, bu doğrultuda toplanabilme çarpanları ilgili bazı önemli çalışmalara yer verilmiştir ve sonrasında bu çalışmaları genelleştiren Sarıgöl'ün (2015) çalışması detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

α herhangi bir reel sayı ve $n \geq 0$ tamsayısı için $\Delta^{\alpha} U_n = \sum_{v=n}^{\infty} A_{v-n}^{-\alpha-1} U_v$ yakınsak seriyi göstersin.

Teorem 3.1. (Mehdi 1960) $\alpha \geq 0$ ve $k > 1$ olmak üzere, $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n a_n$ serisi $|C, 1|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{n^{\alpha+1-\frac{1}{k^*}} \Delta^{\alpha}\left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right)\right\} \in \ell_{k^*}, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k^*} = 1, \tag{3.1}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_m|^{k^*}}{m} < \infty \quad , \quad a \leq 1$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{ak^*-k^*-1} \, |\varepsilon_m|^{k^*} < \infty \ , a > 1$$

olmasıdır.

Aşağıdaki teoremle ile bu sonuç genişletilmiştir.

Teorem 3.2. (Mazhar 1971) $a \geq 0$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, $\sum a_n$ serisi $|C,a|_k$ toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n a_n$ serisi $|\bar{N},p_n|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{n^{-\frac{1}{k^*}} \varepsilon_n\right\} \in \ell_{k^*} \quad , \quad 0 \leq a \leq 1 \tag{3.2}$$

$$\left\{n^{a-\frac{1}{k^*}} \left(\frac{p_n}{P_n}\right) \varepsilon_n\right\} \in \ell_{k^*} \quad , \quad a > 1 \tag{3.3}$$

olmasıdır, burada $a > 1$ için

$$a) \ \frac{p_n}{p_{n+1}} = O(1), \qquad b)(n+1)\frac{p_n}{P_n} = O(1) \text{ and } \ c)\frac{P_n}{n^a p_n} = O(1) \text{ dir.} \tag{3.4}$$

Teorem 3.3. (Sarıgöl 1993a, Sarıgöl ve Bor 1995) $k > 1$ olmak üzere,

$\varepsilon \in (|C,1|_k, |\bar{N},p_n|)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k^*-1} \left(\frac{p_m}{P_m} |\varepsilon_m|\right)^{k^*} < \infty \, ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k^*-1} \left|\Delta\varepsilon_m + \frac{\varepsilon_{m+1}}{m+1}\right|^{k^*} < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 3.2, $-1 < \alpha < 0$ aralığını ve keyfi bir (p_n) pozitif dizisi olma durumunu içermemektedir. Bu nedenle, bu teoremden yola çıkarak $\alpha > -1$ aralığı ve keyfi bir (p_n) pozitif dizisi için aşağıdaki önemli sonuç ispatlanmıştır.

Teorem 3.4. (Sarıgöl 2015) $\alpha > -1$ ve $k > 1$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in (|C,\alpha|_k, |\bar{N}, p_n|)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha k^* + k^* - 1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{r=m}^{\infty} A_{r-m}^{-\alpha-1} \frac{\varepsilon_r}{r} P_{r-1} \right| \right)^{k^*} < \infty \tag{3.5}$$

olmasıdır.

Burada dikkat edilmelidir ki $\alpha \geq 0$ ve (p_n), (3.4) koşulunu sağlayan bir dizi olduğunda Teorem 3.4, Teorem 3.2 ye indirgenir. Nitekim, $1 \in (|C,0|_k, |C,\alpha|_k)$ olduğundan

$\varepsilon \in (|C,\alpha|_k, |\bar{N}, p_n|) \subset (|C,0|_k, |\bar{N}, p_n|)$, (Flett, 1957) dir. Böylece

$\varepsilon \in (|C,\alpha|_k, |\bar{N}, p_n|)$ ise o zaman $\varepsilon \in (|C,0|_k, |\bar{N}, p_n|)$ dır. $\alpha = 0$ için Teorem 3.4 uygulanırsa $\left(m^{-1/k^*} \varepsilon_m\right) \in \ell_{k^*}$ sağlanır bu ise $\varepsilon_m = O(m)$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=m}^{\infty} |A_{r-m}^{-\alpha-1}| \frac{|\varepsilon_r|}{r} P_{r-1}$$

$$= \sum_{r=m}^{\infty} |A_{r-m}^{-\alpha-1}| \frac{|\varepsilon_r|}{r} P_{r-1} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}$$

$$= \sum_{r=m}^{\infty} |A_{r-m}^{-\alpha-1}| \frac{|\varepsilon_r|}{r} = O(1) \sum_{r=m}^{\infty} |A_{r-m}^{-\alpha-1}| < \infty$$

olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha k^* + k^* - 1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{r=m}^{\infty} A_{r-m}^{-\alpha-1} \frac{\varepsilon_r}{r} P_{r-1} \right| \right)^{k^*}$$

$$\geq \sum_{m=1}^{\infty} m^{ak^*+k^*-1} \left| \sum_{r=m}^{\infty} A_{r-m}^{-a-1} \frac{\varepsilon_r}{r} P_{r-1} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \right|^{k^*}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m^{ak^*+k^*-1} \left| \Delta^a \left(\frac{\varepsilon_m}{m}\right) \right|^{k^*}$$

sonucuna ulaşılır, bu ise (3.5) ifadesi (3.1) ve (3.3) ü gerektirir sonucunu verir. Yeterlilik Mazhar (1971)'in sonucunda gösterildiği gibi gösterilebilir. Böylece, Teorem 3.4, Teorem 3.2'yi içerir.

$p_n = 1$ için Teorem 3.4, Mehdi (1960)'nin Teorem 3.1'ini $a > -1$ aralığına genişletir.

Ayrıca, $a = 1$ alınırsa (Sarıgöl 1993a, Sarıgöl ve Bor 1995) te yer alan Teorem 3.3 elde edilir.

Öte yandan, $-1 < a < 0$ için

$$\Delta^a \left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{A_{n-m}^{-a-1}}{n} = \frac{1}{m A_m^a} \sim \frac{\Gamma(n+1)}{m^{a+1}},$$

dır (Chow 1954 ve Peyerimhoff 1954). Bu nedenle $a \geq 0$ için yukarıdaki ifadeyi göz önünde bulundurularak (3.5) koşulu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} < \infty$$

koşuluna indirgenir ki bu mümkün değildir. Bu nedenle aşağıdaki ilginç sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5. $k > 1$ ise her $a > -1$ ve pozitif terimli (p_n) dizisi için

$1 \notin (|C, a|_k, |\bar{N}, p_n|)$ bulunur. Yani $|C, a|_k$ yöntemiyle toplanabilen herhangi bir seri, $|\bar{N}, p_n|$ yöntemiyle toplanamaz (Sarıgöl 2015).

Hazar Güleç (2020a) çalışmasında yukarıdaki çalışmaları $a \geq -1$ aralığına genişletmek amacıyla $\varepsilon \in (|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k, |C,-1|)$ ve $\varepsilon \in (|C,-1|, |\bar{N}, p_n, \theta_n|_k)$ toplanabilme çarpanlarını karakterize etmişlerdir. Ayrıca, $\varepsilon = (1,1,\dots.)$ için bu metotlar arasındaki kapsama ilişkilerini vermiştir. Bu sonuçlar aşağıda detaylı olarak anlatılmıştır.

Teorem 3.6. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 < k < \infty$ olsun. Bu durumda $\sum x_n$ serisi $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_r} \left(\frac{rP_r|\varepsilon_r| + rP_{r-1}|\varepsilon_{r+1}|}{p_r} \right)^{k^*} < \infty \tag{3.6}$$

olmasıdır (Hazar Güleç 2020a).

İspat: Kabul edelim ki $\sum x_n$ serisinin $n-$ci ağırlıklı ortalaması (t_n) dizisi ve $\sum \varepsilon_n x_n$ serisinin $n-$ci $(C,-1)$ Cesàro ortalaması (T_n) dizisi olsun. O halde $\bar{y} = (\bar{y}_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri sırasıyla

$$\bar{y}_n = \theta_n^{1/k^*}(t_n - t_{n-1}) = \frac{\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} x_v \ , \quad \bar{y}_0 = x_0 \tag{3.7}$$

$$y_n = T_n - T_{n-1} = (n+1)x_n\varepsilon_n - (n-1)x_{n-1}\varepsilon_{n-1} \tag{3.8}$$

ile tanımladır. Açıkça görülür ki $\sum x_n$ serisi $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $\bar{y} = (\bar{y}_n) \in \ell_k$ olmasıdır ve $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_1$ olmasıdır. (3.7) eşitliğinden $\bar{y}_n$ nin tersi

$$x_n = \frac{\theta_n^{-1/k^*} P_n}{p_n} \bar{y}_n - \frac{\theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-2}}{p_{n-1}} \bar{y}_{n-1} \ , \ \ x_0 = \bar{y}_0 \tag{3.9}$$

ile bulunur. (3.9) ifadesi (3.8) de yerine yazılırsa $n \geq 1$ için

$$y_n = (n+1)x_n\varepsilon_n - (n-1)x_{n-1}\varepsilon_{n-1}$$

$$= (n+1)\varepsilon_n \left(\frac{\theta_n^{-1/k^*} P_n}{p_n} \bar{y}_n - \frac{\theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-2}}{p_{n-1}} \bar{y}_{n-1} \right)$$

$$- (n-1)\varepsilon_{n-1} \left(\frac{\theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-1}}{p_{n-1}} \bar{y}_{n-1} - \frac{\theta_{n-2}^{-1/k^*} P_{n-3}}{p_{n-2}} \bar{y}_{n-2} \right)$$

$$= (n+1)\varepsilon_n \frac{\theta_n^{-1/k^*} P_n}{p_n} \bar{y}_n$$

$$- \left[(n+1)\varepsilon_n \frac{\theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-2}}{p_{n-1}} + (n-1)\varepsilon_{n-1} \frac{\theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-1}}{p_{n-1}} \right] \bar{y}_{n-1}$$

$$+ (n-1)\varepsilon_{n-1} \frac{\theta_{n-2}^{-1/k^*} P_{n-3}}{p_{n-2}} \bar{y}_{n-2}$$

$$= \sum_{r=n-2}^{n} c_{nr} \, \bar{y}_r$$

Burada $C = (c_{nr})$ matrisi

$$c_{nr} = \begin{cases} (n+1)\varepsilon_n \dfrac{\theta_n^{-1/k^*} P_n}{p_n} \;, & r = n \\ -\left[\dfrac{(n+1)\varepsilon_n \theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-2}}{p_{n-1}} + \dfrac{(n-1)\varepsilon_{n-1} \theta_{n-1}^{-1/k^*} P_{n-1}}{p_{n-1}} \right], & r = n-1 \\ (n-1)\varepsilon_{n-1} \dfrac{\theta_{n-2}^{-1/k^*} P_{n-3}}{p_{n-2}} \;, & r = n-2 \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Böylece $\sum x_n$ serisi $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|C, -1|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $\bar{y} = (\bar{y}_n) \in \ell_k$ olduğunda $y = (y_n) \in \ell_1$ olmasıdır, eşdeğer olarak, $C \in (\ell_k, \ell\,)$ olmasıdır. Lemma 2.2.9 dan

$$\sum_{r=1}^{\infty.} \left(\sum_{n=r}^{r+2} |c_{nr}| \right)^{k^*} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(|c_{rr}| + |c_{r+1\,,r}| + |c_{r+2\,,r}| \right)^{k^*}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r^{k^*} \theta_r} \left(|(r+1)\varepsilon_r P_r| + |(r+2)\varepsilon_{r+1} P_{r-1} + r\varepsilon_r P_r| + |(r+1)\varepsilon_{r+1} P_{r-1}| \right)^{k^*}$$

$$< \infty$$

bulunur ki bu ise (3.6) koşulunu verir ve ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç ise bu teoremin doğrudan sonucudur.

Sonuç 3.7. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 < k < \infty$ olsun. Eğer $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k \subset |C, -1|$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_r}\left(\frac{r(P_r + P_{r-1})}{p_r}\right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır (Hazar Güleç 2020a).

Teorem 3.8. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 \leq k < \infty$ olsun. Eğer $\sum x_n$ serisi $|C, -1|$ toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left| \frac{r\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=r}^{n} \frac{P_{v-1}\varepsilon_v}{v(v+1)} \right|^k < \infty$$

olmasıdır (Hazar Güleç 2020a).

İspat: Kabul edelim ki $\sum x_n$ serisinin $n-$ci $(C, -1)$ Cesàro ortalaması (T_n) dönüşüm dizisi ve $\sum \varepsilon_n x_n$ serisinin $n-$ci ağırlıklı ortalaması (t_n) dönüşüm dizisi olsun. O halde $\bar{y} = (\bar{y}_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri sırasıyla

$$\bar{y}_n = \theta_n^{1/k^*}(t_n - t_{n-1}) = \frac{\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1}\varepsilon_v x_v \ , \quad \bar{y}_0 = \varepsilon_0 x_0 \tag{3.10}$$

$$y_n = T_n - T_{n-1} = (n+1)x_n - (n-1)x_{n-1} \tag{3.11}$$

şekilde tanımlanabilir.

Açıkça görülüyor ki $\sum x_n$ serisi $|C, -1|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_1$ ve $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $\bar{y} = (\bar{y}_n) \in \ell_k$ olmasıdır.

Ayrıca (3.11) eşitliğinde $y = (y_n)$ dizisinin tersi

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^{n} v y_v \ , \quad x_0 = y_0 \tag{3.12}$$

ile hesaplanır. (3.10) eşitliğinde (3.12) ifadesi yerine yazılarak $n \geq 1$ için

$$\bar{y}_n = \frac{\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} \varepsilon_v x_v$$

$$= \frac{\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} \varepsilon_v \frac{1}{v(v+1)} \sum_{r=1}^{v} r y_r$$

$$= \frac{\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n} r \left(\sum_{v=r}^{n} \frac{P_{v-1} \varepsilon_v}{v(v+1)} \right) y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_{nr} \ y_r$$

elde edilir, Burada $C = (c_{nr})$ matrisi

$$c_{nr} = \begin{cases} \dfrac{r \ \theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \displaystyle\sum_{v=r}^{n} \frac{P_{v-1} \varepsilon_v}{v(v+1)} \ , & 1 \leq r \leq n \\ 0 \qquad\qquad , & r > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Biliyoruz ki $\sum x_n$ serisi $|C, -1|$ toplanabilir olduğunda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_1$ olduğunda $\bar{y} = (\bar{y}_n) \in \ell_k$ olmasıdır. Dolayısıyla $C = (c_{nr})$ matrisi ℓ_1 dizi uzayından ℓ_k dizi uzayına bir dönüşüm tanımlar. Yani $C \in (\ell_1, \ell_k)$ dır. Lemma 2.2.10 dan;

$$\sup_r \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nr}|^k = \sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left| \frac{r \theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=r}^{n} \frac{P_{v-1} \varepsilon_v}{v(v+1)} \right|^k < \infty$$

bulunur ki bu ise istenilendir ve ispatı tamamlar.

Bu teoremin doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.9. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda, $|C,-1| \subset |\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left(\frac{r\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=r}^{n} \frac{P_{v-1}}{v(v+1)} \right)^k < \infty$$

olmasıdır (Hazar Güleç 2020a).

Ayrıca, Hazar Güleç (2019) çalışmasında $k > 1$ için $\varepsilon \in (|C,-1|_k, |\bar{N}, p_n|)$ ve $1 \leq k < \infty$ için $\varepsilon \in (|\bar{N}, p_n|, |C,-1|_k)$ toplanabilme çarpanlarını karakterize etmiştir. Böylece Thorpe (1986) tarafından tanımlanan $(C,-1)$ Cesàro toplanabilme metodu kullanılarak Sarıgöl'ün (2015) çalışmasında yer alan Teorem 2.1 ve bu bağlamdaki bazı bilinen sonuçlar $a \geq -1$ aralığına aşağıdaki gibi genişletilmiştir. Ayrıca bazı kapsama ilişkileri de verilmiştir. Bu sonuçları benzer olduğundan ispatsız ifade edelim.

Teorem 3.10. $k > 1$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in (|C,-1|_k, |\bar{N}, p_n|)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left| \frac{p_n r^{1/k}}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=r}^{n} \frac{P_{v-1}\varepsilon_v}{v(v+1)} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

şartının sağlanmasıdır (Hazar Güleç 2019).

Bilindiği üzere, $1 \in (A, B)$ ifadesi A ve B metotlarının toplanabilme alanlarının karşılaştırılması anlamına gelir. Burada $1 = (1,1,1,\ldots)$ sabit dizisidir.

Bu nedenle, Teorem 3.10'da $n \geq 1$ için $\varepsilon_n = 1$ (yani sabit $1 = (1,1,1,\ldots)$ dizisi) alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.11. Eğer $k > 1$ ise, bu durumda her pozitif terimli (p_n) dizisi için $1 \notin (|C,-1|_k, |\bar{N}, p_n|)$ bulunur (Hazar Güleç 2019).

Bu sonuç, $|C,-1|_k$ metoduyla toplanabilen hiçbir seri $|\bar{N}, p_n|$ metoduyla toplanamaz, anlamına gelir.

Teorem 3.12. $k \geq 1$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in (|\bar{N}, p_n|, |C,-1|_k)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \left\{ r^{2k-1} \left| \varepsilon_r \frac{P_r}{p_r} \right|^k \right\} < \infty,$$

$$\sup_{r}\left\{r^{2k-1}\left|\varepsilon_{r+1}\frac{P_{r-1}}{p_r}\right|^{k}\right\}<\infty$$

koşullarının sağlanmasıdır (Hazar Güleç 2019).

Sonuç 3.13. Eğer $k \geq 1$ ise, bu durumda her pozitif terimli (p_n) dizisi için $1 \notin (|\bar{N}, p_n|, |C, -1|_k)$ bulunur (Hazar Güleç 2019).

Yani, $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilme metodu ile toplanabilen hiçbir seri $|C, -1|_k$ metoduyla toplanamaz.

(φ_n), pozitif reel sabitlerden oluşan herhangi bir dizi olsun. $\left|A_f, \varphi_n\right|_k$ toplanabilme metodu ile ilgili olarak Hazar Güleç (2020b) tarafından aşağıdaki toplanabilme çarpanları karakterize edilmiştir.

Teorem 3.14. $k \geq 1$ ve $\alpha + \beta > -1$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in \left(|C, \alpha, \beta|, \left|A_f, \varphi_n\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{r}\left\{\sum_{n=r}^{\infty}\left|\varphi_n^{1/k^*}\hat{a}_n\, r\, A_r^{\alpha+\beta}\sum_{v=r}^{n}\frac{a_v\varepsilon_v A_{v-r}^{-\alpha-1}}{vA_v^{\beta}}\right|^{k}\right\}<\infty$$

olmasıdır (Hazar Güleç 2020b).

Teorem 3.15. $k > 1$, $\alpha + \beta > -1$ ve $\beta > -1$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in \left(\left|A_f, \varphi_n\right|_k, |C, \alpha, \beta|\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\sum_{n=v}^{\infty}\left|\frac{1}{n\, A_n^{\alpha+\beta}\quad \varphi_v^{1/k^*}\hat{a}_v}\Omega_{nv}\right|\right)^{k^*}<\infty\,,$$

olmasıdır, burada $\Omega = (\Omega_{nv})$ matrisi

$$\Omega_{nv}=\begin{cases}\dfrac{A_{n-v}^{\alpha-1}A_v^{\beta}v\varepsilon_v}{a_v}-\dfrac{A_{n-v-1}^{\alpha-1}A_{v+1}^{\beta}(v+1)\varepsilon_{v+1}}{a_{v+1}}, & 1\leq v\leq n\\ 0, & v>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır (Hazar Güleç 2020b).

4. TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE BAZI YENİ SONUÇLAR

$|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilme metodu $A = (a_{nv})$ çarpımsal matrisi kullanılarak $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metoduna ve $|C, \alpha|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metodu ise $|C, -1|_k$ metodu ile $\alpha \geq -1$ aralığına genişletilmişti. Bu bölümde yapılan çalışmaları genişletmek amacıyla $|C, -1|_k$ ve $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metotları ilgili toplanabilme çarpanları karakterize edilecektir. Böylece bilinen sonuçlar genişletilmiş olacaktır.

Teorem 4.1. $k > 1$ olsun. Bu durumda $\varepsilon \in \left(|C, -1|_k \,, \left|A_f\right| \right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left| \hat{a}_n \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} \, r^{1/k} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır.

İspat: Öncelikle $\varepsilon \in \left(|C, -1|_k \,, \left|A_f\right| \right)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum x_n$ serisi $|C, -1|_k$ toplanabilir olduğu zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi de $\left|A_f\right|$ toplanabilir olmasıdır.

$\alpha = -1$ için (T_n), $(C, -1)$ Cesàro dönüşüm dizisi

$$T_n = \sum_{v=0}^{n-1} x_v + (n+1) x_n \tag{4.1}$$

ile tanımlıdır (Thorpe 1986). Ayrıca $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \tag{4.2}$$

koşulu sağlanırsa $\sum x_n$ serisine $|C, -1|_k$ toplanabilirdir denir. Şimdi

$$T_n = \sum_{v=0}^{n-1} x_v + (n+1) x_n = x_0 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + (n+1) x_n$$

$$T_{n-1} = \sum_{v=0}^{n-2} x_v + n x_{n-1} = x_0 + \cdots + x_{n-2} + n x_{n-1}$$

ifadeleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$T_n - T_{n-1} = (n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}$$

bulunur. (4.2) de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |(n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}|^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{\frac{k-1}{k}} \big((n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}\big) \right|^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{1/k^*} \big((n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}\big) \right|^k$$

$$< \infty$$

bulunur. Eğer

$$y_n = n^{1/k^*} \big((n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}\big) \tag{4.3}$$

ile tanımlanırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^k < \infty$$

olur ki bu ise $y = (y_n) \in \ell_k$ olması demektir. Bu durumda;

$\sum x_n$ serisi $|C,-1|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_k$ olmasıdır.

Şimdi (4.3) ifadesinde $x = (x_n)$ dizisinin tersini çekelim:

$$\frac{y_n}{n^{1/k^*}} = (n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}$$

$n = 0$ için, $y_0 = x_0$ olarak kabul edelim.

$n = 1$ için, $\frac{y_1}{1^{1/k^*}} = 2x_1 - 0x_0$ olduğundan $\frac{y_1}{1^{1/k^*}} = 2x_1$ bulunur.

$n = 2$ için, $\frac{y_2}{2^{1/k^*}} = 3x_2 - x_1$ olduğundan $\frac{2y_2}{2^{1/k^*}} = 2.3x_2 - 2x_1$ yazılır. Böyle devam ederek

$$\frac{y_n}{n^{1/k^*}} = (n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}$$

ifadesi de benzer biçimde

$$\frac{ny_n}{n^{1/k^*}} = n(n+1)x_n - (n-1)\,n\,x_{n-1}$$

yazılabilir. Böylece gerekli işlemler ile

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{vy_v}{v^{1/k^*}} = n(n+1)x_n$$

bulunur, yani $n \geq 1$ için

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^{n} v^{1/k} y_v \tag{4.4}$$

olarak bulunur.

Ayrıca biliyoruz ki $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v x_v \right|^k < \infty \tag{4.5}$$

koşulu sağlanıyorsa $\sum x_n$ serisi $|A_f, \theta_n|_k$ toplanabilirdir denir. Bu durumda $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^*} = 1$ olduğundan (4.5) ifadesinden $k = 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{a}_n\sum_{v=1}^{n}a_v\,\varepsilon_v x_v\right|<\infty$$

koşulu sağlanırsa $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|A_f|$ toplanabilirdir, denilir.

Burada $\hat{y}=(\hat{y}_n)$ dizisi

$$\hat{y}_n=\hat{a}_n\sum_{v=1}^{n}a_v\,\varepsilon_v x_v \tag{4.6}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{y}_n|<\infty$$

olur ki bu ise $\hat{y}=(\hat{y}_n)\in\ell_1$ anlamına gelir. Bu takdirde, (4.6) eşitliğinde (4.4) eşitliği ile bulunan (x_n) dizisinin tersi yerine yazılarak indis değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{y}_n &= \hat{a}_n\sum_{v=1}^{n}a_v\,\varepsilon_v x_v\\
&= \hat{a}_n\sum_{v=1}^{n}a_v\,\varepsilon_v\left(\frac{1}{v(v+1)}\sum_{r=1}^{v}r^{1/k}y_r\right)\\
&= \hat{a}_n\sum_{r=1}^{n}r^{1/k}\left(\sum_{v=r}^{n}\frac{a_v\varepsilon_v}{v(v+1)}\right)y_r\\
&= \sum_{r=1}^{n}\hat{a}_n r^{1/k}\left(\sum_{v=r}^{n}\frac{a_v\varepsilon_v}{v(v+1)}\right)y_r\\
&= \sum_{r=1}^{n}d_{nr}\,y_r
\end{aligned}$$

bulunur, burada $D=(d_{nr})$ matrisi

$$d_{nr} = \begin{cases} \hat{a}_n r^{1/k} \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} \;, & 1 \le r \le n \\ 0 \;, & r > n \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Dolayısıyla; $D = (d_{nr})$ matrisi $D:\ \ell_k \longrightarrow \ell_1$ ya tanımlıdır. Bu durumda $D \in (\ell_k, \ell_1)$ bulunur.

Bu durumda $\varepsilon \in \left(|C,-1|_k \,, \left|A_f\right| \right)$ olması gerek ve yeter şart $D \in (\ell_k, \ell_1)$ olmasıdır. Böylece Lemma 2.2.9 dan; $D \in (\ell_k, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |d_{nr}| \right)^{k^*} < \infty \tag{4.7}$$

koşulunun sağlanmasıdır. Dolayısıyla $D = (d_{nr})$ matrisi (4.7) de yerine yazılırsa

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left| \hat{a}_n \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} \, r^{1/k} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1 de $n \ge 1$ için $\varepsilon_n = 1$ (yani sabit $1 = (1,1,1,\dots)$ dizisi) alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2. $k > 1$ olsun. Bu durumda $|C,-1|_k \subset \left|A_f\right|$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left| \hat{a}_n \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v}{v(v+1)} \, r^{1/k} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 4.3. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 \le k < \infty$ olsun. Bu durumda $\varepsilon \in \left(|C,-1|, \left|A_f, \theta_n\right|_k \right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left| \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n r \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} \right|^k < \infty$$

olmasıdır.

İspat: $\varepsilon \in \left(|C,-1|, \left|A_f,\theta_n\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilir olduğu zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi de $\left|A_f,\theta_n\right|_k$ toplanabilir olmasıdır.

$\alpha = -1$ için $x = (x_n)$ dizisinin $(C,-1)$ Cesàro dönüşümü (4.1) ile tanımlı olsun. Ayrıca $k = 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_n - T_{n-1}| < \infty \tag{4.8}$$

koşulu sağlanırsa $\sum x_n$ serisine $|C,-1|$ toplanabilirdir denir. Teorem 4.1'e benzer olarak

$$T_n - T_{n-1} = (n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}$$

bulunur ve (4.8) de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_n - T_{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}| < \infty$$

bulunur. $y = (y_n)$ dizisi

$$y_n = (n+1)x_n - (n-1)x_{n-1} \tag{4.9}$$

ile tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$$

olur ki bu ise $y = (y_n) \in \ell_1$ olması anlamına gelir. Bu durumda;

$\sum x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_1$ olmasıdır.

Ayrıca (4.9) eşitliğinde $x = (x_n)$ dizisinin tersi

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^{n} v y_v \qquad (4.10)$$

olacak şekilde hesaplanır.

Şimdi (4.5) ifadesi dikkate alındığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v \varepsilon_v x_v \right|^k < \infty \qquad (4.11)$$

koşulu sağlanır ise zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilirdir denir. Burada (4.11) ifadesi düzenlenirse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \theta_n^{\frac{k-1}{k}} \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v \varepsilon_v x_v \right|^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v \varepsilon_v x_v \right|^k < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $\tilde{y} = (\tilde{y}_n)$

$$\tilde{y}_n = \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v \varepsilon_v x_v \qquad (4.12)$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{y}_n|^k < \infty$$

olur ki bu ise $\tilde{y} = (\tilde{y}_n) \in \ell_k$ olması anlamına gelir. Bu durumda $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $\tilde{y} = (\tilde{y}_n) \in \ell_k$ olmasıdır.

Bu durumda (4.10) ile hesaplanan (x_n) tersi (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{y}_n = \theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v \varepsilon_v x_v$$

$$= \theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v \varepsilon_v \left(\frac{1}{v(v+1)}\sum_{r=1}^{v} r y_r\right)$$

$$= \theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)}\right) r y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(\theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)}\; r\right) y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_{nr} y_r$$

bulunur. Burada $C = (c_{nr})$ matrisi

$$c_{nr} = \begin{cases} \theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n\, r \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} & , \quad 1 \le r \le n \\ 0 & , \quad r > n \end{cases}$$

ile bulunur.

Bu durumda $\varepsilon \in \left(|C,-1|, \left|A_f,\theta_n\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilir olduğu zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $\left|A_f,\theta_n\right|_k$ toplanabilirdir. Yani eşdeğer olarak, $\varepsilon \in \left(|C,-1|, \left|A_f,\theta_n\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_1$ olduğu zaman $\tilde{y} = (\tilde{y}_n) \in \ell_k$ olmasıdır.

Böylece $C = (c_{nr})$ matrisi $C : \ \ell_1 \longrightarrow \ell_k$ ya bir matris dönüşümü tanımlar. Yani, $C \in (\ell_1, \ell_k)$ bulunur.

Dolayısıyla $\varepsilon \in \left(|C,-1|, \left|A_f,\theta_n\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $C \in (\ell_1, \ell_k)$ olmasıdır.

Ayrıca Lemma 2.2.10 dan $C \in (\ell_1, \ell_k)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nr}|^k < \infty \tag{4.13}$$

koşulu sağlanır. Böylece $C = (c_{nr})$ matrisi (4.13) de yerine yazılırsa

$$\sup_r \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nr}|^k = \sup_r \sum_{n=1}^{\infty} \left| \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} \, r \right|^k$$

$$= \sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left| \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n r \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v \varepsilon_v}{v(v+1)} \right|^k < \infty$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.3 de $n \geq 1$ için $\varepsilon_n = 1$ (yani sabit $1 = (1,1,1,\dots)$ dizisi) alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda $|C,-1| \subset \left|A_f, \theta_n\right|_k$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left| \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n r \sum_{v=r}^{n} \frac{a_v}{v(v+1)} \right|^k < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 4.5. $1 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda $\varepsilon \in \left(\left|A_f\right|, \ |C,-1|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \left(\left| \frac{r^{1/k^*}(r+1)\varepsilon_r}{a_r \hat{a}_r} \right|^k + \left| \frac{(r+1)^{1/k^*}}{\hat{a}_r} \left(\frac{(r+2)\varepsilon_{r+1}}{a_{r+1}} + \frac{r\,\varepsilon_r}{a_r} \right) \right|^k + \left| \frac{(r+2)^{1/k^*}(r+1)\varepsilon_{r+1}}{a_{r+1}\hat{a}_r} \right|^k \right) < \infty$$

olmasıdır.

İspat: $\varepsilon \in \left(\left|A_f\right|, \ |C,-1|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum x_n$ serisi $\left|A_f\right|$ toplanabilir olduğu zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi de $|C,-1|_k$ toplanabilir olmasıdır.

Ayrıca Teorem 4.1 den biliyoruz ki

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v\, x_v\right| < \infty$$

koşulu sağlanır ise $\sum x_n$ serisi $\left|A_f\right|$ toplanabilirdir, denir. Bu durumda $\hat{y} = (\hat{y}_n)$ dizisi

$$\hat{y}_n = \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v\, x_v \tag{4.14}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{y}_n| < \infty$$

olur ki bu ise $\hat{y} = (\hat{y}_n) \in \ell_1$ olması anlamına gelir. Buradan (4.14) ifadesinden $x = (x_v)$ ters dizisini çekelim:

$$\hat{y}_n = \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v\, x_v$$

olduğundan

$$\frac{\hat{y}_n}{\hat{a}_n} = \sum_{v=1}^{n} a_v\, x_v \tag{4.15}$$

ve

$$\frac{\hat{y}_{n-1}}{\hat{a}_{n-1}} = \sum_{v=1}^{n-1} a_v\, x_v \tag{4.16}$$

ifadeleri yazılabilir. Böylece (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden

$$\frac{\hat{y}_n}{\hat{a}_n} - \frac{\hat{y}_{n-1}}{\hat{a}_{n-1}} = a_n x_n$$

elde edilir ki buradan

$$x_n = \frac{1}{a_n}\left(\frac{\hat{y}_n}{\hat{a}_n} - \frac{\hat{y}_{n-1}}{\hat{a}_{n-1}}\right) \tag{4.17}$$

bulunur.

Şimdi $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{1/k^*}[(n+1)\varepsilon_n x_n - (n-1)\varepsilon_{n-1}x_{n-1}] \right|^k < \infty \tag{4.18}$$

koşulu sağlanır ise $\sum \varepsilon_n x_n$ serisine $|C,-1|_k$ toplanabilirdir denir. (4.18) ifadesinden $y = (y_n)$ dizisi

$$y_n = n^{1/k^*}[(n+1)\varepsilon_n x_n - (n-1)\varepsilon_{n-1}x_{n-1}] \tag{4.19}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^k < \infty$$

olur ki bu ise $y = (y_n) \in \ell_k$ olması anlamına gelir.

Şimdi de (4.17) eşitliğinde bulunan (x_n) dizisi (4.19) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$y_n = n^{1/k^*}[(n+1)\varepsilon_n x_n - (n-1)\varepsilon_{n-1}x_{n-1}]$$

$$= n^{1/k^*}\left[\left((n+1)\varepsilon_n\left(\frac{1}{a_n}\left(\frac{\hat{y}_n}{\hat{a}_n} - \frac{\hat{y}_{n-1}}{\hat{a}_{n-1}}\right)\right)\right) - (n-1)\varepsilon_{n-1}\left(\frac{1}{a_{n-1}}\left(\frac{\hat{y}_{n-1}}{\hat{a}_{n-1}} - \frac{\hat{y}_{n-2}}{\hat{a}_{n-2}}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{n^{1/k^*}(n+1)\varepsilon_n}{a_n\hat{a}_n}\hat{y}_n - \frac{n^{1/k^*}(n+1)\varepsilon_n}{a_n\hat{a}_{n-1}}\hat{y}_{n-1} - \frac{n^{1/k^*}(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}\hat{a}_{n-1}}\hat{y}_{n-1} + \frac{n^{1/k^*}(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}\hat{a}_{n-2}}\hat{y}_{n-2}$$

$$= \frac{n^{1/k^*}(n+1)\varepsilon_n}{a_n \hat{a}_n}\hat{y}_n - \frac{n^{1/k^*}}{\hat{a}_{n-1}}\left(\frac{(n+1)\varepsilon_n}{a_n} + \frac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}}\right)\hat{y}_{n-1} + \frac{n^{1/k^*}(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}\hat{a}_{n-2}}\hat{y}_{n-2}$$

$$= \sum_{r=n-2}^{n} b_{nr}\hat{y}_r$$

elde edilir. Burada $B = (b_{nr})$ matrisi

$$b_{nr} = \begin{cases} \dfrac{n^{1/k^*}(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}\hat{a}_{n-2}}, & r = n-2 \\ -\dfrac{n^{1/k^*}}{\hat{a}_{n-1}}\left(\dfrac{(n+1)\varepsilon_n}{a_n} + \dfrac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}}\right), & r = n-1 \\ \dfrac{n^{1/k^*}(n+1)\varepsilon_n}{a_n\hat{a}_n}, & r = n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile bulunur. Böylece

$\varepsilon \in \left(\left|A_f\right|, \ |C,-1|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum x_n$ serisi $\left|A_f\right|$ toplanabilir olduğu zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi de $|C,-1|_k$ toplanabilir olmasıdır. Yani eşdeğer olarak, $\varepsilon \in \left(\left|A_f\right|, \ |C,-1|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\hat{y} = (\hat{y}_n) \in \ell_1$ olduğu zaman $y = (y_n) \in \ell_k$ olmasıdır. Böylece $B = (b_{nr})$ matrisi $B : \ \ell_1 \longrightarrow \ell_k$ ya bir matris dönüşümü tanımlar. Yani, $B \in (\ell_1, \ell_k)$ bulunur.

Ayrıca Lemma 2.2.10 dan $B \in (\ell_1, \ell_k)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \sum_{n=1}^{\infty} |b_{nr}|^k < \infty \tag{4.20}$$

koşulunun sağlanmasıdır. Dolayısıyla $\varepsilon \in \left(\left|A_f\right|, |C,-1|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (\ell_1, \ell_k)$ olmasıdır, yani eşdeğer olarak (4.20) koşulunun sağlanmasıdır. Burada $B = (b_{nr})$ matrisi (4.20) şartında yerine yazılırsa

$$\sup_r \sum_{n=1}^{\infty} |b_{nr}|^k = \sup_r \sum_{n=r}^{r+2} |b_{nr}|^k$$

$$= \sup_r \left(|b_{rr}|^k + \left|b_{r+1,r}\right|^k + \left|b_{r+2,r}\right|^k \right)$$

$$= \sup_r \left(\left| \frac{r^{1/k^*}(r+1)\varepsilon_r}{a_r \hat{a}_r} \right|^k + \left| \frac{(r+1)^{1/k^*}}{\hat{a}_r} \left(\frac{(r+2)\varepsilon_{r+1}}{a_{r+1}} + \frac{r\,\varepsilon_r}{a_r} \right) \right|^k + \left| \frac{(r+2)^{1/k^*}(r+1)\varepsilon_{r+1}}{a_{r+1}\hat{a}_r} \right|^k \right) < \infty$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.5 de $n \geq 1$ için $\varepsilon_n = 1$ (yani sabit $1 = (1,1,1, \dots)$ dizisi) alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6. $1 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda $\left|A_f\right| \subset |C,-1|_k$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_r \left(\left| \frac{r^{1/k^*}(r+1)}{a_r \hat{a}_r} \right|^k + \left| \frac{(r+1)^{1/k^*}}{\hat{a}_r} \left(\frac{(r+2)}{a_{r+1}} + \frac{r}{a_r} \right) \right|^k + \left| \frac{(r+2)^{1/k^*}(r+1)}{a_{r+1}\hat{a}_r} \right|^k \right) < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 4.7. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 < k < \infty$ olsun. Bu durumda $\varepsilon \in \left(\left|A_f, \theta_n\right|_k, |C,-1| \right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\left| \frac{(r+1)\varepsilon_r}{\theta_r^{1/k^*} a_r \hat{a}_r} \right| + \left| \frac{1}{\theta_r^{1/k^*} \hat{a}_r} \left(\frac{(r+2)\varepsilon_{r+1}}{a_{r+1}} + \frac{r\,\varepsilon_r}{a_r} \right) \right| + \left| \frac{(r+1)\varepsilon_{r+1}}{\theta_r^{1/k^*} a_{r+1}\hat{a}_r} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.3 den biliyoruz ki $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v x_v \right|^k < \infty$$

sağlanır ise $\sum x_n$ serisine $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilirdir denir. Bu durumda $y = (y_n)$ dizisi

$$y_n = \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v x_v \tag{4.21}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^k < \infty$$

olur ki bu ise $y = (y_n) \in \ell_k$ anlamına gelir. Bu durumda $\sum x_n$ serisi $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_k$ olmasıdır. (4.21) eşitliğinde $x = (x_v)$ tersini bulalım.

$$y_n = \theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n \sum_{v=1}^{n} a_v x_v$$

olduğundan

$$\frac{y_n}{\theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n} = \sum_{v=1}^{n} a_v \, x_v \tag{4.22}$$

ve

$$\frac{y_{n-1}}{\theta_{n-1}^{1/k^*} \hat{a}_{n-1}} = \sum_{v=1}^{n-1} a_v \, x_v \tag{4.23}$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece (4.22) ve (4.23) eşitliklerinden

$$x_n = \frac{1}{a_n} \left(\frac{y_n}{\theta_n^{1/k^*} \hat{a}_n} - \frac{y_{n-1}}{\theta_{n-1}^{1/k^*} \hat{a}_{n-1}} \right) \tag{4.24}$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(n+1)\varepsilon_n x_n-(n-1)\varepsilon_{n-1}x_{n-1}|<\infty$$

sağlanır ise $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilirdir, denir. Burada $\hat{y}=(\hat{y}_n)$ dizisi

$$\hat{y}_n=(n+1)\varepsilon_n x_n-(n-1)\varepsilon_{n-1}x_{n-1} \tag{4.25}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{y}_n|<\infty$$

olur ki bu ise $\hat{y}=(\hat{y}_n)\in \ell_1$ anlamına gelir. (4.25) eşitliğinde (4.24) ile bulunan (x_n) dizisi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{y}_n&=(n+1)\varepsilon_n x_n-(n-1)\varepsilon_{n-1}x_{n-1}\\
&=(n+1)\varepsilon_n\left(\frac{1}{a_n}\left(\frac{y_n}{\theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n}-\frac{y_{n-1}}{\theta_{n-1}^{1/k^*}\hat{a}_{n-1}}\right)\right)\\
&\qquad-(n-1)\varepsilon_{n-1}\left(\frac{1}{a_{n-1}}\left(\frac{y_{n-1}}{\theta_{n-1}^{1/k^*}\hat{a}_{n-1}}-\frac{y_{n-2}}{\theta_{n-2}^{1/k^*}\hat{a}_{n-2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(n+1)\varepsilon_n}{a_n\theta_n^{1/k^*}\hat{a}_n}y_n-\frac{(n+1)\varepsilon_n}{a_n\theta_{n-1}^{1/k^*}\hat{a}_{n-1}}y_{n-1}-\frac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}\theta_{n-1}^{1/k^*}\hat{a}_{n-1}}y_{n-1}\\
&\qquad+\frac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}\theta_{n-2}^{1/k^*}\hat{a}_{n-2}}y_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(n+1)\varepsilon_n}{\theta_n^{1/k^*}a_n\hat{a}_n}y_n-\frac{1}{\theta_{n-1}^{1/k^*}\hat{a}_{n-1}}\left(\frac{(n+1)\varepsilon_n}{a_n}+\frac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}}\right)y_{n-1}\\
&\qquad+\frac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{\theta_{n-2}^{1/k^*}a_{n-1}\hat{a}_{n-2}}y_{n-2}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=n-2}^{n} e_{nr} y_r$$

elde edilir. Burada $E = (e_{nr})$ matrisi

$$e_{nr} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{\theta_{n-2}^{1/k^*} a_{n-1}\hat{a}_{n-2}}, & r = n-2 \\ -\dfrac{1}{\theta_{n-1}^{1/k^*}\hat{a}_{n-1}}\left(\dfrac{(n+1)\varepsilon_n}{a_n} + \dfrac{(n-1)\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}}\right), & r = n-1 \\ \dfrac{(n+1)\varepsilon_n}{\theta_n^{1/k^*} a_n \hat{a}_n}, & r = n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanır.

$\varepsilon \in \left(\left|A_f, \theta_n\right|_k, |C,-1| \right)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum x_n$ serisi $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilir olduğu zaman $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $|C,-1|$ toplanabilir olmasıdır. Yani eşdeğer olarak, $\varepsilon \in \left(\left|A_f, \theta_n\right|_k, |C,-1| \right)$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_k$ olduğu zaman $\hat{y} = (\hat{y}_n) \in \ell_1$ olmasıdır. Böylece $E = (e_{nr})$ matrisi $E: \ell_k \longrightarrow \ell_1$ e bir matris dönüşümü tanımlar. Yani, $E \in (\ell_k, \ell_1)$ bulunur.

Ayrıca Lemma 2.2.9 dan $E \in (\ell_k, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_{nr}| \right)^{k^*} < \infty \tag{4.26}$$

koşulunun sağlanmasıdır. Dolayısıyla $\varepsilon \in \left(\left|A_f, \theta_n\right|_k, |C,-1| \right)$ olması için gerek ve yeter şart $E \in (\ell_k, \ell_1)$ olmasıdır, (4.26) koşulunun sağlanmasıdır. $E = (e_{nr})$ matrisi (4.26) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_{nr}| \right)^{k^*}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \left(|e_{rr}| + \left|e_{r+1,r}\right| + \left|e_{r+2,r}\right| \right)^{k^*}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\left| \frac{(r+1)\varepsilon_r}{\theta_r^{1/k^*} a_r \hat{a}_r} \right| + \left| \frac{1}{\theta_r^{1/k^*} \hat{a}_r} \left(\frac{(r+2)\varepsilon_{r+1}}{a_{r+1}} + \frac{r\,\varepsilon_r}{a_r} \right) \right| + \left| \frac{(r+1)\varepsilon_{r+1}}{\theta_r^{1/k^*} a_{r+1} \hat{a}_r} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.7 de $n \geq 1$ için $\varepsilon_n = 1$ (yani sabit $1 = (1,1,1,\ldots)$ dizisi) alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.8. (θ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve $1 < k < \infty$ olsun. $\left|A_f, \theta_n\right|_k \subset |C, -1|$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\left| \frac{(r+1)}{\theta_r^{1/k^*} a_r \hat{a}_r} \right| + \left| \frac{1}{\theta_r^{1/k^*} \hat{a}_r} \left(\frac{(r+2)}{a_{r+1}} + \frac{r}{a_r} \right) \right| + \left| \frac{(r+1)}{\theta_r^{1/k^*} a_{r+1} \hat{a}_r} \right| \right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Mutlak toplanabilme çarpanları ve bu metotların karşılaştırılması günümüze kadar Bor ve Kuttner (1989), Bosanquet ve Das (1979), Chow (1954), Flett (1957), Mazhar (1971), Rhoades ve Savas (2004), Sarıgöl (1993a, 1993b, 2011b, 2015), Sulaiman (1992), Mehdi (1960), ve Sarıgöl ve Bor (1995) gibi birçok yazar tarafından incelenmiştir.

$|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilme metodu $A = (a_{nv})$ çarpımsal matrisi kullanılarak $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metoduna ve $|C, \alpha|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metodu ise $|C, -1|_k$ metodu ile $\alpha \geq -1$ aralığına genişletilmişti. Bu toplanabilme metotları üzerine yapılan çalışmaları genişletmek amacıyla bu tezde $|C, -1|_k$ ve $\left|A_f, \theta_n\right|_k$ toplanabilme metotları ile ilgili toplanabilme çarpanları karakterize edilmiştir. Böylece bilinen sonuçlar genişletilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Bor, H., "On $|\bar{N},p_n|_k$ summability factors of infinite series", *Tamkang J., Math.*, 16, 13-20, (1985).

Bor, H. and Kuttner, B., "On the necessary condition for absolute weighted arithmetic mean summability factors", *Acta Math. Hung.,* 54, 57-61, (1989).

Bosanquet, L. S. and Das, G., "Absolutely summability factors for Nörlund means", *Proc. Lond. Math. Soc.,* 838, 1-52, (1979).

Chow, H. C. "Note on convergence and summability factors" *J. Lond. Math. Soc.,* 29, 459-476, (1954).

Fekete, M. "Zur theorie der divergenten reihen" *Math.es TermezsErtesitö (Budapest)*, *29*, 719-726, (1911).

Flett, T. M. "On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley", *Proc. Lond. Math Soc*., 7, 113-141, (1957).

Gökçe, F., and Güleç, G. C. H., "Compact and matrix operators on the space $\left\vertA_{f}^{\theta}\right\vert_{k}$" *Tbilisi Math. J.*, 12(4), Gökçe1-13, (2019).

Hardy, G. H., *Divergent Series*, Oxford University Press, London, 1949.

Hazar, G. C., and M. A. Sarıgöl. "Compact and matrix operators on the space |C,− 1|k", *J. Comput. Anal. Appl,* 25(6), 1014-1024, (2018).

Hazar Güleç, G.C. "Summability factor relations between absolute weighted and Cesàro means", Math. Methods Appl. Sci., 42(16), 5398-5402, (2019).

Hazar Güleç, G.C. "A study on absolute summability factors", *Sakarya University J. Sci.,* 24(1), 220-223, (2020a).

Hazar Güleç, G.C. "Some new results on absolute summability factors". Celal Bayar University J. Sci., 16(1), 89-93, (2020b).

Kogbetliantz, E., "Sur lesseries absolument sommables par la methods des moyannes arithmetiques", *Bull. des Sci. Math*., 49, 234-256, (1925).

Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, 1978.

Maddox, I. J., *Elements of functinal analysis*, Cambridge University Press, London, New York, 1970.

Malkowsky, E., and Rakočević, V., “An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness” *Zbornik radova*, (17), 143-234, (2000).

Mazhar, S. M., “On the Absolute summability factors of infinite series”, *Tohoku Math. J.,* 23, 433-451, (1971).

Mehdi, M. R., “Summability factors for generalized absolute summability I” *Proc. Lond. Math. Soc*., 10, 180-200, (1960).

Peyerimhoff, A. “Summierbarkeitsfactoren für absolut Cesàro summierbareReihen”, *Math. Z*., 59, 417-424, (1954).

Rhoades, B. E. and Savas, E., “A characterization of absolute summability factors”, *Taiwan. J. Math*., 8, 453-465, (2004).

Sarıgöl, M. A., “On two absolute Riesz summability factors of infinite series”, *Proc. Amer. Math. Soc*., 118, 485-488, (1993a).

Sarıgöl, M. A. “A note on summability”, *Stud. Sci. Math. Hung*., 28, 395- 400, (1993b).

Sarıgöl, M. A. and Bor, H., “Characterization of absolute summability factors”, *J. Math. Anal. Appl*., 195, 537-545, (1995).

Sarıgöl, M. A., “On local properties of factored Fourier series”, *App. Math. Comput.*, 216, 3386-3390, (2010).

Sarıgöl, M. A., “Matrix transformatins on fields of absolute weighted mean summability”, *Studia Sci. Math. Hungar*., 48 (3), 331-341, (2011a).

Sarıgöl, M. A., “Characterization of general summability factors and applications”, *Comput. Math. Appl.,* 62, 2665-2670, (2011b).

Sarıgöl, M. A., “Extension of Mazhar’s theorem on summability factors”, *Kuwait J. Sci.,* 42(2), 28-35, (2015).

Sarıgöl, M. A., “Spaces of Series Summable by Absolute Cesàro and matrix operators”, *Comm. Math Appl*., 7(1), 11-22, (2016).

Sarıgöl, M. A. "On absolute factorable matrix summability methods" *Bull. Math. Anal. Appl.*, 8(1), 1-5, (2016).

Sulaiman, W.T., "On summability factors of infinite series", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 115, 313-317, (1992).

Thorpe, B., "Matrix transformations of Cesàro summable series", *Acta Math. Hung.,* 48(3-4), 255-265, (1986).

Zygmund, A., *Trigonometric Series*, 2nd edn., vol. 1. Cambridge University, 1959.