

EC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

JÜRİ ÜYELERİ

Doç.Dr.Hüseyin AYDIN

Yrd.Doç.Dr.Abdullah KOPUZLU

Yrd.Doç.Dr.Ahmet KÜÇÜK

[Handwritten signatures of the jury members]

28.07.2000 tarihinde 15/134 kararla kurulan jürimiz iş bu Y.Lisans
tezini 19.09.2000 tarihinde kabul etmiştir.

96447

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALEXANDER POLİNOMLARI

Serpil KONYALIOĞLU

Yönetici : Yrd.Doç.Dr. Abdullah KOPUZLU

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

İlk olarak J. W. Alexander ve K. Reidemeister tarafından çalışılan Alexander polinomlarının temel özellikleri incelendi. Bir keyfi düğüm için Alexander polinomunun hesabı için Fox'un bir serbest grubun, grup halkasındaki türev tanımı ile ifade edilen bir metot tanımladık. Ayrıca bazı düğümlerin Alexander polinomları verildi.



SUMMARY

Basic properties of Alexander polynomials is examined , which was studied firstly by J.W. Alexander and K.Reidemeister. We have described a method to calculate the Alexander polynomial for an arbitrary knot, which is based on the theory of Fox derivation in the group ring of a free group. Also, Alexander polynomials of some knots are given.



TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanmasında benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Abdullah KOPUZLU 'ya şükran ve saygılarımı sunarım.

Serpil KONYALIOĞLU

Temmuz 2000

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
 1. GİRİŞ	 1
 2. ÖN BİLGİLER	
2.1 Grup	2
2.2 Düğüm	4
2.3 Düğüm Grubu	7
 3. ALEXANDER MATRİSİ	
3.1 Serbest Türev	12
3.2 Alexander Matrisi	12
3.3 Alexander Matrisinin İdeali	14
3.4 Alexander Polinomları	14
3.5 Bazı Dğümlerin Alexander Polinomları	16
 4. ALEXANDER POLİNOMLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ	
4.1 Alexander Polinomunun Özellikleri	26
 KAYNAKLAR	 29

1. GİRİŞ

Düğüm sabitlerinin en kullanışlılarından biri Alexander polinomudur. J.W. Alexander tarafından 1928 'de [1] bulunan Alexander polinomu düğüm teorisinin köşe taşlarından birini oluşturur. Aslında polinom Alexander etiketini taşımasına rağmen, aynı zaman zarfında Reidemeister [9] tarafından Laurent polinomu (L- polinomu) olarak da ifade edilmiştir.

Alexander polinomu ve onun düğüm teorisindeki yeri geniş bir şekilde çalışılarak tamamlandı. Alexander polinomunun düğümün topolojik özellikleriyle yakından bağlantılı olduğu bulundu. Seifert 1934'de Alexander polinomunun karakteristik özelliklerini ispatlamak için geometrik bir metod verdi [11]. Diğer bir metot bir G grubunun sonlu temsili yardımıyla elde edilen Alexander matrisidir [6].

Tezin ikinci bölümünde düğüm kavramı tanıtılarak , daha sonraki bölümler için gerekli olan bilgiler verilmiştir.

Bu tezin üçüncü bölümünde bir düğümün Alexander polinomunun nasıl hesaplanacağı sorusuna cevap aranarak bazı düğümlerin Alexander polinomu hesaplanmıştır.

Son bölümde Alexander polinomunun temel özellikleri verildi.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Grup

2.1.1.Tanım : $(G, \circ)$ bir cebirsel yapı olsun. $(G, \circ)$, aşağıdaki şartları sağlıyorsa G 'ye $(\circ$ işlemine göre) grup denir.

G1) Her $a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ 'dir.(Birleşme özelliği)

G2) Her $a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.(Özdeş eleman varlığı)

G3) Her $a \in G$ için $a \circ a' = a' \circ a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır.(Ters eleman varlığı)

2.1.2.Tanım : $(G, \circ)$ grubundaki , $\circ$ ikili işlemi değişmeli ise yani her $a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ oluyorsa bu gruba " değişmeli " (abel veya komütatif) grup denir.

2.1.3.Tanım : G kümesinin elemanlarının sayısı sonlu ve n ise $(G, \circ)$ grubuna sonlu grup denir. G 'nin elemanları sonsuz ise $(G, \circ)$ grubuna sonsuz grup denir.

2.1.1.Örnek : $G = \{ -1, 1 \}$ kümesi için $\circ$ işlemi adi çarpma işlemi olarak alınırsa, ikinci mertebeden bir gruptur.

2.1.2.Örnek : $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi , $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi adi toplama işlemine göre birer değişmeli sonsuz grup teşkil ederler.

2.1.4.Tanım : G herhangi bir grup, $\mathbb{Z}$ tamsayılar grubu ve $v : G \rightarrow \mathbb{Z}$ olsun. Bu v fonksiyonları sonlu sayıdaki $g \in G$ hariç $v(g) = 0$ olsun. Bu v dönüşümlerinin kümesi ;

$$ZG = \{ v : v : G \rightarrow \mathbb{Z} \text{ sonlu sayıda } g \in G \text{ hariç } v(g) = 0 \}$$

şeklinde yazılır. Bu küme üzerinde toplama ve çıkarma aşağıdaki şekilde tanımlanırsa ZG ye grup halkası denir.

$v_1, v_2 \in ZG$ için

$$(v_1 + v_2)g = v_1g + v_2g$$

$$(v_1 v_2)g = \sum_{h \in G} (v_1(h)) \cdot (v_2(h^{-1}(g)))$$

olur.

ZG grup halkasının elemanları G grubunun elemanlarının bütün sonlu lineer

$$\sum_g n_g g$$

kombinasyonlarında ibarettir. ZG nin iki elemanının eşit olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen elemanlarının eşit olmasıdır. Yani ,

$$\sum_g n_g g = \sum_g m_g g$$

olması için gerek ve yeter şart tüm g 'ler için $n_g = m_g$ olmasıdır. Eğer G değişmeli grup ise ZG grup halkasında değişmelidir.

2.1.7.Tanım : $F_n = Z \times Z \times \dots \times Z$ serbest çarpımına rankı n olan serbest grup denir.

2.1.8.Tanım : ZG grup halkasının abel olması için gerek ve yeter şart G grubunun abel olmasıdır.

2.1.9.Tanım : G keyfi bir grup ve $\varepsilon : G \rightarrow \langle e \rangle$ aşıkâr homomorfizm olmak üzere $\varepsilon : ZG \rightarrow Z$ ye karşılık gelen halka homomorfizmi (augmentation homomorfizmi)

$$\varepsilon \left[\sum_{g \in G} n_g g \right] = \sum_{g \in G} n_g$$

ile tanımlanır. ε halka homomorfizminin çekirdeği ΔG ile gösterilir. Buna augmentation ideal denir. ΔG nin her elemanı

$$\sum_{g \neq e} n_g (g - e)$$

formunda sonlu toplam olarak bir tek temsile sahiptir.

2.2 Düzüm

2.2.1.Tanım : X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ fonksiyonu bir homeomorfizm ise, f ye X 'den Y içine bir yerleştirme denir.[4]

2.2.2.Tanım : $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ olmak üzere

$$S^{n-1} = \{ x : x \in R^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \}$$

altuzayına $(n-1)$ -boyutlu küre ,

$$D^n = \{ x : x \in R^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \}$$

altuzayına da n -boyutlu yuvar denir. [10]

2.2.3.Tanım : Eğer $K \subset S^3$ (veya R^3) bir S^1 küresine homeomorf ise K ya S^3 de bir düğüm denir. Yani S^1 küresinin (çemberinin) R^3 veya S^3 küresi içine yerleştirilmesine bir düğüm denir.

2.2.4.Tanım : Eğer $L \subset S^3$ (veya R^3) bir veya birden fazla ayrık S^1 kürelerinin $S^1_1 \cup S^1_2 \cup \dots \cup S^1_n$ şeklinde bir birleşimine homeomorf ise L ye S^3 içinde bir halka denir. Bu durumda düğüm bir bileşenli bir halkadır.

2.2.5.Tanım : K_1 ve K_2 düğümleri verilsin. Eğer $h(K_1) = K_2$ olacak şekilde $h: S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K_1 ve K_2 ye denk düğümler denir. [3,10]

Bu tanım S^3 uzayındaki düğümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Bu denklik bağıntısı söz konusu kümeyi denklik sınıflarına ayırır. Her bir denklik sınıfına bir düğüm tipi denir.

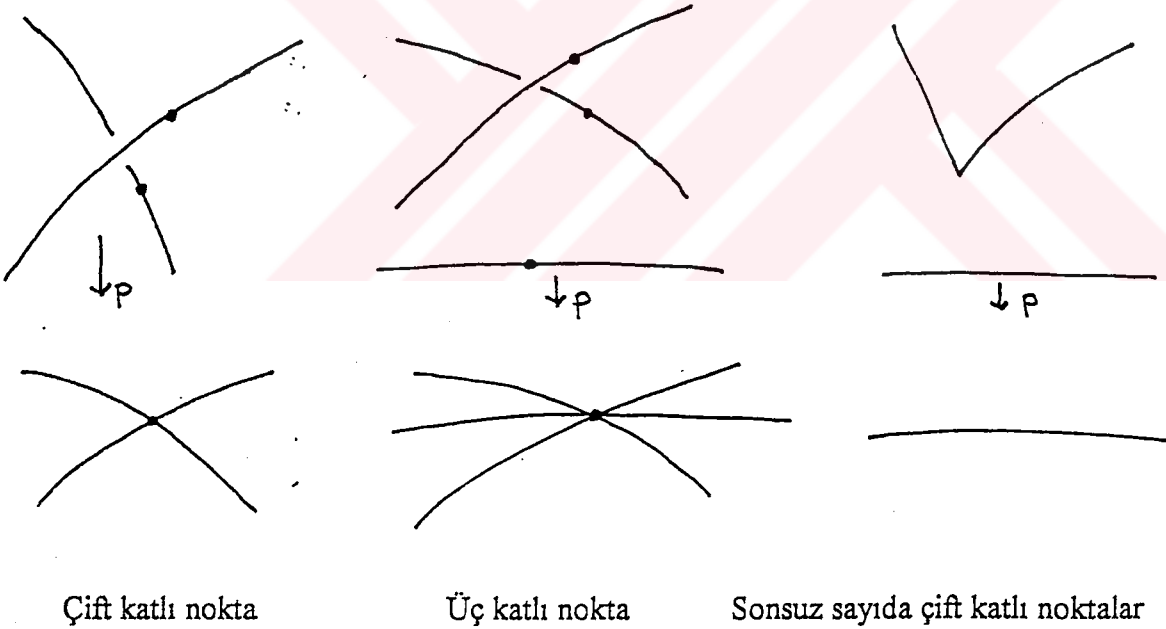
2.2.6.Tanım : Bir K düğümü S^1 veya R^3 de bir basit kapalı poligona denk ise bu düğüme uslu düğüm denir. Aksi taktirde bu düğüme vahşi düğüm denir.

2.2.7.Tanım : K , S^1 küresi ile aynı düğüm tipine sahipse, K ya aşikar düğüm denir.

2.2.8.Tanım : K , R^3 içinde poligonal bir düğüm ve $p:R^3 \rightarrow R^3$, $p(x,y,z)=(x,y,0)$ ile tanımlı izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer,

- i. $p(K)$ nun sadece sonlu sayıda çift katlı noktası varsa
- ii. K nun hiçbir köşesi bir katlı noktaya gitmiyorsa

K ya R^3 içinde regüler durumdadır denir.



Şekil 2.1

2.2.9.Tanım : K poligonal düğümü R^3 uzayı içinde regüler durumda ise $p:R^3 \rightarrow R^3$ izdüşüm fonksiyonu altında K nun görüntüsüne, yani $p(K)$ ya K nun bir regüler diyagramı denir.

K poligonal düğümünün bir regüler diyagramında

- i. Sadece sonlu sayıda çift katlı nokta vardır, çok katlı nokta yoktur
- ii. Çift katlı noktalar K nın köşesinin bir görüntüsü değildir.

2.2.10.Tanım : K bir poligonal düğüm, $p(K)$, K nın bir regüler diyagramı olsun. $p(K)$ nın çift katlı noktalarına K düğümünün geçit noktaları denir.

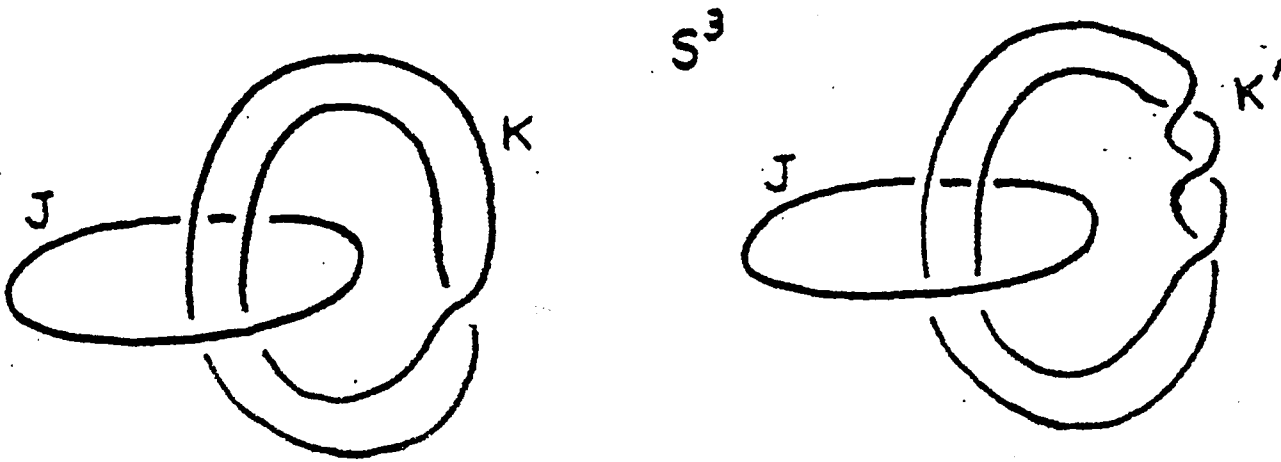
2.2.11.Teorem : Eğer S^3 'te iki K_1 ve K_2 düğümleri denk ise bunların S^3-K_1 ve S^3-K_2 tümleyenleri homeomorftur. [7]

Tümleyenleri homeomorf olan düğümlerin denk olup olmadığı henüz bir tahmin olarak verilmiştir.

2.2.12.Tahmin : S^3 'de iki uslu düğüm homeomorf tümleyenlere sahipse bu düğümler denktir. [10]

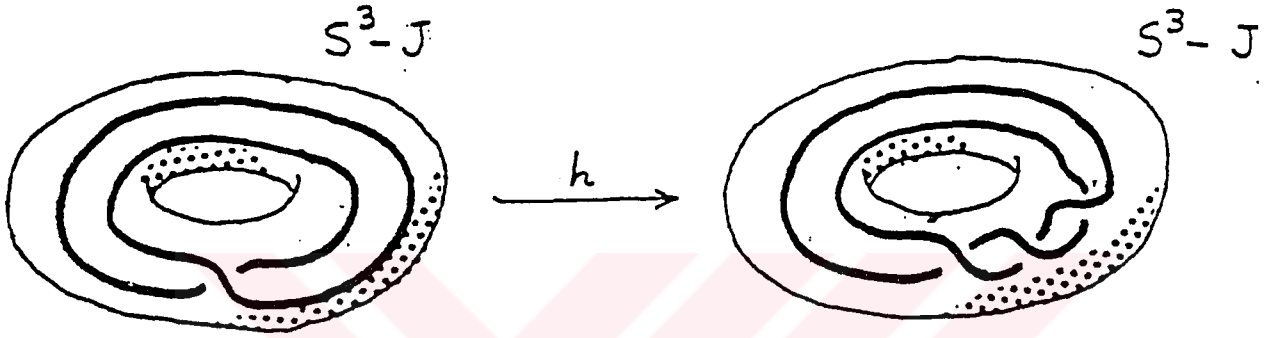
Halkalar için bu tahmin doğru değildir. Tümleyenleri homeomorf olduğu takdirde denk olmayan iki halka aşağıdaki örnekte verilmiştir.

2.2.13.Örnek :



Şekil 2.2

Şekil 2.2 'deki $L_1 = J \cup K$ ve $L_2 = J \cup K'$ halkaları denk olmayan halkalardır. Bununla beraber bunların tümleyenleri homeomorftur. $S^3 - J$, $S^1 \times \text{int} D^2$ ile homeomorftur. Burada D^2 , R^2 'de 2-boyutlu yuvardır. $h(z, w) = (z, zw)$, $h : S^3 - J \rightarrow S^3 - J$ burulma homeomorfizminin uygulanmasıyla K düğümü K' düğümüne taşınır. Böylece $S^3 - L_1$ in $S^3 - L_2$ ye homeomorf olduğu görülür. [10]

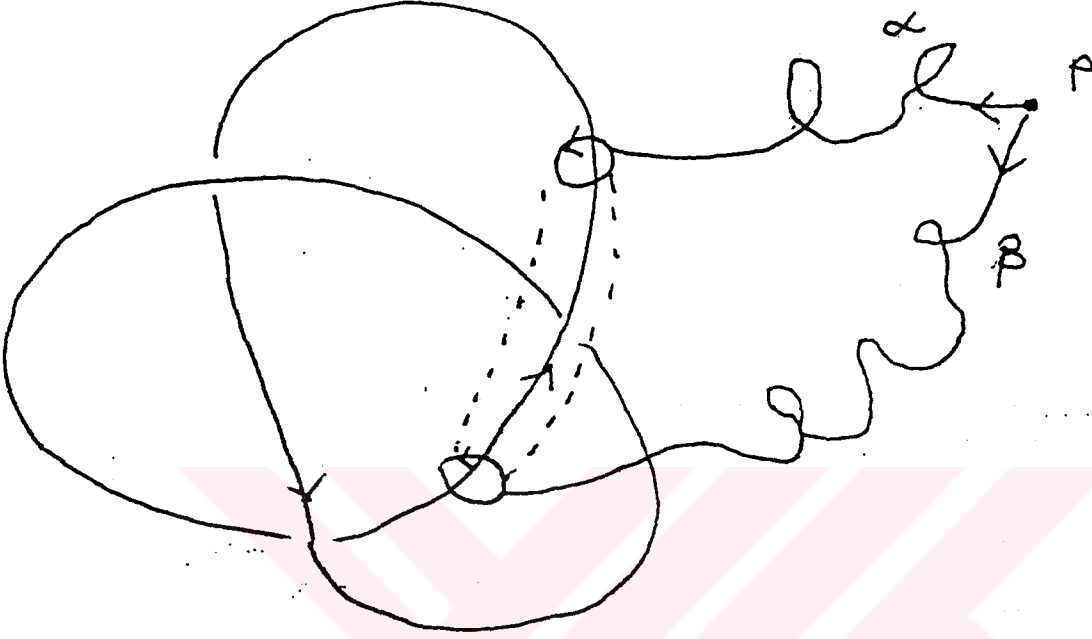


Şekil 2.3

2.3 Düğüm Grubu

Bir K düğümünün önemli bir sabiti onun grubudur. Bir düğümün grubu onun $S^3 - K$ tümleyeninin esas grubudur. Yani $G = \Pi_1(S^3 - K)$ dir. K düğümünün tünel komşuluğunu $V = V(K)$ ile gösterelim. Burada $S^3 - K$ yerine $R^3 - K$, $\overline{S^3 - V(K)}$ veya $\overline{R^3 - V(K)}$ alınabilir. Bu uzayların her birinin esas grupları aşikâr olarak izomorftur. [3]

2.3.1. Tanım : K , R^3 içinde bir düğüm ve $R^3 - K$ K 'nın R^3 içindeki tümleyeni olsun. $R^3 - K$ uzayı için birinci homotopi grubu, $p \in R^3 - K$ olmak üzere p den başlayıp yine p de biten eğrilerin homotopi sınıflarının aşağıdaki çarpma işlemi altında oluşturdukları ve genellikle abel olmayan bir gruptur.



Şekil 2.4

$$\alpha \sim \beta, [\alpha].[\beta] = [\alpha \beta]$$

2.3.2.Tanım : R^3-K 'nın birinci homotopi grubuna K düğümünün grubu denir ve $\Pi_1(R^3-K)$ ile gösterilir.

Bir düğümün esas grubunun temsilini elde etmek için basit bir işlem Wirtinger tarafından verilmiştir.

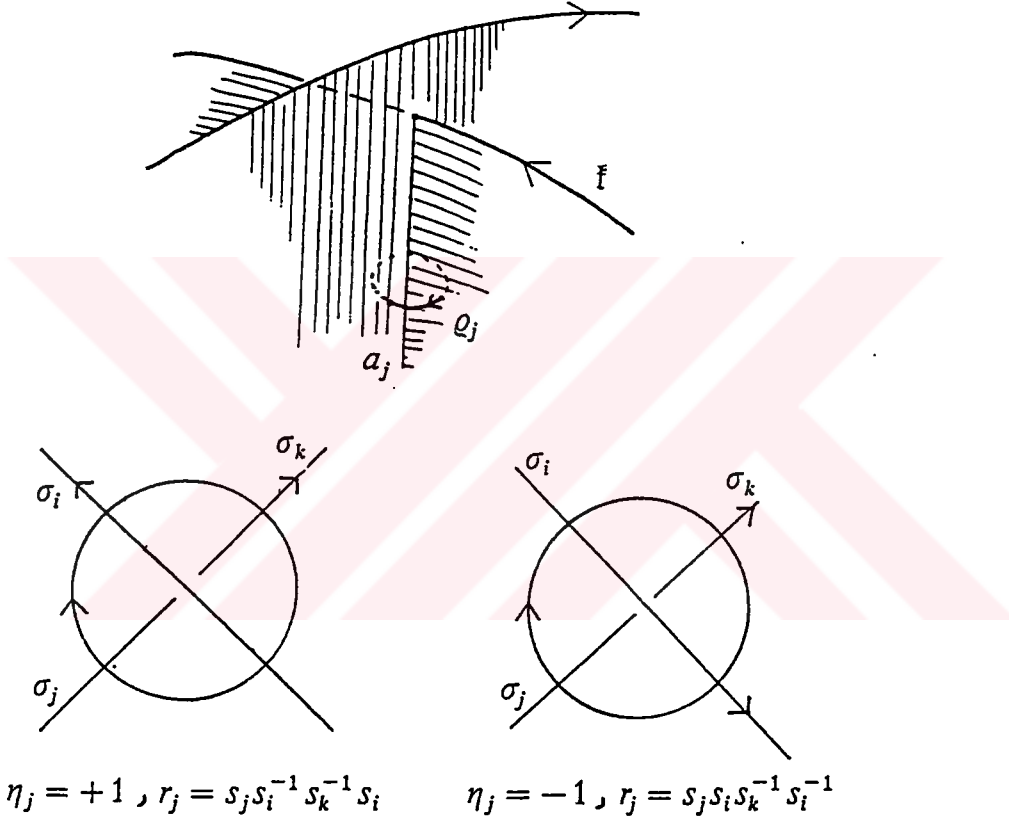
2.3.3.Teorem : (Wirtinger Temsili) $\sigma_i, i = 1,2,...,n$ bir K düğümünün bir regüler izdüşümünün üst yayları olsun. Bu durumda K düğüm grubunun,

$$\sigma = \Pi_1(R^3-K) = \langle s_1, ..., s_n; s_1, ..., s_n \rangle$$

Wirtinger temsili bulunur. σ_i yayları s_i doğuraylarına karşılık gelir. Şekil 2.5 deki η_j karakteristiği

$$r_j = s_j s_i^{-\eta_j} s_k^{-1} s_i^{\eta_j}$$

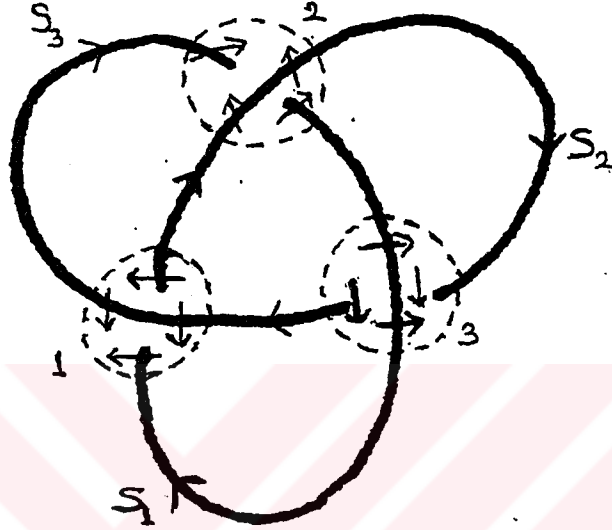
bağıntısını tanımlamaya yardımcı olur. [3]



Şekil 2.5

2.3.4.Sonuç : K bir düğüm ve $\langle s_1, s_2, \dots, s_n; r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$, G nin bir Wirtinger temsili olsun. Bu durumda her bir r_j bağıntısı diğer r_i ($i \neq j$) bağıntılarının bir sonucudur. Bu sonuçtan dolayı G grubunun Wirtinger temsili bulunurken r_i bağıntılarından birini Tietze Teoreminden dolayı gözönüne almayabiliriz. [6]

2.3.5.Örnek : Şekil 2.6 da görülen yonca yaprağı düğümünün (3_1) grubunun Wirtinger temsilini bulalım.



Şekil 2.6

1. Geçit : $s_1 s_3^{-1} s_1^{-1} s_2 = 1$
2. Geçit : $s_3 s_2^{-1} s_3^{-1} s_1 = 1$
3. Geçit : $s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} s_3 = 1$

2.3.4.Sonuç dan dolayı üçüncü bağıntıyı yok edelim. Birinci bağıntıdan s_2 çekilir ve ikinci bağıntıda yerine konursa, yani,

$$s_2 = s_1 s_3 s_1^{-1}$$

ve

$$s_2^{-1} = s_1 s_3^{-1} s_1^{-1}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa ,

$$s_3 s_1 s_3^{-1} s_1^{-1} s_3^{-1} = 1$$

bulunur. Her iki taraf s_1^{-1} ile çarpıldığında ,

$$s_1 s_3 s_1 s_3^{-1} s_1^{-1} s_3^{-1} = 1$$

elde edilir. Buradan ,

$$s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3$$

yazılabilir. Böylece ,

$$\Pi_1(S^3-K) = \langle s_1, s_3, s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3 \rangle$$

temsili bulunur.



3. ALEXANDER MATRİSİ

Bu bölümde Alexander polinomunu tanıtır bazı düğümlerin Alexander polinomlarını vereceğiz.

3.1.Serbest Türev

Bu kısımda , $F (\{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ serbest grubunun $ZF (\{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ grup halkası üzerindeki basit türevi tanımlayacağız.

$\prod_{s=1}^k x_{i_s}^{\varepsilon_s}$, F serbest grubunda keyfi bir kelime olsun. Burada $\varepsilon_s = +1$ veya $\varepsilon_s = -1$ dir. Her

j için serbest türev,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\prod_{s=1}^k x_{i_s}^{\varepsilon_s} \right] = \sum_{l=j} (-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon_l - 1)} \prod_{s < l} x_{i_s}^{\varepsilon_s} x_{i_l}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_l - 1)}$$

şeklinde tanımlanır.[5,3]

3.1.1.Örnek : $\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-1} x_2 x_3 x_1 x_1 x_2)$ türevini bulalım.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-1} x_2 x_3 x_1 x_1 x_2) = -x_1^{-1} + x_1^{-1} x_2 x_3 + x_1^{-1} x_2 x_3 x_1$$

olarak bulunur.

3.2.Alexander Matrisi

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n ; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$$

bir G grubunun sonlu bir temsili olsun. O halde bu temsilin Alexander matrisi ,

$$\left[\underline{a} \left[\theta \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right] \right]$$

şeklindedir. Buradaki θ ,

$$ZF(\{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}) \rightarrow Z\langle x_1, x_2, \dots, x_n; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$$

halka homeomorfizmini ve $\underline{a}$,

$$Z\langle x_1, \dots, x_j, \dots, x_n \rangle \rightarrow Z(\langle x_1, x_2, \dots, x_n; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle / \langle x_1, x_2, \dots, x_n; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle')$$

halka homeomorfizmini gösterir.

Açık bir şekilde görülüyor ki bu matris bir G grubu için tercih edilen özel grup temsiline bağlıdır.

3.2.1.Örnek : $k > 1$ pozitif bir tamsayı ve $k_1, k_2 > 1$ sayıları da $k = k_1.k_2$ olacak şekilde aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. Bu durumda ,

$$\langle z; z^k \rangle \cong \langle x, y; x^{k_1}, y^{k_2}, x^{-1}y^{-1}xy \rangle = G$$

olsun. İlk grup temsili Alexander matrisi ,

$$[1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{k-1}]$$

1x1 matrisidir. İkinci grup temsili Alexander matrisi ,

$$\begin{bmatrix} 1+x+\dots+x^{k_1-1} & 0 \\ 0 & 1+y+\dots+y^{k_2-1} \\ x^{-1}y^{-1}-x^{-1} & x^{-1}y^{-1}x-x^{-1}y^{-1} \end{bmatrix}$$

3x2 matrisidir. Bu iki matrisin birbiri ile ilgisi açık değildir.

İzomorf grup temsillerinin denk Alexander matrislerine sahip olmasını Alexander matrislerinin denkliği olarak tanımlarız.

3.2.2. Teorem : (Alexander Matrisinin Tekliği) Bir G grubu iki sonlu temsile sahip olsun. Bu durumda bu grup temsillerinin Alexander matrisleri denktir. [3]

Tietze Teoreminden [6], aynı grubun iki sonlu temsilinden birine Tietze dönüşümlerinin uygulanması ile diğerinin elde edileceği biliniyor. Buradan bu temsillere karşılık gelen Alexander matrislerinin birinden hareketle elementer matris dönüşümleri kullanılarak diğer matris elde edilebilir.

3.3 Alexander Matrisinin İdeali

A matrisi birim elemanlı, değişmeli bir R halkasından alınan elemanlardan oluşan $m \times n$ tipinde Alexander matrisi olsun. A matrisinin $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki tüm alt matrislerinin determinantları R de bir ideal oluşturur. Bu ideale Alexander matrisinin elementer ideali denir ve $E(A)$ ile gösterilir. Burada,

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow E(A) = (1) \\ m < n-1 &\Rightarrow E(A) = (0) \end{aligned}$$

olur.

3.3.1. Teorem : (Elementer İdeallerin Denkliği) A_1 ve A_2 denk Alexander matrisleri olsun. Bu durumda $E(A_1) = E(A_2)$ olur.

3.4 Alexander Polinomları

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n ; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$$

bir G grubunun sonlu bir temsili olsun. Bu G grubunun Alexander matrisi ;

$$a_{ij} = \left[\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right]_{x_1 = \dots = x_n = t}$$

olmak üzere

$$A = [a_{ij}]$$

şeklindedir.

Bu grubun Alexander matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} & & 0_{n,1} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{\substack{x_1=x_2=\dots=x_n=t \\ i,j \leq n-1}}$$

matrisine denktir. G grubunun elementer ideali $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ halkasında

$$\det \left[\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)_{x_1=\dots=x_n=t} \right], \quad i, j \leq n-1$$

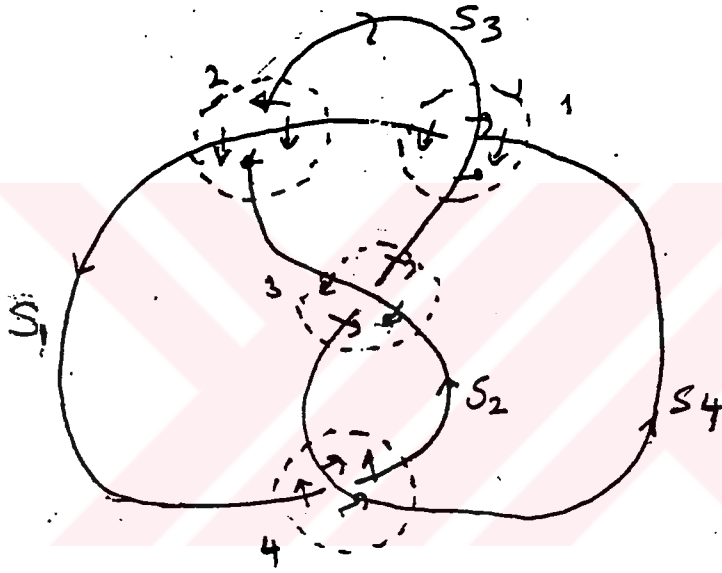
elemanı ile gerilen esas idealdir. Bu idealin gereni $\Delta(t)$, $\Delta(t) \neq 0$ iken, tamsayı katsayılı ve sıfır olmayan pozitif terimli bir polinomdur. Bu polinoma G grubunun Alexander polinomu denir. G bir K düğümünün grubu ise G nin Alexander polinomuna K düğümünün Alexander polinomu adı verilir.

Denk düğümlerin Alexander polinomlarının denkliği elementer ideallerin denkliğinden çıkar. Böylece eğer iki düğüm denk Alexander polinomlarına sahip değilse bu düğümler denk olamaz.

3.4.1.Örnek : $\langle x_1 ; - \rangle$ düğüm grubu ile verilen aşıkâr düğümün Alexander matrisi 1×1 tipindeki $[0]$ matrisidir. Karşılık gelen elementer ideali 1 ve Alexander polinomu 1 dir.

3.5 Bazı Düğümlerin Alexander Polinomları

3.5.1.Örnek : Sekiz şekilli düğümün Alexander matrisini ve Alexander polinomunu bulalım.



Şekil 3.1

Şekil 3.1 deki düğümün diyagramından,

$$1. \text{ geçit için : } s_3 s_4 s_3^{-1} s_1^{-1} = 1$$

$$2. \text{ geçit için : } s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} = 1$$

$$3. \text{ geçit için : } s_3 s_2 s_4^{-1} s_2^{-1} = 1$$

$$4. \text{ geçit için : } s_1 s_4 s_2^{-1} s_4^{-1} = 1$$

geçitlerinden

$$R_1 = s_3 s_4 s_3^{-1} s_1^{-1}$$

$$R_2 = s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1}$$

$$R_3 = s_3 s_2 s_4^{-1} s_2^{-1}$$

$$R_4 = s_1 s_4 s_2^{-1} s_4^{-1}$$

Bağıntılarını yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial R_1}{\partial s_1} = -s_3 s_4 s_3^{-1} s_1^{-1} & \frac{\partial R_1}{\partial s_2} = 0 & \frac{\partial R_1}{\partial s_3} = 1 - s_3 s_4 s_3^{-1} & \frac{\partial R_1}{\partial s_4} = s_3 \\ \frac{\partial R_2}{\partial s_1} = 1 - s_1 s_2 s_1^{-1} & \frac{\partial R_2}{\partial s_2} = s_1 & \frac{\partial R_2}{\partial s_3} = -s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} & \frac{\partial R_2}{\partial s_4} = 0 \\ \frac{\partial R_3}{\partial s_1} = 0 & \frac{\partial R_3}{\partial s_2} = +s_3 - s_3 s_2 s_4^{-1} s_2^{-1} & \frac{\partial R_3}{\partial s_3} = 1 & \frac{\partial R_3}{\partial s_4} = -s_3 s_2 s_4^{-1} \\ \frac{\partial R_4}{\partial s_1} = 1 & \frac{\partial R_4}{\partial s_2} = -s_1 s_4 s_2^{-1} & \frac{\partial R_4}{\partial s_3} = 0 & \frac{\partial R_4}{\partial s_4} = s_1 - s_1 s_4 s_2^{-1} s_4^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \right)^{\varphi\psi} = -1 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_2} \right)^{\varphi\psi} = 0 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_3} \right)^{\varphi\psi} = 1-t & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_4} \right)^{\varphi\psi} = t \\ \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_1} \right)^{\varphi\psi} = 1-t & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_2} \right)^{\varphi\psi} = t & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_3} \right)^{\varphi\psi} = -1 & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_4} \right)^{\varphi\psi} = 0 \\ \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_1} \right)^{\varphi\psi} = 0 & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_2} \right)^{\varphi\psi} = t-1 & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_3} \right)^{\varphi\psi} = 1 & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_4} \right)^{\varphi\psi} = -t \\ \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_1} \right)^{\varphi\psi} = 1 & \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_2} \right)^{\varphi\psi} = -t & \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_3} \right)^{\varphi\psi} = 0 & \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_4} \right)^{\varphi\psi} = t-1 \end{array}$$

bulunur. Böylece,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-t & t \\ 1-t & t & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & -t \\ 1 & -t & 0 & t-1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

matrisi elde edilir.

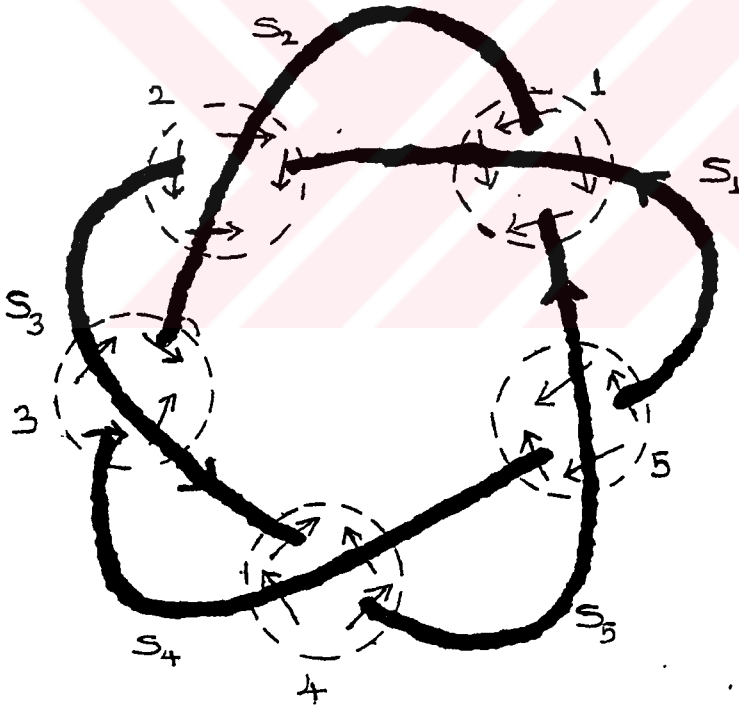
$$\Delta_{11} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ t-1 & 1 & -t \\ -t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

altmatrisinden,

$$|\Delta_{11}| = 1 - 3t + t^2 = \Delta(t)$$

Alexander polinomu elde edilir.

Örnek 3.5.2 : 5_1 düğümünün Alexander matrisini ve Alexander polinomunu bulalım.



Şekil 3.2

Şekil 3.2 deki düğüm diyagramından,

$$1. \text{ geçit için : } s_1 s_3 s_1^{-1} s_2^{-1} = 1$$

$$2. \text{ geçit için : } s_2 s_1 s_2^{-1} s_3^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned}
3. \text{ geçit için} & : & s_3 s_2 s_3^{-1} s_4^{-1} &= 1 \\
4. \text{ geçit için} & : & s_4 s_3 s_4^{-1} s_5^{-1} &= 1 \\
5. \text{ geçit için} & : & s_5 s_4 s_5^{-1} s_1^{-1} &= 1
\end{aligned}$$

geitleri okunarak,

$$\begin{aligned}
R_1 &= s_1 s_3 s_1^{-1} s_2^{-1} & R_2 &= s_2 s_1 s_2^{-1} s_3^{-1} \\
R_3 &= s_3 s_2 s_3^{-1} s_4^{-1} & R_4 &= s_4 s_3 s_4^{-1} s_5^{-1} \\
R_5 &= s_5 s_4 s_5^{-1} s_1^{-1}
\end{aligned}$$

Bağıntıları bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1}{\partial s_1} &= 1 - s_1 s_3 s_1^{-1} & \frac{\partial R_1}{\partial s_2} &= -s_1 s_3 s_1^{-1} s_2^{-1} & \frac{\partial R_1}{\partial s_3} &= 0 & \frac{\partial R_1}{\partial s_4} &= 0 & \frac{\partial R_1}{\partial s_5} &= s_1 \\
\frac{\partial R_2}{\partial s_1} &= s_2 & \frac{\partial R_2}{\partial s_2} &= 1 - s_2 s_1 s_2^{-1} & \frac{\partial R_2}{\partial s_3} &= -s_2 s_1 s_2^{-1} s_3^{-1} & \frac{\partial R_2}{\partial s_4} &= 0 & \frac{\partial R_2}{\partial s_5} &= 0 \\
\frac{\partial R_3}{\partial s_1} &= 0 & \frac{\partial R_3}{\partial s_2} &= s_3 & \frac{\partial R_3}{\partial s_3} &= 1 - s_3 s_2 s_3^{-1} & \frac{\partial R_3}{\partial s_4} &= -s_3 s_2 s_3^{-1} s_4^{-1} & \frac{\partial R_3}{\partial s_5} &= 0 \\
\frac{\partial R_4}{\partial s_1} &= 0 & \frac{\partial R_4}{\partial s_2} &= 0 & \frac{\partial R_4}{\partial s_3} &= s_4 & \frac{\partial R_4}{\partial s_4} &= 1 - s_4 s_3 s_4^{-1} & \frac{\partial R_4}{\partial s_5} &= -s_4 s_3 s_4^{-1} s_5^{-1} \\
\frac{\partial R_5}{\partial s_1} &= -s_5 s_4 s_5^{-1} s_1^{-1} & \frac{\partial R_5}{\partial s_2} &= 0 & \frac{\partial R_5}{\partial s_3} &= 0 & \frac{\partial R_5}{\partial s_4} &= s_5 & \frac{\partial R_5}{\partial s_5} &= 1 - s_5 s_4 s_5^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \right)^{\varphi \psi} &= 1-t & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_2} \right)^{\varphi \psi} &= -1 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_3} \right)^{\varphi \psi} &= 0 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_4} \right)^{\varphi \psi} &= 0 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_5} \right)^{\varphi \psi} &= t \\
\left(\frac{\partial R_2}{\partial s_1} \right)^{\varphi \psi} &= t & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_2} \right)^{\varphi \psi} &= 1-t & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_3} \right)^{\varphi \psi} &= -1 & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_4} \right)^{\varphi \psi} &= 0 & \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_5} \right)^{\varphi \psi} &= 0 \\
\left(\frac{\partial R_3}{\partial s_1} \right)^{\varphi \psi} &= 0 & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_2} \right)^{\varphi \psi} &= t & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_3} \right)^{\varphi \psi} &= 1-t & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_4} \right)^{\varphi \psi} &= -1 & \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_5} \right)^{\varphi \psi} &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial R_4}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = t \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = 1-t \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = -1$$

$$\left(\frac{\partial R_5}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = -t \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = t \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = 1-t$$

ifadelerinden

$$A = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 & t \\ t & 1-t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1-t & -1 \\ -t & 0 & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}_{5 \times 5}$$

Alexander matrisi bulunur. Bu matrisin

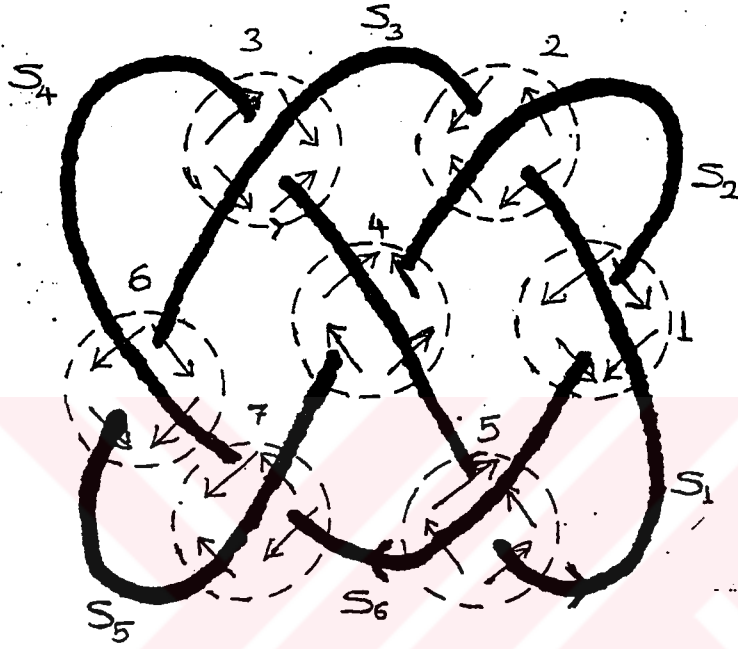
$$\Delta_{11} = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & t & 1-t & -1 \\ 0 & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}$$

altmatrisinin determinanı alınarak,

$$|\Delta_{11}| = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = \Delta(t)$$

Alexander polinomu elde edilir.

Örnek 3.5.3 : Şekildeki 7_4 düğümünün Alexander matrisini ve Alexander polinomunu bulalım.



Şekil 3.3

Şekil 3.3 deki düğümün diyagramından,

- | | | |
|----------|---|---------------------------------|
| 1. geçit | : | $s_2 s_1 s_2^{-1} s_3^{-1} = 1$ |
| 2. geçit | : | $s_2 s_3 s_7^{-1} s_3^{-1} = 1$ |
| 3. geçit | : | $s_3 s_4 s_3^{-1} s_4^{-1} = 1$ |
| 4. geçit | : | $s_1 s_7 s_4^{-1} s_7^{-1} = 1$ |
| 5. geçit | : | $s_1 s_2 s_1^{-1} s_6^{-1} = 1$ |
| 6. geçit | : | $s_4 s_5 s_6^{-1} s_5^{-1} = 1$ |
| 7. geçit | : | $s_7 s_6 s_5^{-1} s_6^{-1} = 1$ |

geçitlerinden

$$R_1 = s_2 s_1 s_2^{-1} s_3^{-1} \quad R_2 = s_2 s_3 s_7^{-1} s_3^{-1}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= s_5 s_4 s_3^{-1} s_4^{-1} & R_4 &= s_1 s_7 s_4^{-1} s_7^{-1} \\
R_5 &= s_1 s_2 s_1^{-1} s_6^{-1} & R_6 &= s_4 s_5 s_6^{-1} s_5^{-1} \\
R_7 &= s_7 s_6 s_5^{-1} s_6^{-1}
\end{aligned}$$

bağıntıları bulunur. Buradan,

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} = s_2 \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_2} = 1 - s_2 s_1 s_2^{-1} \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_3} = -s_2 s_1 s_2^{-1} s_3^{-1} \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_4} = 0$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_5} = 0 \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_6} = 0 \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_7} = 0$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial s_1} = 0 \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_2} = 1 \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_3} = s_2 - s_2 s_3 s_7^{-1} s_3^{-1} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_4} = 0$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial s_5} = 0 \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_6} = 0 \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_7} = -s_2 s_3 s_7^{-1}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial s_1} = 0 \quad \frac{\partial R_3}{\partial s_2} = 0 \quad \frac{\partial R_3}{\partial s_3} = -s_5 s_4 s_3^{-1} \quad \frac{\partial R_3}{\partial s_4} = s_5 - s_5 s_4 s_3^{-1} s_4^{-1}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial s_5} = 1 \quad \frac{\partial R_3}{\partial s_6} = 0 \quad \frac{\partial R_3}{\partial s_7} = 0$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial s_1} = 1 \quad \frac{\partial R_4}{\partial s_2} = 0 \quad \frac{\partial R_4}{\partial s_3} = 0 \quad \frac{\partial R_4}{\partial s_4} = -s_1 s_7 s_4^{-1}$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial s_5} = 0 \quad \frac{\partial R_4}{\partial s_6} = 0 \quad \frac{\partial R_4}{\partial s_7} = s_1 - s_1 s_7 s_4^{-1} s_7^{-1}$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial s_1} = 1 - s_1 s_2 s_1^{-1} \quad \frac{\partial R_5}{\partial s_2} = s_1 \quad \frac{\partial R_5}{\partial s_3} = 0 \quad \frac{\partial R_5}{\partial s_4} = 0$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial s_5} = 0 \quad \frac{\partial R_5}{\partial s_6} = -s_1 s_2 s_1^{-1} s_6^{-1} \quad \frac{\partial R_5}{\partial s_7} = 0$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial R_6}{\partial s_1} = 0 & \frac{\partial R_6}{\partial s_2} = 0 & \frac{\partial R_6}{\partial s_3} = 0 & \frac{\partial R_6}{\partial s_4} = 1 \\
\frac{\partial R_6}{\partial s_5} = s_4 - s_4 s_5 s_6^{-1} s_5^{-1} & \frac{\partial R_6}{\partial s_6} = -s_4 s_5 s_6^{-1} & \frac{\partial R_6}{\partial s_7} = 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial R_7}{\partial s_1} = 0 & \frac{\partial R_7}{\partial s_2} = 0 & \frac{\partial R_7}{\partial s_3} = 0 & \frac{\partial R_7}{\partial s_4} = 0 \\
\frac{\partial R_7}{\partial s_5} = -s_7 s_6 s_5^{-1} & \frac{\partial R_7}{\partial s_6} = s_7 - s_7 s_6 s_5^{-1} s_6^{-1} & \frac{\partial R_7}{\partial s_7} = 0 &
\end{array}$$

türevleri elde edilir.

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{\partial R_1}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = t & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 1-t & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = -1 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = 0 \\
\left(\frac{\partial R_1}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = 0 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = 0 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = 0 &
\end{array}$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 1 \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = t-1 \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = -t$$

$$\left(\frac{\partial R_3}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = -t \quad \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = t-1$$

$$\left(\frac{\partial R_3}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = 1 \quad \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_3}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial R_4}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 1 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = -t$$

$$\left(\frac{\partial R_4}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_4}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = t-1$$

$$\left(\frac{\partial R_5}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 1-t \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = t \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial R_5}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = -1 \quad \left(\frac{\partial R_5}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial R_6}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_6}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_6}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_6}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = 1$$

$$\left(\frac{\partial R_6}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = t-1 \quad \left(\frac{\partial R_6}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = -t \quad \left(\frac{\partial R_6}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial R_7}{\partial s_1}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_7}{\partial s_2}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_7}{\partial s_3}\right)^{\varphi\psi} = 0 \quad \left(\frac{\partial R_7}{\partial s_4}\right)^{\varphi\psi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial R_7}{\partial s_5}\right)^{\varphi\psi} = -t \quad \left(\frac{\partial R_7}{\partial s_6}\right)^{\varphi\psi} = t-1 \quad \left(\frac{\partial R_7}{\partial s_7}\right)^{\varphi\psi} = 1$$

ifadelerinden,

$$A = \begin{pmatrix} t & 1-t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & -t & t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & t-1 \\ 1-t & t & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & t-1 & 1 \end{pmatrix}_{7 \times 7}$$

Alexander matrisi elde edilir. Bu matrisin herhangi bir Δ_{ij} minörünü olan

$$\Delta_{22} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -t & 0 & 0 & t-1 \\ 1-t & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t-1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & t-1 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

altmatrisi alınır, bu matrisin determinantından

$$|\Delta_{11}| = 4t^2 - 7t + 4$$

Alexander polinomu bulunur.

4. ALEXANDER POLİNOMLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ

4.1 Alexander Polinomlarının Özellikleri

Bu bölümde Alexander polinomunun bir kaç önemli özelliğini vereceğiz.

4.1 Teorem: Eğer K bir düğüm ise $\Delta_K(1) = 1$ dir.

Alexander polinomu düğümlerinin (veya halkaların) global sınıflandırma problemine nazaran özellikle kullanışlıdır. Bununla beraber tersine çevrilebilirlik ve ayna görüntüsü ile ilgili lokal problemlerde kuvvetli bir sabit değildir.

4.2 Teorem: K bir düğüm olsun.

i. Eğer $-K$, K üzerindeki bir yönlendirmenin tersine çevrilmesiyle K düğümünden elde edilen düğüm ise

$$\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t)$$

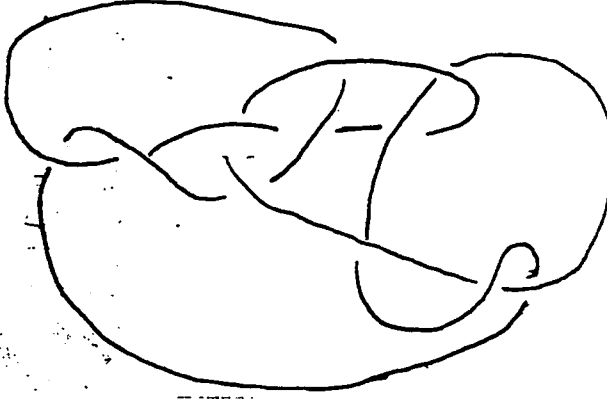
olur.

ii. Eğer K^* , K düğümünün ayna resmi ise

$$\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t)$$

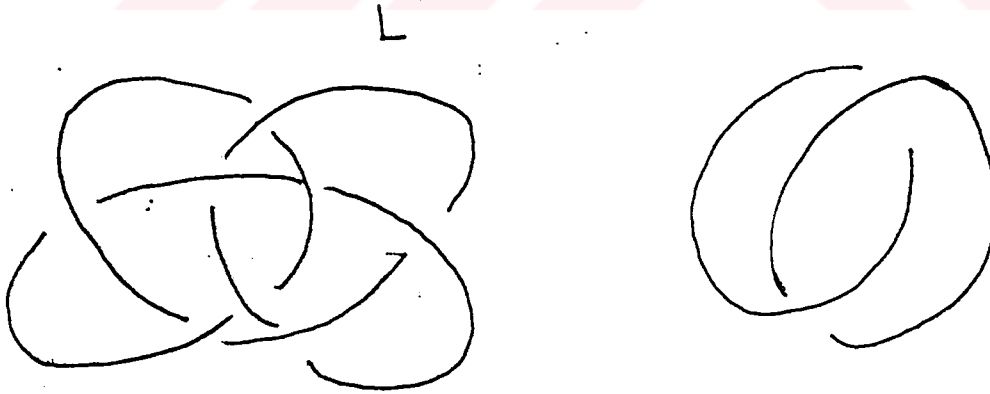
olur.

Aşikâr düğümün Alexander polinomunun 1 olduğunu biliyoruz. Bununla beraber Alexander polinomu 1 olan her düğüm aşikâr düğüm değildir. Yani Alexander polinomu 1 olan aşikâr olmayan düğümlerde vardır. Örneğin Şekil 4.1 deki Kinoshita-Terasako düğümü böyle düğümlerden biridir.



Şekil 4.1

4.3.Tanım : Hiç bir ortak noktası bulunmayan iki halkanın birleşimi olan bir L halkasının regüler diyagramına split denir.(Şekil 4.2) Bir split regüler diyagrama sahip olan bir L halkasına da split halka denir.



3- bileşenli split halka

Şekil 4.2

4.4.Teorem : L bir split halka ise $\Delta_L(t) = 0$ olur.

4.5.Teorem : $K_1 \# K_2$, K_1 ve K_2 düğümlerinin bağlantılı toplamı ise

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1} \cdot \Delta_{K_2}$$

olur.



KAYNAKLAR

- [1] Alexander, J.W., 1928, Topological invariants of knot and links, Trans. Amer. Math. Soc., 30, 275-306
- [2] Bayraktar, M., 1988, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum
- [3] Burde, G. and Zieschang, H., 1985, Knots, Walter de Gruyter, Berlin-New York
- [4] Bülbül, A., 1994, Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon
- [5] Fox, R.H., 1953, Free differential calculus I Derivation in the free group ring, Math. Ann., 57, 547-560
- [6] Fox, R.H. and Crowell, R.H., 1963, Introduction to Knot Theory, Blaisdell Publishing Company, New York
- [7] Murasugi, K., 1996, Knot Theory and Its Application, Birkhauser, Boston
- [8] Reidemeister, K., 1928, Über Knoten gruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 6, 56-64
- [9] Reidemeister, K. and Schumann, H.G., 1934, L-polynome von Verkettungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 10, 256-262
- [10] Rolfsen, D., 1976, Knots and Links, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware
- [11] Seifert, H., 1934, Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann., 110, 571-592