

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BİR BARIYERLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN DURAĞAN
KARAKTERİSTİKLERİ İÇİN MOMENT TEMELLİ YAKLAŞIK FORMÜLLER**

DOKTORA TEZİ

Büşra ALAKOÇ

TEMMUZ 2025

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

“Bir Bariyerli Rasgele Yürüyüş Sürecinin Durağan Karakteristikleri İçin Moment Temelli Yaklaşık Formüller” başlıklı bu çalışma KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı kapsamında tez çalışması olarak hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmasının hazırlanma süreci boyunca, tez konusunun belirlenmesinden sonuç aşamasına kadar, her türlü yol gösterici olan, bilgi birikimleri ile çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, beraber çalışmaktan ve öğrencileri olmaktan her zaman gurur duyduğum danışman hocalarım Prof. Dr. Tülay YAZIR ve Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU (KHANIYEV)’e sonsuz teşekkür eder, saygı ve minnetlerimi sunarım.

Ayrıca destek ve yardımlarıyla yanımda olan Dr. Öğr. Üyesi Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK’a, yapıcı eleştirileri ve önerileri ile çalışmama katkıda bulunan, tez izleme komitesi üyeleri olan Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ ve Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN’a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim süresince 2211-A programı kapsamında bursiyer olarak desteklenmemi sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı’na (BİDEB) değerli katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Sadece bu çalışma sürecinde değil tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, beni cesaretlendiren ve moral veren annem Nurhan ALAKOÇ, babam Reşat ALAKOÇ, ablam Şeyda BALAK ve abim Şener ALAKOÇ’a sonsuz şükranlarımı sunarım. Son olarak maddi ve manevi tüm destekleri için ÖZSÜREKÇİ ailesine teşekkürü borç bilirim.

Büşra ALAKOÇ

Trabzon 2025

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Bir Bariyerli Rasgele Yürüyüş Sürecinin Durağan Karakteristikleri İçin Moment Temelli Yaklaşık Formüller” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Tülay YAZIR ve Prof. Dr. Tahir HANALIOğLU (KHANIYEV)’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 02/07/2025

Büşra ALAKOÇ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Literatür taraması	4
1.2.1. Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçleri.....	4
1.2.2. Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi	7
1.2.3. Yenileme Fonksiyonu İçin Moment Bazlı Yaklaşım.....	8
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	12
2.1. Fiziksel Model.....	12
2.2. Sürecin Matematiksel Kuruluşu	16
2.3. Sürecinin Ergodikliği	18
2.4. Sürecin Sınır Fonksiyonelinin Momentleri İçin Kesin İfadeler	21
2.5. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Kesin İfadeler.....	27
2.6. Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Momentleri İçin Moment Bazlı Yaklaşımlar	29
2.7. Sürecin Sınır Fonksiyonelinin Momentleri İçin Moment Bazlı Yaklaşımlar	40
2.8. Müdahalenin Gamma Dağılım Olması Durumunda, Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Moment Bazlı Yaklaşımlar	54
2.9. Moment Bazlı Yöntemler Kullanılarak Elde Edilen Ergodik Dağılım Momentleri İçin Özel Örnekler	67
3. BULGULAR.....	72

4. SONUÇLAR.....	73
5. ÖNERİLER.....	74
6. KAYNAKLAR	75
7. EKLER.....	81
ÖZGEÇMİŞ	



Doktora tezi

ÖZET

BİR BARIYERLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN DURAĞAN KARAKTERİSTİKLERİ İÇİN MOMENT TEMELLİ YAKLAŞIK FORMÜLLER

Büşra ALAKOÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tülay YAZIR

İkinci Danışman: Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU (KHANİYEV)

2025, 80 Sayfa, 7 Sayfa Ek

Bu çalışma, gamma müdahaleli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin ($X(t)$) ergodik dağılımına ait beklenen değer ve varyansın yaklaşık ifadelerini elde etmek amacıyla moment bazlı bir yaklaşım önermektedir. Literatürde benzer problemler genellikle asimptotik yaklaşımlar kullanılarak incelenmiştir. Ancak, bu çalışmada asimptotik yöntemler yerine Kambo'nun önerdiği moment bazlı yaklaşımlar tercih edilmiştir. Çalışmada elde edilen moment bazlı yaklaşık formüllerin kesinliği, Feller'in asimptotik ifadeleriyle karşılaştırılarak örneklerle değerlendirilmiştir. Özellikle Erlang dağılımlı yenileme fonksiyonu örneğiyle, Kambo'ya dayalı yaklaşık formüllerin düşük parametre değerlerinde daha hassas sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bu bağlamda, öncelikle $X(t)$ sürecinin sınır fonksiyoneli $S_{N(z)}$ 'nin momentlerine ilişkin yaklaşık formüller türetilmiş, ardından bu sonuçlar kullanılarak ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansı için yaklaşık ifadeler elde edilmiştir. Ayrıca, iki farklı dağılımlı (Normal ve Düzgün) örnekler üzerinde yapılan Monte Carlo benzetim çalışmalarıyla elde edilen sonuçlar, önerilen yöntemlerin pratikte uygulanabilirliğini ortaya koymuştur.

Anahtar Kelimeler: Rasgele Yürüyüş Süreci, Yarı-Markov Süreç, Ergodik Dağılım Fonksiyonu, Ergodik Dağılımın Momentleri, Sınır Fonksiyoneli, Gamma Dağılımı, Moment Bazlı Yaklaşım, Monte Carlo Simülasyonu.

PhD. Thesis

SUMMARY

**MOMENT-BASED APPROXIMATE FORMULAS FOR STATIONARY
CHARACTERISTICS OF RANDOM WALK PROCESS WITH A BARRIER**

Büşra ALAKOÇ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Tülay YAZIR
Second Supervisor: Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU (KHANIYEV)
2025, 80 Pages, 7 Pages Appendix

This research proposes a moment-based approach to obtain approximate expressions for the expected value and variance of the ergodic distribution of a semi-Markovian random walk process $(X(t))$ with gamma distributed interference of chance. In the literature, similar problems have generally been examined using asymptotic approaches. However, this study employs moment-based approximations proposed by Kambo instead of asymptotic methods. The accuracy of the moment-based approximation formulas obtained in this work is evaluated through comparisons with Feller's asymptotic expressions using illustrative examples. In particular, it is shown that the approximation formulas based on Kambo's method yield more precise results for relatively small parameter values in the case of a renewal function generated by the Erlang distribution. In this context, the study first derives approximation formulas for the moments of the boundary functional $S_{N(z)}$ of the process $X(t)$ and then uses these results to obtain approximations for the expected value and variance of its ergodic distribution. Furthermore, Monte Carlo simulation studies performed on two different distributions (Gaussian and Uniform) demonstrate the practical applicability of the proposed method.

Key Words: Random Walk Process, Semi-Markovian Process, Ergodic Distribution Function, Moments of the Ergodic Distribution, Boundary Functional, Gamma Distribution, Moment-Based Approximation, Monte Carlo Simulation

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir realizasyonu	5
Şekil 2. Çağrı merkezi gelen çağrı sayısının zaman içindeki değişiminin bir realizasyonu.	13
Şekil 3. Sarhoşun rasgele yürüyüşünün bir realizasyonu.	14
Şekil 4. Yoğun bakım ünitelerinin doluluk oranının zamana bağlı değişimin bir realizasyonu.	15
Şekil 5. X_t sürecinin bir realizasyonu	18
Şekil 6. $SN(z)$ sınır fonksiyonelinin bir realizasyonu.....	22
Ek Şekil 1. Python kod dizini	83
Ek Şekil 2. Talepler $N(1,1)$ dağılıma sahipken birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentinin hesaplanması (Python)	86
Ek Şekil 3. Talepler $U(-1,3)$ dağılıma sahipken birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentinin hesaplanması (Python)	87

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Önerilen yöntemle elde edilen sonuçların mevcut yöntem ile karşılaştırılması.....	39
--	----



SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- $E(X)$: X rasgele değişkenin beklenen değeri.
 $E(X^n)$: X rasgele değişkenin n . dereceden momenti.
 $Var(X)$: X rasgele değişkenin varyansı.
 $F(x) * G(x)$: F ve G fonksiyonlarının konvölüsyon çarpımı.
 $F^{*n}(x)$: F fonksiyonun n . konvölüsyon çarpımı.
 $F(x) \approx G(x)$: $F(x)$ fonksiyonu yaklaşık olarak $G(x)$ ' e eşittir.
 $A \equiv B$: A ve B birbirine denktir.
 $\Gamma(x)$: Büyük Gamma fonksiyonu.
 $P\{A\}$: A olayının meydana gelme olasılığı.
 (Ω, \mathcal{F}, P) : Olasılık uzayı.
 $\tilde{F}(\lambda)$: $F(x)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü.
 $\mathcal{L}^{-1}(F(\lambda))$: $F(\lambda)$ fonksiyonun ters Laplace dönüşümü.
 $F^*(\lambda)$: $F(x)$ fonksiyonun Laplace Stieltjes dönüşümü.
 $\hat{F}(x)$: $F(x)$ fonksiyonun moment bazlı yaklaşımı.
 $F'(x)$: $F(x)$ fonksiyonun birinci dereceden türevi.
 $\frac{\partial F(x)}{\partial x}$: $F(x)$ fonksiyonun x değişkenine göre türevi.
 $[a, b]$: Alt sınırı a , üst sınırı b olan reel sayıların sınırlı ve kapalı aralığı.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Stokastik süreçler, zaman içinde rasgele değişen sistemleri modelleyen matematiksel yapılar olup, belirsizlik içeren olayların analizinde önemli bir rol oynar. Bu süreçler, belirli bir zaman indeksine göre tanımlanan rasgele değişkenler kümesinden oluşur ve Markov süreçleri, Wiener süreçleri (Brown hareketi) ve Poisson süreçleri gibi farklı türleri bulunur. Mühendislikte sinyal işleme ve kontrol sistemlerinde, fizikte Brown hareketi ve parçacık dinamiklerinde, biyolojide ise genetik mutasyonlar ve popülasyon dinamiklerinde kullanılır. Belirsizlik içeren sistemlerin daha iyi anlaşılmasını ve yönetilmesini sağlayarak bilimsel ve teknolojik gelişmelere önemli katkılar sunar.

Rasgelelik, doğadaki birçok olayın ve karmaşık sistemin temel bir özelliğidir; bu nedenle, belirsizliği anlamak ve yönetmek bilimsel araştırmaların önemli bir parçasıdır. Stokastik süreçler, rasgele olayların matematiksel temellerini inceleyerek gelecekteki durumları tahmin etmeye, riskleri değerlendirmeye ve en iyi stratejileri geliştirmeye olanak tanır. Bu alanda yapılan çalışmalar, finansal piyasaların dinamiklerini anlamaktan, mühendislik sistemlerinin güvenilirliğini artırmaya, epidemiyolojik modellerle hastalık yayılımını analiz etmekten, yapay zeka algoritmalarını geliştirmeye kadar geniş bir yelpazeye yayılır. Rasgelelik üzerine yapılan araştırmalar, belirsizliğin yalnızca bir zorluk değil, aynı zamanda fırsatlar sunan bir yapı olduğunu göstererek daha sağlam ve verimli sistemlerin oluşturulmasına katkı sağlar. Bu nedenle, stokastik süreçler ve rasgelelik üzerine çalışmak hem teorik bilginin gelişmesini hem de pratik uygulamalarda yenilikçi çözümler üretilmesini sağlar.

Rasgeleliğin modellenmesi ve analiziyle ilgilenen stokastik süreçler içinde özel bir yere sahip olan yenileme süreçleri, sistemlerin belirli olaylar veya durumlar sonrasında nasıl sıfırlandığını ve tekrar başladığını inceleyen matematiksel yapılar sunar. Örneğin, bir makinenin rasgele arızalanıp tamir edildikten sonra tekrar çalışmaya başlaması ya da müşterilerin bir hizmet noktasına belirli aralıklarla gelip işlemlerinin tamamlanması gibi süreçler, yenileme teorisiyle modellenebilir. Bu süreçler, stokastik süreçler çerçevesinde sistemlerin uzun vadeli davranışlarını incelememizi sağlarken, belirsizlik altında karar alma mekanizmalarını optimize etmek için güçlü araçlar sunar. Böylece, rasgele olayların zaman

içindeki etkilerini daha iyi anlayarak, sistemlerin performansını artırmaya ve kaynakları daha verimli kullanmaya yönelik stratejiler geliştirmek mümkün olur.

Yenileme süreçlerinin temel kavramlarından biri olan yenileme fonksiyonu, bir sistemin belirli bir zaman içinde kaç kez yenilendiğini belirleyen matematiksel bir araçtır. Yenileme fonksiyonu, genellikle deterministik veya stokastik dağılımlara bağlı olarak değişir ve sistemin geçmiş verilerine dayanarak gelecekteki yenileme sayılarının tahmin edilmesine olanak tanır. Böylece, belirsizlik içeren sistemlerde karar verme süreçlerini daha sağlam temellere oturtmak mümkün hale gelir.

Yenileme fonksiyonlarının incelenmesinde, analitik çözümlerin genellikle mümkün olmadığı durumlarda, farklı yaklaşım yöntemlerinin önemi büyüktür. Feller (1971), yenileme denklemlerine dayanan pek çok durumu örneklerle açıklamıştır. Keyfitz (1968), bu denklemlerin demografik alandaki uygulamalarını, Bartholomew (1973) sosyal süreçlerdeki kullanımını, Bartholomew & Forbes (1979) ise insan gücü yönetimindeki yerini incelemiştir. Ayrıca, Şahin (1983) stok yönetimi alanındaki kullanımlarını ele almıştır. Yenileme fonksiyonunun pratikteki büyük önemi nedeniyle, bu fonksiyon için farklı yöntemler geliştirilmiştir (Smeitink & Dekker, 1990; Politis & Pitts, 1998; Xie, 1989; Xie vd., 2003; Parsa & Jin, 2013; Mitov & Omev, 2014; Campbell, 2018; Jiang, 2020; 2022).

Rasgele yürüyüş süreçleri ve yenileme süreçleri, stokastik süreçlerin iki önemli dalı olup farklı yapılar ve uygulamalar içerir. Yenileme süreçleri, belirli olayların gerçekleşip sistemin sıfırlandığı ve tekrar başladığı süreçleri inceler. Yenileme süreçlerinde temel unsur, olayların zaman içinde belirli dağılımlara göre gerçekleşmesi ve her yenileme sonrası sistemin başlangıç durumuna dönmesidir. Öte yandan, rasgele yürüyüş süreçleri, bir sistemin zaman içinde rasgele adımlar atarak nasıl evrildiğini modelleyerek finans, fizik ve biyoloji gibi alanlarda kullanılır. Adımlar bağımsız olabilir veya belirli bir olasılık dağılımına göre değişebilir. Özellikle Markov özellikli rasgele yürüyüşlerde, sistemin gelecekteki durumu yalnızca mevcut duruma bağlıdır.

Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri, rasgele yürüyüşlerin ve yarı-Markov süreçlerinin birleşimiyle oluşan daha karmaşık bir stokastik modeldir. Bu süreçlerde, sistemin gelecekteki durumu sadece mevcut durumdan değil, aynı zamanda geçmişteki birkaç duruma da bağlıdır. Yani, bir yarı-Markov süreci, bir Markov sürecinin “hafızalı” bir versiyonudur; her adımda yalnızca mevcut konum değil, geçmiş adımlar da dikkate alınarak yön belirlenir. Bu tür bir süreç, belirli bir hafıza uzunluğuna sahip olup, sistemin tarihsel dinamiklerini ve geçmişteki önemli olayları içeren geçişler üzerinden evrilir. Rasgele

yürüyüş süreçlerinde olduğu gibi, bu tür bir modelde de adımlar rasgeledir, ancak yarı-Markov özelliği sayesinde geçmişin etkisiyle daha karmaşık ve realist bir hareket deseni ortaya çıkar. Bu süreçlerin analizi, çok daha zengin bir veri yapısı ve geçiş dinamikleri sunduğundan, geleneksel Markov süreçlerine kıyasla daha gerçekçi ve esnek modeller oluşturulmasına olanak tanır. Geçmiş durumların geleceği etkileyebileceği sistemlerin modellenmesi ve analizinde kullanılır.

Gihman ve Skorohod, bu süreçler için genel ergodik teoremi ispatlamıştır. Ancak, pratikte tam formüllerin matematiksel yapısındaki karmaşıklık nedeniyle asimptotik yaklaşımlar tercih edilmiştir. Bu bağlamda, rasgele yürüyüş süreçleri için çeşitli yönlerde araştırmalar yapılmış ve asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Örneğin, Lotov, Gauss rasgele yürüyüş sürecinin basamak yüksekliklerinin ilk üç momenti için Hadamard açılımını kullanarak asimptotik açılımlar elde etmiştir. Chang ve Peres, Riemann-Zeta fonksiyonunu kullanarak ilk dört moment için açılımlar türetmiştir. Nagaev, ilk beş moment için açılımlar elde ederek bu konudaki araştırmaları ilerletmiştir. Ayrıca, Janssen ve Leewardeen, sınır fonksiyoneli ile ilişkili kümülatif momentleri incelemiştir.

Ancak, yukarıda bahsedilen araştırmalarda elde edilen sonuçlar asimptotik açılımlar olup, genellikle ilk iki veya üç terimin ardından gelen küçük oh (o) veya büyük oh (O) notasyonu ile ifade edilmektedir. Bu durum, bu terimlerin sıfıra yakınsama davranışının tam olarak anlaşılmasını zorlaştırmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, özellikle asimptotik genişlemelerin önerildiği durumlarda ortaya çıkan bu boşluğu doldurmaktır. Önerilen yaklaşımların basitlik, uygulanabilirlik, açıklık sunması ve daha yüksek kesinliğe sahip olması beklenmektedir.

Bu çalışmada önerilen moment bazlı yaklaşımlar, Kambo'nun yenileme süreci için geliştirdiği moment bazlı yaklaşımına dayanmaktadır. Kambo ve arkadaşlarının çalışmasında, moment eşleme yöntemi kullanılarak yenileme süreci için moment bazlı yaklaşımlar elde edilmiştir. Benzer yöntemler mühendislik uygulamalarında kullanılan diğer stokastik modellerde de uygulanabilir. Örneğin, RIS destekli stokastik insansız hava aracı (İHA) mmWave röle iletişim sisteminin performans analizlerinde de moment eşleme tahmin yönteminin kullanıldığı görülmektedir. (Li vd., 2024)

Bu tez iki ana kısımdan oluşmaktadır. Birinci ana kısım literatür taraması için ayrılmıştır. İkinci ana kısım ise üç bölüm halinde şöyle düzenlenmiştir. 2.1 bölümde, Gamma müdahaleli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci ele alınmış, sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . merteben momentleri için kesin ifadeler yer verilmiştir.

2.2 bölümde, sürecinin ergodik dağılımının n . merteben momentleri için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşımlar elde edilmiştir. 2.3 bölümde ise, elde edilen moment bazlı yaklaşımlar kullanılarak sürecin momentleri için özel örneklere yer verilmiştir.

1.2. Literatür taraması

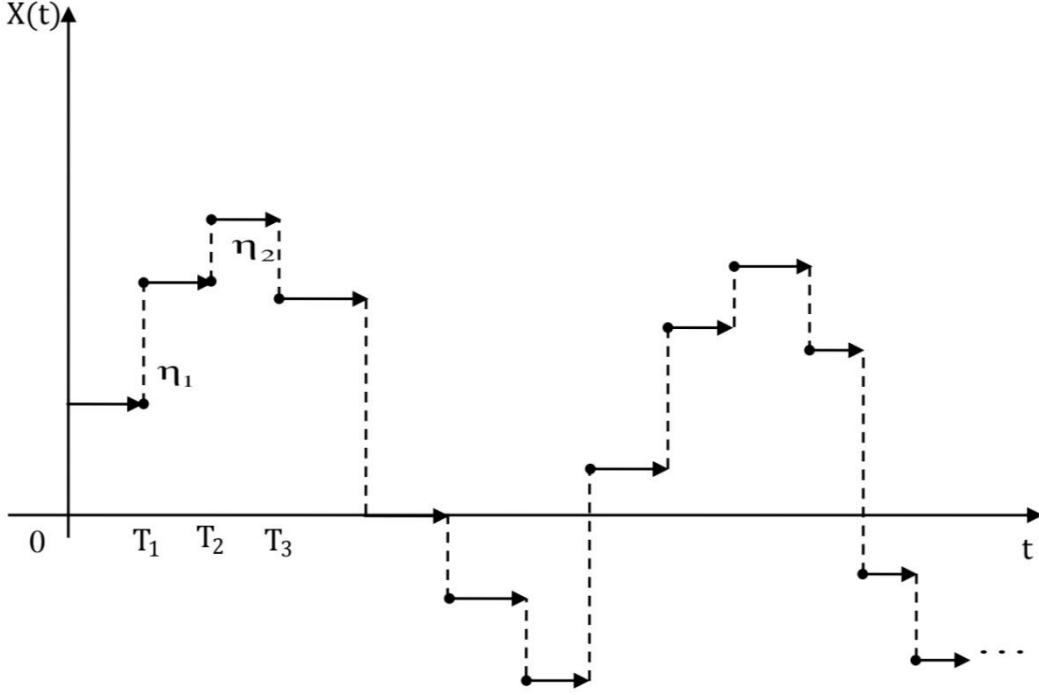
1.2.1. Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçleri

Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri, genel anlamda yarı-Markov süreçlerinin özel bir türüdür. Yarı-Markov süreçleri kavramı ilk kez 1950'li yıllarda bağımsız çalışmalar yürüten Levy (1954), Smith (1955) ve Takacs (1954) gibi araştırmacılar tarafından ortaya atılmıştır. Ancak, bu ilk çalışmaların ortak noktası, durum uzaylarının sonlu olması ve sıçrama anlarının fiziksel olarak belirlenmiş olmasıydı. Bu kısıtları aşmak ve daha genel bir çerçeve sunmak amacıyla Çinlar (1968), Gikhman ve Skorokhod (1975), Serfoza (1971) ile Ezhov ve Korolyuk (1967) gibi matematikçiler, genişletilmiş durum uzayına sahip yarı-Markov süreçleri üzerine çalışmalar yaparak farklı tanımlar geliştirmiştir. Nasirova (1984), Gikhman ve Skorokhod'un yarı-Markov süreçleri ile ilgili verdikleri tanımın özel bir versiyonu olarak yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin tanımını yapmıştır.

$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1, 2, \dots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler çiftleri dizisi olsun. Ayrıca ξ_i rasgele değişkenleri pozitif değerli olsun. Bu durumda,

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i, \text{ eğer } T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik sürecine bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci adı verilir. Bu sürecin görünüşlerinden biri aşağıdaki şekilde verildiği gibidir:



Şekil 1. Yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir realizasyonu

Yarı-Markov süreçleriyle ilgili pek çok önemli problem, Borovkov (1965; 1975; 1976; 1984), Korolyuk ve Turbin (1976), Çınlar (1968; 1969; 1975), Takacs (1954; 1977), Korolyuk ve Pirliev (1984), Tomko (1989), Smith (1955; 1958; 1959; 1965), Spitzer (1956; 1964), Feller (1964; 1971), Anisimov (1970; 1973; 1994), Gnedenko ve Kovalenko (1968), Shurenkov (1981; 1984) gibi araştırmacıların çalışmalarında detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Stokastik süreçlerin temel sınır fonksiyonlarının analizi oldukça önemli bir konudur. Bu alandaki ilk önemli çalışma, Spitzer (1956) tarafından yapılmıştır. Spitzer'in bulguları, daha sonra Rogozin (1964) ve Gusak ve Korolyuk (1968) tarafından toplam dizisi için geliştirilmiştir. Ardından, Rogozin (1965) artımları bağımsız olan süreçler için benzer hesaplamalar yapmış ve daha geniş çapta sonuçlar elde etmiştir. Gusak ve Korolyuk (1969) ise bu süreçlerin değerleri ile supremumlarının ortak dağılımını sunmuşlardır. Skorohod (1967), sıçramalarının işareti aynı olan süreçler için, bir seviyeye ilk kez ulaşma zamanı ile süreçlerin özellikleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Borovkov (1965), sıçramalarının işareti aynı ve artımları bağımsız olan süreçlerin bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile sürecin değerinin dağılımı arasındaki bağlantıyı ortaya koymuştur. Ayrıca, Levy (1954), bu tür süreçlerin değerlerinin infimumu ile supremumlarının ortak dağılımını incelemiştir.

Yarı-Markov süreçlerinin ergodiklik özellikleri ve bu süreçlerin ergodik dağılımlarının analizi, hem teorik hem de uygulamalı anlamda büyük bir öneme sahiptir. Yarı-Markov sınıfındaki yenileme süreçleri için temel ergodik teorem, 1975 yılında Smith tarafından kanıtlanmış olup, bu alandaki ilk önemli adımlardan birini atmıştır. Bunun yanı sıra, Ezhov ve Shurenkov (1977) da yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremleri sunmuşlardır. Shurenkov (1984), bu süreçlerin ergodik dağılımlarının varlığı için gerekli ve yeterli koşulları belirlemiştir. Yarı-Markov süreçlerinin genel durumu ile ilgili limit teoremleri, Anisimov (1970; 1973; 1994), Sil'vestrov (1975a; 1975b), Dzhafarov, Nasirova ve Skorohod (1976) ile Korolyuk ve Svishchuk (1989) tarafından kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Öte yandan, rasgele yürüyüş süreçlerine ilişkin limit teoremleri, Skorohod ve Slobodenyuk (1970), Nasirova (1979) ve Kharlamov (1977) tarafından geliştirilmiştir.

Yarı-Markov süreçlerinin incelenmesinin ardından, uygulamalı problemlerin çözülmesi için doğrudan yarı-Markov süreçleri değil, onun farklı türleri, özellikle bariyerli tipleri ele alınmaya başlanmıştır. Bu tür süreçler genellikle bir bariyerli ya da iki bariyerli olarak sınıflandırılabilir. Bariyerler ise somut problemlere bağlı olarak, yansıtan, tutan, yutan gibi farklı özellikler taşıyabilir. Nasirova (1979), sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci modellemiştir. Nasirova (1979; 1984), bu sürecin dağılımını ve sürecin temel sınır fonksiyonlarının dağılımını incelemiştir. Ayrıca, Nasirova ve Skorohod (1978), bu süreç için ergodik teoremi kanıtlayarak, sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu elde etmişlerdir. Nasirova (1979) ve Borovkov (1975) ise bu süreç için seriler biçiminde limit teoremleri ispatlamışlardır.

Stok kontrolü, kuyruk teorisi ve güvenilirlik teorisi gibi önemli alanlardaki pek çok problem, iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri kullanılarak ele alınmaktadır. Bu tür süreçlerde bariyerler farklı şekillerde tanımlanabilir. Hem teorik hem de pratik anlamda büyük önem taşıyan iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri üzerine çok sayıda ilgi çekici bilimsel çalışma yapılmıştır. Ancak bu çalışmaların çoğu, sonlu durum uzayına sahip rasgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine odaklanmıştır (Korolyuk & Borovskikh 1981; Lotov, 1991; 1992; Zhang 1992; El-Shehawey 1992; Weesakul 1961; Kastenbaum 1966 vb.).

Sınır-değer problemlerinin önemi tartışmasız olmakla birlikte, ele alınan süreçlerin temel özelliklerinin incelenmesi de büyük bir öneme sahiptir. Bu nedenle, iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin kendi karakteristikleri üzerine yapılan bazı bilimsel çalışmalar da mevcuttur (Feller, 1971; Spitzer 1964; Borovkov, 1975; Afanas'eva & Bulinskaya, 1980;

1981; 1984; Khaniev 1984; 1986; 1988; Zhang, 1992 vb.). Örneğin, Borovkov (1975), iki bariyerli bir boyutlu rasgele yürüyüş için ergodik teorem kanıtlamış ve ergodik dağılım fonksiyonuna dair bir formül sunmuştur. Feller (1971), her iki bariyerin de yansıtan ya da yutan olduğu bir boyutlu rasgele yürüyüş süreçleri kurmuş ve bu süreçlerin olasılık karakteristiklerini hesaplamıştır.

Literatürde ayrıca, iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri üzerine yapılan bazı çalışmalar da bulunmaktadır. Khaniev (1986; 1988), iki tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini kurmuş ve bu sürecin dağılımını, verilen bir seviyeye ilk ulaşma anının dağılımını, beklenen değer ve varyans gibi bazı olasılık karakteristiklerini incelemiş ve sürecin ergodik teoremini ispatlamıştır. Ayrıca, sürecin limit teoremleri ile asimptotik davranışını da araştırmıştır. Maden ve Shamilova (2016) ise yansıtan ve tutan bariyerlere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini modelleyip incelemişlerdir.

1.2.2. Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi

Rasgele yürüyüş süreçleri ve genel ergodik teoremlerinin incelenmesi ile ilgili çalışmalar devam etmektedir. Ancak, pratikte kesin formüllerin matematiksel yapısının karmaşıklığı nedeniyle asimptotik yaklaşımlar kullanılmaktadır. Bu nedenle, rasgele yürüyüş süreçleri için daha sade asimptotik açılımlar bulmaya yönelik çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Lotov (1996), Gaussian rasgele yürüyüşünün ilk üç momentinin asimptotik genişlemelerini Hadamard genişlemesi kullanarak elde etmiştir. Chang ve Peres (1997), Riemann zeta fonksiyonunu kullanarak ilk dört momentin asimptotik genişlemelerini türetmiştir. Nagaev (2010) ise, ilk beş moment için asimptotik genişlemeler türeterek bu konudaki araştırmaları ilerletmiştir. Ayrıca, Janssen ve Leeuwaardeen (2007), sınır fonksiyoneli ile ilişkili kümülanları incelemişlerdir.

Son yıllarda, farklı dağılımlara sahip müdahaleler içeren rasgele yürüyüş süreçleri analiz edilmiştir ve sürecin momentleri için asimptotik genişlemeler türetilmiştir (Aliyev & Khaniev, 2014; 2017; Aliyev vd., 2016). Örneğin, Gökpınar vd. (2013) ve Hanalioğlu vd. (2015) çalışmalarında, sırasıyla Gaussian rasgele yürüyüşünün maksimumunun dağılımı ve genel rasgele yürüyüşün dağılımı için zayıf yakınsama teoremleri incelenmiştir. Aliyev vd. (2010), Kesemen (2013) ve Kesemen vd. (2017) çalışmalarında, sırasıyla gamma, Weibull ve genelleştirilmiş beta dağılımlı müdahaleye sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci

analiz edilmiştir. Khaniyev (2003) çalışmasında ise özel bir bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci incelenmiş ve sonuç olarak sürecin momentleri için asimptotik genişlemeler elde edilmiştir. Son dönemde rasgele yürüyüş süreçleri üzerine yapılan en önemli araştırmalardan biri Hanalioğlu vd. (2023) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, normal dağılımlı müdahaleye sahip rasgele yürüyüş süreci incelenmiştir. Yazarlar, sınır fonksiyoneli cinsinden kesin formüller önermiş ve sürecin ilk dört momenti için asimptotik sonuçlar elde etmişlerdir.

Ancak, yukarıda belirtilen araştırmalarda elde edilen sonuçlar asimptotik açılımlara dayandığı için, ilk iki veya üç terimden sonraki kalan terimler genellikle küçük-oh (o) veya büyük-oh (O) notasyonları ile ifade edilmektedir. Bu durum, bu terimlerin sifra yakınsama davranışının tam olarak anlaşılmasını zorlaştırmaktadır.

Bu çalışma; önceki araştırmalarda, özellikle asimptotik açılımların önerildiği durumlarda tespit edilen bu boşluğu kapatmayı hedeflemektedir. Önerilen yaklaşımların yüksek kesinlik, basitlik, uygulanabilirlik ve açıklık sağlaması arzu edilmektedir. Bu çalışma rasgele yürüyüş sürecinin bazı önemli karakteristikleri için yaklaşık formüller türetmek amacıyla yeni bir yaklaşım önermeye yönelik bir ilgiyle hazırlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, öncelikle sınır fonksiyonelinin momentleri için Kambo yaklaşımı ile formüller önerilmiştir. Ayrıca, rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımının ilk ve ikinci momentleri ile varyansı için yaklaşık formüller türetilmiştir. (Alakoç vd., 2024)

1.2.3. Yenileme Fonksiyonu İçin Moment Bazlı Yaklaşım

Yenileme süreçleri, belirli olayların zaman içinde tekrarlanmasını matematiksel olarak modelleyen stokastik süreçlerdir. Feller, bu süreçleri belirli bir zamanda yenileme özellikleri gösteren ve birbirinden bağımsız olayların meydana geldiği süreçler olarak tanımlamıştır ve matematiksel olarak yenileme sürecini şu şekilde ifade etmiştir. (Feller, 1971)

Tanım 1.2.3.1 (Yenileme Süreci)

(Ω, \mathcal{F}, P) bir olasılık uzayı olsun. Ayrıca $\{X_n, n \geq 1\}$, bu olasılık uzayında tanımlı, bağımsız, pozitif değerli ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizi kullanılarak aşağıdaki rasgele değişkenler dizisi oluşturulsun:

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_0 = 0$$

X_n , $(n - 1)$. ve n . varışlar arasında geçen süreyi gösteren rasgele değişkenler olmak üzere T_n , n . varış zamanı olarak ifade edilir. $N(t)$, $[0, t]$ aralığında meydana gelen yenilemelerin sayısını veren rasgele değişken olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N(t) \equiv \min\{n \geq 1: T_n > t\}; \quad t > 0; \quad N(0) \equiv 1 \quad (1)$$

Bu durumda, $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine yenileme süreci denir.

Yenileme süreçlerinin incelenmesinde temel unsurlardan biri yenileme fonksiyonudur. Yenileme fonksiyonu belirli bir zaman dilimi içinde gerçekleşen yenileme sayısının beklenen değerini ifade eder. Bu fonksiyon süreçlerinin tam anlamıyla karakterize edilmesini sağlar ve sürecin analizi açısından büyük bir öneme sahiptir. Yenileme fonksiyonu, genellikle yenileme denklemi adı verilen bir integral denklemin çözümü olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.3.2 (Yenileme Fonksiyonu)

$\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci Tanım 1.2.3.1'deki gibi tanımlansın. $F(x)$, X_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu olsun. Sürecin yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$U(t) \equiv E(N(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \quad (2)$$

Burada

$$F^{*n}(t) = \int_{n=0}^t F^{*(n-1)}(t-x) dF(x); \quad n \geq 2; \quad F^{*0} = \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Bu alanda yapılan çalışmalar, yenileme denklemlerinin birçok farklı disiplinle ilişkili olduğunu göstermektedir. Örneğin, Feller (1971) bu tür denklemleri sağlayan çeşitli durumları ele almıştır. Keyfitz (1968) demografide, Bartholomew (1973) sosyal süreçlerde, Bartholomew (1976) ve Bartholomew & Forbes (1979) insan gücü planlamasında, Şahin (1983) ise stok modellerinde yenileme denklemlerinin kullanımını incelemiştir. Ancak, bu

denklemlerin analitik çözümleri çoğu durumda elde edilemez, bu da pratikte doğrudan kullanımını zorlaştırır. Yenileme fonksiyonunun kapalı formda incelenebilmesi yalnızca belirli özel durumlar için mümkün olduğundan, yenileme fonksiyonuna daha basit yaklaşımlar bulmak için çok çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlara Laplace dönüşüm yöntemleri, asimptotik yaklaşımlar, kuvvet serisi genişlemeleri, Riemann-Stieltjes entegrasyon yöntemleri dahildir. Yenileme fonksiyonunun uygulamalardaki önemine binaen, çeşitli tahmin ve yaklaşım yöntemleri geliştirilmiştir (Smeitink & Dekker, 1990; Politis & Pitts, 1998; Xie, 1989; Xie vd., 2003; Parsa & Jin, 2013; Mitov & Omev, 2014; Campbell, 2018; Jiang, 2020; 2022).

Bu yöntemler yenileme sürecinin dağılım fonksiyonu $F(t)$ 'nin bilindiği varsayımına dayanmaktadır. Güvenilirlik, stok kontrol ve kuyruk teorisi gibi pratik uygulamalarda bu varsayım geçerli olmayabilir. Dağılım fonksiyonunun kapalı formda mevcut olmadığında bile dağılımın momentlerinin kolayca elde edilebildiği birçok durum vardır. Alternatif olarak gözlem verilerine dayanan tahmin ediciler ile momentleri hesaplamak da mümkündür. Bu bağlamda, Kambo vd. (2012) tarafından önerilen moment bazlı yaklaşım, yalnızca yenileme sürecini belirleyen rasgele değişkenlerin ilk üç momentinin var olduğu ve bilindiği durumlarda uygulanabilir. Ayrıca, bu yöntem, ilgili değişkenlerin dağılım fonksiyonlarının kapalı formda bilinmesini gerektirmemesi bakımından da avantaj sağlamaktadır.

Teorem 1.2.3.1 (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi) (Feller, 1971)

$\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci Tanım 1.2.3.1'deki gibi tanımlansın. $F(x)$, X_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu olmak üzere sonlu μ ortalamasına ve sonlu σ^2 varyansına sahip olsun. Bu taktirde $t \rightarrow \infty$ için aşağıdaki yakınsama doğrudur:

$$0 \leq \left(U(t) - \frac{t}{\mu_1} \right) \rightarrow \frac{\mu_1^2 + \sigma^2}{2\mu_1}.$$

Bu teoremin en önemli sonuçlarından biri de aşağıdaki gibidir:

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1), \quad t \rightarrow \infty \quad (3)$$

Görülmektedir ki, (4) denklemi bir asimptotik sonuçtur. Asimptotik sonuçlardan farklı olarak Kambo vd. (2012) çalışmasında dağılım fonksiyonunun ilk üç momentine dayanan bir yaklaşım önermiştir.

$\{X_n, n \geq 1\}$ bağımsız, aynı dağılıma sahip ve negatif olmayan rasgele değişkenler dizisi olsun. $T_0 = 0, T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olsun. $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci (2) denkleminde farklı olarak

$$N(t) = \sup\{n: T_n \leq t\} \quad (4)$$

gibi tanımlansın (Smith, 1959). Bu durumda Kambo'nun önerdiği yaklaşım aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 1.2.3.2 (Kambo vd., 2012)

X_1 rasgele değişkeninin $\mu_n = E(X_n); n = 1,2,3$ momentlerinin mevcut ve sonlu olduğu varsayılınsın. $T_0 = 0, T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olsun. Bu durumda yenileme fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşım verilebilir:

$$M(t) \equiv E(N(t)) \approx \frac{t}{\mu_1} + \frac{(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2} (1 - e^{s_0 t}), \quad (5)$$

burada

$$s_0 = \frac{-6\mu_1(\mu_2 - \mu_1^2)}{2\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2} \quad (6)$$

dir.

Not 1.2.3.1

Yaklaşımın uygulanabilirliği için (7) denkleminde ifade edilen s_0 'ın pozitif olmaması gerekmektedir.

Moment bazlı yöntem, Kamışlık vd.'nin (2024) çalışmasında klasik (s,S) tipli envanter modeller için uygulanarak literatüre katılmıştır. Baghezze'nin doktora tez çalışmasında Kambo'nun yöntemi kullanılarak (s,S) tipli model için yaklaşık formüller elde edilmiştir. Ancak ele alınan süreç rasgele yürüyüş süreci veya onun bir modifikasyonu ise bu takdirde Baghezze'nin çalışmasında alınan sonuçlar kullanılamaz olmaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

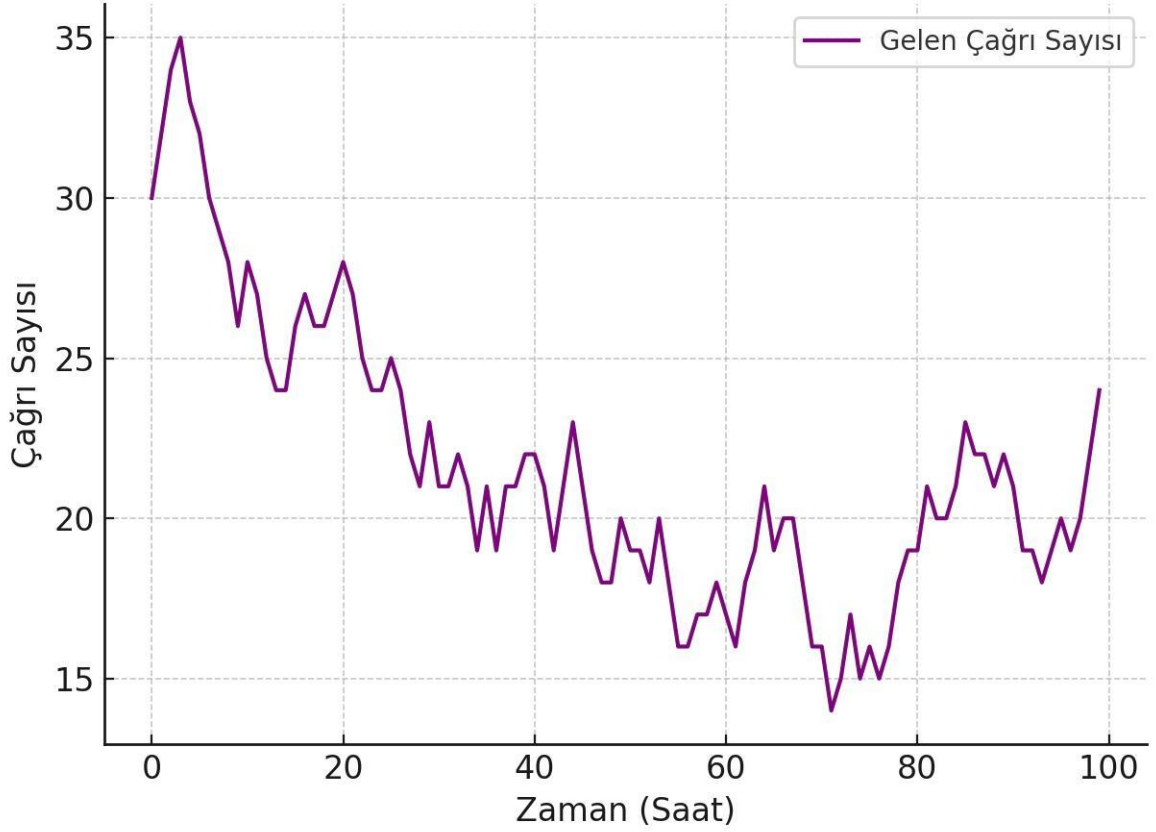
Bu kısımda Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreci fiziksel model olarak inşa edilecek ve sürecin ergodikliği ifade edilecektir. Sürecin sınır fonksiyonelinin momentleri elde edilecek, sürecin ergodik dağılımının momentleri için kesin ifadeler verilecektir. Daha sonra sürecin sınır fonksiyonelinin ve ergodik dağılımının momentleri için moment bazlı yaklaşımlar elde edilecektir. Bu yaklaşımlar kullanılarak elde edilen sürecin momentleri için özel örnekler verilecektir.

2.1. Fiziksel Model

Bu çalışmada ele alınacak olan rasgele yürüyüş süreci oluşturulmadan önce hayatın içinden bazı gerçek modeller ve bunların detaylı açıklamalarına yer verelim.

Model 1. Çağrı merkezine gelen müşteri aramalarının yönetimi:

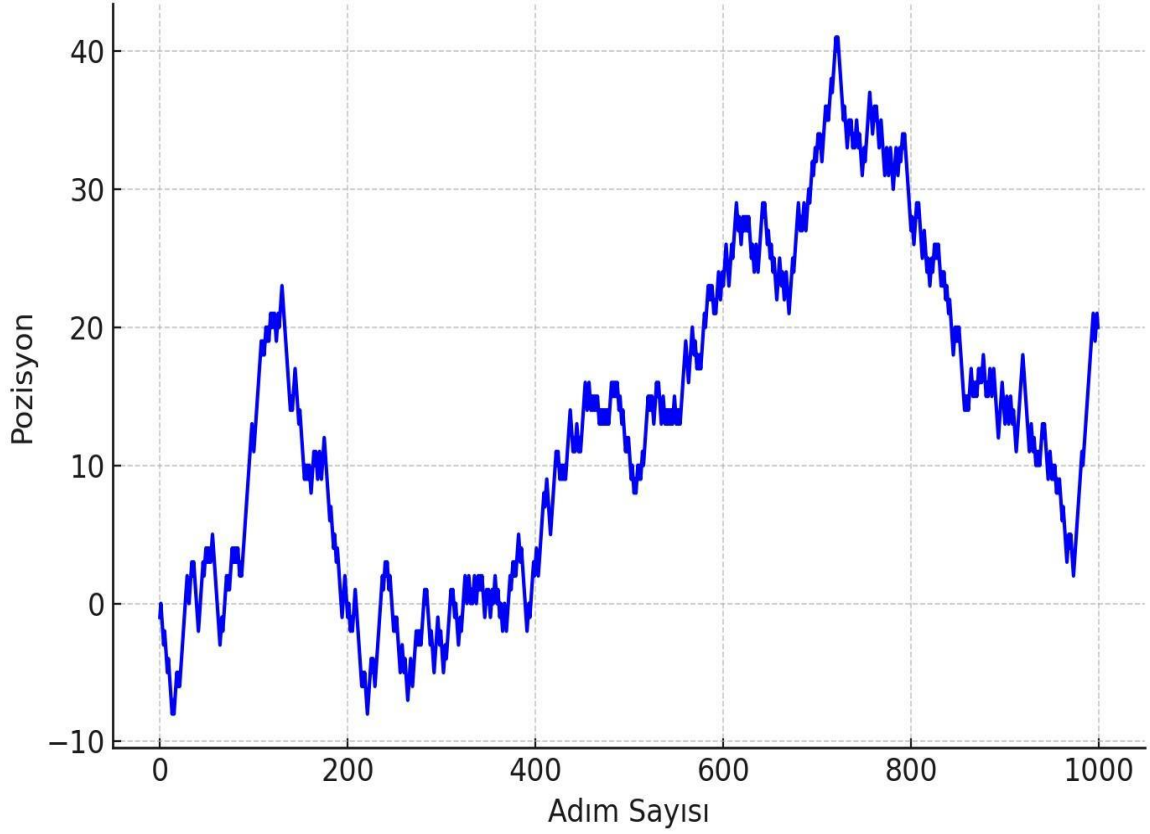
Müşteri hizmetleri çağrı merkezlerinde müşteri aramaları rasgele zamanlarda gelir ve her çağrı belirli bir süre devam eder. Çağrı merkezi temsilcileri ya boşta ya da meşgul durumdadır ve gelen çağrılar rasgele aralıklarla geldiğinden, sistemin yükü dalgalanır. Eğer tüm temsilciler meşgulse, müşteriler beklemeye alınır veya çağrıyı terk edebilir. Bu süreç, rasgele yürüyüş modeli ile modellenebilir; gelen aramalar ve görüşme süreleri ise farklı dağılımla temsil edilebilir. Çağrı merkezi performansı, meşgulliyet oranı, ortalama bekleme süresi ve terk oranı gibi metriklerle analiz edilerek müşteri memnuniyetini artıracak ve operasyonel verimliliği optimize edecek stratejiler geliştirilebilir. Bu model Şekil 2’de grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 2. Çağrı merkezi gelen çağrı sayısının zaman içindeki değişiminin bir realizasyonu.

Model 2. Bir sarhoşun yolda yürümesi (Drunkard's Walk):

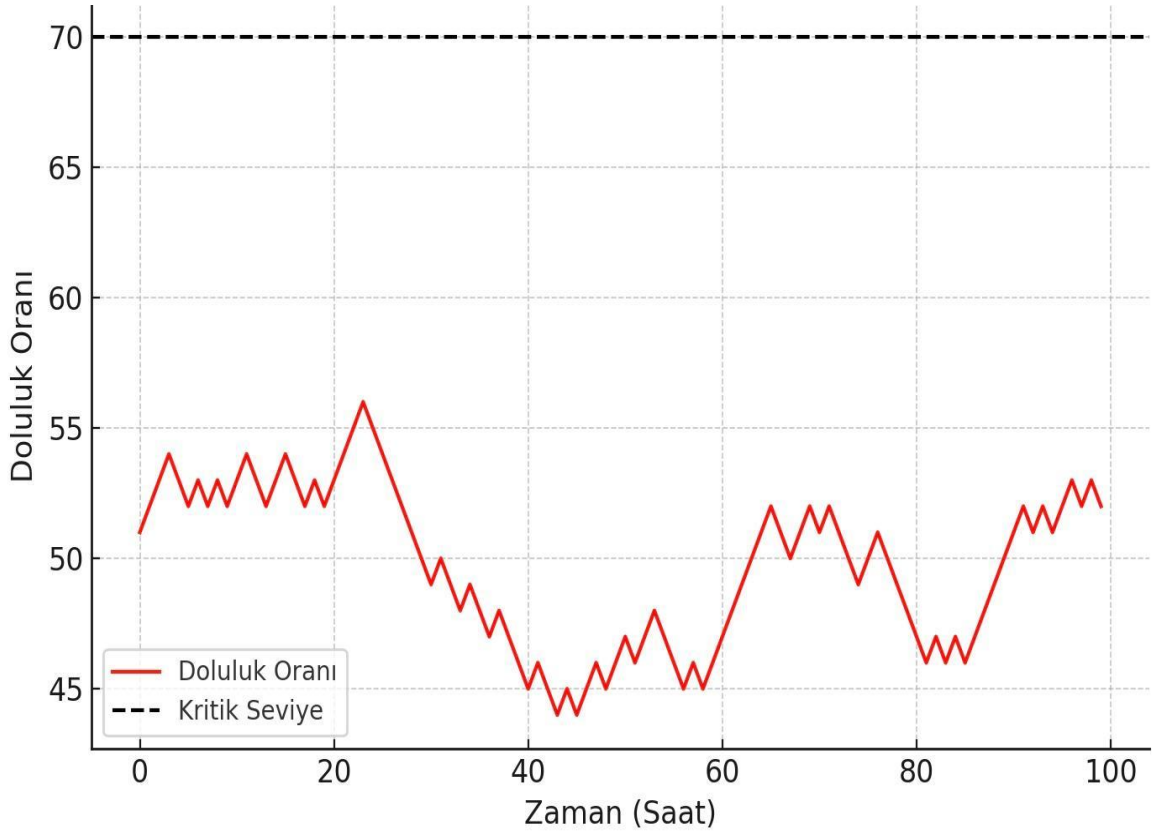
Rasgele yürüyüş süreçlerinin en klasik örneklerinden biri olan sarhoş yürüyüşü modelinde, bir kişinin her adımı tamamen rasgele bir yönde atılır. Bir boyutlu durumda kişi her saniye ya ileri ya da geri giderken, iki boyutlu versiyonda dört farklı yöne hareket edebilir. Bu süreç, kısa vadede belirli bir düzen göstermese de uzun vadede belirli istatistiksel özelliklere sahiptir ve moleküler difüzyondan hayvanların göç davranışlarına kadar birçok fiziksel ve biyolojik sürecin modellenmesinde kullanılır. Bu model Şekil 3'de grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 3. Sarhoşun rasgele yürüyüşünün bir realizasyonu.

Model 3. Hastanelerdeki yoğun bakım ünitelerinin Kapasite yönetimi:

Yoğun bakım ünitelerinde yatak kapasitesi, hastaların rasgele giriş ve çıkışlarına bağlı olarak değişkenlik gösterir. Yeni hasta başvuruları belirli bir düzen olmaksızın gerçekleşirken, mevcut hastaların iyileşme süreleri de belirsizdir. Bu durum, yoğun bakım yataklarının doluluk seviyelerinin bir rasgele yürüyüş süreci olarak modellenmesini mümkün kılar. Hastaneler, yatak doluluk oranlarını optimize etmek, hasta bekleme sürelerini azaltmak ve acil durumlarda kapasiteyi en iyi şekilde yönetmek için bu modeli kullanarak veriye dayalı kararlar alınabilir. Bu model Şekil 4’de grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4. Yoğun bakım ünitelerinin doluluk oranının zamana bağlı değişiminin bir realizasyonu.

Rasgele yürüyüş süreçleri, birçok gerçek dünya sisteminin dinamiklerini anlamamıza yardımcı olan güçlü bir modelleme yaklaşımıdır. Sarhoşun yolu, rasgele hareket eden varlıkların zaman içindeki konum değişimlerini simüle ederken; hastane kapasite dalgalanması ve çağrı merkezi trafik akışı gibi modeller, sistemin yoğunluk ve talep değişimlerini analiz etmek için kullanılır. Bu süreçler finansal piyasalardan sağlık hizmetlerine, şehir planlamasından haberleşme ağlarına kadar geniş bir yelpazede uygulanabilir. Rasgele yürüyüş modelleri sayesinde, belirsizlik içeren sistemlerin gelecekte nasıl davranabileceklerini öngörmek ve optimal kararlar almak mümkün hale gelir.

Yukarıda örneklenen gerçek dünya modellerini temsil edebilecek stokastik sürecin matematiksel tanımını aşağıdaki başlıkta verilecektir.

2.2. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

Bu bölümde, incelenen sürecin matematiksel yapısını ortaya koyarak, temel tanımları ve ilişkileri sistematik bir şekilde sunulacaktır. Sürecin modellenmesi için belirli rasgele değişkenler ve fonksiyonlar tanımlanarak sürecin davranışı net çerçevede incelenecektir.

Öncelikle, $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}$ olmak üzere, her biri $n \geq 1$ için aynı (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayında tanımlanan bağımsız rasgele değişkenler dizileri ele alınsın. Bu değişkenlerden ξ_n ve ζ_n yalnızca pozitif değerler alabilirken, η_n hem pozitif hem negatif değerler alabilen bir değişken olarak tanımlansın. Bu değişkenlerin dağılım fonksiyonları ise şu şekilde verilmiş olsun:

$$\phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}, \quad t \geq 0;$$

$$F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}, \quad z > 0.$$

Buna ek olarak, sürecin temel yapı taşlarından biri olan yenileme dizisi $\{T_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_0 = 0, \quad T_1 = \xi_1, \quad T_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad \dots, \quad T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

Bu, süreçteki belirli olayların meydana geldiği zaman noktalarını göstermektedir. Benzer şekilde, rasgele yürüyüş sürecini tanımlamak için $\{S_n\}$ dizisi şu şekilde tanımlansın:

$$S_0 = 0, \quad S_1 = \eta_1, \quad S_2 = \eta_1 + \eta_2, \quad \dots, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

Bu tanımlar, sürecin stokastik yapısını oluşturmak için kritik bir temel oluşturur. Bunun yanı sıra, sürecin belirli aşamalarında yapılan müdahaleleri tanımlamak için tam sayı değerli rasgele değişkenler dizisi $\{N_m\}$ aşağıdaki gibi oluşturulsun:

$$N_0 = 0;$$

$$N_1 = N(\lambda z) = \inf \{n \geq 1: \lambda z - S_k > 0, k = \overline{1, (n-1)}; \lambda z - S_n \leq 0\};$$

$$N_2 = N_2(\lambda \zeta_1) = \inf \left\{ \begin{array}{l} n \geq 1: \lambda \zeta_1 - (S_{N_1+k} - S_{N_1}) > 0, k = \overline{1, (n-1)}; \\ \lambda \zeta_1 - (S_{N_1+n} - S_{N_1}) \leq 0 \end{array} \right\};$$

$$N_{m+1} = N_{m+1}(\lambda \zeta_m) = \inf \left\{ \begin{array}{l} n \geq 1: \lambda \zeta_m - (S_{L_m+k} - S_{L_m}) > 0, k = \overline{1, (n-1)}; \\ \lambda \zeta_m - (S_{L_m+n} - S_{L_m}) \leq 0 \end{array} \right\};$$

burada $L_m = N_1 + N_2 + \dots + N_m$ olup, $\inf(\emptyset) = +\infty$ olarak kabul edilmiştir.

Bu tanımlar kullanılarak, aşağıdaki pozitif rasgele değişkenler dizisi oluşturulsun:

$$\tau_0 = 0;$$

$$\tau_1 = \tau_1(\lambda z) = T_{N(\lambda z)} = \sum_{i=1}^{N(\lambda z)} \xi_i ;$$

$$\tau_m = T_{L_m} = \sum_{i=1}^{L_m} \xi_i ; \quad m = 1, 2, \dots$$

Bunlar sürecin sıfıra düşme zamanlarını ifade etmektedir. Ayrıca, t anına kadar gerçekleşen sıçramaların sayısı $\nu(t)$ ile gösterilsin:

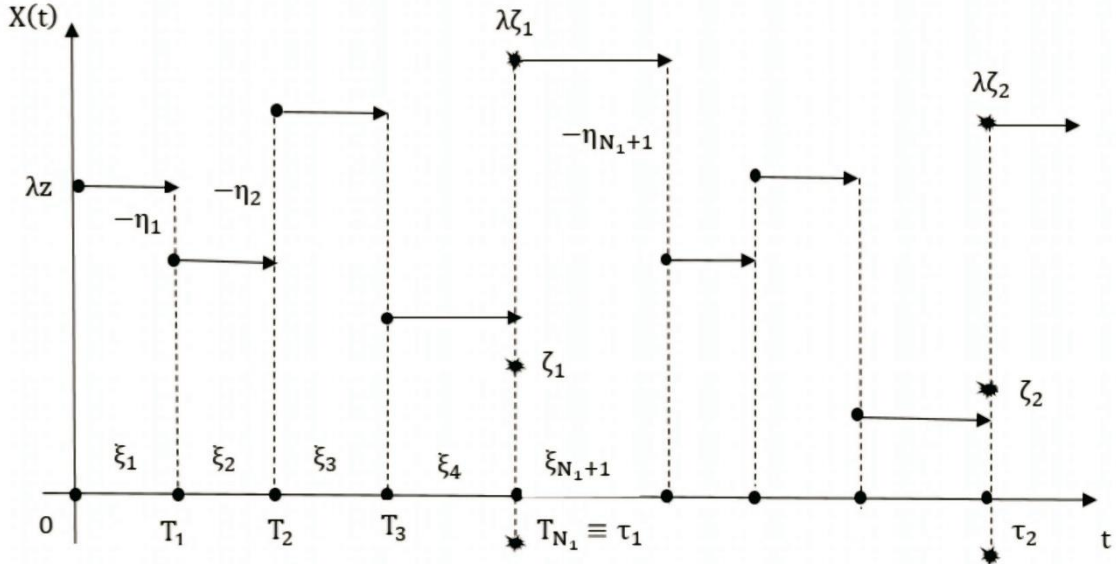
$$\nu(t) = \max\{n \geq 0: T_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Buradaki $\nu(t)$ değişkeni, $\{\xi_n\}$ rasgele değişkenler dizisinin oluşturduğu yenileme süreci olarak da adlandırılabilir.

Tüm bu tanımlar bir araya getirildiğinde, incelenen sürecin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$X(t) = \lambda \zeta_{m-1} - (S_{\nu(t)} - S_{L_{m-1}}), \quad \tau_{m-1} \leq t < \tau_m; \quad m = 1, 2, \dots$$

Burada, $S_{v(\tau_m)} = S_{N_m}$, $\zeta_0 = z$ ve $\lambda > 0$ kabul edilmiştir. $X(t)$ sürecine ait bir görünüm Şekil 5'deki gibidir:



Şekil 5. $X(t)$ sürecinin bir realizasyonu

Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde, $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi Gamma dağılımına sahip seçileceği için $X(t)$ stokastik süreci “Gamma Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Süreci” olarak adlandırılacaktır.

2.3. Sürecinin Ergodikliği

Bu bölümde, sürecin ergodik özellikleri incelenerek uzun vadeli davranışı analiz edilecektir. Ergodiklik, stokastik süreçlerin istatistiksel olarak zaman içinde belirli bir denge durumuna ulaşmış ve ulaşmadığını belirleyen temel bir kavramdır. Sürecin ergodik olup olmadığını anlamak için öncelikle ergodiklik kavramının ne anlama geldiği açıklanacak, ardından sürecin belirli koşullar altında ergodik olduğunu gösterecek teorik çerçeve sunulacaktır.

Stokastik süreçlerin incelenmesinde, bir sürecin uzun vadeli ortalamasının, durumların beklenen değerine yakınsayıp yakınsamadığı önemli bir sorudur. Eğer bir süreç ergodik ise, sürecin zaman içindeki ortalaması, durum ortalamasına eşit olur. Matematiksel olarak, bir sürecin ergodikliği için gereken koşulları içeren teoremler literatürde mevcuttur.

Stokastik sürecin ergodik olması için sağlanması gereken temel koşullar şu şekilde sıralanabilir:

- Yenileme zamanlarının sonlu beklenen değeri: Sürecin belirli aralıklarla kendini tekrar eden bir yapıya sahip olması gerekir.
- Pozitif ortalama sıçrama değeri: Sürecin genel eğilim olarak sıfırın üzerinde bir değere yönelmesi beklenmelidir.
- Sınırlı varyans: Sürecin sıçrama büyüklükleri aşırı değişken olmamalıdır.
- Aritmetik olmayan sıçrama dağılımı: Sürecin belirli ayırık noktalarda değil, sürekli bir dağılıma sahip olması gereklidir.
- Müdahalelerin sonlu beklenen değeri: Sürecin sıfıra düştüğünde aldığı yeni başlangıç değerlerinin beklenen değeri sonlu olmalıdır.

Bu koşullar altında sürecin ergodik olup olmadığı matematiksel olarak incelenebilir.

Teorem 2.3.1 (Gihman ve Skorohod, 1975)

Eğer $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $X(t)$ süreci ergodiktir.

- $0 < E(\xi_1) < \infty$;
- $E(\eta_1) > 0$;
- $E(\eta_1^2) < \infty$;
- η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken;
- $E(\zeta_1) < \infty$.

Teorem 2.3.2 (Sevinç, 2020)

Teorem 2.3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x\} = \frac{E(A(x, \lambda \zeta_1))}{E(N(\lambda \zeta_1))}. \quad (7)$$

Burada,

$$E(N(\lambda\zeta_1)) = \int_0^{\infty} E(N(\lambda z)) d\pi(z);$$

$$E(A(x, \lambda\zeta_1)) = \int_0^{\infty} A(x, \lambda z) d\pi(z);$$

$$A(x, \lambda\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, \lambda z);$$

$$a_n(x, \lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1, n}; \lambda z - S_n \leq x\}; n \geq 1; x, z > 0.$$

Teorem 2.3.3 (Sevinç, 2020)

Teorem 2.3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(e^{i\theta X(t)}) = \frac{E(A^*(\theta, \lambda\zeta_1))}{E(N(\lambda\zeta_1))}. \quad (8)$$

Burada,

$$E(A^*(\theta, \lambda\zeta_1)) = \int_0^{\infty} e^{i\theta x} d_x(E(A(x, \lambda\zeta_1))).$$

Teorem 2.3.4 (Khaniyev, 2023)

Teorem 2.3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(e^{i\theta X(t)}) = \frac{1}{E(N(\lambda\zeta_1))} \int_0^{\infty} e^{i\theta \lambda z} \frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta) - 1}{\varphi_{\eta}(-\theta) - 1} d\pi(z). \quad (9)$$

Burada,

$$S_{N(\lambda\zeta_1)} = \sum_{i=1}^{N(\lambda\zeta_1)} \eta_i ;$$

$$E(N(\lambda\zeta_1)) = \int_0^{\infty} E(N(\lambda z)) d\pi(z) ;$$

$$\varphi_{\eta}(-\theta) = E(e^{-i\theta\eta_1}) ;$$

$$\varphi_{S_{N(\lambda\zeta_1)}}(-\theta) = E(e^{i\theta S_{N(\lambda\zeta_1)}}) ;$$

$$\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z, z > 0\} .$$

2.4. Sürecin Sınır Fonksiyonelinin Momentleri İçin Kesin İfadeler

Stokastik süreçlerde sınır fonksiyonelleri, sürecin önemli yapısal özelliklerini belirlemede kullanılan temel araçlardandır. Bu fonksiyoneller, sürecin belirli sınırları geçme olasılığı, aşım süreleri ve maksimum değerler gibi karakteristikleri hesaplamak için kullanılır. Bu bölümde, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkarıcı fonksiyonu ve momentleri üzerinde durulacaktır.

Rasgele yürüyüş süreci $\{S_n\}, n \geq 0$ için birinci basamak anı (ilk pozitif geçiş zamanı)

$$v_1^+ = \min \{n \geq 1 : S_n > 0\}$$

ve birinci basamak yüksekliği (ilk pozitif geçiş zamanında ulaşılan yükseklik)

$$\chi_1^+ = S_{v_1^+} = \sum_{i=1}^{v_1^+} \eta_i$$

Verilen tanımlar yardımıyla $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkarar fonksiyonunun Laplace dönüşümü Khaniyev (2005) çalışmasında aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\psi(\gamma, k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(e^{-k S_{N(z)}}) dz = \frac{\varphi(k) - \varphi(\gamma + k)}{\gamma(1 - \varphi(\gamma + k))}.$$

Burada. $\varphi(k)$ Laplace Stieltjes dönüşümü $\varphi(k) = E(e^{-k\chi_1^+})$ şeklinde ifade edilmektedir.

Teorem 2.4.1 (Sevinç, 2020)

Birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentleri mevcut ve sonlu olsun. Yani $\mu_6 \equiv E(\chi_1^{+6}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu durumda, her sonlu z için $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(S_{N(z)}) dz = \mu_1 \tilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(S_{N(z)}^2) dz = 2\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_2 \tilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(S_{N(z)}^3) dz = 6\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 3\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_2^*(\gamma)$$

$$+ 3\mu_2 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_3 \tilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(S_{N(z)}^4) dz = 24\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 24\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma)$$

$$+ 4\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_3^*(\gamma) + 12\mu_2 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^{*2}(\gamma)$$

$$+6\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_2^*(\gamma) + 4\mu_3\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_4\tilde{U}_+(\gamma) ,$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(S_{N(z)}^5) dz = 120\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*4}(\gamma) + 180\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma)$$

$$+40\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 30\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^{*2}(\gamma)$$

$$+5\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_4^*(\gamma) + 60\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma)$$

$$+60\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) + 10\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_3^*(\gamma)$$

$$+20\mu_3\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 10\mu_3\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_2^*(\gamma)$$

$$+5\mu_4\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_5\tilde{U}_+(\gamma) ,$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E(S_{N(z)}^6) dz = 720\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*5}(\gamma) D_1^{*5}(\gamma) + 1440\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) D_2^*(\gamma)$$

$$+360\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_3^*(\gamma) + 540\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^{*2}(\gamma)$$

$$+60\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_4^*(\gamma) + 120\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) D_3^*(\gamma)$$

$$+6\mu_1\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_5^*(\gamma) + 360\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*4}(\gamma)$$

$$+540\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) + 120\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_3^*(\gamma)$$

$$+90\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^{*2}(\gamma) + 15\mu_2\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_4^*(\gamma)$$

$$+120\mu_3\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 120\mu_3\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma)$$

$$+20\mu_3\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_3^*(\gamma) + 30\mu_4\tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma)$$

$$+15\mu_4\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_2^*(\gamma) + 6\mu_5\tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_6\tilde{U}_+(\gamma) .$$

Burada $\tilde{U}_+(\gamma)$, $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunun γ parametresine göre Laplace dönüşümü, $U_+^*(\gamma)$ ise $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunun γ parametresine göre Laplace Stieltjes dönüşümüdür. Ayrıca,

$$U_+^{*k}(\gamma) = (U_+^*(\gamma))^k, \quad U_+^*(\gamma) = \frac{1}{1 - \varphi(\gamma)}, \quad U_+^*(\gamma) = \gamma \tilde{U}_+(\gamma), \quad \varphi(\gamma) = E(e^{-\gamma \chi_1^+}),$$

$$E(H(z)) \equiv U_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\chi_1^+}^{*n}(z), \quad F_{\chi_1^+}(z) = P\{\chi_1^+ \leq z\},$$

$$D_n^{*k}(\gamma) = (D_n^*(\gamma))^k, \quad D_n^*(\gamma) = E(\chi_1^{+n} e^{-\gamma \chi_1^+}), \quad \mu_n = E(\chi_1^{+n}), \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Teorem 2.4.2 (Sevinç, 2020)

Teorem 2.4.1'in koşulları sağlansın. Bu taktirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin kesin ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$E(S_{N(z)}) = \mu_1 U_+(z),$$

$$E(S_{N(z)}^2) = 2\mu_1 U_+^{*2}(z) * D_1(z) + \mu_2 U_+(z),$$

$$E(S_{N(z)}^3) = 6\mu_1 U_+^{*3}(z) * D_1^2(z) + 3\mu_1 U_+^{*2}(z) * D_2(z)$$

$$+ 3\mu_2 U_+^{*2}(z) * D_1(z) + \mu_3 U_+(z),$$

$$E(S_{N(z)}^4) = 24\mu_1 U_+^{*4}(z) * D_1^3(z) + 24\mu_1 U_+^{*3}(z) * D_1(z) * D_2(z)$$

$$+ 4\mu_1 U_+^{*2}(z) * D_3(z) + 12\mu_2 U_+^{*3}(z) * D_1^2(z)$$

$$+ 6\mu_2 U_+^{*2}(z) * D_2(z) + 4\mu_3 U_+^{*2}(z) * D_1(z) + \mu_4 U_+(z),$$

$$E(S_{N(z)}^5) = 120\mu_1 U_+^{*5}(z) * D_1^4(z) + 180\mu_1 U_+^{*4}(z) * D_1^2(z) * D_2(z)$$

$$\begin{aligned}
&+40\mu_1 U_+^{*3}(z) * D_1(z) * D_3(z) + 30\mu_1 U_+^{*3}(z) * D_2^{*2}(z) \\
&+5\mu_1 U_+^{*2}(z) * D_4(z) + 60\mu_2 U_+^{*4}(z) * D_1^{*3}(z) \\
&+60\mu_2 U_+^{*3}(z) * D_1(z) * D_2(z) + 10\mu_2 U_+^{*2}(z) * D_3(z) \\
&+20\mu_3 U_+^{*3}(z) * D_1^{*2}(z) + 10\mu_3 U_+^{*2}(z) * D_2(z) \\
&+5\mu_4 U_+^{*2}(z) * D_1(z) + \mu_5 U_+(z) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(S_{N(z)}^6) &= 720\mu_1 U_+^{*6}(z) * D_1^{*5}(z) + 1440\mu_1 U_+^{*5}(z) * D_1^{*3}(z) * D_2^*(z) \\
&+360\mu_1 U_+^{*4}(z) * D_1^{*2}(z) * D_3^*(z) + 540\mu_1 U_+^{*4}(z) * D_1^*(z) * D_2^{*2}(z) \\
&+60\mu_1 U_+^{*3}(z) * D_1^*(z) * D_4^*(z) + 120\mu_1 U_+^{*3}(z) * D_2^*(z) * D_3^*(z) \\
&+6\mu_1 U_+^{*2}(z) * D_5^*(z) + 360\mu_2 U_+^{*5}(z) * D_1^{*4}(z) \\
&+540\mu_2 U_+^{*4}(z) * D_1^{*2}(z) * D_2^*(z) + 120\mu_2 U_+^3(z) * D_1^*(z) * D_3^*(z) \\
&+90\mu_2 U_+^{*3}(z) * D_2^{*2}(z) + 15\mu_2 U_+^{*2}(z) * D_4^*(z) \\
&+120\mu_3 U_+^{*4}(z) * D_1^{*3}(z) + 120\mu_3 U_+^{*3}(z) * D_1^*(z) * D_2^*(z) \\
&+20\mu_3 U_+^{*2}(z) * D_3^*(z) + 30\mu_4 U_+^{*3}(z) * D_1^{*2}(z) \\
&+15\mu_4 U_+^{*2}(z) * D_2^*(z) + 6\mu_5 U_+^{*2}(z) * D_1^*(z) + \mu_6 U_+(z) .
\end{aligned}$$

Burada,

$$E(H(z)) \equiv U_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\chi_1^+}^{*n}(z) ,$$

$$D_k(z) = \int_0^z s^n dF(s) ,$$

$$F_{\chi_1^+}(z) = P\{\chi_1^+ \leq z\}, \quad \mu_n = E(\chi_1^{+n}), \quad n = 1,2,3,4,5,6.$$

2.5. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Kesin İfadeler

Önceki bölümlerde, sürecin karakteristik fonksiyonuna ilişkin kesin ifadeler ve sınır fonksiyonlarının momentleri elde edilmişti. Bu bilgiler ışığında, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentlerinin belirlenmesi hedeflenmiştir.

Öncelikle, sürecin ilk n momentinin hesaplanması için, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk $n + 1$ momentleri kullanılarak ilişkilendirme yapılabilmesi ile ilgili literatür kaynakları bulunmaktadır. Özellikle, karakteristik fonksiyonun momentler üzerindeki Taylor açılımı dikkate alınarak elde edilen ifadeler, birebir eşleştirme yöntemiyle yorumlanmış ve sonuçlandırılmıştır.

Sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentinin hesaplanması, sürecin uzun vadeli istatistiksel özelliklerini anlamak açısından kritik öneme sahiptir. İlk moment, yani beklenen değer, sistemin denge durumunda ortalama hangi seviyede bulunduğunu gösterirken, ikinci moment veya varyans ise sürecin bu ortalama etrafında nasıl dalgalandığını belirler. Bu bilgiler, sürecin kararlılığını değerlendirmek, risk analizi yapmak ve sistemin gelecekteki davranışını öngörmek için kullanılır. Özellikle finans, sigorta, stok kontrolü ve güvenilirlik teorisi gibi uygulamalarda, ergodik momentlerin kesin ifadeleri, optimal stratejilerin belirlenmesine ve olası risklerin yönetilmesine yardımcı olur. Ayrıca, modelin geçerliliğini test etmek ve benzer süreçlerle kıyaslama yapmak için de bu momentler önemli bir ölçüt olarak kullanılır.

Bu bölümde, $X(t)$ sürecinin uzun vadeli istatistiksel özelliklerini belirleyen ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin ifadelere yer verilecektir. Bu bölümün sonuçlarını verebilmek için $k = 1,2,3; x > 0$ olmak üzere aşağıdaki notasyonları çalışmaya dahil edelim:

$$m_k = E(\eta_1^k),$$

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1},$$

$$M_k(x) = E(S_{N(z)}),$$

$$M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}$$

Teorem 2.5.1 (Aliyev vd., 2010)

Teorem 2.3.1'in koşullarına ek olarak aşağıdaki koşullar da sağlansın:

- i) $E(|\eta_1|^3) < \infty$,
- ii) $E(\zeta_1^3) < \infty$.

Bu takdirde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momenti $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} \{E((2\zeta_1 + m_{21})M_1(\zeta_1)) - E(M_2(\zeta_1))\}, \quad (10)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} \left\{ E(M_3(\zeta_1)) - 3E\left(\left(\frac{1}{2}m_{21} + \zeta_1\right)M_2(\zeta_1)\right) \right. \\ \left. + E\left(\left(\frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{2} + 3m_{21}\zeta_1 + 3\zeta_1^2\right)M_1(\zeta_1)\right) \right\}. \quad (11)$$

Bu çalışmanın ardından 2020 yılında Sevinç doktora tez çalışmasında sürecin ergodik dağılımının ilk 5 momentini, sınır fonksiyonelinin ilk 6 momentini yardımıyla ifade eden formülü elde etmiştir. Ayrıca, ilk dört momente ilişkin elde edilen kesin ifadeler aracılığıyla $E(X^n)$ için genel bir formül türetilmiştir. Bu genel formülün geçerliliğini sınamak amacıyla beşinci ergodik moment ayrıca hesaplanmış ve elde edilen sonuç, formülün doğruluğunu büyük ölçüde desteklemiştir.

Teorem 2.5.2 (Sevinç, 2020)

Teorem 2.3.1'in koşulları sağlansın. Ek olarak $E(|\eta_1|^{n+1}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . momentini $E(X^n)$ mevcuttur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X^n) = \frac{1}{E(M_1(\lambda\zeta_1))} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{C_{n+1-m}}{m} \binom{n}{n+1-m} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k} E((\lambda\zeta_1)^{m-k} M_k(\lambda\zeta_1)).$$

Burada,

$$M_k(\lambda z) \equiv E(S_{N(\lambda z)}^k), \hat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1} \text{ ve } m_k = E(\eta_1^k), k = \overline{1,6}$$

ve

$$E((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)) \equiv \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z) d\pi(z), n = \overline{1,5}; k = \overline{1,5}.$$

Ayrıca,

$$C_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^n (-1)^{k(i+1)} (-1)^{s(j+1)} \frac{(s+k)!}{s! k!} \frac{n!}{(i!)^k (j!)^s} \hat{m}_i^k \hat{m}_j^s,$$

$$C_0 \equiv 1, \quad \hat{m}_0 = 1, \quad i \neq j, \quad ik + js = n.$$

Bu çalışmanın sonraki bölümlerinde sürecin ergodik dağılımının ilk 2 momentini moment bazlı yöntemle hesaplamak için Aliyev vd.'nin (2010) çalışmasındaki formül ve notasyonlar kullanılacaktır.

2.6. Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Momentleri İçin Moment Bazlı Yaklaşımlar

Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinde, beklenen geçiş süreleri ve sistemin uzun vadeli davranışı, sürecin ergodik dağılımına ait momentlerin belirlenmesiyle karakterize

edilebilir. Literatürde bu tür süreçler için genellikle asimptotik genişlemeler kullanılarak momentler yaklaşık olarak ifade edilmektedir. Ancak, asimptotik genişlemeler çoğu zaman özellikle yüksek mertebeden terimler için küçük oh (o) veya büyük oh (O) notasyonlarıyla verildiğinden, terimlerin yakınsama davranışı tam olarak görülememektedir. Bu nedenle, bu çalışmada moment bazlı yaklaşımlar tercih edilerek, doğrudan momentler için yaklaşık ifadeler türetilecek ve sürecin daha hassas bir şekilde modellenmesi sağlanacaktır.

Çalışmada kullanılacak ana yaklaşımın daha iyi kavranabilmesi için ilgili teoremin altyapısının incelenmesi ve temel kavramların açıklanması faydalı olacaktır. Bu sayede, sunulacak teoremler ve elde edilen sonuçlar daha anlaşılır hale gelecektir.

Not: Bundan sonra ve çalışma boyunca, $G(z)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere, $\tilde{G}(\gamma)$ ve $G^*(\gamma)$ notasyonları sırasıyla $G(z)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ve Laplace Stieltjes dönüşümünü temsil edecektir. Ek olarak $\hat{G}(z)$ notasyonu $G(z)$ fonksiyonunun moment bazlı yaklaşımını temsil edecektir.

Yardımcı Teorem 2.6.1

Negatif olmayan $\{X_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$ rasgele değişkenleri bağımsız aynı $F(x)$ dağılımına sahip olsunlar. Bu rasgele değişkenlerin beklenen değeri mevcut ve sonlu olduğu varsayalım. Bu rasgele değişkenler yardımıyla $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1, Y_0 = 0$ rasgele değişkeni ve $N_F(z) = \min\{n: Y_n > z\}$ yenileme süreci tanımlansın. Bu durumda yenileme fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşım verilebilir:

$$U_+(z) \equiv E(N_F(z)) \approx \frac{z}{\mu_1} + c_F + ce^{s_0 z}.$$

Burada,

$$s_0 = -\frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2}, \quad c_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}, \quad c = -\frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2}$$

dir. Ayrıca s_0 'ın pozitif olmaması gerekmektedir.

İspat:

Y_n rasgele değişkenin dağılımı;

$$F_n(z) = P\{Y_n \leq z\}, n \geq 1$$

ile ifade edilsin. Burada

$$F_0(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z \geq 0 \end{cases}.$$

Bu ifadeler kullanılarak bir yenileme süreci tanımlansın: $N(z) = \max\{n: Y_n \leq z\}$. Bu yenileme sürecinin beklenen değeri $M(z)$ ise yenileme fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$M(z) = E(N(z))$$

Açıktır ki,

$$\{N(z) \geq n\} \Leftrightarrow \{Y_n \leq z\}$$

Ayrıca,

$$P_n(z) \equiv P\{N(z) = n\} = P\{N(z) \geq n\} - P\{N(z) \geq n + 1\}$$

$$= P\{Y_n \leq z\} - P\{Y_{n+1} \leq z\}$$

$$= F^{*n}(z) - F^{*(n+1)}(z).$$

Yenileme fonksiyonunun tanımından;

$$M(z) \equiv E(N(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(z) \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_n \leq z\} = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(z) =$$

$$= F(z) + F^{*2}(z) + \dots + F^{*n}(z) + \dots$$

$$= F(z) + [F(z) + F^{*2}(z) + \dots + F^{*n}(z) + \dots] * F(z)$$

$$= F(z) + \left[\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(z) \right] * F(z)$$

$$= F(z) + M(z) * F(z).$$

Yani, $M(z) = F(z) + M(z) * F(z)$ elde edilir. İfadenin her iki tarafına da Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}\{M(s)\} = \mathcal{L}\{F(s)\} + \mathcal{L}\{M(s)\} \cdot \mathcal{L}\{f(s)\}. \quad (12)$$

İfade kolaylığı için aşağıdaki notasyonlar ile (13) denklemi yeniden yazılsın:

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s} + \tilde{M}(s) \cdot \tilde{f}(s). \quad (13)$$

(14) eşitliğinin her iki tarafı da s ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$s \cdot \tilde{M}(s) = \tilde{f}(s) + s \cdot \tilde{M}(s) \cdot \tilde{f}(s) \Rightarrow$$

$$s \cdot \tilde{M}(s) \cdot [1 - \tilde{f}(s)] = \tilde{f}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s(1 - \tilde{f}(s))} \quad (14)$$

elde edilir. Bilinmektedir ki $M(z)$ ve $F(z)$ birbirleri cinsinden benzersiz şekilde tek türlü yazılabilir.

$M'(z) = m(z)$ olsun. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa, $\tilde{m}(s) = s \tilde{M}(s) - M(0)$ bulunur. $M(0) = 0$ olduğundan,

$$\tilde{m}(s) = s \tilde{M}(s) \quad (15)$$

elde edilir. (16) numaralı denklem (15)'de kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)}. \quad (16)$$

Eğer $\tilde{m}(s)$, $s = 0$ 'da bir tekil noktaya sahip ise aşağıdaki yaklaşım yazılabilir:

$$\tilde{m}(s) \approx \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_0}, \quad s_0 < 0. \quad (17)$$

Buradan ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$m(z) \approx A + B e^{s_0 z}, \quad (18)$$

her iki tarafa integral uygulanırsa;

$$M(z) \approx Az + \frac{B e^{s_0 z}}{s_0} + C \quad (19)$$

elde edilir. $\frac{B}{s_0} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{B}{s_0}$ olarak seçilsin. (20) denklemini düzenlenirse

$$M(z) \approx Az - \frac{B(1 - e^{s_0 z})}{s_0} \quad (20)$$

sonucuna ulaşılır. Amaç, buradaki A, B ve s_0 katsayılarının belirlenmesidir.

Bilinmektedir ki, $f(z)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun Laplace dönüşümünün sıfır etrafında kuvvet serisi şu şekildedir:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!} \mu_n. \quad (21)$$

Burada $\mu_k \equiv E(X_1^k) < \infty$ 'dir. (22) denkleminde açıkça görülür ki,

$$\tilde{f}(s) = 1 - \frac{s}{1!} \mu_1 + \frac{s^2}{2!} \mu_2 - \frac{s^3}{3!} \mu_3 + \dots$$

$$1 - \tilde{f}(s) = \frac{s}{1!} \mu_1 - \frac{s^2}{2!} \mu_2 + \frac{s^3}{3!} \mu_3 - \dots = s\mu_1 \left[1 - \frac{s}{2!} \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{s^2}{3!} \frac{\mu_2}{\mu_1} - \dots \right]$$

$$\begin{aligned} [1 - \tilde{f}(s)]^{-1} &= \frac{1}{s\mu_1} \left[1 - \left(\frac{s}{2!} \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{s^2}{3!} \frac{\mu_2}{\mu_1} + \dots \right) \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{s\mu_1} \left[1 + \left(\frac{s}{2!} \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{s^2}{3!} \frac{\mu_2}{\mu_1} + \dots \right) + \left(\frac{s}{2!} \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{s^2}{3!} \frac{\mu_2}{\mu_1} + \dots \right)^2 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{s\mu_1} \left[1 + \frac{s}{2} \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{s^2}{6} \frac{\mu_3}{\mu_1} + \frac{s^2}{4} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} + o(s^2) \right] = \\ &= \frac{1}{s\mu_1} \left[1 + \frac{s\mu_2}{2\mu_1} + \left(\frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} - \frac{\mu_3}{6\mu_1} \right) s^2 + o(s^2) \right] \end{aligned}$$

dir. $D = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} - \frac{\mu_3}{6\mu_1} = \frac{3\mu_2 - 2\mu_3\mu_1}{12\mu_1^2}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{1}{1 - \tilde{f}(s)} = \frac{1}{s\mu_1} \left[1 + \frac{s\mu_2}{2\mu_1} + Ds^2 + o(s^2) \right]. \quad (22)$$

(22) ve (23) denklemlerinden yararlanarak görülür ki;

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)} &= \left[1 - s\mu_1 + \frac{s^2}{2} \mu_2 + o(s^2) \right] \cdot \frac{1}{s\mu_1} \cdot \left[1 + \frac{s\mu_2}{2\mu_1} + Ds^2 + o(s^2) \right] = \\ &= \frac{1}{s\mu_1} \left\{ 1 + \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1} - \mu_1 \right] s + \left[\frac{\mu_2}{2} - \frac{\mu_2}{2} + D \right] s^2 + o(s^2) \right\} = \\ &= \frac{1}{s\mu_1} \left[1 + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1} s + Ds^2 + o(s^2) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)} = \frac{1}{s\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + \frac{D}{\mu_1} s + o(s). \quad (23)$$

(17), (18) ve (24) denklemlerinden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_0} \approx \frac{1}{s\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + \frac{D}{\mu_1}s + o(s). \quad (24)$$

Katsayıların eşliğınden $A = \frac{1}{\mu_1}$ olduğı görölmektedir. Bundan sonraki adımda B katsayısı elde edilmelidir. Diğer yandan,

$$\frac{B}{s - s_0} = \frac{-\frac{B}{s_0}}{1 - \frac{s}{s_0}} = -\frac{B}{s_0} \left[1 + \frac{s}{s_0} + \frac{s^2}{s_0^2} + o(s^2) \right] = -\left[\frac{B}{s_0} + \frac{B}{s_0^2}s + o(s) \right] \quad (25)$$

eşitliğı ile (25) denklemindeki katsayı eşitlikleri göz önüne alındığında,

$$-\left[\frac{B}{s_0} + \frac{B}{s_0^2}s + o(s) \right] = \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + \frac{D}{\mu_1}s + o(s)$$

elde edilir. Buradan ulaşılan

$$-\frac{B}{s_0} = \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} \Rightarrow B = -s_0 \left(\frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} \right),$$

$$\frac{D}{\mu_1} = -\frac{B}{s_0^2} = -\frac{B}{s_0} \frac{1}{s_0} = \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} \frac{1}{s_0} \Rightarrow s_0 = -\frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1} \frac{1}{D}$$

denkleminde $D = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} - \frac{\mu_3}{6\mu_1} = \frac{3\mu_2 - 2\mu_3\mu_1}{12\mu_1^2}$ eşitliğı yerine yazılırsa,

$$s_0 = -\frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2}, \quad B = -s_0 \left(\frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} \right)$$

sonuçları elde edilir.

Böylece belirlenen tüm katsayılar (21) denkleminde yerine yazılırsa

$$M(z) \approx \frac{z}{\mu_1} + \frac{(\mu_2 - 2\mu_1^2)(1 - e^{s_0 z})}{2\mu_1^2}, \quad s_0 = -\frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2} \quad (26)$$

elde edilir. Bu sonuç Teorem 1.2.3.2'de Kambo'nun elde ettiği sonuca denktir.

Tüm bu sonuçlar, yenileme süreci $N(z) = \max\{n: Y_n \leq z\}$ biçiminde tanımlandığında elde edilmiştir. $N_F(z) = \min\{n: Y_n > z\}$ (Feller anlamında yenileme süreci) ve $N(z) = \max\{n: Y_n \leq z\}$ (Smith anlamında yenileme süreci) arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$N_F(z) = N(z) + 1.$$

Dolayısıyla, Kambo vd.'nin 2012 yılında yapmış olduğu çalışmada önerilen sonuçlara dayanarak $U_+(z)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşık ifade yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_+(z) &\equiv E(N_F(z)) = E[N(z) + 1] \\ &= E[N(z)] + 1 \\ &= M(z) + 1 \end{aligned}$$

Sonuç olarak (27) denklemini yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} U_+(z) &\approx \frac{z}{\mu_1} + \frac{(\mu_2 - 2\mu_1^2)(1 - e^{s_0 z})}{2\mu_1^2} + 1 \\ &= \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2} e^{s_0 z} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece Kambo'nun moment bazlı yaklaşımının Feller anlamında tanımlanmış yenileme süreçlerine uygulanmış hali,

$$U_+(z) \approx \frac{z}{\mu_1} + c_F + ce^{s_0 z} \quad (27)$$

gibi elde edilir. Burada,

$$s_0 = -\frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2}, \quad c_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}, \quad c = -\frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2}$$

dir. İspat tamamlanmıştır.

Bu noktada, Kambo yaklaşımına göre üretilen yaklaşık formüllerin, mevcut formüllere (genellikle Feller yaklaşımı olarak adlandırılır) kıyasla daha verimli olduğunu göstermek için belirli bir örnek verilecektir.

Örnek 2.6.1

$\{\eta_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$, $\lambda > 0$ parametrelili, üçüncü dereceden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Diğer bir deyişle, η_n rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_\eta(t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_\eta(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Bu durumda $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme sürecinin beklenen değerinin (yani yenileme fonksiyonunun) sırasıyla kesin hali ($U(t)$), Feller'in asimptotik yaklaşımı ($U_F(t)$) ve Kambo'nun moment bazlı yaklaşımı ($U_K(t) \equiv U_+(t)$) aşağıdaki gibidir:

$$U(t) = \frac{\lambda t}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\lambda t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\lambda t}{2}\right) \right],$$

$$U_F(t) = \frac{\lambda t}{3} + \frac{2}{3} + o(1),$$

$$U_K(t) = \frac{\lambda t}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}\lambda t}.$$

Bu özel örneğin incelenmesindeki temel amaç, Kambo'nun moment bazlı yaklaşık formülünün Feller'in yaklaşık formülüne kıyasla kesin formüle daha yakın sonuçlar verdiğini göstermektir. Bu yakınlığın ölçülebilmesi için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\Delta_F \equiv |U(t) - U_F(t)|, \quad \Delta_K \equiv |U(t) - U_K(t)|;$$

$$\delta_F \equiv \frac{\Delta_F}{U(t)} 100\%, \quad \delta_K \equiv \frac{\Delta_K}{U(t)} 100\%;$$

$$AP_F = 100 - \delta_F, \quad AP_K = 100 - \delta_K.$$

Burada, Δ_F ve Δ_K , sırasıyla Feller ve Kambo'nun yaklaşık formüllerinin mutlak hatasını; δ_F ve δ_K , sırasıyla Feller ve Kambo'nun yaklaşık formüllerinin nispi hatası; AP_F ve AP_K , sırasıyla Feller ve Kambo'nun yaklaşık formüllerinin kesin ifadeye uyum yüzdesini ifade etmektedir. Aşağıdaki tabloda $\lambda t = 0.2, 0.3, \dots, 1.5$ olduğunda bu parametrelerin aldığı değerler verilmiştir:

Tablo 1. Önerilen yöntemle elde edilen sonuçların mevcut yöntem ile karşılaştırılması

λt	$U(t)$	$U_K(t)$	$U_F(t)$	Δ_K	Δ_F	δ_K (%)	δ_F (%)	AP_K (%)	AP_F (%)
0.2	1.001	0.980	0.733	0.021	0.268	2.08	26.75	97.92	73.25
0.3	1.004	0.979	0.767	0.024	0.237	2.43	23.61	97.57	76.39
0.4	1.008	0.983	0.800	0.025	0.208	2.48	20.63	97.52	79.37
0.5	1.014	0.991	0.833	0.024	0.181	2.33	17.85	97.67	82.15
0.6	1.023	1.002	0.867	0.021	0.157	2.05	15.30	97.95	84.70
0.7	1.034	1.017	0.900	0.018	0.134	1.70	12.98	98.30	87.02
0.8	1.048	1.034	0.933	0.014	0.114	1.32	10.91	98.68	89.09
0.9	1.063	1.053	0.967	0.010	0.097	0.95	9.08	99.05	90.92
1.0	1.081	1.074	1.000	0.007	0.081	0.60	7.48	99.40	92.52
1.1	1.101	1.097	1.033	0.003	0.067	0.29	6.10	99.71	93.90
1.2	1.122	1.122	1.067	0.000	0.055	0.02	4.93	99.98	95.07
1.3	1.145	1.147	1.100	0.002	0.045	0.20	3.94	99.80	96.06
1.4	1.170	1.174	1.133	0.004	0.036	0.38	3.11	99.62	96.89
1.5	1.196	1.202	1.167	0.006	0.029	0.51	2.42	99.49	97.58

Tablo1.'den de görüleceği üzere, $\lambda t = 0.2$ olduğunda Feller yaklaşımının doğruluk yüzdesi %73.25; Kambo yaklaşımının doğruluk yüzdesi ise %97.92'dir. Ayrıca, $\lambda t = 0.3$ olduğunda, bu yüzdeler sırasıyla Feller'e göre %76.39 ve Kambo'ya göre %97.57'dir. Diğer bir deyişle, nispeten küçük λt değerlerinde, bu çalışmada önerilen Kambo anlamındaki moment bazlı yaklaşık formül Feller'in yaklaşık formülünden daha etkindir. λt değeri büyüdükçe her ikisinin de doğruluk oranı birbirlerine yaklaşmaktadır. Özellikle $\lambda t \geq 7$ olduğunda doğruluk yüzdeleri birbirine yeterince yakın olacaktır. Sonuç olarak, λt 'nin küçük değerlerinde Kambo yaklaşımına göre türetilen yaklaşık formüllerin kullanılmasının tercih edileceği sonucuna varılabilir.

Moment bazlı yaklaşımlar ilk kez yenileme fonksiyonları için uygulanan bir yöntem olmakla birlikte bu çalışmada yöntem rasgele yürüyüş süreçlerine uygulanacaktır. Bu amaçla, bu çalışmada Dynkin prensibi kullanılarak, rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonları basamak yüksekliklerinin oluşturduğu bir yenileme fonksiyonu ile ifade edilecektir. Daha sonra Kambo'nun yöntemi bu yeni yenileme fonksiyonuna uygulanacak

ve basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme fonksiyonu için yaklaşık formül ortaya konacaktır. Elde edilen formülden yararlanarak ele alınan sürecin ergodik dağılımının beklenen değer ve varyansı için yaklaşık formüller bulunacaktır. Böylece bu çalışma literatürde mevcut olan yenileme süreçlerinin yanı sıra rasgele yürüyüş süreçleri için de yaklaşık formüller önermiş olacaktır.

Bu çalışmada, Gamma müdahaleli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin momentleri için moment bazlı yaklaşımlar incelenecektir. Sürecinin momentlerini elde etmek için ilk olarak sürecin $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri bu yöntem ile elde edilmelidir.

2.7. Sürecin Sınır Fonksiyonelinin Momentleri İçin Moment Bazlı Yaklaşımlar

Sınır fonksiyonelinin momentlerini hesaplamak, sürecin uzun vadeli davranışını anlamak ve performans ölçütlerini belirlemek açısından kritik öneme sahiptir. Ancak, bu tür süreçlerde sınır fonksiyonelinin tüm momentlerini analitik olarak elde etmek çoğu zaman zor ya da imkânsızdır. Bu nedenle, yaklaşık yöntemlere başvurmak kaçınılmazdır.

Asimptotik genişlemelere dayalı klasik yöntemler, sınır fonksiyonelinin yüksek mertebeden momentleri için genel ifadeler sağlasa da bu yöntemlerde terimlerin yakınsama hızını net bir şekilde görmek mümkün değildir. Bu durum, özellikle küçük örneklem büyüklüklerinde ya da düşük parametre değerlerinde hata payının artmasına yol açmaktadır. Moment bazlı yaklaşımlar ise, sınır fonksiyonelinin ilk birkaç momentini dikkate alarak, sürecin momentlerini daha doğrudan ve anlaşılır bir biçimde yaklaşık ifade eder. Bu yaklaşım, yalnızca yüksek kesinlik sağlamakla kalmaz, aynı zamanda sistem parametrelerinin değişimine karşı duyarlılık analizine de imkân tanır.

Bu bölümde, yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelinin momentleri için moment bazlı yaklaşımlar detaylı olarak incelenecektir. Kambo'nun moment bazlı yöntemi temel alınarak, sürecin sınır fonksiyonelinin ilk üç momentine yönelik yaklaşık ifadeler türetilecektir. Amaç, klasik asimptotik yöntemlere kıyasla daha kesin, hesaplaması kolay ve uygulama açısından daha elverişli bir yöntem sunmaktır. Bu sayede, söz konusu stokastik süreçler için daha gerçekçi modellemeler ve güvenilir sonuçlar elde etmek mümkün olacaktır.

Not: Elde edilecek sonuçlardan önce Teorem 2.4.1'de tanımlanan $\tilde{U}_+(\gamma), U_+(\gamma), D_1^*(\gamma), D_2^*(\gamma)$ notasyonlarının incelenmesi ifade kolaylığı sağlayacaktır.

$\mu_i = E(\chi_1^{+i}) < \infty, i = 1, 2, \dots$ olmak üzere $U_+(z) \equiv E(H(z))$ yenileme fonksiyonuna ait Kambo anlamında moment bazlı yaklaşım

$$\hat{U}_+(z) \approx \frac{z}{\mu_1} + c_F + ce^{-Kz} \quad (28)$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$c_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}, \quad c = 1 - c_F, \quad K \equiv -s_0 = \frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2}$$

dir. $R_0(z) \equiv ce^{-Kz}$ şeklinde tanımlanır ve (29) denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\tilde{U}_+(\gamma) = \frac{1}{\mu_1\gamma^2} + \frac{c_F}{\gamma} + \tilde{R}_0(\gamma)$$

bulunur. Ayrıca $\gamma \rightarrow 0$ iken,

$$\tilde{R}_0(\gamma) = \frac{c}{\gamma + K} = \frac{c}{K\left(1 + \frac{\gamma}{K}\right)} = \frac{c}{K} \left[1 - \frac{\gamma}{K} + \frac{\gamma^2}{K^2} + o(\gamma^2)\right] = \frac{c}{K} + o(1)$$

elde edilir. Burada,

$$D \equiv \frac{c}{K} = \left(\frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1^2}\right) \left(\frac{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2}{6\mu_1(\mu_2 - \mu_1^2)}\right) = \frac{3\mu_2^2 - 2\mu_3\mu_1}{12\mu_1^3}$$

olarak tanımlanırsa Kambo'nun yaklaşımı ile elde edilmiş olan $U_+(z)$ 'nin Laplace dönüşümü şu şekilde ifade edilir:

$$\tilde{U}_+(\gamma) = \frac{1}{\mu_1\gamma^2} + \frac{c_F}{\gamma} + D + o(1). \quad (29)$$

Diğer yandan,

$$U_+^*(\gamma) = \gamma \tilde{U}_+(\gamma), \quad (30)$$

$$D_1^*(\gamma) \equiv E(\chi_1^+ e^{-\gamma \chi_1^+}) = \mu_1 - \gamma \mu_2 + \frac{\gamma^2}{2} \mu_3 - \frac{\gamma^3}{6} \mu_4 + o(\gamma^3), \quad (31)$$

$$D_2^*(\gamma) \equiv E(\chi_1^{+2} e^{-\gamma \chi_1^+}) = \mu_2 - \gamma \mu_3 + \frac{\gamma^2}{2} \mu_4 - \frac{\gamma^3}{6} \mu_5 + \frac{\gamma^4}{24} \mu_6 - o(\gamma^4) \quad (32)$$

olarak elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.7.1

Birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momenti mevcut ve sonlu olsun. Yani $\mu_6 \equiv E(\chi_1^{+6}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu durumda, her sonlu z için $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momentinin Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{M}_1(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{a_1}{\gamma} + \mu_1 D + o(1), \quad (33)$$

$$\tilde{M}_2(\gamma) = \frac{2}{\gamma^3} + \frac{h_1}{\gamma^2} + \frac{h_2}{\gamma} + h_3 + o(1), \quad (34)$$

$$\tilde{M}_3(\gamma) = \frac{6}{\gamma^4} + \frac{f_1}{\gamma^3} + \frac{f_2}{\gamma^2} + \frac{f_3}{\gamma} + f_4 + f_5 \gamma + o(\gamma). \quad (35)$$

Burada,

$$a_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}, \quad D = \frac{3\mu_2^2 - 2\mu_3\mu_1}{12\mu_1^3}$$

$$h_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad h_2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1}, \quad h_3 = \frac{7\mu_2\mu_3}{6\mu_1^2} - \frac{3\mu_2^3}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_4}{3\mu_1},$$

$$f_1 = 18\mu_1 - \frac{6\mu_2}{\mu_1}, \quad f_2 = 9\left(\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^2}\right), \quad f_3 = \frac{\mu_4}{\mu_1} + \frac{27\mu_2\mu_3}{\mu_1^2} - \frac{9\mu_2^3}{4\mu_1^3},$$

$$f_4 = -\frac{\mu_5}{2\mu_1} + \frac{22\mu_3^2}{3\mu_1^2} + \frac{\mu_2^2\mu_3}{4\mu_1^3} - \frac{9\mu_2^4}{4\mu_1^4},$$

$$f_5 = \frac{\mu_6}{8\mu_1} + \frac{\mu_3\mu_4}{2\mu_1^2} - \frac{3\mu_2\mu_5}{8\mu_1^2} + \frac{5\mu_2\mu_3^2}{3\mu_1^3} + \frac{5\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} - \frac{5\mu_2^3\mu_3}{4\mu_1^4} + \frac{15\mu_2^5}{16\mu_1^5}.$$

İspat:

Teorem 2.4.1'de verilen ifadeler göz önüne alınsın. Diğer yandan, (30), (31), (32), (33) denklemleri bu teoremden kullanılır ve $c_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$ olmak üzere gerekli matematiksel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (\tilde{U}_+(\gamma))^2 &= \left(\frac{1}{\mu_1\gamma^2} + \frac{c_F}{\gamma} + D + o(1)\right)^2 \\ &= \frac{1}{\mu_1^2\gamma^4} + \frac{2c_F}{\mu_1\gamma^3} + \frac{\mu_1 c_F^2 + 2D}{\mu_1\gamma^2} + \frac{2c_F D}{\gamma} + D^2 + o(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{U}_+(\gamma))^3 &= \left(\frac{1}{\mu_1\gamma^2} + \frac{c_F}{\gamma} + D + o(1)\right)^3 \\ &= \frac{1}{\mu_1^3\gamma^6} + \frac{3c_F}{\mu_1^2\gamma^5} + \frac{3\mu_1 c_F^2 + 3D}{\mu_1^2\gamma^4} + \frac{\mu_1 c_F^3 + 6c_F D}{\mu_1\gamma^3} + \frac{3\mu_1 c_F^2 D + 3D^2}{\mu_1\gamma^2} + \frac{3c_F D^2}{\gamma} + D^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_1^*(\gamma))^2 &= \left(\mu_1 - \gamma\mu_2 + \frac{\gamma^2}{2}\mu_3 - \frac{\gamma^3}{6}\mu_4 + o(\gamma^3)\right)^2 \\ &= \mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2\gamma + (\mu_2^2 + \mu_1\mu_3)\gamma^2 - \frac{\mu_1\mu_4 + 3\mu_2\mu_3}{3}\gamma^3 \\ &\quad + \frac{3\mu_3^2 + 4\mu_2\mu_4}{12}\gamma^4 - \frac{\mu_3\mu_4}{6}\gamma^5 + \frac{\mu_4^2}{36}\gamma^6 + o(\gamma^6) \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.

i) $\tilde{M}_1(\gamma) = \mu_1 \tilde{U}_+(\gamma);$

$$\tilde{M}_1(\gamma) = \mu_1 \left(\frac{1}{\mu_1 \gamma^2} + \frac{c_F}{\gamma} + D + o(1) \right) = \frac{1}{\gamma^2} + \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1} \right] \frac{1}{\gamma} + \mu_1 D + o(1).$$

Burada,

$$a_1 = \frac{c_F}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

olmak üzere

$$\tilde{M}_1(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{a_1}{\gamma} + \mu_1 D + o(1)$$

sonucu elde edilir.

ii) $\tilde{M}_2(\gamma) = 2\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_2 \tilde{U}_+(\gamma) = 2\mu_1 \gamma \left(\tilde{U}_+(\gamma) \right)^2 D_1^*(\gamma) + \mu_2 \tilde{U}_+(\gamma);$

$$\tilde{M}_2(\gamma) = 2\mu_1 \gamma \left[\frac{1}{\mu_1^2 \gamma^4} + \frac{2c_F}{\mu_1 \gamma^3} + \frac{\mu_1 c_F^2 + 2D}{\mu_1 \gamma^2} + \frac{2c_F D}{\gamma} + D^2 + o(1) \right] \left[\mu_1 - \gamma \mu_2 + \frac{\gamma^2}{2} \mu_3 - \frac{\gamma^3}{6} \mu_4 + o(\gamma^3) \right] + \mu_2 \left[\frac{1}{\mu_1 \gamma^2} + \frac{c_F}{\gamma} + D + o(1) \right]$$

$$= \frac{2}{\gamma^3} + \left[4\mu_1 c_F - \frac{2\mu_2}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right] \frac{1}{\gamma^2} + \left[2\mu_1^2 c_F^2 + 4\mu_1 D - 4\mu_2 c_F + \frac{\mu_3}{\mu_1} + \mu_2 c_F \right] \frac{1}{\gamma}$$

$$+ \left[4\mu_1^2 c_F D - 2\mu_1 \mu_2 c_F^2 - 4\mu_2 D + 2\mu_3 c_F - \frac{\mu_4}{3\mu_1} + \mu_2 D \right] + o(1)$$

Burada, $c_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$ ve $D = \frac{3\mu_2^2 - 2\mu_3 \mu_1}{12\mu_1^3}$ olmak üzere,

$$h_1 = 4\mu_1 c_F - \frac{2\mu_2}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \Rightarrow h_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1};$$

$$h_2 = 2\mu_1^2 c_F^2 + 4\mu_1 D - 4\mu_2 c_F + \frac{\mu_3}{\mu_1} + \mu_2 c_F \Rightarrow h_2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1};$$

$$h_3 = 4\mu_1^2 c_F D - 2\mu_1 \mu_2 c_F^2 - 4\mu_2 D + 2\mu_3 c_F - \frac{\mu_4}{3\mu_1} + \mu_2 D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_3 = \frac{7\mu_2 \mu_3}{6\mu_1^2} - \frac{3\mu_2^3}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_4}{3\mu_1}.$$

bulunur ve

$$\tilde{M}_2(\gamma) = \frac{2}{\gamma^3} + \frac{h_1}{\gamma^2} + \frac{h_2}{\gamma} + h_3 + o(1)$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{iii) } \tilde{M}_3(\gamma) &= \underbrace{6\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma)}_{I_1} + \underbrace{3\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_2^*(\gamma)}_{I_2} + \\ &+ \underbrace{3\mu_2 \tilde{U}_+(\gamma) U_+(\gamma) D_1^*(\gamma)}_{I_3} + \underbrace{\mu_3 \tilde{U}_+(\gamma)}_{I_4}; \end{aligned}$$

Sırasıyla I_1, I_2, I_3 ve I_4 eşitlikleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$I_1 \equiv 6\mu_1 \tilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) = 6\mu_1 \gamma^2 (\tilde{U}_+(\gamma))^3 (D_1^*(\gamma))^2$$

$$= \left[-\frac{12\mu_2}{\mu_1} + 18\mu_1 \right] \frac{1}{\gamma^3} + 6 \frac{1}{\gamma^4}$$

$$+ \left[\frac{6\mu_2^2}{\mu_1^2} + \frac{6\mu_3}{\mu_1} - 36\mu_2 c_F + 18\mu_1^2 c_F^2 + 18\mu_1 D \right] \frac{1}{\gamma^2}$$

$$+ \left[-\frac{2\mu_4}{\mu_1} - \frac{6\mu_2 \mu_3}{\mu_1^2} + \frac{18\mu_2^2 c_F}{\mu_1} + 18\mu_3 c_F - 36\mu_1 \mu_2 c_F^2 - 36\mu_2 D + 6\mu_1^3 c_F^3 + 36\mu_1^2 c_F D \right] \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{3\mu_3^2}{2\mu_1^2} + \frac{2\mu_2\mu_4}{\mu_1^2} - 6\mu_4c_F - \frac{18\mu_2\mu_3c_F}{\mu_1} + 18\mu_2^2c_F^2 + 18\mu_1\mu_3c_F^2 + \frac{18\mu_2^2D}{\mu_1} \right. \\
& \quad \left. + 18\mu_3D - 12\mu_1^2\mu_2c_F^3 - 72\mu_1\mu_2c_FD + 18\mu_1^3c_F^2D + 18\mu_1^2D^2 \right] \\
& + \left[-\frac{\mu_3\mu_4}{\mu_1^2} + \frac{9\mu_3^2c_F}{2\mu_1} + \frac{6\mu_2\mu_4c_F}{\mu_1} - 6\mu_1\mu_4c_F^2 - 18\mu_2\mu_3c_F^2 - 6\mu_4D - \frac{18\mu_2\mu_3D}{\mu_1} + 6\mu_1\mu_2^2c_F^2 \right. \\
& \quad \left. + 6\mu_1^2\mu_3c_F^3 + 36\mu_2^2c_FD + 36\mu_1\mu_3c_FD - 36\mu_1^2\mu_2c_F^2D - 36\mu_1\mu_2D^2 + 18\mu_1^3c_FD^2 \right] \gamma \\
& + o(\gamma).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 & \equiv 3\mu_1\tilde{U}_+(\gamma)U_+(\gamma)D_2^*(\gamma) = 3\mu_1\gamma\left(\tilde{U}_+(\gamma)\right)^2D_2^*(\gamma) \\
& = \left[\frac{3\mu_2}{\mu_1} \right] \frac{1}{\gamma^3} + \left[-\frac{3\mu_3}{\mu_1} + 6\mu_2c_F \right] \frac{1}{\gamma^2} + \left[\frac{3\mu_4}{2\mu_1} - 6\mu_3c_F + 3\mu_1\mu_2c_F^2 + 6\mu_2D \right] \frac{1}{\gamma} \\
& \quad + \left[-\frac{\mu_5}{2\mu_1} + 3\mu_4c_F - 3\mu_1\mu_3c_F^2 - 6\mu_3D + 6\mu_1\mu_2c_FD \right] \\
& \quad + \left[\frac{\mu_6}{8\mu_1} - \mu_5c_F + \frac{3\mu_1\mu_4c_F^2}{2} + 3\mu_4D - 6\mu_1\mu_3c_FD + 3\mu_1\mu_2D^2 \right] \gamma + o(\gamma).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 & \equiv 3\mu_2\tilde{U}_+(\gamma)U_+(\gamma)D_1^*(\gamma) = 3\mu_2\gamma\left(\tilde{U}_+(\gamma)\right)^2D_1^*(\gamma) \\
& = \left[\frac{3\mu_2}{\mu_1} \right] \frac{1}{\gamma^3} + \left[-\frac{3\mu_2^2}{\mu_1^2} + 6\mu_2c_F \right] \frac{1}{\gamma^2} + \left[\frac{3\mu_2\mu_3}{2\mu_1^2} - \frac{6\mu_2^2c_F}{\mu_1} + 3\mu_1\mu_2c_F^2 + 6\mu_2D \right] \frac{1}{\gamma} \\
& \quad + \left[-\frac{\mu_2\mu_4}{2\mu_1^2} + \frac{3\mu_2\mu_3c_F}{\mu_1} - 3\mu_2^2c_F^2 - \frac{6\mu_2^2D}{\mu_1} + 6\mu_1\mu_2c_FD \right] \\
& \quad + \left[\frac{\mu_2\mu_5}{8\mu_1^2} - \frac{\mu_2\mu_4c_F}{\mu_1} + \frac{3\mu_2\mu_3c_F^2}{2} + \frac{3\mu_2\mu_3D}{\mu_1} - 6\mu_2^2c_FD + 3\mu_1\mu_2D^2 \right] \gamma + o(\gamma).
\end{aligned}$$

$$I_4 \equiv \mu_3\tilde{U}_+(\gamma) = \left[\frac{\mu_3}{\mu_1} \right] \frac{1}{\gamma^2} + [\mu_3c_F] \frac{1}{\gamma} + \mu_3D + o(1).$$

Bu sonuçlar $\tilde{M}_3(\gamma) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ denkleminde toplanır ve matematiksel sadeleştirmeler uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_3(\gamma) &= \frac{6}{\gamma^4} + \left[18\mu_1 - \frac{6\mu_2}{\mu_1} \right] \frac{1}{\gamma^3} + \left[9 \left(\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^2} \right) \right] \frac{1}{\gamma^2} + \left[\frac{\mu_4}{\mu_1} + \frac{27\mu_2\mu_3}{\mu_1^2} - \frac{9\mu_2^3}{4\mu_1^3} \right] \frac{1}{\gamma} \\ &\quad + \left[-\frac{\mu_5}{2\mu_1} + \frac{22\mu_3^2}{3\mu_1^2} + \frac{\mu_2^2\mu_3}{4\mu_1^3} - \frac{9\mu_2^4}{4\mu_1^4} \right] \\ &\quad + \left[\frac{\mu_6}{8\mu_1} + \frac{\mu_3\mu_4}{2\mu_1^2} - \frac{3\mu_2\mu_5}{8\mu_1^2} + \frac{5\mu_2\mu_3^2}{3\mu_1^3} + \frac{5\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} - \frac{5\mu_2^3\mu_3}{4\mu_1^4} + \frac{15\mu_2^5}{16\mu_1^5} \right] \gamma + o(\gamma). \end{aligned}$$

Burada,

$$f_1 = 18\mu_1 - \frac{6\mu_2}{\mu_1}, \quad f_2 = 9 \left(\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^2} \right), \quad f_3 = \frac{\mu_4}{\mu_1} + \frac{27\mu_2\mu_3}{\mu_1^2} - \frac{9\mu_2^3}{4\mu_1^3},$$

$$f_4 = -\frac{\mu_5}{2\mu_1} + \frac{22\mu_3^2}{3\mu_1^2} + \frac{\mu_2^2\mu_3}{4\mu_1^3} - \frac{9\mu_2^4}{4\mu_1^4},$$

$$f_5 = \frac{\mu_6}{8\mu_1} + \frac{\mu_3\mu_4}{2\mu_1^2} - \frac{3\mu_2\mu_5}{8\mu_1^2} + \frac{5\mu_2\mu_3^2}{3\mu_1^3} + \frac{5\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} - \frac{5\mu_2^3\mu_3}{4\mu_1^4} + \frac{15\mu_2^5}{16\mu_1^5}$$

olmak üzere

$$\tilde{M}_3(\gamma) = \frac{6}{\gamma^4} + \frac{f_1}{\gamma^3} + \frac{f_2}{\gamma^2} + \frac{f_3}{\gamma} + f_4 + f_5\gamma + o(\gamma)$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.7.1

Yardımcı Teorem 2.7.1'in koşulları sağlansın. Teoremin sonuçları ve Tauber-Abel Teoremi kullanılarak ters Laplace dönüşümleri alınırsa $z \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$M_1(z) = z + a_1 + o(1), \quad (36)$$

$$M_2(z) = z^2 + h_1z + h_2 + o(1), \quad (37)$$

$$M_3(z) = z^3 + \frac{f_1}{2}z^2 + f_2z + f_3 + o(1). \quad (38)$$

Amacımız, yukarıdaki denklemlerde $o(1)$ fonksiyonlarını Kambo'nun moment bazlı yöntemine dayanan özel bir şekilde belirlemektir. (37), (38), (39) denklemlerindeki $o(1)$ fonksiyonlarının yerine, Kambo'nun yaklaşımına dayanarak sırasıyla aşağıdaki fonksiyonları önerelim:

$$R_1(z) = b_1e^{s_0z}, \quad (39)$$

$$R_2(z) = (c_1z + c_2)e^{s_0z}, \quad (40)$$

$$R_3(z) = (d_1z^2 + d_2z + d_3)e^{s_0z}. \quad (41)$$

Bilinmelidir ki, çalışmanın tamamında $s_0 \equiv -\frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2} < 0$ biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 2.7.1

$\mu_6 \equiv E(\chi_1^{+6}) < \infty$ ve $s_0 < 0$ olsun. Bu durumda, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momentinin Kambo anlamında moment bazlı yaklaşık formülü aşağıdaki gibidir:

$$\widehat{M}_1(z) = z + a_1 + b_1e^{s_0z}, \quad (42)$$

$$\widehat{M}_2(z) = z^2 + h_1z + h_2 + (c_1z + c_2)e^{s_0z}, \quad (43)$$

$$\widehat{M}_3(z) = z^3 + \frac{f_1}{2}z^2 + f_2z + f_3 + (d_1z^2 + d_2z + d_3)e^{s_0z}. \quad (44)$$

Burada,

$$a_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}, \quad b_1 = \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1},$$

$$h_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad h_2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1}, \quad h_3 = \frac{7\mu_2\mu_3}{6\mu_1^2} - \frac{3\mu_2^3}{4\mu_1^3} - \frac{\mu_4}{3\mu_1},$$

$$c_1 = h_3 s_0^2 - h_2 s_0 + \mu_2 s_0, \quad c_2 = \mu_2 - h_2,$$

$$f_1 = 18\mu_1 - \frac{6\mu_2}{\mu_1}, \quad f_2 = 9\left(\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^2}\right), \quad f_3 = \frac{\mu_4}{\mu_1} + \frac{27\mu_2\mu_3}{\mu_1^2} - \frac{9\mu_2^3}{4\mu_1^3},$$

$$f_4 = -\frac{\mu_5}{2\mu_1} + \frac{22\mu_3^2}{3\mu_1^2} + \frac{\mu_2^2\mu_3}{4\mu_1^3} - \frac{9\mu_2^4}{4\mu_1^4},$$

$$f_5 = \frac{\mu_6}{8\mu_1} + \frac{\mu_3\mu_4}{2\mu_1^2} - \frac{3\mu_2\mu_5}{8\mu_1^2} + \frac{5\mu_2\mu_3^2}{3\mu_1^3} + \frac{5\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} - \frac{5\mu_2^3\mu_3}{4\mu_1^4} + \frac{15\mu_2^5}{16\mu_1^5},$$

$$d_1 = \frac{\mu_3 - f_3}{2} s_0^2 + f_4 s_0^3 - \frac{f_5}{2} s_0^4, \quad d_2 = 2(\mu_3 - f_3) s_0 + 3f_4 s_0^2 - f_5 s_0^4, \quad d_3 = \mu_3 - f_3.$$

İspat:

Bilindiği üzere,

$$\lim_{z \rightarrow 0} M_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} E(S_{N(z)}) = E(\chi_1^+) = \mu_1$$

ve (43) denklemini göz önüne alındığında

$$\lim_{z \rightarrow 0} \widehat{M}_1(z) = a_1 + b_1.$$

Bu nedenle $a_1 + b_1 = \mu_1$ olmalıdır. a_1 katsayısı Yardımcı Teorem 2.7.1'de $a_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ olarak tanımlanmıştır. Buradan

$$b_1 = \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1}$$

elde edilir. Böylece $M_1(z)$ fonksiyonu, katsayıları belirlenmiş olan $\widehat{M}_1(z)$ fonksiyonu ile değiştirilebilir. Öyleyse,

$$\widehat{M}_1(z) = z + a_1 + b_1 e^{s_0 z}.$$

Diğer katsayıları belirleyebilmek için hem $\widetilde{M}_i(\gamma)$ fonksiyonlarının asimptotik açılımını hem de $\widetilde{\widetilde{M}}_i(\gamma)$ fonksiyonlarının asimptotik açılımlarını incelememiz gerekir; burada $i = 2,3$.

Öncelikle aşağıdaki ifadeleri vermek kolaylık sağlayacaktır:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma\{e^{s_0 z}\} &\equiv \int_0^\infty e^{-\gamma z} e^{s_0 z} dz = \int_0^\infty e^{-z(\gamma-s_0)} dz = \frac{1}{\gamma-s_0} \\ &= -\frac{1}{s_0\left(1-\frac{\gamma}{s_0}\right)} = -\frac{1}{s_0}\left[1 + \frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right], \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma\{ze^{s_0 z}\} &= -\frac{\partial}{\partial \gamma} \mathcal{L}_\gamma\{e^{s_0 z}\} = -\left(\frac{1}{\gamma-s_0}\right)' = -\frac{-1}{(\gamma-s_0)^2} = \frac{1}{(\gamma-s_0)^2} = \frac{1}{(s_0-\gamma)^2} \\ &= \frac{1}{s_0^2\left(1-\frac{\gamma}{s_0}\right)^2} = \frac{1}{s_0^2}\left[1 + \frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right]^2 = \frac{1}{s_0^2}\left[1 + 2\frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right], \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma\{z^2 e^{s_0 z}\} &= -\frac{\partial}{\partial \gamma} \mathcal{L}_\gamma\{ze^{s_0 z}\} = -\left(\frac{1}{(\gamma-s_0)^2}\right)' = -\frac{-2}{(\gamma-s_0)^3} = \frac{2}{(\gamma-s_0)^3} \\ &= -\frac{1}{s_0^3\left(1-\frac{\gamma}{s_0}\right)^3} = -\frac{1}{s_0^3}\left[1 + \frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right]^3 = -\frac{1}{s_0^3}\left[1 + 3\frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right]. \end{aligned} \quad (47)$$

(41) ve (44) denklemleri kullanılarak $\widetilde{\widetilde{M}}_2(\gamma)$ için $\gamma \rightarrow 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\tilde{M}_2(\gamma) \equiv \mathcal{L}_\gamma(\widehat{M}_2(z)) = \frac{2}{\gamma^3} + \frac{h_1}{\gamma^2} + \frac{h_2}{\gamma} + \mathcal{L}_\gamma\{R_2(z)\}.$$

Burada,

$$\mathcal{L}_\gamma\{R_2(z)\} \equiv \mathcal{L}_\gamma\{(c_1 z + c_2)e^{s_0 z}\} = c_1 \mathcal{L}_\gamma\{ze^{s_0 z}\} + c_2 \mathcal{L}_\gamma\{e^{s_0 z}\}$$

dir. (46) ve (47) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma\{R_2(z)\} &= \frac{c_1}{s_0^2} \left[1 + 2\frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma) \right] - \frac{c_2}{s_0} \left[1 + \frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma) \right] \\ &= \frac{c_1}{s_0^2} - \frac{c_2}{s_0} + o(1) = \frac{c_1 - c_2 s_0}{s_0^2} + o(1) \end{aligned}$$

böylece,

$$\tilde{M}_2(\gamma) \equiv \mathcal{L}_\gamma(\widehat{M}_2(z)) = \frac{2}{\gamma^3} + \frac{h_1}{\gamma^2} + \frac{h_2}{\gamma} + \frac{c_1 - c_2 s_0}{s_0^2} + o(1) \quad (48)$$

elde edilir. (35) denklemindeki $\tilde{M}_2(\gamma)$ ve (49) denklemindeki $\tilde{M}_2(\gamma)$ asimptotik açılımları eşleştirildiğinde aşağıdaki denklem sağlanmalıdır:

$$h_3 = \frac{c_1 - c_2 s_0}{s_0^2} \Rightarrow c_1 = h_3 s_0^2 + c_2 s_0$$

Ayrıca bilindiği üzere,

$$\lim_{z \rightarrow 0} M_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} E(S_{N(z)}^2) = E(\chi_1^{+2}) = \mu_2$$

ve (44) denklemi göz önüne alındığında

$$\lim_{z \rightarrow 0} \widehat{M}_2(z) = h_2 + c_2.$$

Bu nedenle $h_2 + c_2 = \mu_2$ olmalıdır. Buradan

$$c_2 = \mu_2 - h_2,$$

dolayısıyla,

$$c_1 = h_3 s_0^2 - h_2 s_0 + \mu_2 s_0$$

elde edilir. Böylece $M_2(z)$ fonksiyonu, katsayıları belirlenmiş olan $\widehat{M}_2(z)$ fonksiyonu ile değiştirilebilir. Öyleyse,

$$\widehat{M}_2(z) = z^2 + h_1 z + h_2 + (c_1 z + c_2) e^{s_0 z}.$$

Benzer şekilde (42) ve (45) denklemleri kullanılarak $\widetilde{M}_3(\gamma)$ için $\gamma \rightarrow 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_3(\gamma) \equiv \mathcal{L}_\gamma(\widehat{M}_3(z)) = z^3 + \frac{f_1}{2} z^2 + f_2 z + f_3 + \mathcal{L}_\gamma\{R_3(z)\}.$$

Burada,

$$\mathcal{L}_\gamma\{R_3(z)\} \equiv \mathcal{L}_\gamma\{(d_1 z^2 + d_2 z + d_3) e^{s_0 z}\} = d_1 \mathcal{L}_\gamma\{z^2 e^{s_0 z}\} + d_2 \mathcal{L}_\gamma\{z e^{s_0 z}\} + d_3 \mathcal{L}_\gamma\{e^{s_0 z}\}$$

dir. Burada (46), (47) ve (48) denklemleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma\{R_3(z)\} &= -\frac{2d_1}{s_0^3} \left[1 + 3\frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right] \frac{d_2}{s_0^2} \left[1 + 2\frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right] - \frac{d_3}{s_0} \left[1 + \frac{\gamma}{s_0} + o(\gamma)\right] \\ &= \frac{-2d_1 + d_2 s_0 - d_3 s_0^2}{s_0^3} + \frac{-6d_1 + 2d_2 s_0 - d_3 s_0^2}{s_0^4} \gamma + o(\gamma). \end{aligned}$$

böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{M}_3(\gamma) \equiv \mathcal{L}_\gamma(\hat{M}_3(z)) &= \frac{6}{\gamma^4} + \frac{f_1}{\gamma^3} + \frac{f_2}{\gamma^2} + \frac{f_3}{\gamma} + \frac{-2d_1 + d_2s_0 - d_3s_0^2}{s_0^3} \\ &+ \frac{-6d_1 + 2d_2s_0 - d_3s_0^2}{s_0^4}\gamma + o(\gamma)\end{aligned}\quad (49)$$

elde edilir. (36) denklemindeki $\tilde{M}_3(\gamma)$ ve (50) denklemindeki $\tilde{M}_3(\gamma)$ asimptotik açılımları eşleştirildiğinde aşağıdaki denklem sistemi sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned}f_4 &= \frac{-2d_1 + d_2s_0 - d_3s_0^2}{s_0^3} \\ f_5 &= \frac{-6d_1 + 2d_2s_0 - d_3s_0^2}{s_0^4}\end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümü şu şekildedir:

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{d_3s_0^2}{2} + f_4s_0^3 - \frac{f_5s_0^4}{2} \\ d_2 &= 2d_3s_0 + 3f_4s_0^2 - f_5s_0^4\end{aligned}$$

Ayrıca bilindiği üzere,

$$\lim_{z \rightarrow 0} M_3(z) = \lim_{z \rightarrow 0} E(S_{N(z)}^3) = E(\chi_1^{+3}) = \mu_3$$

ve (45) denklemini göz önüne alındığında

$$\lim_{z \rightarrow 0} \hat{M}_3(z) = f_3 + d_3.$$

Bu nedenle $f_3 + d_3 = \mu_3$ olmalıdır. Buradan

$$d_3 = \mu_3 - f_3,$$

dolayısıyla,

$$d_1 = \frac{\mu_3 - f_3}{2} s_0^2 + f_4 s_0^3 - \frac{f_5}{2} s_0^4,$$

$$d_2 = 2(\mu_3 - f_3) s_0 + 3f_4 s_0^2 - f_5 s_0^4$$

elde edilir. Böylece $M_3(z)$ fonksiyonu, katsayıları belirlenmiş olan $\widehat{M}_3(z)$ fonksiyonu ile değiştirilebilir. Öyleyse,

$$\widehat{M}_3(z) = z^3 + \frac{f_1}{2} z^2 + f_2 z + f_3 + (d_1 z^2 + d_2 z + d_3) e^{s_0 z}$$

dir.

2.8. Müdahalenin Gamma Dağılım Olması Durumunda, Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Moment Bazlı Yaklaşımlar

Bu bölümde, müdahalenin Gamma dağılımına sahip olması durumunda oluşan yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci için ergodik dağılımın momentlerine yönelik moment bazlı yaklaşımlar detaylı biçimde incelenecektir. Sürecin uzun vadeli davranışını karakterize eden ergodik dağılım momentleri, özellikle durağanlık koşullarının sağlandığı durumlarda sistemin yapısal özelliklerini anlamada önemli bir rol oynamaktadır. Kambo'nun moment bazlı yöntemi temel alınarak, geçiş dağılımlarının ve bekleme sürelerinin etkisini de göz önünde bulunduran şekilde, ergodik dağılımın ilk üç momentine ilişkin yaklaşık ifadeler türetilenektir. Amaç, klasik ergodik teorilerin sunduğu genel çerçeveyi daha hesaplanabilir, uygulamaya elverişli ve sayısal analiz açısından avantajlı bir hale getirmektir. Bu sayede, yarı-Markov süreçlerin uzun dönemli dinamikleri daha doğru ve güvenilir biçimde modellenebilecek ve özellikle kapalı formda çözümlenemeyen sistemler için pratik çözüm olanakları sağlanacaktır.

Not 2.8.1.

Bölüm 2.4'de $X(t)$ sürecinin kuruluşu verilmişti. Bu kısmın temel amacı müdahalenin $\alpha > 0, \lambda > 0$ parametrelili Gamma dağılımı olması durumunda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentini $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin uygun momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaçla $k = 1, 2, 3, 4, 5$; $x > 0$ olmak üzere aşağıdaki notasyonlar hatırlatılsın:

$$m_k = E(\eta_1^k), \quad M_k(x) = E(S_{N(z)}^k), \quad m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}, \quad M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}$$

Diğer yandan ζ_1 rasgele değişkeni (α, λ) parametrelili Gamma dağılımına sahip kabul edilecektir. Yani $\zeta_1 \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ 'dır. Bu durumda ζ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $\pi(z) \equiv P\{\zeta_1 \leq z\}$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\zeta(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 'dir. Bu durumda ζ_1 rasgele değişkeninin momentleri $E(\zeta_1^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\lambda^k}$, $k = 1, 2, \dots$ biçiminde hesaplanır ve ilk üç momentini aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(\zeta_1) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad E(\zeta_1^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}, \quad E(\zeta_1^3) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}.$$

Ayrıca, ζ rasgele değişkeninin moment çıkarıcı fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu da bilinmektedir:

$$M_\zeta(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha.$$

Yardımcı Teorem 2.8.1

$\{\zeta_n, n = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenler dizisi α ve λ parametrelili Gamma dağılımına sahip olsun. Ayrıca aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\mu_6 = E(\chi_1^{+6}) < \infty, \quad K \equiv -s_0 = \frac{6\mu_1(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2} > 0.$$

Bu durumda aşağıdaki moment bazlı yaklaşımlar elde edilir:

$$E(\widehat{M}_1(\zeta_1)) = \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + K} \right)^\alpha, \quad (50)$$

$$E(\zeta_1 \widehat{M}_1(\zeta_1)) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2} + \frac{\alpha\mu_2}{2\mu_1\lambda} + \frac{\alpha(2\mu_1^2 - \mu_2)\lambda^\alpha}{2\mu_1(\lambda + K)^{\alpha+1}}, \quad (51)$$

$$E(\zeta_1^2 \widehat{M}_1(\zeta_1)) = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\lambda^3} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\mu_2}{2\mu_1\lambda^2} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(2\mu_1^2 - \mu_2)\lambda^\alpha}{2\mu_1(\lambda + K)^{\alpha+2}}, \quad (52)$$

$$E(\widehat{M}_2(\zeta_1)) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2} + \frac{\alpha\mu_2}{\mu_1\lambda} + \frac{\mu_3}{3\mu_1} + c_1 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + K)^{\alpha+1}} + c_2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + K} \right)^\alpha, \quad (53)$$

$$E(\zeta_1 \widehat{M}_2(\zeta_1)) = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\lambda^3} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\mu_2}{\mu_1\lambda^2} + \frac{\alpha\mu_3}{3\mu_1\lambda} + c_1 \frac{\alpha(\alpha + 1)\lambda^\alpha}{(\lambda + K)^{\alpha+2}} + c_2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + K)^{\alpha+1}}, \quad (54)$$

$$E(\widehat{M}_3(\zeta_1)) = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\lambda^3} + f_1 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2\lambda^2} + f_2 \frac{\alpha}{\lambda} + f_3 + d_1 \frac{\alpha(\alpha + 1)\lambda^\alpha}{(\lambda + K)^{\alpha+2}} + d_2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + K)^{\alpha+1}} + d_3 \left(\frac{\lambda}{\lambda + K} \right)^\alpha. \quad (55)$$

İspat:

Teorem 2.7.1'de ifade edilen denklem ve notasyonlar kullanılırsa;

i)

$$\begin{aligned}
E\left(\widehat{M}_1(\zeta_1)\right) &\equiv \int_0^\infty \widehat{M}_1(z) d\pi(z) = \int_0^\infty \left[z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} e^{s_0 z} \right] d\pi(z) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty z d\pi(z)}_{E(\zeta_1)} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \underbrace{\int_0^\infty d\pi(z)}_1 + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \underbrace{\int_0^\infty e^{-Kz} d\pi(z)}_{E(e^{-K\zeta}) \equiv M_\zeta(-K)} \\
&= \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + K} \right)^\alpha.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
E\left(\zeta_1 \widehat{M}_1(\zeta_1)\right) &\equiv \int_0^\infty z \widehat{M}_1(z) d\pi(z) = \int_0^\infty \left[z^2 + \frac{\mu_2}{2\mu_1} z + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} z e^{s_0 z} \right] d\pi(z) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty z^2 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^2)} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \underbrace{\int_0^\infty z d\pi(z)}_{E(\zeta_1)} + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \underbrace{\int_0^\infty z e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} M_\zeta(-K)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2} + \frac{\alpha\mu_2}{2\mu_1\lambda} + \frac{\alpha(2\mu_1^2 - \mu_2)\lambda^\alpha}{2\mu_1(\lambda + K)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
E\left(\zeta_1^2 \widehat{M}_1(\zeta_1)\right) &\equiv \int_0^\infty z^2 \widehat{M}_1(z) d\pi(z) = \int_0^\infty \left[z^3 + \frac{\mu_2}{2\mu_1} z^2 + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} z^2 e^{s_0 z} \right] d\pi(z) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty z^3 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^3)} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \underbrace{\int_0^\infty z^2 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^2)} + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \underbrace{\int_0^\infty z^2 e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} \left[-\frac{\partial}{\partial K} M_\zeta(-K) \right]} \\
&= \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\lambda^3} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\mu_2}{2\mu_1\lambda^2} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(2\mu_1^2 - \mu_2)\lambda^\alpha}{2\mu_1(\lambda + K)^{\alpha+2}}.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
E\left(\widehat{M}_2(\zeta_1)\right) &\equiv \int_0^\infty \widehat{M}_2(z) d\pi(z) = \int_0^\infty [z^2 + h_1 z + h_2 + (c_1 z + c_2) e^{s_0 z}] d\pi(z) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty z^2 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^2)} + h_1 \underbrace{\int_0^\infty z d\pi(z)}_{E(\zeta_1)} + h_2 \underbrace{\int_0^\infty d\pi(z)}_1 + c_1 \underbrace{\int_0^\infty z e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} M_\zeta(-K)} \\
&\quad + c_2 \underbrace{\int_0^\infty e^{-Kz} d\pi(z)}_{M_\zeta(-K)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} + \frac{\alpha\mu_2}{\mu_1\lambda} + \frac{\mu_3}{3\mu_1} + c_1 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+1}} + c_2 \left(\frac{\lambda}{\lambda+K}\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
E\left(\zeta_1 \widehat{M}_2(\zeta_1)\right) &\equiv \int_0^\infty z \widehat{M}_2(z) d\pi(z) \\
&= \int_0^\infty [z^3 + h_1 z^2 + h_2 z + (c_1 z^2 + c_2 z) e^{s_0 z}] d\pi(z) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty z^3 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^3)} + h_1 \underbrace{\int_0^\infty z^2 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^2)} + h_2 \underbrace{\int_0^\infty z d\pi(z)}_{E(\zeta_1)} + c_1 \underbrace{\int_0^\infty z^2 e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} \left[-\frac{\partial}{\partial K} M_\zeta(-K) \right]} \\
&\quad + c_2 \underbrace{\int_0^\infty z e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} M_\zeta(-K)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} + \frac{\alpha(\alpha+1)\mu_2}{\mu_1\lambda^2} + \frac{\alpha\mu_3}{3\mu_1\lambda} + c_1 \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+2}} + c_2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}
E\left(\widehat{M}_3(\zeta_1)\right) &\equiv \int_0^{\infty} \widehat{M}_3(z) d\pi(z) \\
&= \int_0^{\infty} \left[z^3 + \frac{f_1}{2} z^2 + f_2 z + f_3 + (d_1 z^2 + d_2 z + d_3) e^{s_0 z} \right] d\pi(z) \\
&= \underbrace{\int_0^{\infty} z^3 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^3)} + \frac{f_1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} z^2 d\pi(z)}_{E(\zeta_1^2)} + f_2 \underbrace{\int_0^{\infty} z d\pi(z)}_{E(\zeta_1)} + f_3 \underbrace{\int_0^{\infty} d\pi(z)}_1 \\
&\quad + d_1 \underbrace{\int_0^{\infty} z^2 e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} \left[-\frac{\partial}{\partial K} M_{\zeta}(-K) \right]} + d_2 \underbrace{\int_0^{\infty} z e^{-Kz} d\pi(z)}_{-\frac{\partial}{\partial K} M_{\zeta}(-K)} + d_3 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-Kz} d\pi(z)}_{M_{\zeta}(-K)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} + f_1 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2\lambda^2} + f_2 \frac{\alpha}{\lambda} + f_3 + d_1 \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+2}} + d_2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+1}} \\
&\quad + d_3 \left(\frac{\lambda}{\lambda+K} \right)^\alpha.
\end{aligned}$$

İspat tamamlanmıştır.

Bu çalışmanın temel amacı Teorem 2.8.1 ile aşağıdaki gibi verilmiştir. Burada $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti kullanılarak $X(t)$ sürecinin ilk iki momenti için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşımlar elde edilmiştir.

Teorem 2.8.1

Teorem 2.5.1 ve Yardımcı Teorem 2.8.1'in koşulları sağlansın. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momenti için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşımlar, λ parametresi yeterince küçük olduğunda aşağıdaki gibi türetilir:

$$\widehat{E}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{B} \lambda^{-1} + \frac{A_1 \alpha}{B} + \frac{3A_1 \mu_2 - 2\mu_3}{6\mu_1 B} \lambda - \frac{\mu_1 c(\alpha+1)}{K^\alpha B} \lambda^\alpha, \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}(X^2) &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{B} \lambda^{-2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(18\mu_1 c + 3A_1)}{2B} \lambda^{-1} \\
&+ \frac{\alpha(9\mu_1\mu_3 c + \mu_3 + 3\mu_1 A_2)}{\mu_1 B} + \frac{2\mu_1 f_3 + 3A_2\mu_2 - A_1\mu_3}{2\mu_1 B} \lambda \\
&- \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\mu_1 c}{K^\alpha B} \lambda^{\alpha-1} - \frac{(\alpha+1)\mu_1 c(18\mu_1 c + 3A_1)}{2K^\alpha B} \lambda^\alpha. \tag{57}
\end{aligned}$$

Burada,

$$A_1 = m_{21}, \quad A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}, \quad m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}, \quad m_k = E(\eta_1^k), \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\mu_j = E(\chi_1^{+j}), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$B = \alpha + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \lambda; \quad c = \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1^2}; \quad K \equiv -s_0 = \frac{6\mu_1(2\mu_1^2 - \mu_2)}{(3\mu_2^2 - 2\mu_1\mu_3)}.$$

İspat:

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momenti için kesin ifadeler Teorem 2.5.1'de sırasıyla (11) ve (12) denklemleriyle verilmiştir. Bununla beraber Yardımcı Teorem 2.8.1'de elde edilen moment bazlı yaklaşımlar kullanılarak ispat yapılabilir.

İspat boyunca aşağıdaki asimptotik ifadeler sıklıkla kullanılacaktır. $|x| < 1$ için

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2);$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + o(x^2);$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

i) Öncelikle (11) denklemi,

$$\hat{E}(X) = \frac{1}{\underbrace{E(\hat{M}_1(\zeta_1))}_{I_1}} \underbrace{\left\{ E\left(\frac{(2\zeta_1 + m_{21})\hat{M}_1(\zeta_1)}{I_2}\right) - E(\hat{M}_2(\zeta_1)) \right\}}_{I_2}$$

olarak incelenir. (51) denkleminin ve $c_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$, $c = \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1^2}$ notasyonları kullanılarak,

$$\begin{aligned} E(\hat{M}_1(\zeta_1)) &= \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + K}\right)^\alpha \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F + \mu_1 c \frac{1}{K^\alpha} \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{K}}\right)^\alpha = \frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F + \mu_1 c \frac{\lambda^\alpha}{K^\alpha} \left(1 + \frac{\lambda}{K}\right)^{-\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F + \mu_1 c \frac{\lambda^\alpha}{K^\alpha} \left(1 - \frac{\alpha\lambda}{K} + o(\lambda)\right) \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F + \frac{\mu_1 c}{K^\alpha} \lambda^\alpha - \frac{\alpha\mu_1 c}{K^{\alpha+1}} \lambda^{\alpha+1} + o(\lambda^{\alpha+1}) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right) \left\{ 1 + \frac{\mu_1 c}{K^\alpha} \lambda^\alpha \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right)^{-1} - \frac{\alpha\mu_1 c}{K^{\alpha+1}} \lambda^{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right)^{-1} + o(\lambda^{\alpha+2}) \right\} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right) \left\{ 1 + \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha} \lambda^{\alpha+1} \left(1 + \frac{\mu_1 c_F}{\alpha} \lambda\right)^{-1} - \frac{\mu_1 c}{K^{\alpha+1}} \lambda^{\alpha+2} \left(1 + \frac{\mu_1 c_F}{\alpha} \lambda\right)^{-1} + o(\lambda^{\alpha+2}) \right\} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right) \left\{ 1 + \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha} \lambda^{\alpha+1} \left(1 - \frac{\mu_1 c_F}{\alpha} \lambda + o(\lambda)\right) - \frac{\mu_1 c}{K^{\alpha+1}} \lambda^{\alpha+2} \left(1 - \frac{\mu_1 c_F}{\alpha} \lambda + o(\lambda)\right) \right. \\ &\quad \left. + o(\lambda^{\alpha+2}) \right\} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right) \left\{ 1 + \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha} \lambda^{\alpha+1} - \frac{\mu_1 c}{K^\alpha} \left[\frac{\mu_1 c_F}{\alpha^2} + \frac{1}{K}\right] \lambda^{\alpha+2} + o(\lambda^{\alpha+2}) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv \frac{1}{E(\widehat{M}_1(\zeta_1))} = \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \mu_1 c_F\right)^{-1} \left\{1 + \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha} \lambda^{\alpha+1} - \frac{\mu_1 c}{K^\alpha} \left[\frac{\mu_1 c_F}{\alpha^2} + \frac{1}{K}\right] \lambda^{\alpha+2} + o(\lambda^{\alpha+2})\right\}^{-1} \\
&= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda \mu_1 c_F} \left\{1 - \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha} \lambda^{\alpha+1} + \frac{\mu_1 c}{K^\alpha} \left[\frac{\mu_1 c_F}{\alpha^2} + \frac{1}{K}\right] \lambda^{\alpha+2} + o(\lambda^{\alpha+2})\right\} \\
&= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda \mu_1 c_F} - \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha (\alpha + \lambda \mu_1 c_F)} \lambda^{\alpha+2} + o(\lambda^{\alpha+2}) \\
&\approx \frac{\lambda}{\alpha + \lambda \mu_1 c_F} - \frac{\mu_1 c}{\alpha K^\alpha (\alpha + \lambda \mu_1 c_F)} \lambda^{\alpha+2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
I_2 &\equiv E\left((2\zeta_1 + m_{21})\widehat{M}_1(\zeta_1)\right) - E\left(\widehat{M}_2(\zeta_1)\right) \\
&= E\left(\zeta_1 \widehat{M}_1(\zeta_1)\right) + A_1 E\left(\widehat{M}_1(\zeta_1)\right) - E\left(\widehat{M}_2(\zeta_1)\right)
\end{aligned}$$

ve burada (51), (52), (54) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2} + A_1 \frac{\alpha}{\lambda} + A_1 \frac{\mu_2}{2\mu_1} - \frac{\mu_3}{3\mu_1} + \left(\frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{\mu_1} - c_1\right) \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + K)^{\alpha+1}} \\
&\quad + \left(A_1 \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} - c_2\right) \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda + K)^\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $\widehat{E}(X) = I_1 \cdot I_2$ ifadesi hesaplanır ve $B = \alpha + \lambda \mu_1 c_F = \alpha + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \lambda$ olmak üzere terimler sıralanırsa,

$$\widehat{E}(X) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{B} \lambda^{-1} + \frac{A_1 \alpha}{B} + \frac{3A_1 \mu_2 - 2\mu_3}{6\mu_1 B} \lambda - \frac{\mu_1 c (\alpha + 1)}{K^\alpha B} \lambda^\alpha$$

elde edilir. Böylece (57) denkleminin ispatı tamamlanır.

ii) Şimdi (12) denklemini

$$\hat{E}(X^2) = \frac{1}{\underbrace{E(\hat{M}_1(\zeta_1))}_{I_1}} \left\{ \underbrace{E(\hat{M}_3(\zeta_1)) - 3E\left(\left(\frac{1}{2}m_{21} + \zeta_1\right)\hat{M}_2(\zeta_1)\right)}_{I_3} + E\left(\left(\frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{2} + 3m_{21}\zeta_1 + 3\zeta_1^2\right)\hat{M}_1(\zeta_1)\right) \right\}$$

olarak incelensin. I_1 denklemini ispatın (i) kısmında elde edilmiştir ve bu aşamada I_3 ifadesi hesaplanmalıdır. $A_1 = m_{21}$, $A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv E(\hat{M}_3(\zeta_1)) - 3E\left(\left(\frac{1}{2}m_{21} + \zeta_1\right)\hat{M}_2(\zeta_1)\right) \\ &\quad + E\left(\left(\frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{2} + 3m_{21}\zeta_1 + 3\zeta_1^2\right)\hat{M}_1(\zeta_1)\right) \\ &= E(\hat{M}_3(\zeta_1)) - \frac{3A_1}{2}E(\hat{M}_2(\zeta_1)) - 3E(\zeta_1\hat{M}_2(\zeta_1)) + 3A_2E(\hat{M}_1(\zeta_1)) \\ &\quad + 3A_1E(\zeta_1\hat{M}_1(\zeta_1)) + 3E(\zeta_1^2\hat{M}_1(\zeta_1)) \end{aligned}$$

dir ve burada (51-56) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \left[\frac{f_1}{2} + \frac{3A_1}{2} - \frac{3\mu_2}{2\mu_1} \right] + \frac{\alpha}{\lambda} \left[f_2 - \frac{\mu_3}{\mu_1} + 3A_2 \right] \\ &\quad + \left[f_3 + \frac{A_1\mu_3}{2\mu_1} + \frac{3A_2\mu_2}{2\mu_1} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+2}} \left[d_1 - 3c_1 + 3\left(\frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1}\right) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^{\alpha+1}} \left[d_2 - \frac{3A_1}{2} - 3c_2 + 3A_1\left(\frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1}\right) \right] + \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+K)^\alpha} \left[d_3 + 3A_2\left(\frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1}\right) \right]. \end{aligned}$$

bulunur. Burada kullanılan katsayılar Teorem 2.7.1’de belirtilen katsayılardır. Son olarak $\hat{E}(X^2) = I_1 \cdot I_3$ ifadesi hesaplanır ve $B = \alpha + \lambda\mu_1 c_F = \alpha + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \lambda$ ve $c = \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1^2}$ olmak üzere terimler sadeleştirilir ve sıralanırsa,

$$\begin{aligned} \hat{E}(X^2) &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{B} \lambda^{-2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(18\mu_1 c + 3A_1)}{2B} \lambda^{-1} \\ &\quad + \frac{\alpha(9\mu_1\mu_3 c + \mu_3 + 3\mu_1 A_2)}{\mu_1 B} + \frac{2\mu_1 f_3 + 3A_2\mu_2 - A_1\mu_3}{2\mu_1 B} \lambda \\ &\quad - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\mu_1 c}{K^\alpha B} \lambda^{\alpha-1} - \frac{(\alpha+1)\mu_1 c(18\mu_1 c + 3A_1)}{2K^\alpha B} \lambda^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (58) denkleminin ispatı tamamlanır.

İspat tamamlanmıştır.

Sonuç 2.8.1

Teorem 2.8.1’in koşulları altında, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının varyansı için elde edilen Kambo anlamında moment bazlı yaklaşım aşağıdaki gibidir:

$$\widehat{Var}(X) = \begin{cases} \lambda^{-2} V_1 + \lambda^{-1} V_2 + V_3 + \lambda^{\alpha-1} V_4, & 0 < \alpha \leq 2 \\ \lambda^{-2} V_1 + \lambda^{-1} V_2 + V_3 + \lambda V_5, & \alpha > 2. \end{cases} \quad (58)$$

Burada,

$$V_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{B} - \frac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{B^2},$$

$$V_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(18\mu_1 c + 3A_1)}{2B} - \frac{2A_1\alpha^2(\alpha+1)}{B^2},$$

$$V_3 = \frac{\alpha(9\mu_1\mu_3 c - \mu_3 + 3\mu_1 A_2)}{\mu_1 B} - \frac{A_1^2\alpha^2}{B^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)(3A_1\mu_2 - 2\mu_3)}{3\mu_1 B^2},$$

$$V_4 = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\mu_1 c}{K^\alpha B} - \frac{2\alpha(\alpha+1)^2 \mu_1 c}{K^\alpha B^2},$$

$$V_5 = \frac{2\mu_1 f_3 + 3A_2 \mu_2 - A_1 \mu_3}{2\mu_1 B} - \frac{\alpha A_1 (3A_1 \mu_2 - 2\mu_3)}{3\mu_1 B^2}.$$

Ayrıca A_i ($i = 1, 2$), B , K , c ve f_3 katsayıları Yardımcı Teorem 2.8.1 ve Teorem 2.8.1’de verilmiştir.

İspat:

İfade kolaylığı için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\hat{E}(X) = \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)}{B}}_{E_{11}} \lambda^{-1} + \underbrace{\frac{A_1 \alpha}{B}}_{E_{12}} + \underbrace{\frac{3A_1 \mu_2 - 2\mu_3}{6\mu_1 B}}_{E_{13}} \lambda - \underbrace{\frac{\mu_1 c(\alpha+1)}{K^\alpha B}}_{E_{14}} \lambda^\alpha,$$

$$\begin{aligned} \hat{E}(X^2) &= \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{B}}_{E_{21}} \lambda^{-2} + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)(18\mu_1 c + 3A_1)}{2B}}_{E_{22}} \lambda^{-1} \\ &+ \underbrace{\frac{\alpha(9\mu_1 \mu_3 c + \mu_3 + 3\mu_1 A_2)}{\mu_1 B}}_{E_{23}} + \underbrace{\frac{2\mu_1 f_3 + 3A_2 \mu_2 - A_1 \mu_3}{2\mu_1 B}}_{E_{24}} \lambda \\ &- \underbrace{\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\mu_1 c}{K^\alpha B}}_{E_{25}} \lambda^{\alpha-1} - \underbrace{\frac{(\alpha+1)\mu_1 c(18\mu_1 c + 3A_1)}{2K^\alpha B}}_{E_{26}} \lambda^\alpha. \end{aligned}$$

$\widehat{Var}(X) = \hat{E}(X^2) - [\hat{E}(X)]^2$ eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \widehat{Var}(X) &= [E_{21} \lambda^{-2} + E_{22} \lambda^{-1} + E_{23} + E_{24} \lambda - E_{25} \lambda^{\alpha-1} - E_{26} \lambda^{\alpha-2}] \\ &\quad - [E_{11} \lambda^{-1} + E_{12} + E_{13} \lambda - E_{14} \lambda^\alpha]^2 \\ &= [E_{21} \lambda^{-2} + E_{22} \lambda^{-1} + E_{23} + E_{24} \lambda - E_{25} \lambda^{\alpha-1} - E_{26} \lambda^{\alpha-2}] \\ &\quad - [E_{11}^2 \lambda^{-2} + E_{12}^2 + E_{13}^2 \lambda^2 + E_{14}^2 \lambda^{2\alpha} + 2E_{11} E_{12} \lambda^{-1} + 2E_{11} E_{13} \\ &\quad - 2E_{11} E_{14} \lambda^{\alpha-1} + 2E_{12} E_{13} \lambda - 2E_{12} E_{14} \lambda^\alpha - 2E_{13} E_{14} \lambda^{\alpha+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{-2}(E_{21} - E_{11}^2) + \lambda^{-1}(E_{22} - 2E_{11}E_{12}) + (E_{23} - E_{12}^2 - E_{11}E_{13}) + \lambda(E_{24} - 2E_{12}E_{13}) \\
&\quad + \lambda^2(-E_{13}^2) + \lambda^{\alpha-1}(-E_{25} + 2E_{11}E_{14}) + \lambda^\alpha(-E_{26} + 2E_{12}E_{14}) \\
&\quad + \lambda^{\alpha+1}(-2E_{13}E_{14}) + \lambda^{2\alpha}(-E_{14}^2).
\end{aligned}$$

α 'nın durumlarına göre terimler sıralanırsa $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının varyansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\widehat{Var}(X) &= \lambda^{-2} \underbrace{(E_{21} - E_{11}^2)}_{V_1} + \lambda^{-1} \underbrace{(E_{22} - 2E_{11}E_{12})}_{V_2} + \underbrace{(E_{23} - E_{12}^2 - E_{11}E_{13})}_{V_3} \\
&\quad + \lambda^{\alpha-1} \underbrace{(-E_{25} + 2E_{11}E_{14})}_{V_4}, \quad 0 < \alpha \leq 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{Var}(X) &= \lambda^{-2} \underbrace{(E_{21} - E_{11}^2)}_{V_1} + \lambda^{-1} \underbrace{(E_{22} - 2E_{11}E_{12})}_{V_2} + \underbrace{(E_{23} - E_{12}^2 - E_{11}E_{13})}_{V_3} \\
&\quad + \lambda \underbrace{(E_{24} - 2E_{12}E_{13})}_{V_5}, \quad \alpha > 2.
\end{aligned}$$

Burada $V_i, i = 1,2,3,4,5$ katsayıları basit matematiksel işlem ve sadeleştirmeler uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{B} - \frac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{B^2}, \\
V_2 &= \frac{\alpha(\alpha+1)(18\mu_1c + 3A_1)}{2B} - \frac{2A_1\alpha^2(\alpha+1)}{B^2}, \\
V_3 &= \frac{\alpha(9\mu_1\mu_3c - \mu_3 + 3\mu_1A_2)}{\mu_1B} - \frac{A_1^2\alpha^2}{B^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)(3A_1\mu_2 - 2\mu_3)}{3\mu_1B^2}, \\
V_4 &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\mu_1c}{K^\alpha B} - \frac{2\alpha(\alpha+1)^2\mu_1c}{K^\alpha B^2},
\end{aligned}$$

$$V_5 = \frac{2\mu_1 f_3 + 3A_2\mu_2 - A_1\mu_3}{2\mu_1 B} - \frac{\alpha A_1(3A_1\mu_2 - 2\mu_3)}{3\mu_1 B^2}.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.9. Moment Bazlı Yöntemler Kullanılarak Elde Edilen Ergodik Dağılım Momentleri İçin Özel Örnekler

Bu bölümde, moment bazlı analiz yöntemleri çerçevesinde ergodik dağılıma ilişkin momentlerin hesaplanmasına yönelik özel örnekler ele alınmıştır. Özellikle, zamanla değişen $X(t)$ süreci için ergodiklik varsayımı altında teorik momentlerin (beklenen değer ve varyans) analitik olarak nasıl elde edilebileceği, iki temel olasılık dağılımı üzerinden gösterilmiştir. İncelenen dağılımlar, sürekli ve bağımsız rasgele değişkenlere dayalı normal (Gauss) dağılım ile sınırlı tanım aralığına sahip düzgün (uniform) dağılımdır. Bu bağlamda, her bir dağılım için $E(X)$ ve $Var(X)$ ifadeleri ayrı ayrı türetilmiş, elde edilen sonuçlar ergodik özelliklerin moment bazlı yöntemlerle nasıl açığa çıkarılabileceğine dair örnek teşkil edecek biçimde sunulmuştur. Böylece, ergodik süreçlerin istatistiksel karakterizasyonunda moment temelli yaklaşımların etkinliği, farklı dağılım yapılarına sahip süreçler üzerinden somutlaştırılmıştır.

Örnek 2.9.1.

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecini oluşturan η_i talep rasgele değişkenlerinin $\mu = 1$ ve $\sigma^2 = 1$ parametreleri ile normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. Yani $\eta_1 \sim N(1,1)$ olsun. Python (3.11.0) sürümünü ile 10^8 kez tekrarlanan bir işlem yapılarak birinci basamak yüksekliği χ_1^+ 'nin ilk altı momentleri elde edilmek istenmiştir. Bu amaçla, Ek Şekil 2'de verilen kod dizininin çalıştırılması sonucu elde edilen $\mu_i = E(\chi_1^+)$, $i = \overline{1,6}$ momentleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\cong 1.25, & \mu_2 &\cong 2.18, & \mu_3 &\cong 4.59, \\ \mu_4 &\cong 10.97, & \mu_5 &\cong 28.98, & \mu_6 &\cong 83.04. \end{aligned}$$

Elde edilen momentler kullanılarak aşağıdaki katsayılar hesaplanır:

$$\mu_1 c \equiv \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \cong 0.378, \quad K \equiv \frac{6\mu_1(2\mu_1^2 - \mu_2)}{(3\mu_2^2 - 2\mu_1\mu_3)} \cong 2.547,$$

$$B \equiv \alpha + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \lambda = \alpha + 0.87\lambda.$$

Ayrıca $\eta_1 \sim N(1,1)$ olduğu için $m_1 \equiv E(\eta_1) = 1$ ve $m_2 \equiv E(\eta_1^2) = 2$ olduğu açıktır. Böylece,

$$A_1 \equiv m_{21} = 2, \quad A_2 \equiv \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3} = \frac{2}{3}.$$

Elde edilen katsayılar (57) denkleminde kullanılırsa Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreci $X(t)$ 'nin ergodik dağılımının ilk momenti için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{E}(X) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{B} \lambda^{-1} + \frac{2\alpha}{B} - \frac{0.52}{B} \lambda + \frac{0.38(\alpha + 1)}{(2.48)^\alpha B} \lambda^\alpha.$$

Diğer yandan bu katsayılar Sonuç 2.8.1'de kullanılır ve düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$V_1 = \frac{\alpha(\alpha + 1)[(\alpha + 2)B - \alpha^2(\alpha + 1)^2]}{B^2},$$

$$V_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)[6.38B - 4\alpha(\alpha + 1)]}{B^2},$$

$$V_3 = \frac{\alpha[10.74B - 5.63\alpha - 1.63]}{B^2},$$

$$V_4 = \frac{(\alpha + 1)[0.38(\alpha + 2)B - 0.75\alpha(\alpha + 1)]}{(2.48)^\alpha B^2},$$

$$V_5 = \frac{168.16B - 3.27\alpha}{B^2}.$$

Böylece,

$$\sigma_1^2 = \left[\frac{\alpha(\alpha+1)[(\alpha+2)B - \alpha(\alpha+1)]}{B^2} \right] \lambda^{-2} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)[6.38B - 4\alpha(\alpha+1)]}{B^2} \right] \lambda^{-1} \\ + \left[\frac{\alpha[10.74B - 5.63\alpha - 1.63]}{B^2} \right] + \left[\frac{(\alpha+1)[0.38(\alpha+2)B - 0.75\alpha(\alpha+1)]}{(2,48)^\alpha B^2} \right] \lambda^{\alpha-1},$$

$$\sigma_2^2 = \left[\frac{\alpha(\alpha+1)[(\alpha+2)B - \alpha(\alpha+1)]}{B^2} \right] \lambda^{-2} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)[6.38B - 4\alpha(\alpha+1)]}{B^2} \right] \lambda^{-1} \\ + \left[\frac{\alpha[10.74B - 5.63\alpha - 1.63]}{B^2} \right] + \left[\frac{168.16B - 3.27\alpha}{B^2} \right] \lambda.$$

olmak üzere, Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreci $X(t)$ 'nin ergodik dağılımının varyansı için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widehat{Var}(X) = \begin{cases} \sigma_1^2, & 0 < \alpha \leq 2 \\ \sigma_2^2, & \alpha > 2 \end{cases}.$$

Örnek 2.9.2.

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecini oluşturan η_i talep rasgele değişkenlerinin $(-1,3)$ parametrelili düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Yani $\eta_1 \sim U(-1,3)$ olsun. Python (3.11.0) sürümünü ile 10^8 kez tekrarlanan bir işlem yapılarak birinci basamak yüksekliği χ_1^+ 'nin ilk altı momentleri elde edilmek istenmiştir. Bu amaçla, Ek Şekil 3'de verilen kod dizininin çalıştırılması sonucu elde edilen $\mu_i = E(\chi_1^+), i = \overline{1,6}$ momentleri aşağıdaki gibidir:

$$\mu_1 \cong 1.43, \quad \mu_2 \cong 2.76, \quad \mu_3 \cong 6.04, \\ \mu_4 \cong 14.17, \quad \mu_5 \cong 34.82, \quad \mu_6 \cong 88.27.$$

Elde edilen momentler kullanılarak aşağıdaki katsayılar hesaplanır:

$$\mu_1 c \equiv \frac{2\mu_1^2 - \mu_2}{2\mu_1} \cong 0.465, \quad K \equiv \frac{6\mu_1(2\mu_1^2 - \mu_2)}{(3\mu_2^2 - 2\mu_1\mu_3)} \cong 2.045,$$

$$B \equiv \alpha + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \lambda = \alpha + 0.96\lambda.$$

Ayrıca $\eta_1 \sim U(-1,3)$ olduğu için $m_1 \equiv E(\eta_1) = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ ve $m_2 \equiv E(\eta_1^2) = \frac{3^2+3(-1)+(-1)^2}{3} = \frac{7}{3}$ olduğu açıktır. Böylece,

$$A_1 \equiv m_{21} = \frac{7}{3}, \quad A_2 \equiv \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3} = \frac{29}{3}.$$

Elde edilen katsayılar (57) denkleminde kullanılırsa Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreci $X(t)$ 'nin ergodik dağılımının ilk momenti için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{E}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{B} \lambda^{-1} + \frac{2.33\alpha}{B} - \frac{0.84}{B} \lambda + \frac{0.46(\alpha+1)}{(2.05)^\alpha B} \lambda^\alpha.$$

Diğer yandan bu katsayılar Sonuç 2.8.1'de kullanılır ve düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$V_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)[(\alpha+2)B - \alpha^2(\alpha+1)^2]}{B^2},$$

$$V_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)[7.68B - 4.67\alpha(\alpha+1)]}{B^2},$$

$$V_3 = \frac{\alpha[21.1B - 8.89\alpha - 3.45]}{B^2},$$

$$V_4 = \frac{(\alpha+1)[0.46(\alpha+2)B - 0.93\alpha(\alpha+1)]}{(2.05)^\alpha B^2},$$

$$V_5 = \frac{216.21B - 8.04\alpha}{B^2}.$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & \left[\frac{\alpha(\alpha + 1)[(\alpha + 2)B - \alpha(\alpha + 1)]}{B^2} \right] \lambda^{-2} + \left[\frac{\alpha(\alpha + 1)[7.68B - 4.67\alpha(\alpha + 1)]}{B^2} \right] \lambda^{-1} \\ & + \left[\frac{\alpha[21.1B - 8.89\alpha - 3.45]}{B^2} \right] + \left[\frac{(\alpha + 1)[0.46(\alpha + 2)B - 0.93\alpha(\alpha + 1)]}{(2.05)^\alpha B^2} \right] \lambda^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 = & \left[\frac{\alpha(\alpha + 1)[(\alpha + 2)B - \alpha(\alpha + 1)]}{B^2} \right] \lambda^{-2} + \left[\frac{\alpha(\alpha + 1)[7.68B - 4.67\alpha(\alpha + 1)]}{B^2} \right] \lambda^{-1} \\ & + \left[\frac{\alpha[21.1B - 8.89\alpha - 3.45]}{B^2} \right] + \left[\frac{216.21B - 8.04\alpha}{B^2} \right] \lambda. \end{aligned}$$

olmak üzere, Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreci $X(t)$ 'nin ergodik dağılımının varyansı için Kambo anlamında moment bazlı yaklaşım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widehat{Var}(X) = \begin{cases} \sigma_1^2, & 0 < \alpha \leq 2 \\ \sigma_2^2, & \alpha > 2 \end{cases}.$$

3. BULGULAR

Bu çalışmada, gamma müdahaleli bir rasgele yürüyüş süreci olan $X(t)$ 'nin ergodik dağılımina ait beklenen değer ve varyans için moment bazlı yaklaşık ifadeler elde edilmiştir. Elde edilen bulgular, literatürde genellikle büyük- O ve küçük- o notasyonlarıyla ifade edilen asimptotik açılımların, kalan terimlerin yakınsaklık davranışlarını net biçimde ortaya koymakta yetersiz kaldığını göstermektedir. Bu çalışmada önerilen yaklaşık ifadeler ise, söz konusu kalan terimlerin yakınsama hızlarını ve davranışlarını doğrudan gözleme imknı sunmaktadır.

Bölüm 2.6'da, Erlang dağılımı altında yapılan sayısal incelemelerde, Kambo'nun moment bazlı yaklaşımının doğruluğu test edilmiştir. Yapılan analizler, λt değerı büyük olduğunda, bu yaklaşımın asimptotik sonuçlarla oldukça yakın sonuçlar verdiğini göstermektedir. Öte yandan, λt değerı küçük olduğunda, Kambo'nun moment bazlı yaklaşımıyla elde edilen sonuçların Feller'in klasik asimptotik ifadelerine göre daha yüksek doğruluk sunduğu gözlemlenmiştir.

Bu sonuçlar, hem teorik hem de sayısal düzeyde Kambo'nun yaklaşımının, $X(t)$ rasgele yürüyüş sürecinin karakteristiklerinin daha doğru bir şekilde tahmin edilmesinde güçlü bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ilk olarak yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci ele alınmış ve Kambo (2012) tarafından önerilen moment bazlı yöntem kullanılmıştır.

- 1) Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci modeli temsil eden $X(t)$ sürecinin matematiksel kuruluşu verilmiştir.
- 2) Sürecin ergodiklik şartları incelenmiştir.
- 3) Sürecin sınır fonksiyonelinin momentleri ve bu momentler yardımıyla sürecin ergodik dağılımının momentlerinin kesin haline ilişkin çalışmalar verilmiştir.
- 4) Kesin formüllerin elde edilmesindeki zorluğu gidermek için asimptotik ve yaklaşık formüllerin sonuçları değerlendirilmiştir.
- 5) Kambo'nun moment bazlı yaklaşımı uygulanarak elde edilen formüllerin, mevcut literatürdeki (Feller) formüllere göre daha yüksek kesinliğe sahip olduğunu göstermek için özel bir örnek ele alınmıştır.
- 6) Kambo'nun moment bazlı yaklaşımına göre üretilen yaklaşık formüllerin kullanımının daha uygulanabilir ve etkili olduğu sonucuna varılmıştır.
- 7) Sürecin sınır fonksiyonelinin momentleri moment bazlı yaklaşık formülle elde edilmiştir.
- 8) Sınır fonksiyonelinin momentleri yardımıyla sürecin ergodik dağılımının momentleri de Kambo anlamında moment bazlı yöntemlerle incelenmiştir.
- 9) Gamma dağılımlı müdahaleye sahip $X(t)$ rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımının beklenen değer ($E(X)$) ve varyansı ($VAR(X)$) moment bazlı yaklaşık formülle elde edilmiştir.
- 10) Talepler normal dağılıma sahip olduğunda Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımının beklenen değer ve varyansına ilişkin moment bazlı yaklaşık sonuçlar bir örnekle somut olarak elde edilmiştir.
- 11) Talepler sürekli düzgün dağılıma sahip olduğunda Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımının beklenen değer ve varyansına ilişkin moment bazlı yaklaşık sonuçlar bir örnekle somut olarak elde edilmiştir.

5. ÖNERİLER

Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri üzerine yapılan çalışmalar literatürde yaygın olsa da bu modeller için moment bazlı yaklaşımlara dayanan formüllerle ilgili belirgin bir araştırma boşluğu bulunmaktadır. Bu tez, bu eksikliği gidermeye yönelik literatüre katkı sunmayı hedeflemektedir. Bununla birlikte, ileride yapılacak çalışmalar şu yönlerde geliştirilebilir:

- 1) Müdahaleyi temsil eden rasgele değişkenin farklı olasılık dağılımlarına sahip olduğu durumlar dikkate alınarak benzer bir modelin analizi yapılabilir.
- 2) Talep miktarını temsil eden rasgele değişkenlerin dağılım türleri çeşitlendiğinde, bu değişkenlerin momentleri hesaplanarak ulaşılan sonuçlar aracılığıyla mevcut yaklaşımların genişletilmesi sağlanabilir.
- 3) Sıçrama büyüklüklerini ifade eden (η_i) rasgele değişkenler ile sıçramalar arasındaki sürelerin (ξ_i) birbirine bağımlı olması halinde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının sayısal karakteristiklerinin moment bazlı yaklaşık yöntem ile elde edilmesi mümkündür.
- 4) Geliştirilen sonuçların özellikle stok kontrol sistemleri, kuyruk teorisi modelleri, finans uygulamaları, güvenilirlik analizleri gibi çeşitli alanlarda kullanılabilirliği araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Afanas'eva, L.G., & Bulinskaya, E.V. (1980). *Stochastic Processes In The Theory Of Queues And Inventory Control (Russian)*, Springer-Verlag, Moskova.
- Afanas'eva, L. G., & Bulinskaya, E. V. (1981). Storage Capacity Optimization. *Engineering Cybernetics*, 19(5), 49-57.
- Afanas'eva, L. G., & Bulinskaya, E. V. (1984). Some Asymptotic Results For Random Walks In A Strip. *Teoriya Veroyatnostei I Ee Primeneniya*, 29(4), 654-668.
- Alakoç, B., Bektaş Kamlık, A., Yazır, T., & Khaniyev, T. (2024). Moment-Based Approximation For Variance Of Semi-Markovian Random Walk With Gamma Distributed Interference Of Chance. *Turkish Journal Of Mathematics*, 48(6), 1037-1054.
- Aliyev, R., Khaniyev, T., & Kesemen, T. (2009). Asymptotic Expansions For The Moments Of The Semi-Markovian Random Walk With Gamma Distributed Interference Of Chance. *Communications In Statistics-Theory And Methods*, 39(1), 130-143.
- Aliyev, R., & Khaniyev, T. (2014). On The Moments Of A Semi-Markovian Random Walk With Gaussian Distribution Of Summands. *Communications In Statistics-Theory And Methods*, 43(1), 90-104.
- Aliyev, R. T., Khaniyev, T., & Gezer, B. (2016). Weak Convergence Theorem For Ergodic Distribution Of A Semi-Markovian Random Walk With A Generalized Reflecting Barrier. *Theory Probability And Applications*, 60(3), 246-258.
- Aliyev, R. T., & Khaniyev, T. A. (2017). On The Limiting Behavior Of The Characteristic Function Of The Ergodic Distribution Of The Semi-Markov Walk With Two Boundaries. *Mathematical Notes*, 102(4), 444-454.
- Anisimov, V. V. (1970). Limit Distributions Of Functionals Of A Semi-Markov Process Given On A Fixed Set Of States Up To The Time Of First Exit. In *Soviet Math. Dokl*, 11(4), 1002-1004.
- Anisimov, V. V. (1973). The Limiting Behaviour Of A Semi-Markov Process With A Decomposable State Space. *Soviet Math*, 13, 1276-1279.
- Anisimov, V. V. (1994). Limit Theorems For Processes With Semi-Markov Switching And Their Applications. *Random Oper. Stochastic Equations*, 2(4), 333-352.
- Bartholomew, D.J. (1973). *Stochastic Models For Social Processes*. Wiley, Chichester.
- Bartholomew, D.J. (1976). Renewal Theory Models In Manpower Planning. *Symp. Proc. Series* 8, 57-73.

- Bartholomew, D.J., & Forbes, A.F. (1979). *Statistical Techniques For Manpower Planning*. Wiley, Chichester.
- Borovkov, A. A. (1965). On The First Passage Time For One Class Of Processes With Independent Increments. *Theory Of Probability & Its Applications*, 10(2), 331-334.
- Borovkov, A. A. (1975). On A Walk In A Strip With Inhibitory Boundaries. *Mathematical Notes Of The Academy Of Sciences Of The Ussr*, 17, 385-389.
- Borovkov, A. (1976). *Stochastic Processes In Queueing Theory*. Springer-Verlag, New York.
- Borovkov, A. A. (1984). *Asymptotic Methods In Queueing Theory*. J. Wiley, New York.
- Campbell, A. G. (2018). Simple Approximations To The Renewal Function. University Honors Program Thesis. University Of Nebraska, Omaha.
- Chang, J. T., & Peres, Y. (1997). Ladder Heights, Gaussian Random Walks And The Riemann Zeta Function. *The Annals Of Probability*, 787-802.
- Çınlar, E. (1968). Some Joint Distributions For Markov Renewal Processes. *Australian Journal Of Statistics*, 10(1), 8-20.
- Çınlar, E. (1969). Markov Renewal Theory. *Advances In Applied Probability*, 1(2), 123-187.
- Çınlar, E. (1975). *Introduction To Stochastic Processes*. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dzhafarov, V. S., Nasirova, T. H., & Skorohod, A. V. (1976). On The Limit Of Certain Process With Semi Independent Increments, *Theor. Probab. Math. Statist*, 5, 52-57.
- El-Shehawey, M. A. (1992). Limit Distribution Of First Hitting Time Of Delayed Random Walk. *J. Ind. Soc. Oper. Res*, 13(1-4), 63-72.
- Ezhov, I. I., & Korolyuk, V. S. (1967). Semi-Markov Processes And Their Applications. *Cybernetics*, 3, 50-56.
- Ezhov, I. I., & Shurenkov, V. M. (1977). Ergodic Theorems Connected With The Markov Property Of Random Processes. *Theory Of Probability & Its Applications*, 21(3), 620-624.
- Feller, W. (1964). On Semi-Markov Processes. *Proceedings Of The National Academy Of Sciences*, 51(4), 653-659.
- Feller, W. (1971). *An Introduction To Probability Theory And Its Applications, Volume 2* (Vol. 2). John Wiley & Sons, New York.
- Gihman, I. I., & Skorohod, A. V. (1975). *Theory Of Stochastic Processes 2*, Springer-Verlag, New York.
- Gnedenko, I. I., & Kovalenko, I. N. (1968). *Introduction To Queing Theory, Ix, Translation Edited By D. Louvish*. Jerusalem: Israel Program For Scientific Translation.

- Gökpınar, F., Khaniyev, T., & Mammadova, Z. (2013). The Weak Convergence Theorem For The Distribution Of The Maximum Of A Gaussian Random Walk And Approximation Formulas For Its Moments. *Methodology And Computing In Applied Probability*, 15, 333-347.
- Gusak, D. V., & Koralyuk, V. S. (1968). On The First Passage Time Across A Given Level For Processes With Independent Increments. *Theory Of Probability & Its Applications*, 13(3), 448-456.
- Gusak, D. V., & Korolyuk, V. S. (1969). On The Joint Distribution Of A Process With Stationary Increments And Its Maximum. *Theory Of Probability & Its Applications*, 14(3), 400-409.
- Hanalioglu, Z., Agakishiyev, T. K. I., & Agakishiyev, I. (2015). Weak Convergence Theorem For The Ergodic Distribution Of A Random Walk With Normal Distributed Interference Of Chance. *Twms Journal Of Applied And Engineering Mathematics*, 5(1), 61-73.
- Hanalioglu, Z., Poladova, A., & Khaniyev, T. (2023). Approximation Results For The Moments Of Random Walk With Normally Distributed Interference Of Chance. *Turkish Journal Of Mathematics*, 47(1), 333-350.
- Janssen, A. J. E. M., & Van Leeuwaarden, J. S. (2007). On Lerch's Transcendent And The Gaussian Random Walk.
- Jiang, R. (2020). A Novel Two-Fold Sectional Approximation Of Renewal Function And Its Applications. *Reliability Engineering & Systems Safety*, 193, 106624.
- Jiang, R. (2022). Two Approximations Of Renewal Function For Any Arbitrary Lifetime Distribution. *Ann Oper Res* 311, 151–165.
- Kambo, N. S., Rangan, A. & Hadji, E. M.. 2012. Moments-Based Approximation To The Renewal Function. *Communications In Statistics: Theory And Methods*, 41(5), 851-68.
- Kamışlık, A. B., Baghezze, F., Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2024). Moment-Based Approximations For Stochastic Control Model Of Type (S, S). *Communications In Statistics-Theory And Methods*, 53(21), 7505-7516.
- Kastenbaum, M. A. (1966). A Dialysis System With One Absorbing and One Semi-Reflecting State. *Journal Of Applied Probability*, 3(2), 365-374.
- Kesemen, T. (2013). On The Semi-Markovian Random Walk With Delay and Weibull Distributed Interference Of Chance. *Hacettepe Journal Of Mathematics And Statistics*, 42(3), 299-307.
- Kesemen, T., Küçük, Z., Khaniyev, T., & Öçal, Ç. (2017). Three-Term Asymptotic Expansion: A Semi-Markovian Random Walk With A Generalized Beta Distributed Interference Of Chance. *Communications In Statistics-Theory And Methods*, 46(3), 1445-1455.

- Keyfitz, N. (1968). *An Introduction To Mathematics Of Population*. Addison-Wesley, Reading, Ma.
- Khaniev, T. A. (1984). Distribution Of A Semi-Markov Walk With Two Delay Screens (Russian), Some Questions Of The Theory Of Stochastic Processes, Kiev, Collect Sci.
- Khaniev, T. A. (1986a). The Explicit Form Of The Ergodic Distribution Of The Process Of Semi-Markov Walk Dependent Components (Russian), Probabilistic Method For The Investigation Of Systems With An Infinite Number Of Degrees Of Freedom, Kiev. *Collect. Sci. Works*, 119-125.
- Khaniev, T. A. (1986b). An Ergodic Theorem For A Semi-Markov Walk With Two Delay Screens (Russian), *Izv. Acad. Nauk. Az. Ssr, Ser. Fiz. Tekh. Math. Nauk*, 4, 37-42.
- Khaniev, T. A. (1988). Distribution Of A Process Of Semi-Markov Walk On A Closed Interval With Exponentially Distributed Components, *Izv. Acad. Nauk. Az. Ssr, Ser. Fiz. Tekh. Math. Nauk*, 1, 45-50.
- Khaniyev, T. (2003). Some Asymptotic Results For The Semi-Markovian Random Walk With A Special Barrier. *Turkish Journal Of Mathematics*, 27(2), 251-271.
- Khaniyev, T. A. (2005). About moments of generalized renewal process. *Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phys. Tech. and Math. Sciences*, 25(1), 95-100.
- Kharlamov, B. P. (1977). On Convergence Of Semi-Markov Walks To A Continuous Semi-Markov Process. *Theory Of Probability & Its Applications*, 21(3), 482-498.
- Korolyuk, V. S., & Turbin, A. F. (1976). *Semi - Markov Processes And Their Applications (Russian)*. Izdatel'stvo, Nauka Dumka, Kiev.
- Korolyuk, V. S., & Borovskikh, Y. U. (1981). *Analytical Problems For Asymptotics Of Probability Distributions*. Nauka Dumka, Kiev.
- Korolyuk, V. S., & Pirliev, B. (1984). Random Walk On A Semi-Axis On A Superposition Of Two Renewal Processes (Russian), *Ukr. Math. Zh.*, 36(4), 433-436.
- Levy, P. (1954). Processus Semi-Markoviens. *Proc. Iii. Internat. Congress. Math*, 416-426. Amsterdam.
- Li, D., Xu, G., Gao, M., Song, Z., Zhang, Q., & Zhang, W. (2024). Performance Analyses Of RIS-Assisted Stochastic Uav Mmwave Relay Communication System With Moment Matching Estimation. *Ieee Wireless Communications Letters*.
- Lotov, V. I. (1991). On The Asymptotics Of Distributions In Two-Sided Boundary Problems For Random Walks Defined On A Markov Chain. *Sib. Adv. Math*, 1(2), 26-51.
- Lotov, V. I. (1992). On Random Walks In A Strip. *Theory Of Probability & Its Applications*, 36(1), 165-170.
- Lotov, V. I. (1996). On Some Boundary Crossing Problems For Gaussian Random Walks. *The Annals Of Probability*, 2154-2171.

- Maden, S., & Shamilova, B. G. (2016). The Laplace Transform Of A Boundary Functional Of The Semi-Markovian Random Walk Process With Two Delaying Barriers, *Ordu Univ. J. Sci. Tech*, 6(1), 43-53.
- Mitov, K. V., & Omev, E. (2014). Intuitive Approximations For The Renewal Function. *Statistics & Probability Letters*, 84, 72–80.
- Mitov, K. V., & Omev, E. (2014). *Renewal Processes*. Springer Breifs İn Statistics.
- Nagaev, S. V. (2010). Exact Expressions For The Moments Of Ladder Heights. *Siberian Mathematical Journal*, 51(4), 675-695.
- Nasirova, T. H., & Skorohod, A. V. (1978). On A Class Of Jump Processes With Delaying Barrier, *Theor. Probab. Math. Statist*, 16(1), 81-94.
- Nasirova, T. H. (1979). Distribution Of A Semi-Markov Walk Process With Delaying Barrier, *Theor. Probab. Math. Statist*, 20, 90-97.
- Nasirova, T. H. (1984). Processes Of Semi-Markov Random Walk. *Elm, Baku*.
- Parsa, H., & Jin, M. (2013). An İmproved Approximation For The Renewal Function And İts İntegral With An Application İn Two-Echelon İVENTORY Management. *International Journal Of Production Economics*, 146(1), 142–152.
- Politis, K., & Pitts, S. M. (1998). Approximations For Solutions Of Renewal-Type Equations. *Stochastic Processes And Their Applications*, 78(2), 195-216.
- Rogozin, B. A. (1964). On The Distribution Of The First Jump. *Theory Of Probability & Its Applications*, 9(3), 450-465.
- Rogozin, B. A. (1965). On Some Classes Of Processes With İndependent İncrements. *Theory Of Probability & Its Applications*, 10(3), 479-483.
- Serfozo, R. F. (1971). Functions Of Semi-Markov Processes. *Siam Journal On Applied Mathematics*, 20(3), 530-535.
- Sevinç, Ö. (2020). Genel Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Süreci için Asimtotik Yaklaşım.
- Shurenkov, V. M. (1981). *Ergodic Theorems And Related Questions Of The Theory Of Random Processes (Russian)*. Naukova Dumka, Kiev.
- Shurenkov, V. M. (1984). On The Markov Renewal Theory. *Teor. Veroyatnost. Primen*, 29(2), 248-263.
- Sil'vestrov, D. S. (1975). Limit Theorems For Semi-Markov Processes And Their Applications I. *Theor. Probab. Math. Statist*, 3, 159-176.
- Sil'vestrov, D. S. (1975). Limit Theorems For Semi-Markov Processes And Their Applications II. *Theor. Probab. Math. Statist*, 3, 177-198.
- Skorohod, A. V. (1967). *Random Processes With İndependent İncrements*. Nauka, Moscow.

- Skorokhod, A. V., & Slobodenyuk, N. P. (1965). Limit Theorems For Random Walks, *I. Theory Of Probability & Its Applications*, 10(4), 596-606.
- Smeitink, E., & Dekker, R. (1990). A Simple Approximation To The Renewal Function. *Ieee Transactions On Reliability*, 39(1), 71-75.
- Smith, W. L. (1955). Regenerative Stochastic Processes. *Proceedings Of The Royal Society Of London. Series A. Mathematical And Physical Sciences*, 232(1188), 6-31.
- Smith, W. L. (1958). Renewal Theory And Its Ramifications. *Journal Of The Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 20(2), 243-284.
- Smith, W. L. (1959). On The Cumulants Of Renewal Processes. *Biometrika*, 46(1/2), 1-29.
- Smith, W. L. (1965). Some Peculiar Semi-Markov Processes. In *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, 2(2), 255-263.
- Spitzer, F. (1956). A Combinatorial Lemma And Its Application To Probability Theory. *Transactions Of The American Mathematical Society*, 82(2), 323-339.
- Spitzer, F. (1964). *Principles Of Random Walk*. D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey.
- Şahin, I. (1983). On The Continuous-Review (S, S) Inventory Model Under Compound Renewal Demand And Random Lead Times. *Journal Of Applied Probability*, 20(1), 213-219.
- Takacs, L. (1954). Bizonyos Tipusu Requirrens Sztochasztikus Folyamotok Vizsgalatarol Magyartud. *Akad. Math. Kutato. Int. Kozl.*, 3, 1-2.
- Takacs, L. (1977). *Combinatorial Methods In The Theory Of Stochastic Processes*, 2nd Ed, Huntington, Robert E. Krieger Publishing Co. X1, New York.
- Tomkó, J. (1989). On The Theory Of Semi-Markov Processes With A General Sample Space. *Teoriya Veroyatnostoni I Ee Primeneniya*, 34(2), 314-329.
- Weesakul, B. (1961). The Random Walk Between A Reflecting And An Absorbing Barrier. *The Annals Of Mathematical Statistics*, 32(3), 765-769.
- Xie, M. (1989). On The Solution Of Renewal-Type Integral Equations. *Statistical Computation And Simulation*, 18(1), 281-293.
- Xie, M., Preuss, W., & Cui, L. (2003). Error Analysis Of Some Integration Procedures For Renewal Equation And Convolution Integrals. *Statistical Computation And Simulation*, 73(1), 59-70.
- Zhang, Y. L. (1992). Some Problems On A One-Dimensional Correlated Random Walk With Various Types Of Barrier. *Journal Of Applied Probability*, 29(1), 196-201.

7. EKLER

Ek 1: Birinci Basamak Yüksekliğinin Momentleri Üzerine

Ek 2: Hesaplamalarda Kullanılan Python Kodları



EK 1: BİRİNCİ BASAMAK YÜKSEKLİĞİNİN MOMENTLERİ ÜZERİNE

$E(X^n)$ momentlerinin hesaplanabilmesi için $\mu_n = E(\chi_1^{+n})$ momentlerinin bilinmesi gerekmektedir. χ_1^+ rasgele değişkeni ikinci bölümde tanımlandıklarına göre $S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$ rasgele yürüyüş sürecinin basamak yükseklikleridir. Basamak yüksekliğine ait momentlerin belirlenmesi genel olarak zorlayıcı bir problemdir. Bununla birlikte, bazı özel durumlarda birinci basamak yüksekliğinin momentlerine ilişkin kesin çözümler elde edilebilmiştir. Örneğin, Gauss rasgele yürüyüş süreçlerinde, beklenen değer sıfır iken, ilk beş momente dair kapalı formüller bulunmuştur.

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\text{Spitzer, 1964});$$

$$\mu_2 = A, \quad (\text{Lotov, 1977});$$

$$\mu_3 = \frac{3\sqrt{2}}{8}(1 + 2A^2), \quad (\text{Chang ve Peres, 1977});$$

$$\mu_4 = \frac{3}{2}A + A^3 + B, \quad (\text{Chang ve Peres, 1977});$$

$$\mu_5 = \frac{5\sqrt{2}}{32}(5 + 12A^2 + 4A^4 + 16AB), \quad (\text{Nagaev, 2010}).$$

Burada, $A = -\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{\pi}}$; $B = \frac{\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}}$. Ayrıca $\zeta(\cdot)$ bir Riemann Zeta fonksiyonudur. Bu kesin ifadeler kullanılarak aşağıdaki değerler elde edilmiştir:

$$\mu_1 = 0.707106781 \dots; \mu_2 = 0.823893771 \dots;$$

$$\mu_3 = 1.250307211 \dots; \mu_4 = 2.264330947 \dots;$$

$$\mu_5 = 4.678835252 \dots$$

Diğer yandan, S_n rasgele yürüyüş sürecini oluşturan η_i talep rasgele değişkeni $\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ parametreleri ile normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. Yani $\eta_1 \sim N(0,1)$

olsun. Birinci basamak yüksekliği χ_1^+ 'nin ilk altı momentini hesaplamak için Python (3.11.0) sürümü ile 10^8 kez tekrarlanan bir işlem planlanarak aşağıdaki kod dizini çalıştırılmıştır:

```

1  import random
2
3  s=0
4  EHI1=0; EHI2=0; EHI3=0; EHI4=0; EHI5=0; EHI6=0
5  a=0
6  N=100000000
7
8  while True:
9      ETA=random.gauss(0,1)
10     s=s+ETA
11     if (s>0):
12         HI1=s
13         EHI1= EHI1 + (HI1/N)
14         EHI2= EHI2 + ((HI1)**2/N)
15         EHI3= EHI3 + ((HI1)**3/N)
16         EHI4= EHI4 + ((HI1)**4/N)
17         EHI5= EHI5 + ((HI1)**5/N)
18         EHI6= EHI6 + ((HI1)**6/N)
19         s=0
20         a=a+1
21     if (a==N+1):
22         break
23
24 print(N);
25 print(EHI1); print(EHI2); print(EHI3)
26 print(EHI4); print(EHI5); print(EHI6)

```

Ek Şekil 1. Python kod dizini

Bu kod dizininin çalıştırılması sonucu elde edilen $\mu_i = E(\chi_1^+)$, $i = \overline{1,6}$ momentleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\mu_1 \cong 0.709, \quad \mu_2 \cong 0.829, \quad \mu_3 \cong 1.247,$$

$$\mu_4 \cong 2.245, \quad \mu_5 \cong 4.622, \quad \mu_6 \cong 10.541.$$

Elde edilen sonuçların, gerçek sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu sayede kod, yüksek doğruluk sağladığı varsayımı ile Bölüm 2.9'daki özel örneklere ait problemin çözümünde de kullanılmıştır.



EK 2: HESAPLAMALARDA KULLANILAN PYTHON KODLARI

Bu ek bölümde, tez çalışmasında gerçekleştirilen sayısal analizler ve hesaplamalar için kullanılan Python kodları yer almaktadır. Kodlar, Python programlama dilinin 3.11.0 sürümü kullanılarak yazılmış ve gerekli kütüphaneler aracılığıyla analizler gerçekleştirilmiştir. Kodlar aracılığıyla elde edilen çıktılar, tezde ilgili bölümlerde sunulan bulguların elde edilmesinde kullanılmıştır. Kodların açık ve şeffaf şekilde paylaşılması, kodun tekrarlanabilirliğini ve bilimsel doğruluğunu desteklemek amacıyla tercih edilmiştir.

Aşağıda yer alan Python kodu, Örnek 2.9.1’de bahsi geçen birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentinin hesaplanmasında kullanılmıştır:



```

1  import random
2
3  s=0
4  EHI1=0; EHI2=0; EHI3=0; EHI4=0; EHI5=0; EHI6=0
5  a=0
6  N=100000000
7
8  while True:
9      ETA=random.gauss(1,1)
10     s=s+ETA
11     if (s>0):
12         HI1=s
13         EHI1= EHI1 + (HI1/N)
14         EHI2= EHI2 + ((HI1)**2/N)
15         EHI3= EHI3 + ((HI1)**3/N)
16         EHI4= EHI4 + ((HI1)**4/N)
17         EHI5= EHI5 + ((HI1)**5/N)
18         EHI6= EHI6 + ((HI1)**6/N)
19         s=0
20         a=a+1
21     if (a==N+1):
22         break
23
24 print(N);
25 print(EHI1); print(EHI2); print(EHI3)
26 print(EHI4); print(EHI5); print(EHI6)

```

Ek Şekil 2. Talepler $N(1,1)$ dağılıma sahipken birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentinin hesaplanması (Python)

Aşağıda yer alan Python kodu, Örnek 2.9.2’de bahsi geçen birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentinin hesaplanmasında kullanılmıştır:

```

1  import random
2
3  s=0
4  EHI1=0; EHI2=0; EHI3=0; EHI4=0; EHI5=0; EHI6=0
5  a=0
6  N=100000000
7
8  while True:
9      ETA=random.uniform(-1,3)
10     s=s+ETA
11     if (s>0):
12         HI1=s
13         EHI1 =EHI1 + (HI1/N)
14         EHI2= EHI2 + ((HI1)**2/N)
15         EHI3= EHI3 + ((HI1)**3/N)
16         EHI4= EHI4 + ((HI1)**4/N)
17         EHI5= EHI5 + ((HI1)**5/N)
18         EHI6= EHI6 + ((HI1)**6/N)
19         s=0
20         a=a+1
21     if (a==N+1):
22         break
23
24 print(N)
25 print(EHI1); print(EHI2); print(EHI3)
26 print(EHI4); print(EHI5); print(EHI6)

```

Ek Şekil 3. Talepler $U(-1,3)$ dağılıma sahipken birinci basamak yüksekliğinin ilk altı momentinin hesaplanması (Python)

ÖZGEÇMİŞ

Büşra ALAKOÇ, Lise öğrenimini 2009-2011 yılları arasında Balıkesir ilinde Edremit Lisesinde tamamladı. 2011-2016 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimini bölüm birinciliği ile tamamladı. 2016-2020 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini yüksek onur öğrencisi olarak tamamladı. 2020 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora programında eğitimine başladı. 2022-2024 yılları arasında Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Bilgisayar Programcılığı önlisans programını tamamladı. Yabancı dili İngilizcedir.

Mart 2020-Mayıs 2021 tarihleri arasında TÜBİTAK 3501 kapsamında 119F211 numaralı projede bursiyer olarak yer aldı. Haziran 2021 tarihinden itibaren TÜBİTAK 2211-A programı kapsamında bursiyer olarak desteklenmeye devam etmektedir. Lisansüstü eğitimi sürecinde yapmış olduğu bilimsel çalışmalar aşağıdaki şekildedir.

A. MAKALELER

Kamışlık A. B., **Alakoç, B.**, Kesemen, T. & Khaniyev, T. (2020). A semi-Markovian renewal reward process with $\Gamma(g)$ distributed demand. *Turkish Journal of Mathematics*, 44, 1250-1262.

Kamışlık, A. B., **Alakoç, B.**, Kesemen, T. & Khaniyev, T. (2023). Investigation the ergodic distribution of a semi-Markovian inventory model of type (s, S) with intuitive approximation approach. *Journal of Turkish Operations Management*, 7(1), 1483-1492.

Alakoç, B., Kamışlık, A. B., Yazir, T. & Khaniyev, T. (2024). Moment-based approximation for variance of semi-Markovian random walk with gamma distributed interference of chance. *Turkish Journal of Mathematics*, 48(6), 1037-1054.

B. BİLDİRİLER

Kamışlık Bektaş A., Büyükkaya Eriş M., **Alakoç B.**, Kesemen T., "A New Estimator for Ergodic Distribution of a Semi-Markovian Renewal Reward Process when Demand Distributions Belongs to the $L \cap D$ Subclass of Heavy Tailed Distributions" *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 27-29 Haziran 2018, Ordu, Türkiye.

Kamışlık Bektaş A., **Alakoç B.**, “New Estimator for a Semi Markovian Inventory Model when Demand Random Variables Have Infinite Variance” *2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences*, 27-30 Nisan 2019, Antalya, Türkiye.

Kamışlık Bektaş A., **Alakoç B.**, Kesemen T., Khaniyev T., “Inventory Model of Type (s,S) with $\Gamma(g)$ Distributed Component” *2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences*, 27-30 Nisan 2019, Antalya, Türkiye.

Alakoç B., Kesemen T., Khaniyev T., Kamışlık Bektaş A., “Intuitive Aproximation for Renewal Reward Process with $\Gamma(g)$ Distributed Demand” *3rd International E Conference on Mathematical Advances and its Applications*, 24-27 Haziran 2020, İstanbul, Türkiye.

Alakoç B., Kamışlık Bektaş A., Kesemen T., Khaniyev T., “Moment-Based Approximation Formula for Variance of Semi-Markovian Random Walk Process” *International Conference on Science, Engineering Management and Information Technology*, 14-15 Eylül 2023, Ankara, Türkiye.