KÜRESEL TAKSİ GEOMETRİ ÜZERİNE

AYŞE KORKMAZOĞLU

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. RÜSTEM KAYA

Mayıs -2000

KÜRESEL TAKSİ GEOMETRİ ÜZERİNE

Ayşe Korkmazoğlu

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2000

ON THE SPHERICAL TAXICAB GEOMETRY

Ayşe Korkmazoğlu

Ph. D. Thesis

Mathematics Department

2000

Ayşe KORKMAZOĞLU'nun DOKTORA tezi olarak hazırladığı "KÜRESEL TAKSİ GEOMETRİ ÜZERİNE" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ziya AKÇA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ..28-06-2000.. gün ve ..2000-9/2.......... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. M. Selami KILIÇKAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

K.Menger [8] de, Öklidyen düzlem geometride $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu olarak bilinen öklidyen metrik

$$d_E(X,Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

yerine

$$d_T(X,Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

metriğini kullanarak düzlem taksi geometri fikrini ortaya attı. Bu geometri F. Krause [6] tarafından geliştirildi. Öklidyen geometri fiziki evrenin iyi bir modelini oluşturmasına karşın taksi geometri yerleşim yerlerinin düzlemsel olması halinde daha iyi bir model olabilmektedir. Bu yaklaşımdan sonraki bir çok matematikçi düzlem taksi geometrideki yeni konu ve kavramlar üzerinde inceleme ve araştırmalar yaptılar. Bunların bazıları referans olarak tez sonunda verilmiştir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde öklidyen küre yüzeyi ile ilgili bilinen bazı kavramlar özetlenmektedir. İkinci bölümde *küresel taksi uzaklığı* denilen ve bilinen enlem ve boylam yardımıyla belirlenen bir uzaklık tanımlandı. Küresel taksi uzaklığı ile küre üzerinde büyük çemberler boyunca hesaplanan küresel uzaklık, küresel taksi çemberi ile küresel çember arasındaki ilişkiler incelendi. Üçüncü bölümde $S^2 - \{K\}$ delinmiş küre yüzeyi üzerinde bir *iç çarpım* tanımlandı. Sonra, $S^2 - \{K\}$ üzerinde tanımlanan bu iç çarpımın gerçekte düzlemsel taksi geometride bilinen taksi iç çarpımına [2] stereografik izdüşüm yardımıyla taşınabilecegi gösterildi. Dördüncü bölümde $S^2 - \{K\}$ üzerinde bir *norm* tanımlanarak iç çarpımla bu norm arasındaki bağıntı bulundu.

SUMMARY

In [8], K. Menger has introduced the taxicab plane geometry by using the metric

$$d_T(X,Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

instead of the well known Euclidean metric

$$d_E(X,Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

for the distance function between any two points $X = (x_1, y_1)$ and $Y = (x_2, y_2)$ in Euclidean plane. This geometry has been developed by E.F.Krause [6]. After this approach, some mathematicians have studied and investigated related concepts and subjects in the taxicab plane geometry. Some of them have been given as references at the end of this theses.

This study consists of four chapters. In the first chapter, some known concepts related with surface of sphere have been summarized. In the second chapter, we define a distance called the *spherical taxicab distance* in terms of known geographical latitude and longitude. The relationship between the spherical taxicab distance and the spherical distance which is calculated along great circles are studied. Also, we examine connections between the spherical taxi circles and the spherical circles. Let S denote a surface of sphere and K be a pole of S. In the third chapter, an *inner product* is defined on $S^2 - \{K\}$. Then, it has been shown that the inner product defined on $S^2 - \{K\}$ can be carried by stereografic projection the known taxi inner product in the plane taxi geometry [2]. In the fourth chapter, a *norm* is defined in $S^2 - \{K\}$ and relationship between this norm and the inner product is given.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın

Prof. Dr. Rüstem KAYA' ya

saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2000 Ayşe Korkmazoğlu

İçindekiler

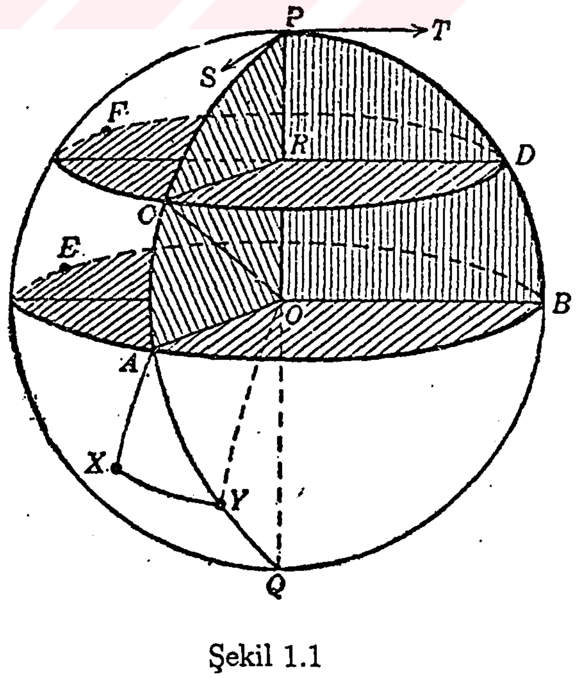
Bölüm 1

Giriş

1.1 Öklidyen Küre ile İlgili Bazı Kavramlar

Büyük çember: Bir kürenin merkezinden geçen herhangi bir düzlem küre yüzeyini bir çember boyunca keser ve bu çembere kürenin bir *büyük çemberi* denir.

Küçük Çember: Küre yüzeyini kesen fakat kürenin merkezinden geçmeyen herhangi bir düzlem küre yüzeyini bir çember boyunca keser ki böyle çemberlerin herbirine kürenin bir *küçük çemberi* denir.



Şekil 1.1

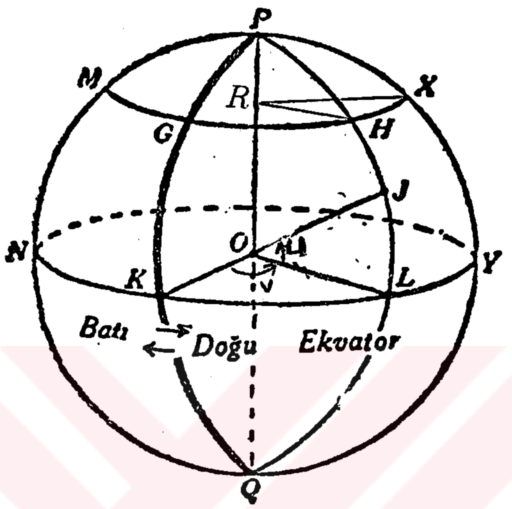
Şekil 1.1 de EAB büyük çemberdir. EAB büyük çemberinin düzlemine dik olan çapına QOP diyelim. R, OP üzerindeki herhangi bir nokta olsun ve R den EAB nin düzlemine paralel bir düzlem geçirilsin. Bu düzlemin belirttiği küçük çember FCD olsun. Bu durumda OP aynı zamanda FCD düzlemine diktir. QOP dik çapının uçları olan P ve Q ya, EAB büyük çemberinin ve ona paralel FCD küçük çemberinin *kutupları* denir.

$PCAQ$, P ve Q kutuplarından geçen ve FCD küçük çemberi ile EAB büyük çemberini, sırasıyla, C ve A noktalarında kesen herhangi bir büyük çember olsun. Bunun gibi PDB de P ve Q dan geçen başka bir büyük çember parçasıdır. Genel olarak bir büyük çemberi anlatmak için onun herhangi bir parçasını söyleyeceğiz.

Küresel açı: Küre üzerinde herhangi iki büyük çember birbirlerini keserlerse *küresel açı* meydana getiriyorlar denir. Örneğin PA ve PB büyük çemberlerine PT ve PS teğetlerini çizersek, PT teğeti PB büyük çemberinin OP çapına dik olduğundan ve POB düzleminin içinde bulunduğundan OB yarıçapına paraleldir; benzer olarak PS de OA yarıçapına paraleldir. SPT açısı PA ve PB büyük çemberleri arasındaki *küresel açıyı* verir, bu açı AOB açısına eşittir. AB *yayı* bir kutbu P olan büyük çemberin üzerinde ve PA ile PB büyük çemberleri arasında kalan yaydır. Bir *küresel açı* deyimini sadece birbirlerini kesen iki büyük çemberin oluşturduğu açı için kullanacağız.

Küresel üçgen : Küre yüzeyi üzerinde herhangi üç nokta verilirse; her üç nokta aynı yarım küre üzerinde bulunacak şekilde küre iki yarım küreye bölünebilir. Çünkü, bu üç nokta bir düzlem belirtir. Bir düzlem de küreyi bir çember boyunca keser. Bu çember de bir yarım küre üzerinde bulunur. Noktalar bu yarım küre üzerinde bulunan büyük çember yayları ile birleştirilirse, elde edilen şekle *küresel üçgen* denir. Örneğin Şekil 1.1 de küre yüzeyi üzerinde bulunan A, X, Y noktaları AXY küresel üçgenini meydana getirecek şekilde büyük çember yayları ile birleştirilmiştir. AX, AY, XY küresel üçgenin *kenarları* ve A, X, Y deki açılar da küresel üçgenin *açıları*dır.

1.2 Coğrafi enlem ve Boylam



Şekil 1.2

Dünya, PQ çapı etrafında dönen bir cisim gibi düşünülebilir. P *kuzey kutbu*, Q *güney kutbu*dur. PQ ya dik olan büyük çembere *ekvator* denir. P ve Q da biten herhangi bir yarım büyük çember *meridyen*dir. *Greenwich* rasathanesinin ana aletinden geçen meridyene uluslararası anlaşma ile *asal meridyen* gibi bakılmaktadır [12]. Şekil 1.2 de bu meridyen $PGKQ$, ekvatoru kestiği nokta da K ile gösterilmiştir. $PHLQ$, ekvatoru L de kesen başka bir meridyen olsun. Bu durumda KOL açısı PHQ meridyeninin *boylamı* olarak tanımlanır. Bu boylam ekvator üzerinde KL yayı veya küresel KPL açısı ile belirtilmiştir. Şekil 1.2 deki K noktasının yakınındaki okların yönleri takip edilerek boylamlar Greenwich meridyeninden itibaren 0° den 180° ye kadar doğuya doğru veya 0° den 180° ye kadar batıya doğru ölçülür. Şekil 1.2 de PHQ meridyeninin boylamı yaklaşık 100° *doğu* ve PMQ meridyeninin boylamı ise yaklaşık 60° *batıdır.* Aynı meridyen üzerindeki bütün yerlerin (noktaların) boylamları aynıdır, özel bir yerden geçen meridyen de PGQ asal meridyenine göre belirtilir. Bir noktanın dünya yüzeyi üzerindeki yerini tamamen belirtmek için boylam meridyeni üzerindeki yerini de tanımlamamız gerekir. Bu tanım ekvatora göre yapılır. PHQ meridyeni üzerinde bir J noktasını gözönüne alalım. J noktasından geçen meridyen, ekvatoru L noktasında keserse LOJ açısına veya LJ büyük çember yayına J noktasının *enlemi* denir. Şekil 1.2 deki gibi J noktası ekvatorla kuzey kutbu arasında bulunuyorsa, *enlem kuzeyseldir* denir. Ekvatorla güney kutbu arasında bulunan bir S noktası için *enlem güneyseldir* denir. Bu şekilde, dünya yüzeyi üzerinde bulunan herhangi bir noktanın durumu, iki asal büyük çembere göre belirlenmiş olur ki bunlardan birisi ekvator, diğeri de Greenwich meridyenidir.

u, J noktasının enlemi olsun. Bu durumda $\widehat{LOJ}$ veya $\overset{\frown}{LJ} = u$ dir. OP, ekvator düzlemine dik olduğundan $\widehat{POL} = 90°$ dir. Bundan dolayı $\widehat{POJ} = 90° - u$ olur. POJ açısına veya PJ küresel yayına J nin *enlem tamamı* denir. Yani,

$$\text{Enlem tamamı} = 90° - \text{enlem}$$

dir. Aynı enlemde bulunan bütün yerler, *enlem paraleli* denilen ekvatora paralel bir küçük çember üzerinde bulunur. u_1, H ve X noktalarının enlemini gösteriyorsa, HX küçük çember yayının ölçümü kendisine karşılık gelen LY ekvator yayının ölçümü cinsinden

$$\overset{\frown}{HX} = \overset{\frown}{LY} \,.\cos u_1$$

dir [12]. Çünkü

$$\overset{\frown}{HX} = |RH|.HRX \text{ açısı}$$

dır. Küresel LY yayının ölçüsü de

$$\overset{\frown}{LY} = |OL|\,.LOY \text{ açısı}$$

dir. Fakat MGX düzlemi NKY düzlemine paralel olduğundan $\widehat{HRX} = \widehat{LOY}$ dir. Çünkü RH ile RX, sırasıyla, OL ve OY ye paraleldir.

$$\frac{\overset{\frown}{HX}}{\overset{\frown}{LY}} = \frac{|RH|}{|OL|}$$

olur. Fakat $|OL| = |OH|$ olduğundan

$$\overset{\frown}{HX} = \frac{|RH|}{|OH|}.\,\overset{\frown}{LY}$$

yazılabilir. RH, ORye dik olduğundan

$$|RH| = |OH|\,.\cos\widehat{RHO}$$

ve

$$\overset{\frown}{HX} = \overset{\frown}{LY}\,.\cos\widehat{RHO}$$

olur. RH ile OL paralel olduğundan $\widehat{RHO} = \widehat{HOL}$ ve

$$\overset{\frown}{HX} = \overset{\frown}{LY}\,.\cos\widehat{HOL}$$

$$\overset{\frown}{HX} = \overset{\frown}{LY}\,.\cos\overset{\frown}{HL}$$

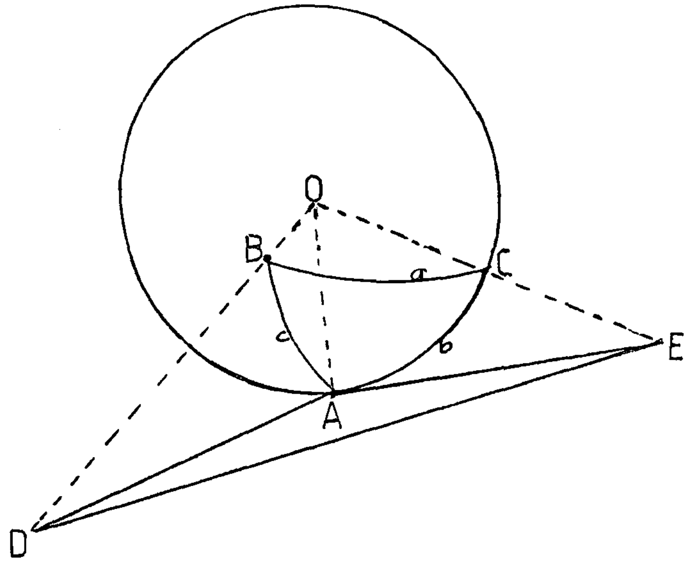
$$\overset{\frown}{HX} = \overset{\frown}{LY}\,.\cos u_1 \tag{1.1}$$

bulunur.

Bundan böyle bir noktanın enlem ve boylamının oluşturduğu sıralı ikili, *coğrafi koordinatlar* olarak adlandırılır. Verilen noktanın enlemi u, boylamı v ise coğrafi koordinatları (u, v) olur.

1.3 Küresel Üçgenin Ana Formülü

ABC bir küresel üçgen olsun (Şekil 1.3). BC, CA, AB kenarlarını, sırasıyla a, b, c ile gösterelim.



Şekil 1.3

Buna göre a kenarı, kürenin merkezinde, BC büyük çember yayının karşısındaki BOC açısı ile ölçülür. Aynı şekilde b ve c de, sırayla, AOC ve AOB açılarıyla ölçülür.

AD; AB büyük çemberinin A daki teğeti, AE; AC büyük çemberinin A daki teğeti olsun. O halde OA yarıçapı AD ve AE ye diktir. Çizimden dolayı AD, AB büyük çemberinin düzleminde bulunmaktadır. Buna göre, OB yarıçapı uzatılırsa AD teğetini bir D noktasında kesecektir. Benzer şekilde OC yarıçapı uzatılırsa AE teğetini bir E noktasında kesecektir. BAC küresel açısı, tanıma göre AB ve AC büyük çemberlerinin A noktasındaki teğetleri arasındaki açıdır, yani

$$BAC \text{ küresel açısı} = \widehat{DAE}$$

dir. Bu açıyı A ile göstereceğiz.

OAD düzlem üçgeninde $\widehat{OAD} = 90°$, $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = c$ dir. Bu durumda

$$|AD| = |OA|\,.\tan c\ ;\ \ |OD| = |OA|\,.\sec c \tag{1.2}$$

OAE düzleminde

$$|AE| = |OA|\,.\tan b\ ;\ \ |OE| = |OA|\,.\sec b \tag{1.3}$$

dir. DAE düzlem üçgeninde kosinüs teoreminden ,

$$|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2 - 2\,|AD|\,.\,|AE|\,.\cos \widehat{DAE}$$

veya

$$\begin{aligned} |DE|^2 &= |AO|^2 \tan^2 c + |OA|^2\,.\tan^2 b - 2\,|OA|\,.\tan c.\,|OA|\,.\tan b.\cos \widehat{A} \\ |DE|^2 &= |OA|^2 (\tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan c.\tan b.\cos A) \end{aligned} \tag{1.4}$$

yazılabilir. DOE düzlem üçgeninden

$$|DE|^2 = |OD|^2 + |OE|^2 - 2\,|OD|\,.\,|OE|\,.\cos \widehat{DOE}$$

ve $\widehat{DOE} = \widehat{BOC} = a$ olduğundan

$$\begin{aligned} |DE|^2 &= |OA|^2 \sec^2 c + |OA|^2\,.\sec^2 b - 2\,|OA|\,.\sec c.\,|OA|\,.\sec b.\cos a \\ |DE|^2 &= |OA|^2 (\sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec c.\sec b.\cos a) \end{aligned} \tag{1.5}$$

dir. (1.4) ve (1.5) ten

$$\tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan c.\tan b.\cos \widehat{A} = \sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec c.\sec b.\cos a$$

yazılırsa

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A \tag{*}$$

elde edilir. Bu formüle benzer olarak

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos B \tag{1.6}$$

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos C \tag{1.7}$$

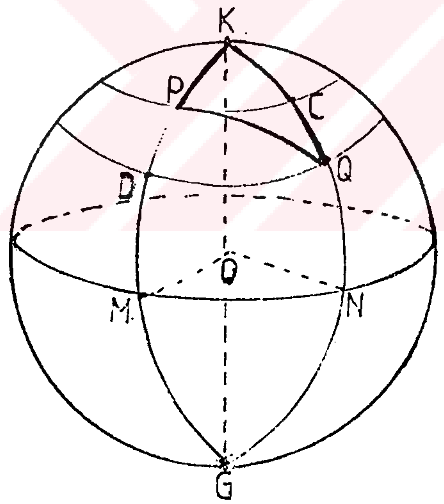
formülleri elde edilir. Bu (*), (1.6), (1.7) formüllerine küresel üçgenin ana formülleri denir.

1.4 Küre Üzerinde İki Nokta Arasındaki Küresel Uzaklık

1.4.1 Küre Üzerinde Coğrafi Koordinatları ile Verilen İki Noktayı Birleştiren Yay Uzunluğu

P noktası u_1 kuzey enlemi, v_1 batı boylamı üzerinde, Q noktası u_2 kuzey enlemi, v_2 batı boylamı üzerinde bulunsun. Bu coğrafi koordinatları $P(u_1, v_1)$ ve $Q(u_2, v_2)$ ile gösterelim. Burada açıları radyan cinsinden ölçeceğiz.

P ve Q noktalarını birleştiren *yay uzunluğu* küresel üçgenin ana formülünü kullanarak hesaplanabilir. Şekil.1.4 de KPQ küresel üçgeninde kosinüs formülünden



Şekil 1.4

$$\cos \widehat{PQ} = \cos \widehat{KP} \, . \cos \widehat{KQ} + \sin \widehat{KP} \, . \sin \widehat{KQ} \, . \cos \widehat{K}$$

$$\cos \overset{\frown}{PQ} = \cos(\frac{\pi}{2} - u_1).\cos(\frac{\pi}{2} - u_2) + \sin(\frac{\pi}{2} - u_1).\sin(\frac{\pi}{2} - u_2).\cos K$$
$$\overset{\frown}{PQ} = \arccos(\sin u_1.\sin u_2 + \cos u_1.\cos u_2.\cos K)$$

olarak elde edilir.

K açısı KMO düzlemi ile KNO düzlemleri arasındaki açı olduğundan MON açısına eşittir.

$$\widehat{MON} = \overset{\frown}{MN} = v_2 - v_1$$

olur. Buradan r yarıçaplı küre üzerindeki P ve Q noktaları arasındaki küresel yay uzunluğu

$$d_S(P,Q) = \left|\overset{\frown}{PQ}\right| = r.\arccos\left(\sin u_1.\sin u_2 + \cos u_1.\cos u_2.\cos(v_1 - v_2)\right) \qquad (1.8)$$

olarak bulunur.

P ve Q nun küre üzerindeki pozisyonlarına bağlı olarak bu formülde; u_1 kuzey, u_2 güney enlem ise u_2 yerine $-u_2$; v_1 batı, v_2 doğu boylam ise v_2 yerine $-v_2$ alınır. Bu durumda, batı ve doğu boylamların toplamları π den büyük ise v_1 yerine $\pi - v_1$ ve v_2 yerine $v_2 - \pi$ yazarız.

Bölüm 2

Küresel Taksi Geometri

2.1 Düzlemsel Taksi Geometri Üzerine Birkaç Söz

Düzlem taksi geometri fikri K. Menger [8] tarafından ortaya atıldı. Öklidyen düzlem geometride $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu olan

$$d_E(X,Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

yerine

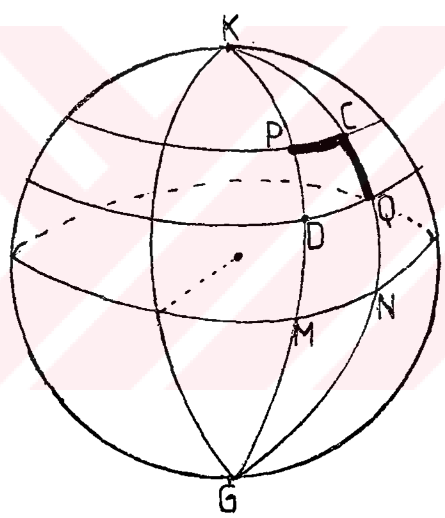
$$d_T(X,Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

alınarak inşa edilen düzlem taksi geometri F. Krause [6] tarafından geliştirildi. Uygulamalarda görüldü ki öklidyen düzlem fiziki evrende iyi bir model oluşturmasına karşın yerleşim yerlerinin düzlemsel olması halinde taksi geometri daha iyi bir model olabilmektedir. Bu yaklaşımdan sonradır ki bir çok matematikçi düzlem taxi geometrideki yeni konu ve kavramlar üzerinde inceleme ve araştırmalar yaptılar. Bunların başlıcaları, Akça-Kaya [1], Ekici-Kocayusufoğlu-Akça [2], Kaya-Akça-Günaltılı-Özcan [4], Kocayusufoğlu-Özdamar [5], Laatsch

[7], Özcan-Kaya [9], Reynolds [10], Schattschneider [11], Sowell [13], So-Al-Maskari [14], Tian-So-Chen [15] sayılabilir.

Dünya yüzeyinin düzlemsel olmaktan daha çok küresel olması, küresel taksi geometrinin daha anlamlı olacağını akla getirmektedir. İşte bu nedenledir ki bu çalışmada küresel bir yüzey üzerinde bir taksi uzaklığı -bilinen enlem ve boylam yardımıyla - tanımlanmakta ve bunun sonucu olarak küresel taksi geometri geliştirilerek incelenmektedir.

2.2 Küre Üzerinde Coğrafi Koordinatlarıyla Verilen İki Nokta Arasındaki Taksi Uzaklığı



Şekil 2.1

Küre üzerinde $P = (u_1, v_1)$ ve $Q = (u_2, v_2)$ noktaları verilsin. P den geçen enlem paraleli ile Q dan geçen meridyenin arakesit noktasına C, Q dan geçen enlem paraleli ile, P den geçen meridyenin arakesit noktasına D diyelim. PQ *Küresel Taksi Yay Uzunluğu* veya P ve Q arasındaki *Küresel Taksi Uzaklık* diye

$$d_{TS}(P,Q) := \min\left\{\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right|, \left|\widehat{PD}\right| + \left|\widehat{DQ}\right|\right\}$$

değerine diyelim.

$\left|\widehat{PD}\right| = \left|\widehat{CQ}\right|$ olduğundan u_1 ve u_2 kuzey enlemleri için

$$d_{TS}(P,Q) = \begin{cases} \left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| & u_1 \geq u_2 \\ \\ \left|\widehat{PD}\right| + \left|\widehat{DQ}\right| & u_1 < u_2 \end{cases}$$

olur.

P ile aynı enlem paraleli üzerinde olduğundan C noktasının enlemi u_1, Q ile aynı meridyen üzerinde olduğundan C noktasının boylamı v_2 olur. Yani, $C = (u_1, v_2)$ biçiminde koordinatlanır. Benzer şekilde D noktası u_2 enlemine, v_1 boylamına sahip olacağından $D = (u_2, v_1)$ biçiminde temsil edilir.

Tanımda geçen yay uzunluklarını enlem ve boylamlar cinsinden hesaplayalım.

PC ve DQ yay uzunlukları, ekvatorda onlara karşılık gelen MN yayının uzunluğu cinsinden (1.1) denkleminden

$$\left|\widehat{PC}\right| = \left|\widehat{MN}\right| . \cos u_1 = r. \left|v_1 - v_2\right| . \cos u_1$$

$$\left|\widehat{DQ}\right| = \left|\widehat{MN}\right| . \cos u_2 = r. \left|v_1 - v_2\right| . \cos u_2$$

ve

$$\left|\widehat{CQ}\right| = \left|\widehat{PD}\right| = r. \left|u_1 - u_2\right|$$

şeklindedir. Buna göre P ve Q noktaları arasındaki küresel taksi uzaklığı

$$d_{TS}(P,Q) = \begin{cases} r.(\left|v_1 - v_2\right| . \cos u_1 + \left|u_1 - u_2\right|) & u_1 \geq u_2 \\ r.(\left|v_1 - v_2\right| . \cos u_2 + \left|u_1 - u_2\right|) & u_1 < u_2 \end{cases}$$

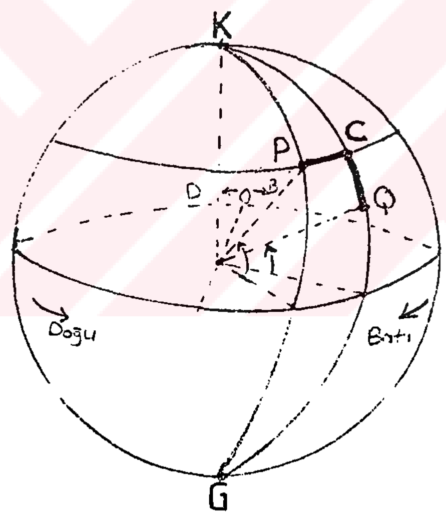
şeklini alır.

Bu formülde, P noktası ve Q noktasının küre üzerindeki pozisyonlarına bağlı olarak

i) u_1 kuzey, u_2 güney enlem ise u_2 yerine $-u_2$,

ii) v_1 batı, v_2 doğu boylam ise v_1 yerine $-v_1$ alınır. Ayrıca bu durumda batı ve doğu boylamların toplamı π den büyük ise v_1 yerine $\pi - v_1$ ve v_2 yerine $v_2 - \pi$ yazmak yeter.

Örnek 2.1: Küre üzerinde $\frac{\pi}{4}$ kuzey enlemli ve $\frac{5\pi}{6}$ batı boylamlı nokta P, $\frac{\pi}{6}$ kuzey enlemli ve $\frac{2\pi}{3}$ batı boylamlı nokta Q, olmak üzere P ve Q noktaları arasındaki küresel yay uzunluğunu ve küresel taksi uzaklığını hesaplayalım. Buna göre $P = (\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6})$ ve $Q = (\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3})$ şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.2

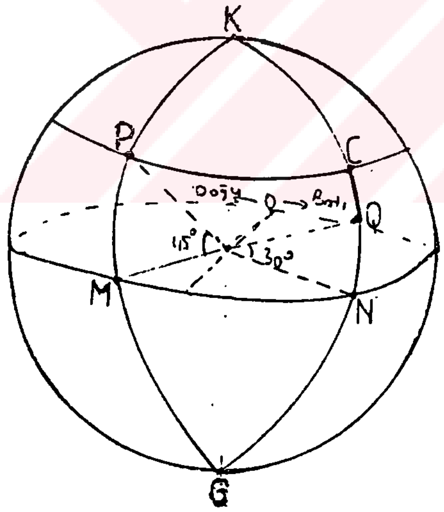
$$
\begin{aligned}
d_S(P,Q) &= r.\arccos(\sin u_1.\sin u_2 + \cos u_1.\cos u_2.\cos(v_1 - v_2) \\
&= r.\arccos(\sin\tfrac{\pi}{4}.\sin\tfrac{\pi}{6} + \cos\tfrac{\pi}{4}.\cos\tfrac{\pi}{6}.\cos\tfrac{\pi}{6}) \\
&= r.\arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}.\tfrac{\sqrt{3}}{2}.\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= r.\arccos(\tfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{8}) \\
&= 0,154919816.r\pi \text{ birim}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d_{TS}(P,Q) = \left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| &= r.\left[(v_2 - v_1).\cos u_1 + (u_1 - u_2)\right] \\
&= r.(\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{12}) \\
&= (\tfrac{\sqrt{2}+1}{12}).r\pi \text{ birim}
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 2.2: $P = (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6})$ ve $Q = (\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3})$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki küresel yay uzunluğu



Şekil 2.3

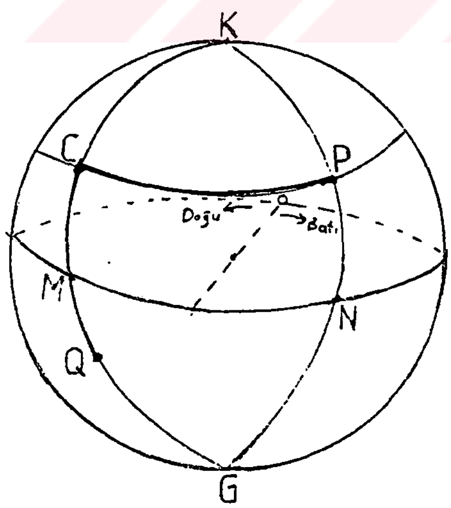
$$\begin{aligned} d_S(P,Q) &= r.\arccos(\sin u_1.\sin u_2 + \cos u_1.\cos u_2.\cos(v_1 - v_2)) \\ &= r.\arccos(\sin\tfrac{\pi}{4}.\sin\tfrac{\pi}{6} + \cos\tfrac{\pi}{4}.\cos\tfrac{\pi}{6}.\cos\tfrac{\pi}{2}) \\ &= r.\arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{4}) \\ &= 0,384973271.r\pi \text{ birim} \end{aligned}$$

ve küresel taksi uzaklığı

$$\begin{aligned} d_{TS}(P,Q) = \left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| &= r.\left[(2\pi - (v_1 + v_2)).\cos u_1 + (u_1 - u_2)\right] \\ &= ((2\pi - (\tfrac{5\pi}{6} + \tfrac{2\pi}{3})).\cos\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{6})r \\ &= (\tfrac{\pi}{2}.\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\pi}{12})r \\ &= 0,436886723\pi r \text{ birim} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.3: Küre üzerinde $\frac{\pi}{4}$ kuzey enlemli ve $\frac{5\pi}{6}$ batı boylamlı nokta P, $\frac{\pi}{6}$ güney enlemli ve $\frac{2\pi}{3}$ doğu boylamlı nokta Q olmak üzere P ve Q noktaları arasındaki küresel yay uzunluğunu ve küresel taksi uzaklığını hesaplayalım. Buna göre $P = (\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6})$ ve $Q = (-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.4

Küresel üçgenin ana formülünden,

$$\begin{aligned}
\cos \widehat{PQ} &= \cos \widehat{KQ} \,.\cos \widehat{KP} + \sin \widehat{KQ} \,.\sin \widehat{KP} \,.\cos \widehat{K} \\
&= \cos(\tfrac{\pi}{2}+u_2).\cos(\tfrac{\pi}{2}-u_1) + \sin(\tfrac{\pi}{2}+u_2).\sin(\tfrac{\pi}{2}-u_1).\cos(2\pi-(v_1+v_2)) \\
&= \sin(-u_2).\sin u_1 + \cos u_2.\cos u_1.\cos(2\pi-(v_1+v_2)) \\
d_S(P,Q) &= r.\arccos(\sin(-u_2).\sin u_1 + \cos u_2.\cos u_1.\cos(2\pi-(v_1+v_2)))
\end{aligned}$$

olur. Noktaların bu pozisyonunda güney enlemin işareti değişti.

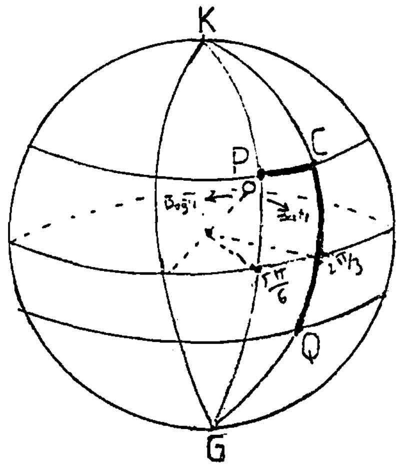
$$\begin{aligned}
d_S(P,Q) &= r.\arccos(\sin(-\tfrac{\pi}{6}).\sin\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{6}.\cos\tfrac{\pi}{4}.\cos\tfrac{\pi}{2}) \\
&= r.\arccos(-\tfrac{\sqrt{2}}{4}) \\
&= 0,615026728.r\pi \text{ birim}
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$\begin{aligned}
d_{TS}(P,Q) = r.\left(\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right|\right) &= r.\left[(2\pi-(v_1+v_2)).\cos u_1 + (u_1+u_2)\right] \\
&= r.(\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}) \\
&= (\tfrac{3\sqrt{2}+5}{12}).\pi r \\
&= 0,770220057.\pi r \text{ birim}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.4: Küre üzerinde $\frac{\pi}{4}$ kuzey enlemli ve $\frac{5\pi}{6}$ batı boylamlı nokta P, $\frac{\pi}{6}$ güney enlemli ve $\frac{2\pi}{3}$ batı boylamlı nokta Q olmak üzere P ve Q noktaları arasındaki küresel yay uzunluğunu ve küresel taksi uzaklığını hesaplayalım.



Şekil 2.5

Buna göre $P = (\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6})$ ve $Q = (-\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3})$ şeklinde yazılabilir. Küresel üçgenin ana formülünden,

$$\begin{aligned} d_S(P,Q) &= r.\arccos(\sin u_1.\sin(-u_2) + \cos u_1.\cos u_2.\cos(v_1 - v_2) \\ &= r.\arccos(-\sin(\tfrac{\pi}{4}).\sin\tfrac{\pi}{6} + \cos\tfrac{\pi}{4}.\cos\tfrac{\pi}{6}.\cos\tfrac{\pi}{6}) \\ &= r.\arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{8}) \\ &= 0,443432958.\pi r \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} d_{TS}(P,Q) = \left(\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right|\right) &= r.\left[(v_1 - v_2).\cos u_1 + (u_1 + u_2)\right] \\ &= r.(\tfrac{\pi}{6}\cos\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{5\pi}{12}) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}+5}{12}.\pi r \\ &= 0,534517796.\pi r \end{aligned}$$

olur.

2.3 Küresel Taksi Uzaklık Formülü

Küre üzerinde $P = (u_1, v_1)$ ve $Q = (u_2, v_2)$ gibi herhangi iki nokta verildiğinde küresel taksi uzaklığı enlemlerin kuzey ve güney, boylamların da doğu ve batı oluşuna bağlı olarak değişiyor. Bu durumda P ve Q noktalarının küre üzerindeki konumlarına göre 16 değişik durum vardır:

u_1 ve u_2 enlemleri 0 dan $\frac{\pi}{2}$ ye kadar kuzey ve güney yönünde, v_1 ve v_2 boylamları da 0 dan π ye kadar ekvator üzerinde doğu ve batı yönünde değişir.

Şimdiye kadar açıkladığımız küresel uzaklık ve küresel taksi uzaklık formüllerinde noktalar aynı bölgelerde iken enlem ve boylamların farkları, enlemlerden biri kuzey diğeri güneyde iken güney enlemde işaret değişikliği ve boylamlar toplamı π den büyükse formülde bunun yerine $2\pi - (v_1 - v_2)$ alınır.

Bütün bunlardan yola çıkarak küresel taksi uzaklığını hesaplamak için kuzey enlemin işaretini pozitif, güney enlemin işaretini negatif ve doğu boylamın işaretini pozitif, batı boylamın işaretini negatif olarak alalım. Bu durumda $\frac{\pi}{4}$ kuzey enlemli ve $\frac{\pi}{6}$ batı boylamlı noktayı $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6})$ olarak göstermiş oluyoruz.

Böylece $\left\{(u,v) : u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ ve } v \in [-\pi, \pi)\right\}$ analitik küresinin herhangi bir $P = (u, v)$ noktasının enlemi ve boylamı

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ veya } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq 0, \\ 0 &\leq v \leq \pi \text{ veya } -\pi \leq v \leq 0 \end{aligned}$$

olarak değişir.

$P = (u_1, v_1)$ ve $Q = (u_2, v_2)$ için

1. $u_1 > 0,\ v_1 > 0$ ve $u_2 > 0,\ v_2 > 0$ ise

   Bu durumda $|v_1 - v_2| < \pi$ dir.

   i) $u_1 \geq u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2| . \cos u_1\right]$

   ii) $u_1 < u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2| . \cos u_2\right]$

2. $u_1 > 0,\ v_1 > 0$ ve $u_2 > 0,\ v_2 < 0$ olsun.

   i) $u_1 \geq u_2$ ise

   a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,
   $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2). \cos u_1\right]$

   b) $v_1 - v_2 > \pi$ iken,
   $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_1 - v_2)). \cos u_1\right]$

   ii) $u_1 < u_2$ ise

   a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,
   $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_1 - v_2). \cos u_2\right]$

b) $v_1 - v_2 > \pi$ ise

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_2\right]$$

3. $u_1 > 0,\ v_1 > 0$ ve $u_2 < 0,\ v_2 > 0$ olsun.

Bu durumda $|v_1 - v_2| < \pi$ dir.

i) $u_1 \geq |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

ii) $u_1 < |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$

4. $u_1 > 0,\ v_1 > 0$ ve $u_2 < 0,\ v_2 < 0$ olsun.

i) $u_1 \geq |u_2|$ ise

a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2).\cos u_1\right]$$

b) $v_1 - v_2 > \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_1\right]$$

ii) $u_1 < |u_2|$ ise

a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2).\cos u_2\right]$$

b) $v_1 - v_2 > \pi$ ise

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_2\right]$$

olur.

5. $u_1 > 0,\ v_1 < 0$ ve $u_2 > 0,\ v_2 > 0$ olsun.

i) $u_1 \geq u_2$ ise

a) $v_2 - v_1 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_2 - v_1).\cos u_1\right]$$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_2 - v_1)).\cos u_1\right]$$

ii) $u_1 < u_2$ ise

a) $v_2 - v_1 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1).\cos u_2\right]$$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ ise

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_2 - v_1)).\cos u_2\right]$$

6. $u_1 > 0$, $v_1 < 0$ ve $u_2 > 0$, $v_2 < 0$ ise,

Bu durumda $|v_1 - v_2| \leq \pi$ dir.

i). $u_1 \geq u_2$ iken $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

ii) $u_1 < u_2$ iken $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$

7. $u_1 > 0$, $v_1 < 0$ ve $u_2 < 0$, $v_2 > 0$ olsun.

i) $u_1 \geq |u_2|$ ise

a) $v_2 - v_1 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_2 - v_1).\cos u_1\right]$$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_2 - v_1)).\cos u_1\right]$$

ii) $u_1 < |u_2|$ ise

a) $v_2 - v_1 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_2 - v_1).\cos u_2\right]$$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ ise

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_2 - v_1)).\cos u_2\right]$$

8. $u_1 > 0$, $v_1 < 0$ ve $u_2 < 0$, $v_2 < 0$ olsun.

i) $u_1 \geq |u_2|$ ise

a) $|v_1 - v_2| \leq \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

b) $|v_1 - v_2| > \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - |v_1 - v_2)|).\cos u_1\right]$

ii) $u_1 < |u_2|$ ise

a) $|v_1 - v_2| \leq \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$

b) $|v_1 - v_2| > \pi$ ise

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - |v_1 - v_2|).\cos u_2\right]$

9. $u_1 < 0$, $v_1 > 0$ ve $u_2 > 0$, $v_2 > 0$ ise

Bu durumda $|v_1 - v_2| < \pi$ dir.

i) $|u_1| \geq u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

ii) $|u_1| < u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$

10. $u_1 < 0$, $v_1 > 0$ ve $u_2 > 0$, $v_2 < 0$ olsun.

i) $|u_1| \geq u_2$ ise

a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_1 - v_2).\cos u_1\right]$

b) $v_1 - v_2 > \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_1\right]$

ii) $|u_1| < u_2$ ise

a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_1 - v_2).\cos u_2\right]$

b) $v_1 - v_2 > \pi$ ise

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_2\right]$$

11. $u_1 < 0,\ v_1 > 0$ ve $u_2 < 0,\ v_2 > 0$ ise

Bu durumda $|v_1 - v_2| < \pi$ dir.

i) $|u_1| \geq |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

ii) $|u_1| < |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$

12. $u_1 < 0,\ v_1 > 0$ ve $u_2 < 0,\ v_2 < 0$ olsun.

i) $|u_1| \geq |u_2|$ ise

a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_1 - v_2).\cos u_1\right]$$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_1\right]$$

ii) $|u_1| < |u_2|$ ise

a) $v_1 - v_2 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2).\cos u_2\right]$$

b) $v_1 - v_2 > \pi$ ise

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (2\pi - (v_1 - v_2)).\cos u_2\right]$$

13. $u_1 < 0,\ v_1 < 0$ ve $u_2 > 0,\ v_2 > 0$ olsun.

i) $|u_1| \geq u_2$ ise

a) $v_2 - v_1 \leq \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1).\cos u_1\right]$$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ iken,

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_2 - v_1)).\cos u_1\right]$$

ii) $|u_1| < u_2$ ise

a) $v_2 - v_1 \leq \pi$ iken,

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1).\cos u_2\right]$

b) $v_2 - v_1 > \pi$ ise

$d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (2\pi - (v_2 - v_1)).\cos u_2\right]$

14. $u_1 < 0$, $v_1 < 0$ ve $u_2 > 0$, $v_2 < 0$ ise

Bu durumda $|v_1 - v_2| < \pi$ dir.

i) $|u_1| \geq u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

ii) $|u_1| < u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$

15. $u_1 < 0$, $v_1 < 0$ ve $u_2 < 0$, $v_2 > 0$ ise

Bu durumda $v_2 - v_1 < \pi$ dir.

i) $|u_1| \geq |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1).\cos u_1\right]$

ii) $|u_1| < |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + (v_2 - v_1).\cos u_2\right]$

16. $u_1 < 0$, $v_1 < 0$ ve $u_2 < 0$, $v_2 < 0$ ise

Bu durumda $|v_1 - v_2| < \pi$ dir.

i) $|u_1| \geq |u_2|$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_2 - u_1) + |v_1 - v_2|.\cos u_1\right]$

ii) $|u_1| < u_2$ ise $d_{TS}(P,Q) = r.\left[(u_1 - u_2) + |v_1 - v_2|.\cos u_2\right]$ olur.

Küre üzerindeki $P = (u_1, v_1)$ ve $Q = (u_2, v_2)$ gibi iki nokta arasındaki küresel taksi uzaklığı incelediğimiz durumların bir sonucu olarak

$$d_{TS}(P,Q) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} r\left(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|\cos u_1\right), & |v_1 - v_2| \leq \pi \\ r\left(|u_1 - u_2| + (2\pi - |v_1 - v_2|)\cos u_1\right), & |v_1 - v_2| > \pi \end{array}\right\} \text{ve } |u_1| \geq |u_2| \\ \left.\begin{array}{ll} r\left(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|\cos u_2\right), & |v_1 - v_2| \leq \pi \\ r\left(|u_1 - u_2| + (2\pi - |v_1 - v_2|)\cos u_2\right), & |v_1 - v_2| > \pi \end{array}\right\} \text{ve } |u_1| < |u_2| \end{cases}$$

şeklinde formülleştirilebilir. Bu formül de aşağıdaki biçimde tek formüle indirgenebilir:

$$d_{TS}(P,Q) = r.\left\{|u_1 - u_2| + [|v_1 - v_2|] \cos u_i\right\}, \quad u_i = \max\left\{|u_1|, |u_2|\right\}$$

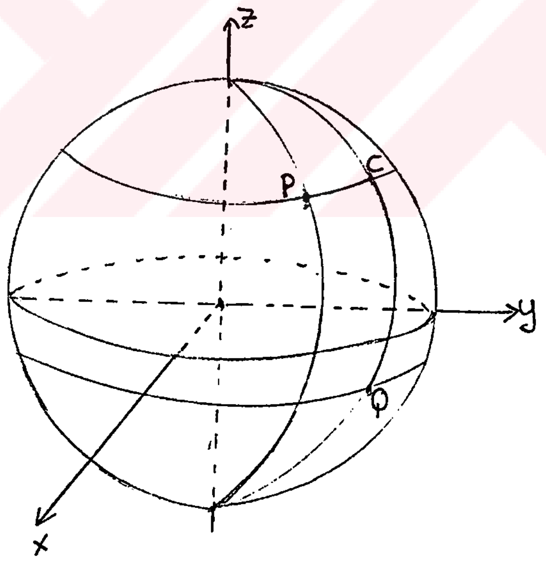
Burada

$$[|v_1 - v_2|] := \begin{cases} |v_1 - v_2|, & |v_1 - v_2| \leq \pi \text{ iken,} \\ 2\pi - |v_1 - v_2|, & |v_1 - v_2| > \pi \text{ iken} \end{cases}$$

dir.

2.4 Küresel Taksi Uzaklığının Kartezyen Koordinatlarda Hesaplanması

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küresi üzerinde $P = (a_1, b_1, c_1)$, $Q = (a_2, b_2, c_2)$ gibi iki nokta alalım. $|c_1| \geq |c_2|$, yani P noktası kutuplardan birine daha yakın olsun.



Şekil 2.6

C, noktası P den geçen enlem paraleli ile Q dan geçen meridyenin arakesitidir. P den geçen enlem paraleli

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ z=c_1 \end{cases} \quad (*)$$

ve Q dan geçen meridyen

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ -b_2x+a_2y=0 \end{cases} \quad (**)$$

olduğundan C noktası $(*)$ ve $(**)$ denklemlerinin ortak çözülmesi ile bulunur. Dolayısıyla $b_2 \neq 0$ iken

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$
$$z=c_1$$
$$-b_2x+a_2y=0$$

ve buradan

$$x^2+y^2=r^2-c_1^2$$
$$(\tfrac{a_2}{b_2}y)^2+y^2=r^2-c_1^2$$
$$y^2=\frac{b_2^2(r^2-c_1^2)}{r^2-c_2^2}$$
$$|y|=|b_2|.\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}$$

C noktası Q ile aynı meridyen üzerinde bulunduğundan C ile Q nun apsis ve ordinatları aynı işaretli olmalıdır. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} y &= \frac{b_2\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}} \\ x &= \frac{a_2}{b_2}y=\frac{a_2}{b_2}.b_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}=\frac{a_2\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}} \end{aligned}$$

olur. Yani C noktası

$$C=(\tfrac{a_2\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}},\tfrac{b_2\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}},c_1)$$

olur.

$b_2 = 0$ iken

$$C = \begin{cases} (\sqrt{a_1^2 + b_1^2}, 0, c_1), & a_2 \geq 0 \\ (-\sqrt{a_1^2 + b_1^2}, 0, c_1), & a_2 < 0 \end{cases}$$

$$= \left(\frac{a_2\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}, 0, c_1\right)$$

dir.

$a_2 = 0 = b_2$ iken P noktası ile C noktası çakışır.

$\overset{\frown}{PC}$ yayının uzunluğunu integral yardımıyla hesaplamak için $xy-$düzlemindeki dik izdüşümlerinin bölgelerini gözönüne almalıyız.

i) P ve Q nun izdüşümü aynı bölgede ise,

$$x^2 + y^2 = r^2 - c_1^2$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$y'^2 = \frac{x^2}{r^2 - c_1^2 - x^2}$$

$$\left|\overset{\frown}{PC}\right| = \left|\int_P^C \sqrt{1 + f'^2(x)}dx\right|$$

$$= \left|\int_{a_1}^{a_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx\right|$$

$$= \left|\sqrt{r^2 - c_1^2}.\arcsin\frac{x}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\Big|_{a_1}^{a_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}}\right|$$

$$= \left|\sqrt{r^2 - c_1^2}.(\arcsin\frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}} - \arcsin\frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}})\right|$$

olur. $\overset{\frown}{CQ}$ yayının uzunluğunu hesaplamak için $xz-$düzleminde $\overset{\frown}{CQ}$ ya karşılık gelen yayı düşünelim. $\overset{\frown}{CQ}$ nun bulunduğu meridyene $xz-$düzleminde karşılık gelen meridyenin denklemi $x^2+z^2=r^2$ dir. Bu meridyen üzerinde C ye karşılık gelen C' noktası, bu meridyen ile P den geçen enlem paralelinin arakesiti olur. Benzer şekilde Q ya karşılık gelen Q' noktası, Q dan geçen enlem paraleli ile $x^2+z^2=r^2$ nin arakesitinden bulunur.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+z^2=r^2 \\ z=c_1 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow x^2=r^2-c_1^2 \Rightarrow x=\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{r^2-c_1^2}, & a_2\geq 0 \\ -\sqrt{r^2-c_1^2}, & a_2<0 \end{array}\right.$$

$$C'=\left\{\begin{array}{ll} (\sqrt{r^2-c_1^2},0,c_1), & a_2\geq 0 \ \text{ iken} \\ (-\sqrt{r^2-c_1^2},0,c_1), & a_2<0 \ \text{ iken} \end{array}\right.$$

olur. Q'

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+z^2=r^2 \\ z=c_2 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow x^2=r^2-c_2^2 \Rightarrow x=\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{r^2-c_2^2}, & a_2\geq 0 \\ -\sqrt{r^2-c_2^2}, & a_2<0 \end{array}\right.$$

$$Q'=\left\{\begin{array}{ll} (\sqrt{r^2-c_2^2},0,c_2), & a_2\geq 0 \ \text{ iken} \\ (-\sqrt{r^2-c_2^2},0,c_2), & a_2<0 \ \text{ iken} \end{array}\right.$$

olur. C ve Q aynı meridyen üzerinde olduğundan apsis ve ordinatları aynı işaretlidir. $x^2+z^2=r^2$ çemberi üzerindeki $C'Q'$ yayının uzunluğu integral yardımıyla

$$\left|\widehat{C'Q'}\right| = \left|\int_{C'}^{Q'} \sqrt{1+f'^2(z)}dz\right|$$

$$= \left|\int_{c_1}^{c_2} \sqrt{1+\tfrac{z^2}{r^2-z^2}}dz\right|$$

$$= \left|r.\arcsin \tfrac{z}{r}\Big|_{c_1}^{c_2}\right|$$

$$= \left|r(\arcsin \tfrac{c_2}{r} - \arcsin \tfrac{c_1}{r})\right|$$

olarak bulunur. PQ küresel taksi uzaklığı

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = \left|\sqrt{r^2-c_1^2}.(\arcsin \frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}} - \arcsin \frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}})\right| +$$

$$r\left|(\arcsin \frac{c_2}{r} - \arcsin \frac{c_1}{r})\right|$$

olur.

Şimdi bu durumda P ve Q arasındaki küresel taksi uzaklığının coğrafi koordinatlarla sağlamasını yapalım:

Kartezyen ve coğrafi koordinatlar arasındaki geçiş bağıntıları kullanılırsa,

$$a_1 = r\cos u_1 \cos v_1 \qquad a_2 = r\cos u_2 \cos v_2$$

$$b_1 = r\cos u_1 \sin v_1 \qquad b_2 = r\cos u_2 \sin v_2$$

$$c_1 = r\sin u_1 \qquad c_2 = r\sin u_2$$

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = \left|\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 u_1}.(\arcsin \frac{r\cos u_2 \cos v_2}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2 u_2}} - \arcsin \frac{r\cos u_1 \cos v_1}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2 u_1}})\right|$$

$$+r\left|(\arcsin(\sin u_2) - \arcsin(\sin u_1)\right|$$

$$= \left|r\cos u_1(\arcsin(\cos v_2) - \arcsin(\cos v_1)\right| + r\left|u_1 - u_2\right|$$

$$= r\cos u_1\left|\arcsin(\cos v_2\sqrt{1-\cos^2 v_1} - \cos v_1\sqrt{1-\cos^2 v_2})\right| + r\left|u_1 - u_2\right|$$

$$= r\cos u_1\left|\arcsin(\cos v_2 \sin v_1 - \cos v_1 \sin v_2)\right| + r\left|u_1 - u_2\right|$$

$$= r(\cos u_1\left|v_1 - v_2\right| + \left|u_1 - u_2\right|), \qquad \left|v_1 - v_2\right| \leq \pi$$

elde edilir.

ii) P ve Q nun $xy-$düzlemi üzerindeki izdüşümleri komşu bölgelerde iken;

$a_1a_2 < 0$, $b_1b_2 > 0$ veya $a_1a_2 > 0$, $b_1b_2 < 0$ dır.

a) $a_1a_2 < 0$, $b_1b_2 > 0$ ise,

i) de yapılanlara benzer olarak

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = \left|\sqrt{r^2 - c_1^2}.(\arcsin \frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}} - \arcsin \frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}})\right| + r\left|(\arcsin \frac{c_2}{r} - \arcsin \frac{c_1}{r})\right|$$

bulunur. Bu durumdaki küresel taksi uzaklığının coğrafi koordinatlardaki karşılığı

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = r(\cos u_1\left|v_1 - v_2\right| + \left|u_1 - u_2\right|), \quad \left|v_1 - v_2\right| < \pi$$

dir.

b) $a_1a_2 > 0$, $b_1b_2 < 0$ ise,

$$\left|\widehat{PC}\right| = \left|\int_P^C \sqrt{1+f'^2(y)}dy\right|$$

$$= \left|\int_{b_1}^{b_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-y^2}}dy\right|$$

$$= \left|\sqrt{r^2-c_1^2}.\arcsin\frac{y}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\Big|_{b_1}^{b_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}}\right|$$

$$= \left|\sqrt{r^2-c_1^2}.(\arcsin\frac{b_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}} - \arcsin\frac{b_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}})\right|$$

$$\left|\widehat{CQ}\right| = r\left|\arcsin\frac{c_2}{r} - \arcsin\frac{c_1}{r}\right|$$

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = \left|\sqrt{r^2-c_1^2}.(\arcsin\frac{b_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}} - \arcsin\frac{b_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}})\right| + r\left|\arcsin\frac{c_2}{r} - \arcsin\frac{c_1}{r}\right|$$

dir. Bu duruma coğrafi koordinatlarda karşılık gelen küresel taksi uzaklığı

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = r(\cos u_1 \left|v_1 - v_2\right| + \left|u_1 - u_2\right|), \qquad \left|v_1 - v_2\right| < \pi$$

olur.

iii) P ve Q nun $xy-$düzlemindeki izdüşümleri zıt bölgelerde iken,

$a_1a_2 < 0$, $b_1b_2 < 0$ dır.

a) P nin izdüşümü I.ve Q nun izdüşümü III. bölgede (P nin izdüşümü II. ve Q nun izdüşümü IV.bölgede) iken, $\frac{b_2}{a_2} > \frac{b_1}{a_1}$ ise $|v_1 - v_2| < \pi$ dir. P nin izdüşümü III.ve Qnun izdüşümü I.bölgede(P nin izdüşümü IV. ve Q nun izdüşümü II.bölgede) iken, $\frac{b_2}{a_2} < \frac{b_1}{a_1}$ ise $|v_1 - v_2| < \pi$ dir. Buna göre,

$$\left|\widehat{PC}\right| = \int_{a_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}}^{\sqrt{r^2-c_1^2}} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-x^2}}dx + \int_{a_1}^{\sqrt{r^2-c_1^2}} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-x^2}}dx$$

$$= \sqrt{r^2 - c_1^2}.\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\Bigg|_{a_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}}^{\sqrt{r^2-c_1^2}} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\Bigg|_{\sqrt{r^2-c_1^2}}^{a_1}\right)$$

$$= \sqrt{r^2 - c_1^2}.(\arcsin 1 - \arcsin \frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}} + \arcsin \frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}} - \arcsin 1)$$

$$= \sqrt{r^2 - c_1^2}\left|\arcsin \frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}} - \arcsin \frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}\right|$$

olur. $\left|\widehat{CQ}\right|$ nun ifadesi i) deki gibidir. Bu duruma coğrafi koordinatlarda karşılık gelen ifade,

$$\left|\widehat{PC}\right| + \left|\widehat{CQ}\right| = r(\cos u_1 \left|v_1 - v_2\right| + \left|u_1 - u_2\right| , \qquad \left|v_1 - v_2\right| < \pi$$

olur. $\left|\widehat{PC}\right|$ nin coğrafi koordinatlardaki karşılığının sağlamasını yapalım:

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{PC}\right| &= \sqrt{r^2 - c_1^2}\left|\arcsin \frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}} - \arcsin \frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}\right| \\
&= \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u_1}\left|\arcsin(\cos v_1) - \arcsin(\cos v_2)\right| \\
&= r.\cos v_1 \left|\arcsin(\cos v_1.\sin v_2 - \cos v_2.\sin v_1)\right| \\
&= r.\cos v_1.\left|v_1 - v_2\right|
\end{aligned}$$

dir.

b) P nin izdüşümü I. ve Q nun izdüşümü III. bölgede (P nin izdüşümü II. ve Q nun izdüşümü IV.bölgede) iken, $\frac{b_2}{a_2} < \frac{b_1}{a_1}$ ise $|v_1 - v_2| > \pi$ dir. P nin izdüşümü III.Qnun izdüşümü I.bölgede (P nin izdüşümü IV.bölgede Q nun izdüşümü II.bölgede)iken, $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2}$ ise $|v_1 - v_2| > \pi$ dir. Buna göre,

$$|\widehat{PC}| = \int_{-\sqrt{r^2-c_1^2}}^{a_2} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-x^2}}dx + \int_{a_1}^{-\sqrt{r^2-c_1^2}} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-x^2}}dx$$

ifadesiyle veya a) dan yararlanarak

$$|\widehat{PC}| = 2\pi.\sqrt{r^2-c_1^2} - \left[\int_{a_2\frac{\sqrt{r^2-c_1^2}}{\sqrt{r^2-c_2^2}}}^{\sqrt{r^2-c_1^2}} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-x^2}}dx + \int_{a_1}^{\sqrt{r^2-c_1^2}} \sqrt{\frac{r^2-c_1^2}{r^2-c_1^2-x^2}}dx \right]$$

$$= 2\pi.\sqrt{r^2-c_1^2} - \sqrt{r^2-c_1^2}\left|\arcsin\frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}} - \arcsin\frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}\right|$$

$$= \sqrt{r^2-c_1^2}(2\pi - \left|\arcsin\frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}} - \arcsin\frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}\right|)$$

olur. Coğrafi koordinatlarda bu duruma karşılık gelen eşitlik

$$r\cos u_1(2\pi - |v_1 - v_2|)$$

idi.

$P = (a_1, b_1, c_1)$ ve $Q = (a_2, b_2, c_2)$ noktaları r yarıçaplı küre üzerinde iki nokta olmak üzere $|c_1| \geq |c_2|$ durumunda bu iki nokta arasındaki küresel taksi uzaklığını kartezyen koordinatlarda aşağıdaki biçimde özetleyebiliriz:

$$
d_{TS}(P,Q)=\begin{cases}
r\left|\arcsin\frac{c_2}{r}-\arcsin\frac{c_1}{r}\right|+\sqrt{r^2-c_1^2}\left|\arcsin\frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}-\arcsin\frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\right| & , \left\{\begin{array}{l} a_1a_2>0 \text{ ve } b_1b_2>0 \\ \quad\text{veya} \\ a_1a_2<0 \text{ ve } b_1b_2>0 \\ \quad\text{veya} \\ a_1a_2<0 \text{ ve } b_1b_2<0 \text{ iken} \\ P \text{ nin izdüşümü } I.\text{ve } Q \text{ nun izdüşümü} \\ III.\text{ bölgede (veya } P \text{ nin izdüşümü } II.\text{ve} \\ Q \text{ nun izdüşümü } IV.\text{ bölgede) iken } \frac{b_2}{a_2}>\frac{b_1}{a_1} \text{ ise} \end{array}\right. \\
r\left|\arcsin\frac{c_2}{r}-\arcsin\frac{c_1}{r}\right|+\sqrt{r^2-c_1^2}\left|\arcsin\frac{b_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}-\arcsin\frac{b_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\right| & , \ a_1a_2>0 \text{ ve } b_1b_2<0 \text{ ise} \\
r\left|\arcsin\frac{c_2}{r}-\arcsin\frac{c_1}{r}\right|+\sqrt{r^2-c_1^2}\left(2\pi-\left|\arcsin\frac{a_2}{\sqrt{r^2-c_2^2}}-\arcsin\frac{a_1}{\sqrt{r^2-c_1^2}}\right|\right) & , \left\{\begin{array}{l} a_1a_2<0 \text{ ve } b_1b_2<0 \text{ iken} \\ P \text{ nin izdüşümü } I.\text{ve } Q \text{ nun izdüşümü} \\ III.\text{ bölgede (veya } P \text{ nin izdüşümü } II.\text{ve} \\ Q \text{ nun izdüşümü } IV.\text{ bölgede) iken } \frac{b_2}{a_2}<\frac{b_1}{a_1} \text{ ise} \end{array}\right.
\end{cases}
$$

2.5 Küre Üzerinde Bir Meridyenin Denklemi

Kürenin denklemi $x^2+y^2+z^2=r^2$ olmak üzere $xz-$düzleminin karşılığı olan meridyen $\{(x,0,z): x^2+z^2=r^2\}$ dir. Herhangi bir meridyen $x'z$ olsun. $x'z$ ile xz arasındaki boylam farkı φ ise $x'z$ düzleminin denklemi

$$y=(\tan\varphi)x$$

olacağından $x'z$ meridyeninin denklemi

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ y=(\tan\varphi)x \end{cases}$$

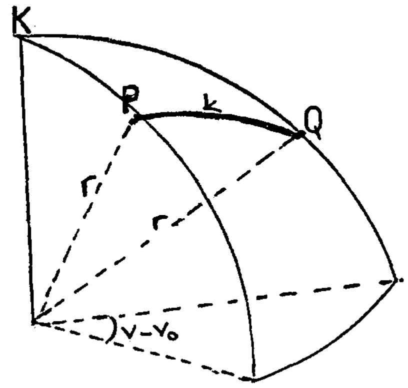
$$\begin{aligned} x^2+(\tan^2\varphi)x^2+z^2 &= r^2 \\ (1+\tan^2\varphi)x^2+z^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$\left\{(x,(\tan\varphi)x,z): \frac{x^2}{\cos^2\varphi}+z^2=r^2\right\}$$

şeklinde elde edilir.

2.6 Merkezi Küre Üzerinde Olan Bir Küresel Çemberin Coğrafi Koordinatlar Cinsinden Denklemi

r yarıçaplı merkezil küre üzerinde $P(u_0,v_0)$ noktasına, küresel yay üzerinden ölçülen k birim, $k\leq \pi r$, uzaklıktaki noktaların geometrik yerinin (ki biz buna *yaysal yarıçapı k olan P merkezli küresel çember* diyeceğiz.)denklemini bulalım.



Şekil 2.8

Şekil 2.8 deki KPQ küresel üçgenine küresel üçgenin ana formülünü uygularsak P noktasından k birim yaysal uzaklıktaki Q noktalarının geometrik yeri olan çemberin denklemi

$$\begin{aligned}
\cos \overset{\frown}{PQ} &= \cos \overset{\frown}{KP} \,.\cos \overset{\frown}{KQ} + \sin \overset{\frown}{KP} \,.\sin \overset{\frown}{KQ} \,.\cos \hat{K} \\
\cos \frac{k}{r} &= \cos(\frac{\pi}{2} - u_0).\cos(\frac{\pi}{2} - u) + \sin(\frac{\pi}{2} - u_0).\sin(\frac{\pi}{2} - u).\cos(v - v_0) \\
k &= r \arccos(\sin u_0 \sin u + \cos u_0 \cos u \cos(v - v_0)), \quad k \leq \pi r
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.7 Küresel Taksi Çemberi

r yarıçaplı analitik küre üzerinde merkezi $P(u_0, v_0)$, yarıçapı $k \leq \pi r$, $k \in R$ olan küresel taksi çemberinin denklemi, $Q(u,v)$ geometrik yere ait bir nokta olmak üzere

$$d_{TS}(P,Q) = k, \quad k \leq \pi r$$

kullanılarak

$$k = \begin{cases} r\left(|v-v_0|\cos u + |u-u_0|\right), & |v-v_0| \le \pi \\ r\left((2\pi - |v-v_0|)\cos u + |u-u_0|\right), & |v-v_0| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| \ge |u_0|$$
$$ \begin{cases} r\left(|v-v_0|\cos u_0 + |u-u_0|\right), & |v-v_0| \le \pi \\ r\left((2\pi - |v-v_0|)\cos u_0 + |u-u_0|\right), & |v-v_0| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| < |u_0|$$

şeklinde olur.

Örnek 2.5: 1 birim(br) yarıçaplı küre üzerinde merkezi $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ yarıçapı $\frac{\pi}{2}$ olan küresel taksi çemberinin denklemi

$$\frac{\pi}{2} = \begin{cases} |v|\cos u + \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| \le \pi \\ (2\pi - |v|)\cos u + \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| \ge \tfrac{\pi}{2}$$
$$\phantom{\frac{\pi}{2} = } \begin{cases} \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| \le \pi \\ \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| < \tfrac{\pi}{2}$$

$|u| > \frac{\pi}{2}$ ve $|v| > \pi$ olamayacağından denklem

$$\frac{\pi}{2} = \begin{cases} |v|\cos u + \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| \le \pi \text{ ve } |u| = \frac{\pi}{2} \\ \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| \le \pi \text{ ve } |u| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} = \left|u - \tfrac{\pi}{2}\right|, \qquad |v| \le \pi \text{ ve } |u| < \frac{\pi}{2}$$

den $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ iken

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= -u + \frac{\pi}{2} \text{ ve } |v| \le \pi \\ u &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ki bu da ekvatorun denklemidir.

Yarıçapı 1 br olan küre üzerinde merkezi (u_0, v_0) ve yaysal yarıçapı k olan küresel çemberin denklemi

$$k = \arccos(\sin u_0 \sin u + \cos u_0 \cos u \cos(v - v_0))$$

olduğundan, aynı küre üzerinde merkezi $(\frac{\pi}{2}, 0)$ yaysal yarıçapı $\frac{\pi}{2}$ olan küresel çemberin denklemi de

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\pi}{2} = \arccos(\sin\tfrac{\pi}{2}\sin u + \cos\tfrac{\pi}{2}\cos u\cos v)\\
&\tfrac{\pi}{2} = \arccos(\sin u)\\
&\sin u = 0\\
&u = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece merkezi kuzey kutbu olan bu küresel taksi çemberi aynı zamanda küre üzerindeki küresel çemberdir.

Örnek 2.6: 1 br yarıçaplı küre üzerinde merkezi $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, yarıçapı k br olan küresel taksi çemberinin denklemi

$$k = \begin{cases} |v|\cos u + \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| \le \pi \\ (2\pi - |v|)\cos u + \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| \ge \tfrac{\pi}{2}$$
$$ \begin{cases} \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| \le \pi \\ \left|u - \frac{\pi}{2}\right|, & |v| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| < \tfrac{\pi}{2}$$

$|u| > \frac{\pi}{2}$ ve $|v| > \pi$ tanım gereği ortaya çıkamayacağından

$$k = \left|u - \tfrac{\pi}{2}\right|, \qquad |v| \le \pi \text{ ve } |u| < \frac{\pi}{2}$$

durumundan

$$u = \frac{\pi}{2} - k, \quad k \le \pi$$

şeklinde olur. Bu duruma karşılık gelen küre üzerindeki küresel çemberin denklemi de

$$\begin{aligned}
&k = \arccos(\sin u_0 \sin u + \cos u_0 \cos u \cos(v - v_0))\\
&k = \arccos(\sin\tfrac{\pi}{2}\sin u + \cos\tfrac{\pi}{2}\cos u\cos v)\\
&k = \arccos(\sin u)\\
&\cos k = \sin u\\
&\cos k = \cos(\tfrac{\pi}{2} - u)\\
&k = \tfrac{\pi}{2} - u
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.7: 1br yarıçaplı küre üzerinde merkezi $(u_0, v_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$, yarıçapı k olan küresel taksi çemberinin denklemi

$$k = u + \frac{\pi}{2}$$

ve aynı duruma karşılık gelen küre üzerindeki çemberin denklemi

$$\begin{aligned} k &= \arccos(-\sin u) \\ \cos k &= -\sin u \\ \cos k &= \sin(-u) \\ k &= \frac{\pi}{2} + u \end{aligned}$$

olur.

- Sonuç olarak, merkezin kutup noktalarından biri olması halinde oluşan küresel taksi çemberi küre üzerindeki küresel çember ile çakışır.

Örnek 2.8: 1 yarıçaplı küre üzerinde merkezi $(u_0, v_0) = (0, 0)$ ve yarıçapı $\frac{\pi}{2}$ olan küresel taksi çemberinin denklemi

$$\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} |v|\cos u + |u|, & |v| \leq \pi \\ (2\pi - |v|)\cos u + |u|, & |v| > \pi \end{array}\right\} \text{ ve } |u| \geq 0 \\ \left.\begin{array}{ll} |v| + |u|, & |v| \leq \pi \\ (2\pi - |v|\cos 0 + |u|, & |v| > \pi \end{array}\right\} \text{ ve } |u| < 0 \end{cases}$$

$$\tfrac{\pi}{2} = |v|\cos u + |u|, \qquad |v| \leq \pi, \ |u| \geq 0$$

$$\tfrac{\pi}{2} = |v|\cos u + |u|, \qquad -\pi \leq v \leq \pi, \ -\tfrac{\pi}{2} \leq u \leq \tfrac{\pi}{2}$$

şeklindedir.

Örnek 2.9 : 1 yarıçaplı küre üzerinde merkezi $(u_0, v_0) = (0,0)$ ve yarıçapı $\frac{\pi}{4}$ olan küresel taksi çemberinin denklemi

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} |v|\cos u + |u| & |v| \leq \pi \\ (2\pi - |v|)\cos u + |u|, & |v| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| \geq 0$$
$$\qquad \begin{cases} |v| + |u|, & |v| \leq \pi \\ (2\pi - |v|\cos 0 + |u|, & |v| > \pi \end{cases} \text{ ve } |u| < 0$$

$$\tfrac{\pi}{4} = |v|\cos u + |u|, \qquad |v| \leq \pi \text{ ve } |u| \geq 0$$

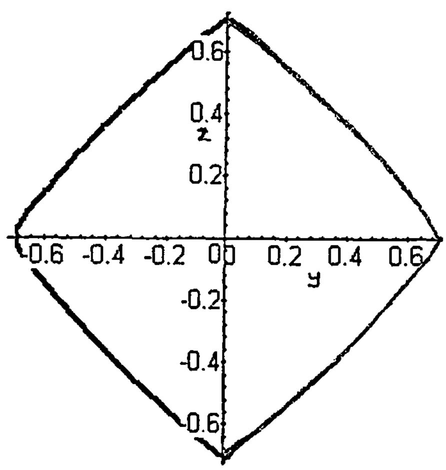
olur. Bu çemberin kartezyen kooordinatlardaki denklemi, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} = \left|\arctan(\frac{y}{x})\right| \sqrt{x^2+y^2} + \arccos(\sqrt{x^2+y^2}) \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

dir. Aynı çemberin $yz-$düzlemindeki dik izdüşümünün denklemi, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} = \left|\arctan(\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}})\right| \sqrt{1-z^2} + \arccos(\sqrt{1-z^2}) \\ x = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. $yz-$ düzlemindeki dik izdüşümünün grafiği Şekil 2.9 da verilmiştir.



Şekil 2.9

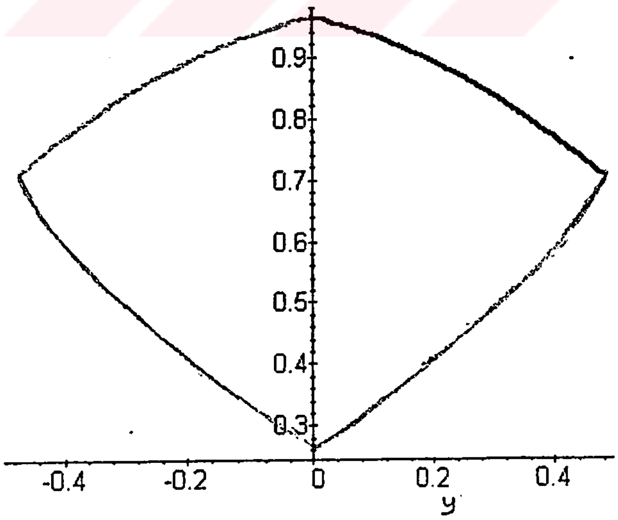
Örnek 2.10: 1 yarıçaplı küre üzerinde merkezi $(\frac{\pi}{4},0)$ ve yarıçapı $\frac{\pi}{6}$ olan çemberin denklemi

$$\frac{\pi}{6}=\begin{cases} |v|\cos u+\left|u-\frac{\pi}{4}\right|, & |v|\leq\pi \end{cases} \text{ ve } |u|\geq\frac{\pi}{4} \quad \text{;}\quad \begin{cases} |v|\cos\frac{\pi}{4}+\left|u-\frac{\pi}{4}\right|, & |v|\leq\pi \end{cases} \text{ ve } |u|<\frac{\pi}{4},$$

şeklindedir. Bu çemberin kartezyen koordinatlarda $yz-$ düzlemindeki izdüşümünün denklemi

$$\begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)\sqrt{1-z^2}+\arccos(\sqrt{1-z^2})=\frac{5\pi}{12} & \begin{cases} 0\leq y\leq\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{4}\leq z\leq\sin\frac{5\pi}{12} \end{cases} \\ -\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)\sqrt{1-z^2}+\arccos(\sqrt{1-z^2})=\frac{5\pi}{12} & \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\leq y<0 \\ \cos\frac{\pi}{4}\leq z<\sin\frac{5\pi}{12} \end{cases} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)-\arccos(\sqrt{1-z^2})=-\frac{\pi}{12} & \begin{cases} 0\leq y<\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12}\leq z<\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)-\arccos(\sqrt{1-z^2})=-\frac{\pi}{12} & \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}}<y<0 \\ \sin\frac{\pi}{12}<z<\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

dir. Bu izdüşümün grafiği Şekil 2.10 da verilmiştir.



Şekil 2.10

- Her yaysal yarıçaplı çemberin, aynı zamanda bir öklidyen çember olduğu aşikardır. Şimdi, k yaysal yarıçaplı ve (u_0, v_0) merkezli küresel çember, eğer s yarıçaplı öklidyen çember ise s ve r arasındaki ilişkiyi ve öklidyen çemberin merkezini belirleyelim:

r yarıçaplı öklidyen küre üzerinde k yaysal yarıçaplı ve (u_0, v_0) merkezli küresel çemberin denklemi

$$k = r \arccos(\sin u_0 \sin u + \cos u_0 \cos u \cos(v - v_0))$$

idi. Bu küresel çember üzerinde çap oluşturan iki noktayı birleştiren kiriş öklidyen çemberin çapı olur. $A = (u_0 + k, v_0)$ ve $B = (u_0 - k, v_0)$ olmak üzere $\overset{\frown}{AB}$ yayı küresel çemberin bir çapı, AB doğru parçası da bu çembere karşılık gelen öklidyen çemberin çapıdır. A ve B noktalarının kartezyen koordinatlardaki koordinat karşılıkları

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(u_0 + \tfrac{k}{r})\cos v_0, & x_2 &= r\cos(u_0 - \tfrac{k}{r})\cos v_0 \\ y_1 &= r\cos(u_0 + \tfrac{k}{r})\sin v_0, & y_2 &= r\cos(u_0 - \tfrac{k}{r})\sin v_0 \\ z_1 &= r\sin(u_0 + \tfrac{k}{r}), & z_2 &= r\sin(u_0 - \tfrac{k}{r}) \end{aligned}$$

dır. AB kirişinin orta noktası öklidyen çemberin merkezi olur. Böylece M merkezi

$$M = \left(r\cos v_0 \cos u_0 \cos\frac{k}{r}, r\cos u_0 \sin v_0 \cos\frac{k}{r}, r\sin u_0 \cos\frac{k}{r} \right)$$

olarak bulunur. Öklidyen çemberin yarıçapı

$$\begin{aligned} s &= |MB| \\ &= r\sqrt{\frac{(\cos^2 v_0 + \sin^2 v_0)\left[\cos(u_0+\frac{k}{r}) - \cos(u_0-\frac{k}{r})\right]^2}{4} + \frac{\left[\sin(u_0+\frac{k}{r}) - \sin(u_0-\frac{k}{r})\right]^2}{4}} \\ &= r\left|\sin\tfrac{k}{r}\right| \end{aligned}$$

olur. Ayrıca M merkezli ve s yarıçaplı bu öklidyen çemberin denklemi, kartezyen koordinatlarda,

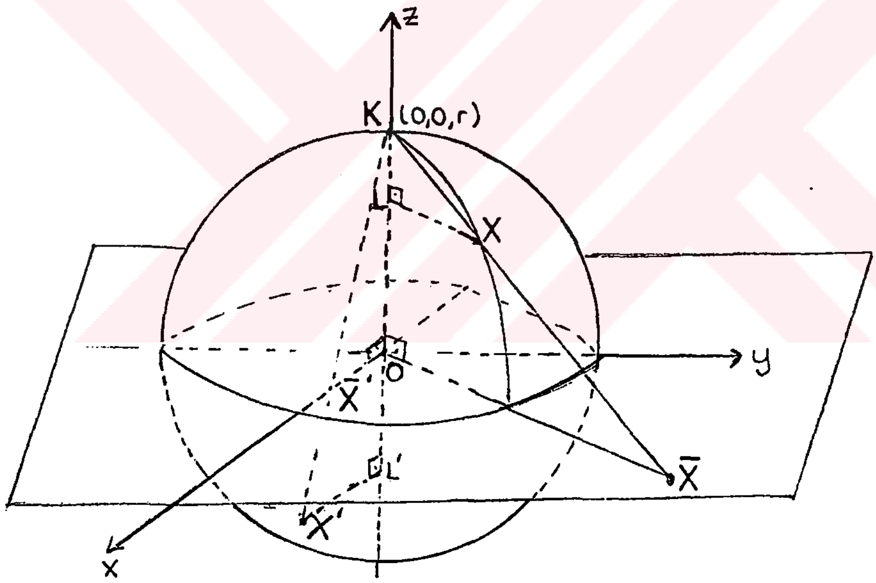
$$\begin{cases} (\cos u_0 \cos v_0)x + (\cos u_0 \sin v_0)y + (\sin u_0)z - r\cos\frac{k}{r} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Bölüm 3

$S^2 - \{K\}$ Vektör Uzayı

3.1 Stereografik İzdüşüm



Şekil 3.1

Merkezi $(0,0,0)$ yarıçapı r birim olan üst yarı küreyi ele alalım. R^3 ün

$(x_1, x_2, 0)$ noktasını R^2 nin (x_1, x_2) noktasına eş tutalım. Küre üzerindeki $K = (0, 0, r)$ noktasına *kutup noktası* diyelim. Bu nokta yardımıyla küre üzerinde bulunan herbir X noktasına

$$\begin{array}{rcl} \delta : S^2 - \{K\} & \to & D := R^2 \backslash \{(x, y) | \, x^2 + y^2 < r^2\} \\ X & \to & \overline{X} = KX \cap D \end{array}$$

stereografik izdüşümünde bir $\delta(X) = \overline{X}$ noktası karşılık gelir. Bu nokta KX doğrusunun $z = 0$ düzlemini kestiği noktadır. Bu doğrunun uygun bir t değeri için

$$K\overline{X} = t.KX$$

olduğundan

$$\overline{X} = K + t(X - K) \qquad (*)$$

formundaki noktalardan geçerler.

$$\overline{X} = (0, 0, r) + t(X - K)$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{X} & = & (0, 0, r) + t((x_1, x_2, x_3) - (0, 0, r)) \\ & = & (tx_1, tx_2, r + t(x_3 - r)) \end{array}$$

olur. Burada $\overline{X} \in D$ olduğundan

$$r + t(x_3 - r) = 0$$

olmalıdır. $t = \frac{r}{r - x_3}$ olduğu zaman $X \in S^2$ vardır. Burada $X \neq K$ olduğu için $x_3 \neq r$ dir. $x_3 = r$ iken $X = K$ olur. $\overset{\triangle}{KO\overline{X}} \sim \overset{\triangle}{KLX}$ benzerliğinden

$$\frac{KO}{KL} = \frac{K\overline{X}}{KX} \Longrightarrow \frac{r}{r - x_3} = \frac{|\overline{X} - K|}{|X - K|} \qquad (**)$$

$$\frac{\overline{X} - K}{X - K} = t \Longrightarrow \frac{|\overline{X} - K|}{|X - K|} = t$$

bulunur. Böylece (**) eşitliği

$$\frac{r}{r-x_3} = \frac{|\overline{X}-K|}{|X-K|} = t$$

olur. t nin bu değeri (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{X} = \delta(X) &= K + t(X-K)\\ &= K + \frac{r}{r-x_3}(X-K)\\ &= \frac{rX - Kx_3}{r-x_3}\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $D = R^2 \backslash \{(x,y) : x^2+y^2 < r^2,\ x,y \in R\}$ olmak üzere

$$\delta : S^2 - \{K\} \to D$$

fonksiyonu S^2 nin D üzerine stereografik izdüşümüdür.

$$\begin{aligned}\delta(x_1,x_2,x_3) &= \frac{r(x_1,x_2,x_3)-(0,0,r)x_3}{r-x_3}\\ &= \left(\frac{rx_1}{r-x_3}, \frac{rx_2}{r-x_3}\right)\end{aligned}$$

- $x_3 < 0$ iken , yani alt yarıkürede üzerindeki her bir X' noktasına

$$\begin{aligned}\delta &: S^2 - \{K\} \to D' := \{(x,y) | \, x^2+y^2 < r^2\}\\ \delta &: X' \to \overline{X}'\end{aligned}$$

stereografik izdüşümünde bir $\delta(X') = \overline{X}'$ noktası karşılık gelir.

$$\begin{aligned}&K\overline{X}' = t.KX' \Rightarrow (\overline{X}'-K) = t(X'-K)\\ &\overline{X}' = (0,0,r) + t((x_1,x_2,x_3)-(0,0,r))\\ &\overline{X}' = (tx_1, tx_2, r + t(x_3-r))\end{aligned}$$

$r + t(x_3 - r) = 0$ dan $t = \frac{r}{r-x_3}$ ve $\overset{\triangle}{K\overline{X}'O} \sim \overset{\triangle}{KX'L'}$ den

$$\frac{K\overline{X}'}{KX'} = \frac{KO}{KL'} \Rightarrow t = \frac{r}{r-x_3}$$

$$\begin{aligned}
\overline{X}' = \delta(X') &= K + t(X' - K) \\
&= \frac{Kr - Kx_3 + rX' - rK}{r - x_3} \\
&= \frac{rX' - Kx_3}{r - x_3}
\end{aligned}$$

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{rx_1}{r - x_3}, \frac{rx_2}{r - x_3}, 0\right), \ \overline{x_3} = 0$$

$$\begin{aligned}
\delta(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{rx_1}{r - x_3}, \frac{rx_2}{r - x_3}, 0\right) \\
\overline{x_1} &= \frac{rx_1}{r - x_3}, \qquad \overline{x_2} = \frac{rx_2}{r - x_3} \\
x_i &= \frac{r - x_3}{r}\overline{x_i}, \qquad i = 1, 2
\end{aligned}$$

olur. Küre denkleminden,

$$\begin{aligned}
& x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \\
& \left[\left(\tfrac{r - x_3}{r}\right)\overline{x_1}\right]^2 + \left[\left(\tfrac{r - x_3}{r}\right)\overline{x_2}\right]^2 + x_3^2 = r^2 \\
& \left(\tfrac{r - x_3}{r}\right)^2 \left[\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2\right] + x_3^2 = r^2 \\
& (r - x_3)^2 \left[\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2\right] = r^2(r^2 - x_3^2) \qquad\qquad r \neq x_3 \\
& (r - x_3) \left[\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2\right] = r^2(r + x_3) \\
& r(\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2) - x_3(\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2) = r^3 + r^2 x_3 \\
& r(\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 - r^2) = (\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 + r^2)x_3 \\
& x_3 = \frac{r(\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 - r^2)}{(\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 + r^2)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $\forall\overline{X} \in R^2$ noktasına bir tek $X \in S^2 - \{K\}$ noktası karşılık gelir.

$$\overline{X} = \frac{rX - Kx_3}{r - x_3}$$

$$(r - x_3)\overline{X} + Kx_3 = rX$$

$$X = \frac{1}{r}\left[r - \frac{r(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2-r^2)}{(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2)}\overline{X} + \frac{r(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2-r^2)}{(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2)}K\right]$$

$$= \frac{2r^2\overline{X} + (\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2-r^2)K}{(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2)}$$

$$\delta^{-1}(\overline{X}) = X = \frac{2r^2\overline{X} + (\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2-r^2)K}{(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2)}$$

$$= \left(\frac{2r^2\overline{x_1}}{\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2}, \frac{2r^2\overline{x_2}}{(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2)}, \frac{r(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2-r^2)}{\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+r^2}\right)$$

olarak elde edilir.

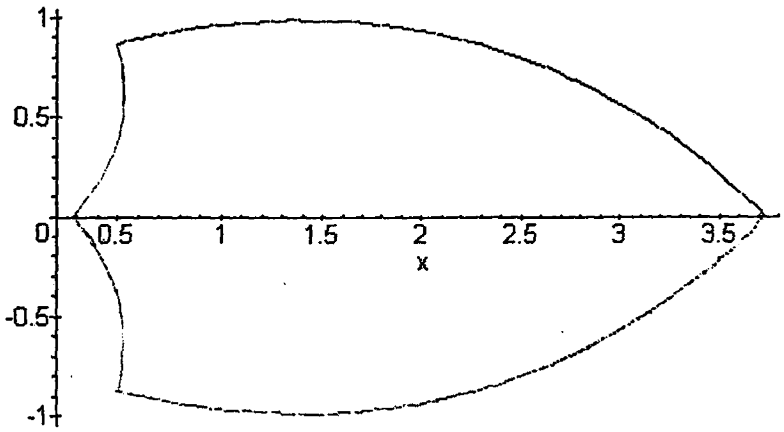
Örnek 3.1: Merkezi $(0,0)$ yarıçapı $k = \frac{\pi}{3}$ olan küresel taksi çemberinin coğrafi koordinatlarda denklemi

$$\frac{\pi}{3} = |v|\cos u + |u|, \qquad |v| \leq \pi$$

dir. Bu çemberin denkleminin stereografik izdüşüm altındaki görüntüsünün kartezyen koordinatlardaki denklemi

$$\begin{cases} \arctan\frac{y}{x}\cos(\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})) + \arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}) = \frac{\pi}{3}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2-\sqrt{3}}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\arctan\frac{y}{x}\cos(\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})) + \arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}) = \frac{\pi}{3}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2-\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y < 0 \\ \arctan\frac{y}{x}\cos(\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})) - \arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}) = \frac{\pi}{3}, & \frac{1}{\sqrt{3}+2} \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\arctan\frac{y}{x}\cos(\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})) - \arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}) = \frac{\pi}{3}, & \frac{1}{\sqrt{3}+2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} < y < 0 \end{cases}$$

olur. Bu çemberin stereografik izdüşüm altındaki görüntüsünün grafiği Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2

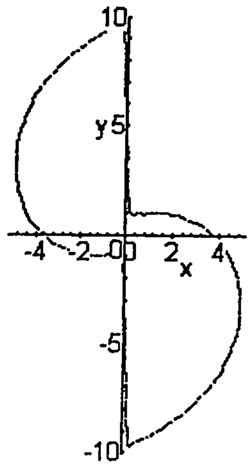
Bu çemberi tanımlayan fonksiyonlardan

$$\arctan\frac{y}{x}\cos(\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}))+\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})=\frac{\pi}{3},\ -5\leq x\leq 5, -10\leq y\leq 10$$

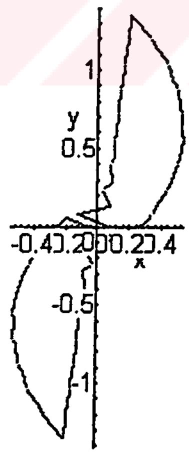
ve

$$\arctan\frac{y}{x}\cos(\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}))-\arcsin(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})=\frac{\pi}{3},\ -5\leq x\leq 5, -2\leq y\leq 2$$

nin daha geniş aralıklardaki grafikleri sırasıyla Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de verilmiştir.



Şekil 3.3



Şekil 3.4

- **Küresel Taksi Çemberlerine İlişkin Bir Değerlendirme**

  Küre üzerindeki çemberler stereografik izdüşüm altında çemberlere veya doğrulara dönüşürler. Yukarıdaki örnekten küresel taksi çemberlerinin çember yaylarından oluşamayabileceği anlaşılmaktadır. Küresel taksi çemberlerinin (merkezi kutup noktaları olanların dışında) düzlemsel eğriler olmayacağı kuvvetle sezilmekle beraber bu özelliğin ispatı henüz açık bir sorundur.

3.2 $S^2 - \{K\}$ Vektör Uzayı

$S^2 - \{K\}$ nın vektörleri, bu küre üzerindeki noktalardır. *Vektörel toplamı;* vektörlerin stereografik izdüşümlerinin R^2 nin alışılmış vektör toplamının ters stereografik izdüşüm altında görüntüsü olarak tanımlayalım. Yani,

$$\forall A, B \in S^2 - \{K\} \text{ için } A \oplus B = \delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B))$$

olsun. *Skaler çarpımı* da vektörlerin stereografik izdüşüm altındaki görüntüsünün R^2 de alışılmış skalerle vektörün çarpımının ters görüntüsü olarak tanımlayalım. Yani,

$$\forall s \in R \text{ ve } A \in S^2 - \{K\} \text{ için } s \odot A = \delta^{-1}(s.\delta(A))$$

olsun.

$S^2 - \{K\}$ nın üzerinde tanımlanan vektör toplamı ve vektörün skalerle çarpım işlemleriyle birlikte bir vektör uzayı oluşturduğunu gösterelim:

$A = (x_1, x_2, x_3)$ ve $B = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 - \{K\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B)) \\ &= \delta^{-1}((\overline{x_1} + \overline{y_1}), (\overline{x_2} + \overline{y_2})) \\ &= \left(\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}, \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}, \frac{r\left[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2\right]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca $s \in R$ ve $A = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{K\}$ için

$$
\begin{aligned}
s \odot A &= \delta^{-1}(s.\delta(A)) \\
&= \left(\frac{2r^2\left(\frac{srx_1}{r-x_3}\right)}{\left(\frac{srx_1}{r-x_3}\right)^2+\left(\frac{srx_2}{r-x_3}\right)^2+r^2}, \frac{2r^2\left(\frac{srx_2}{r-x_3}\right)}{\left(\frac{srx_1}{r-x_3}\right)^2+\left(\frac{srx_2}{r-x_3}\right)^2+r^2}, \frac{r\left[\left(\frac{srx_1}{r-x_3}\right)^2+\left(\frac{srx_2}{r-x_3}\right)^2-r^2\right]}{\left(\frac{srx_1}{r-x_3}\right)^2+\left(\frac{srx_2}{r-x_3}\right)^2+r^2} \right) \\
&= \left(\frac{2srx_1}{s^2(r+x_3)+(r-x_3)}, \frac{2srx_2}{s^2(r+x_3)+(r-x_3)}, \frac{r\left[s^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{s^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right)
\end{aligned}
$$

olur.

1) $\forall A, B \in S^2 - \{K\}$ için $A \oplus B = B \oplus A$ dır.

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= \delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B)) \\
&= \delta^{-1}(\delta(B) + \delta(A)) \qquad (R^2 \text{ de } + \text{ işleminin değişme özelliği}) \\
&= B \oplus A
\end{aligned}
$$

2) $\forall A, B, C \in S^2 - \{K\}$ için $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ dır.

$$
\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= \delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B)) \oplus C \\
&= \delta^{-1}\left[\delta\left(\delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B))\right) + \delta(C)\right] \\
&= \delta^{-1}\left[\delta(A) + \delta(B) + \delta(C)\right] \\
&= \delta^{-1}\left[\delta(A) + \delta\left(\delta^{-1}(\delta(B) + \delta(C)\right)\right] \\
&= \delta^{-1}\left[\delta(A) + \delta(B \oplus C)\right] \\
&= A \oplus (B \oplus C)
\end{aligned}
$$

3) $\forall A \in S^2 - \{K\}$ için $A \oplus \mathbf{O} = A$ olacak şekilde bir tek $\mathbf{O} \in S^2 - \{K\}$ vektörü vardır.

$$
\begin{aligned}
A \oplus \mathbf{O} &= \mathbf{A} \\
\delta^{-1}(\delta(A) + \delta(\mathbf{O})) &= \delta^{-1}(\delta(A)) \\
\delta(A) + \delta(\mathbf{O}) &= \delta(A) \\
\delta(\mathbf{O}) &= O
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{ry_1}{r-y_3}, \frac{ry_2}{r-y_3}\right) = (0,0) \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 0$$

$(y_1, y_2, y_3) \in S^2 - \{K\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= r^2 \\ y_3^2 &= r^2 \\ y_3 &= -r \end{aligned}$$

dir. Çünkü $\mathbf{O} \in S^2 - \{K\}$ dır. Buradan

$$\mathbf{O} = (0, 0, -r)$$

dır ve bir tektir.

4) $\forall A \in S^2 - \{K\}$ için $A \oplus B = \mathbf{O}$ olacak şekilde bir tek $B \in S^2 - \{K\}$ vektörü vardır ve bu vektöre $\oplus$ işlemine göre A nın tersi denir.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \mathbf{O} \\ \delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B)) &= \delta^{-1}(\delta(\mathbf{O})) \\ \delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B)) &= \delta^{-1}(0) \\ \delta(A) + \delta(B) &= 0 \\ \delta(B) &= -\delta(A) \\ B &= \delta^{-1}(-\delta(A)) \end{aligned}$$

dır. Buna göre A nın tersi $-A = B = \delta^{-1}(-\delta(A))$ olur. $A = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} -A &= \delta^{-1}(-\delta(x_1, x_2, x_3)) \\ &= \delta^{-1}\left(-\frac{rx_1}{r-x_3}, -\frac{rx_2}{r-x_3}\right) = \delta^{-1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2r^2\overline{x_1}}{\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 + r^2}, \frac{2r^2\overline{x_2}}{\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 + r^2}, \frac{r\left(\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 - r^2\right)}{\overline{x_1}^2 + \overline{x_2}^2 + r^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2r^2\left(-\frac{rx_1}{r-x_3}\right)}{\left(\frac{rx_1}{r-x_3}\right)^2 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3}\right)^2 + r^2}, \frac{2r^2\left(-\frac{rx_2}{r-x_3}\right)}{\left(\frac{rx_1}{r-x_3}\right)^2 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3}\right)^2 + r^2}, \frac{r\left(\frac{r^2(x_1^2+x_2^2)}{(r-x_3)^2} - r^2\right)}{\left(\frac{rx_1}{r-x_3}\right)^2 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3}\right)^2 + r^2} \right)$$

$$= (\frac{-2rx_1}{2r}, \frac{-2rx_2}{2r}, \frac{r.r^2 2x_3}{r^2.2r})$$

$$= (-x_1, -x_2, x_3)$$

şeklindedir.

5) $\forall s, s' \in R$ ve $A \in S^2 - \{K\}$ için $(s+s') \odot A = s \odot A \oplus s' \odot A$ dir.

$$\begin{aligned} (s+s') \odot A = {} & \delta^{-1}\left[(s+s').\delta(A)\right] \\ = {} & \delta^{-1}\left[(s.\delta(A) + s'.\delta(A)\right] \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s \odot A \oplus s' \odot B = {} & \delta^{-1}\left[\delta(s \odot A) + \delta(s' \odot A)\right] \\ = {} & \delta^{-1}\left[\delta(\delta^{-1}(s.\delta(A))) + \delta(\delta^{-1}(s'.\delta(A)))\right] \\ = {} & \delta^{-1}\left[s.\delta(A) + s'.\delta(A)\right] \qquad (**) \end{aligned}$$

$(*)$ ve $(**)$ dan

$$(s+s') \odot A = s \odot A \oplus s' \odot A$$

elde edilir.

6) $\forall s \in R$ ve $\forall A, B \in S^2 - \{K\}$ için $s \odot (A \oplus B) = s \odot A \oplus s \odot B$ dir.

$$\begin{aligned} s \odot (A \oplus B) & = \delta^{-1}(s.\delta(A \oplus B)) \\ & = \delta^{-1}\left(s.\delta(\delta^{-1}(\delta(A) + \delta(B)))\right) \\ & = \delta^{-1}(s.(\delta(A) + \delta(B))) \\ & = \delta^{-1}(s.\delta(A) + s.\delta(B)) \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s \odot A \oplus s \odot B & = \delta^{-1}(\delta(s \odot A) \oplus (s \odot B)) \\ & = \delta^{-1}(\delta(\delta^{-1}(s.\delta(A))) \oplus \delta(\delta^{-1}(s.\delta(B)))) \\ & = \delta^{-1}(s.\delta(A) + s.\delta(B)) \qquad (**) \end{aligned}$$

$(*)$ ve $(**)$ dan

$$s \odot (A \oplus B) = s \odot A \oplus s \odot B$$

elde edilir.

7) $\forall s, s' \in R$ ve $A \in S^2 - \{K\}$ için $s \odot (s' \odot A) = (s.s') \odot A = s' \odot (s \odot A)$ dir.

$$\begin{aligned} s \odot (s' \odot A) &= s \odot (\delta^{-1}(s'.\delta(A))) \\ &= \delta^{-1}(s.\delta(\delta^{-1}(s'.\delta(A)))) \\ &= (s.s') \odot A \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} s' \odot (s \odot A) &= s' \odot (\delta^{-1}(s.\delta(A))) \\ &= \delta^{-1}(s'.\delta((\delta^{-1}(s.\delta(A))))) \\ &= (s.s') \odot A \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$s \odot (s' \odot A) = (s.s') \odot A = s' \odot (s \odot A)$$

elde edilir.

8) $\forall A \in S^2 - \{K\}$ için $1 \odot A = A$ dır.

$$\begin{aligned} 1 \odot A &= \delta^{-1}(1.\delta(A)) \\ &= \delta^{-1}(\delta(A)) \\ &= A \end{aligned}$$

olur.

Vektör uzayı aksiyomlarını sağladığı için $(S^2 - \{K\}, \oplus, \odot)$ sistemi bir vektör uzayıdır.

3.3 $S^2 - \{K\}$ Üzerinde Bir İç Çarpım

Teorem 3.3.1 *$\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\beta = (y_1, y_2, y_3)$, $S^2 - \{K\}$ nin vektörleri olmak üzere,*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{(r - x_3).(r - y_3)} \begin{cases} |x_1y_1| + |x_2y_2|, & x_1y_1 > 0 \text{ ve } x_2y_2 > 0 \ (i) \\ -|x_1y_1| + |x_2y_2|, & x_1y_1 < 0 \text{ ve } x_2y_2 > 0 \ (ii) \\ |x_1y_1| - |x_2y_2|, & x_1y_1 > 0 \text{ ve } x_2y_2 < 0 \ (iii) \\ -|x_1y_1| - |x_2y_2|, & x_1y_1 < 0 \text{ ve } x_2y_2 < 0 \ (iv) \end{cases}$$

ifadesi $S^2 - \{K\}$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar.

Bu iç çarpıma *küresel taxi iç çarpımı* diyeceğiz.

İspat: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S^2 - \{K\}$ için ve $\forall k \in R$ için aşağıdaki iç çarpım aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

1. $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$ ve $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{O}$
2. $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$
3. $\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, k \odot \beta \rangle = k \ \langle \alpha, \beta \rangle$
4. $\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$

1. $\forall \alpha = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{K\}$ için $\langle \alpha, \alpha \rangle$, (i) denkleminden

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{r^2}{(r - x_3)^2}(x_1^2 + x_2^2) \geq 0$$

dir.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \ &\Leftrightarrow \ \tfrac{r^2}{(r-x_3)^2}(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ den $x_3^2 = r^2$ ve $x_3 \neq r$ olduğundan $x_3 = -r$ bulunur. Böylece $\alpha = (0, 0, -r) = \mathbf{O}$ elde edilir.

2. $\forall\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)\in S^2-\{K\}$ için

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{r^2}{(r-x_3).(r-y_3)}\begin{cases}|x_1y_1|+|x_2y_2|, & x_1y_1>0 \text{ ve } x_2y_2>0 \ (i)\\ -|x_1y_1|+|x_2y_2|, & x_1y_1<0 \text{ ve } x_2y_2>0 \ (ii)\\ |x_1y_1|-|x_2y_2|, & x_1y_1>0 \text{ ve } x_2y_2<0 \ (iii)\\ -|x_1y_1|-|x_2y_2|, & x_1y_1<0 \text{ ve } x_2y_2<0 \ (iv)\end{cases}$$

de reel sayılarda çarpmanın değişme özelliğinden

$$=\frac{r^2}{(r-x_3).(r-y_3)}\begin{cases}|y_1x_1|+|y_2x_2|, & y_1x_1>0 \text{ ve } y_2x_2>0 \ (i)\\ -|y_1x_1|+|y_2x_2|, & y_1x_1<0 \text{ ve } y_2x_2>0 \ (ii)\\ |y_1x_1|-|y_2x_2|, & y_1x_1>0 \text{ ve } y_2x_2<0 \ (iii)\\ -|y_1x_1|-|y_2x_2|, & y_1x_1<0 \text{ ve } y_2x_2<0 \ (iv)\end{cases}$$

$$=\langle\beta,\alpha\rangle$$

elde edilir.

3. A) $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ ve $\beta=(y_1,y_2,y_3)\in S^2-\{K\}$ için $x_1y_1>0$ ve $x_2y_2>0$ olsun. Bu durumda k nın işaretine göre iki durum vardır.

a) $\forall k\in R^+$ için

$$\begin{aligned}k\odot\alpha&=\delta^{-1}(k.\delta(\alpha))\\&=\left(\frac{2krx_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)},\frac{2krx_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)},\frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)\end{aligned}$$

idi. (i) durumundan

$$\begin{aligned}\langle k\odot\alpha,\beta\rangle&=\frac{r^2}{\left(r-\frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)}\left(\left|\frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right|+\left|\frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right|\right)\\&=\frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)}.\frac{2|k|r(|x_1y_1|+|x_2y_2|)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}\\&=|k|\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}(|x_1y_1|+|x_2y_2|)\\&=k.\langle\alpha,\beta\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\forall k \in R^{-}$ için $k \odot \alpha$ ile β (iv)şartını sağlarlar.

$$\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(-\left|\frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right| - \left|\frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} . \frac{-|k|\,2r\left(|x_1y_1|+|x_2y_2|\right)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}, \quad k<0$$

$$= k\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(|x_1y_1|+|x_2y_2|\right)$$

$$= k.\langle \alpha, \beta \rangle$$

elde edilir.

B) $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\beta = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 - \{K\}$ için $x_1y_1 < 0$ ve $x_2y_2 > 0$ olsun. Bu durumda k nın işaretine göre iki durum vardır.

a) $\forall k \in R^{+}$ için $k \odot \alpha$ ile β , α ve β nın koşulunun aynısını sağlayacağından (ii) durumundan

$$\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(-\left|\frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right| + \left|\frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} . \frac{2\,|k|\,r\left(-|x_1y_1|+|x_2y_2|\right)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}$$

$$= |k|\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(-|x_1y_1|+|x_2y_2|\right)$$

$$= k.\langle \alpha, \beta \rangle$$

elde edilir.

b) $\forall k \in R^-$ için $k \odot \alpha$ ile β (iii) şartını sağlarlar.

$$\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(\left| \frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right| - \left| \frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} \cdot \frac{|k|\,2r\left(|x_1y_1| - |x_2y_2|\right)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}$$

$$= -\,|k|\,\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(-\,|x_1y_1| + |x_2y_2|\right), \qquad k < 0$$

$$= k.\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(-\,|x_1y_1| + |x_2y_2|\right)$$

$$= k.\,\langle \alpha, \beta \rangle$$

olur.

C) $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\beta = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 - \{K\}$ için $x_1y_1 > 0$ ve $x_2y_2 < 0$ olsun. Bu durumda da k nın işaretine göre iki durum vardır.

a) $\forall k \in R^+$ için $k \odot \alpha$ ile β (iii) şartını sağlarlar.

$$\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(\left| \frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right| - \left| \frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} \cdot \frac{2|k|r\left(|x_1y_1| - |x_2y_2|\right)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}$$

$$= k.\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(|x_1y_1| - |x_2y_2|\right)$$

$$= k.\,\langle \alpha, \beta \rangle$$

elde edilir.

b) $\forall k \in R^-$ için $k \odot \alpha$ ile β (ii)şartını sağlarlar.

$$\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(-\left|\frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right| + \left|\frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} \cdot \frac{-|k|\,2r\left(|x_1y_1|-|x_2y_2|\right)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}$$

$$= -|k|\,\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(|x_1y_1|-|x_2y_2|\right), \qquad k<0$$

$$= k.\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(|x_1y_1|-|x_2y_2|\right)$$

$$= k.\langle \alpha, \beta \rangle$$

olur.

D) $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\beta = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 - \{K\}$ için $x_1y_1 < 0$ ve $x_2y_2 < 0$ olsun. Bu durumda k nın işaretine göre iki durum vardır.

a) $\forall k \in R^+$ için $k \odot \alpha$ ile β, (iv) şartını sağlarlar.

$$\langle k \odot \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(-\left|\frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right| - \left|\frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} \cdot \frac{2\,|k|\,r\left(-|x_1y_1|-|x_2y_2|\right)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|}$$

$$= |k|\,\frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)}\left(-|x_1y_1|-|x_2y_2|\right)$$

$$= k.\langle \alpha, \beta \rangle$$

elde edilir.

b) $\forall k \in R^{-}$ için $k \odot \alpha$ ile β (i)şartını sağlarlar.

$$\begin{aligned}
\langle k \odot \alpha, \beta \rangle &= \frac{r^2}{\left(r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)}\right)(r-y_3)} \left(\left| \frac{2krx_1y_1}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right| + \left| \frac{2krx_2y_2}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \right| \right) \\
&= \frac{r^2\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{r.2.(r-x_3)(r-y_3)} . \frac{|k|\, 2r\,(|x_1y_1| + |x_2y_2|)}{|k^2(r+x_3)+(r-x_3)|} \ , \quad k<0 \\
&= k \frac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(-|x_1y_1| - |x_2y_2|\right) \\
&= k . \langle \alpha, \beta \rangle
\end{aligned}$$

olur.

4) $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)$, $\gamma = (z_1, z_2, z_3)$ $S^2 - \{K\}$ üzerinde üç vektör olsun.

$$\begin{aligned}
1)\ \langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle \\
2)\ \langle \alpha, \beta \oplus \gamma \rangle &= \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

olduğunu göstermeliyiz.

1) $\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$ şartının gerçeklendiğini gösterelim.

A) α , β, γ (i) şartını sağlasınlar.

Bu durumda $\alpha \oplus \beta$ vektörü ile γ da (i) şartını sağlar.

$$\begin{aligned}
\alpha \oplus \beta &= \delta^{-1}(\delta(\alpha) + \delta(\beta)) \\
&= \delta^{-1}((\overline{x_1} + \overline{y_1}), (\overline{x_2} + \overline{y_2})) \\
&= \left(\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}, \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}, \frac{r\left[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2\right]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| + \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left|\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{r-z_3}.\left(\left|\frac{r}{r-x_3}(x_1z_1+x_2z_2) + \frac{r}{r-y_3}(y_1z_1+y_2z_2)\right|\right)$$

$$= \frac{r}{r-z_3}.\frac{r}{r-x_3}\left(|x_1z_1| + |x_2z_2|\right) + \frac{r}{r-z_3}\frac{r}{r-y_3}\left(|y_1z_1| + |y_2z_2|\right)$$

$$= \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$$

elde edilir.

B) α , β,γ dan herhangi ikisi aynı şartı sağlarsa; α , β ve $\alpha\oplus\beta$ nın pozisyonuna göre $\alpha\oplus\beta$ ile γ $(i),(ii),(iii),(iv)$ şartlarından birini sağlarlar.

I) α , β aynı şartı sağlarlarsa α ve β nin γ ile oluşturduğu şart ile $\alpha\oplus\beta$ nın γ ile oluşturduğu durum aynı olur.

$x_1y_1>0, x_2y_2>0$ olsun.

a) $x_1z_1<0, x_2z_2>0$ $(y_1z_1<0$ ve $y_2z_2>0)$ iken,

$$\langle\alpha\oplus\beta,\gamma\rangle = \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)}\left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right| + \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| + \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(-\left|\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1\right| + \left|\left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}(x_1z_1+x_2z_2) + \frac{r}{r-y_3}(y_1z_1+y_2z_2)\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(- |x_1 z_1| + |x_2 z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(- |y_1 z_1| + |y_2 z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $x_1 z_1 > 0$, $x_2 z_2 < 0$ iken,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)} . 2r^2 \left(|(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1| - |(\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(\left| \left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right) z_1 \right| - \left| \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right) z_2 \right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| + \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| - \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(|x_1 z_1| - |x_2 z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(|y_1 z_1| - |y_2 z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

c) $x_1 z_1 < 0$, $x_2 z_2 < 0$ iken,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2}\right)(r-z_3)} \left(- \left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r - z_3)} . 2r^2 \left(- |(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1| - |(\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r - z_3)} \cdot \left(- \left| \left(\frac{rx_1}{r - x_3} + \frac{ry_1}{r - y_3}\right) z_1 \right| - \left| \left(\frac{rx_2}{r - x_3} + \frac{ry_2}{r - y_3}\right) z_2 \right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(-\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| - \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(-|x_1 z_1| - |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(-|y_1 z_1| - |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

II) α ile γ aynı şartı sağlasın. Yani $x_1 z_1 > 0, x_2 z_2 > 0$ olsun.

1.durum: $y_1 z_1 < 0, y_2 z_2 > 0$ iken,

a) $(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1 > 0, (\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2 > 0$ olsun.

Bu durumda $\alpha \oplus \beta$ ile γ, (i) şartını sağlar.

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)} . 2r^2 \left(|(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1| + |(\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(\left| \left(\frac{r x_1}{r-x_3} + \frac{r y_1}{r-y_3} \right) z_1 \right| + \left| \left(\frac{r x_2}{r-x_3} + \frac{r y_2}{r-y_3} \right) z_2 \right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| + \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(|x_1 z_1| + |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(-|y_1 z_1| + |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1<0, (\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2>0$, yani $\alpha\oplus\beta$ ile γ (ii)şartını sağlasınlar.

$$\begin{aligned}
\langle\alpha\oplus\beta,\gamma\rangle &= \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)}\left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|+\left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)\\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right|+\left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1+\left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right|-\frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right|+\frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right|+\frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(\left|x_1z_1\right|+\left|x_2z_2\right|\right)+\frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-\left|y_1z_1\right|+\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle
\end{aligned}$$

olur.

2.durum: $y_1z_1>0, y_2z_2<0$ iken,

a)$(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1>0, (\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2>0$ iken,

$\alpha\oplus\beta$ ile γ, (i) şartını sağlarlar.

$$\begin{aligned}
\langle\alpha\oplus\beta,\gamma\rangle &= \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)}\left(\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|+\left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)\\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right|+\left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1+\left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right|+\frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right|+\frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right|-\frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(\left|x_1z_1\right|+\left|x_2z_2\right|\right)+\frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(\left|y_1z_1\right|-\left|y_2z_2\right|\right)
\end{aligned}$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $(\overline{x_1} + \overline{y_1})z_1 > 0, (\overline{x_2} + \overline{y_2})z_2 < 0$ iken,

$\alpha \oplus \beta$ ile γ, (iii) şartını sağlarlar.

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(|(\overline{x_1} + \overline{y_1})z_1| - |(\overline{x_2} + \overline{y_2})z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| + \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)} \left(|x_1 z_1| + |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)} \left(|y_1 z_1| - |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

3.durum: $y_1 z_1 < 0,\ y_2 z_2 < 0$ iken,

a) $(\overline{x_1} + \overline{y_1})z_1 > 0, (\overline{x_2} + \overline{y_2})z_2 > 0$ iken,

$\alpha \oplus \beta$ ile γ, (i) şartını sağlarlar.

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(|(\overline{x_1} + \overline{y_1})z_1| + |(\overline{x_2} + \overline{y_2})z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} . \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3} \right) z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3} \right) z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} . \left(\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} . \frac{r}{(r-x_3)} (|x_1 z_1| + |x_2 z_2|) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} (-|y_1 z_1| - |y_2 z_2|)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1 < 0, (\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2 > 0$ iken,

$\alpha \oplus \beta$ ile γ, (iii) şartını sağlarlar.

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right)(r-z_3)} \left(- \left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)} . 2r^2 \left(-|(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1| + |(\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} . \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3} \right) z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3} \right) z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} . \left(\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} . \frac{r}{(r-x_3)} (|x_1 z_1| + |x_2 z_2|) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} (-|y_1 z_1| - |y_2 z_2|)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

c) $(\overline{x_1} + \overline{y_1}) z_1 > 0, (\overline{x_2} + \overline{y_2}) z_2 < 0$ iken,

$\alpha \oplus \beta$ ile γ, (iii) şartını sağlarlar.

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left((\tfrac{rx_1}{r-x_3} + \tfrac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\tfrac{rx_2}{r-x_3} + \tfrac{ry_2}{r-y_3})z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\tfrac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \tfrac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \tfrac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \tfrac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)} \left(|x_1 z_1| + |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(- |y_1 z_1| - |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

d)$(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1 < 0, (\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2 < 0$ iken,

$\alpha \oplus \beta$ ile γ, (iv) şartını sağlarlar.

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(- \left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(- \left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left((\tfrac{rx_1}{r-x_3} + \tfrac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\tfrac{rx_2}{r-x_3} + \tfrac{ry_2}{r-y_3})z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\tfrac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \tfrac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \tfrac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \tfrac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)} \left(|x_1 z_1| + |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(- |y_1 z_1| - |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

III. β ile γ nın aynı şartı sağlaması durumu $\oplus$ nın değişmeli olmasından dolayı sağlanır.

C)α, β, γ nın farklı bölgelerde iken,

1.durum:$(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1 > 0, (\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2 > 0$ iken,

a) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 > 0$ ve $y_1z_1 > 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right) \\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| + |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2| \right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}. \left((\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3})z_2 \right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(-\frac{r}{r-x_3}|x_1z_1| + \frac{r}{r-y_3}|y_1z_1| + \frac{r}{r-x_3}|x_2z_2| - \frac{r}{r-y_3}|y_2z_2| \right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)} (-|x_1z_1| + |x_2z_2|) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)} (|y_1z_1| - |y_2z_2|) \\
&= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

olur.

b) $x_1z_1 > 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right) \\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| + |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2| \right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}. \left((\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3})z_2 \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| - \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| - \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| + \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(|x_1 z_1| - |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(-|y_1 z_1| + |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

2.durum:$(\overline{x_1} + \overline{y_1})z_1 > 0, (\overline{x_2} + \overline{y_2})z_2 < 0$ iken,

a) $x_1 z_1 < 0, x_2 z_2 > 0$ ve $y_1 z_1 > 0, y_2 z_2 < 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)} .2r^2 \left(|(\overline{x_1} + \overline{y_1})z_1| - |(\overline{x_2} + \overline{y_2})z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \left(-\frac{r}{r-x_3} |x_1 z_1| + \frac{r}{r-y_3} |y_1 z_1| + \frac{r}{r-x_3} |x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3} |y_2 z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(-|x_1 z_1| + |x_2 z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(|y_1 z_1| - |y_2 z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $x_1 z_1 < 0, x_2 z_2 < 0$ ve $y_1 z_1 > 0, y_2 z_2 < 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left((\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3})z_2\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(-\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right| + \frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right| - \frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right| - \frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(-\left|x_1z_1\right| - \left|x_2z_2\right|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(\left|y_1z_1\right| - \left|y_2z_2\right|\right)$$

$$= \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$$

olur.

c) $x_1z_1 > 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\langle\alpha\oplus\beta,\gamma\rangle = \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)}\left(\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right| - \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left((\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3})z_2\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right| - \frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right| - \frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right| - \frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(\left|x_1z_1\right| - \left|x_2z_2\right|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-\left|y_1z_1\right| - \left|y_2z_2\right|\right)$$

$$= \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$$

olur.

d) $x_1z_1 > 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 > 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| - |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left((\tfrac{rx_1}{r-x_3} + \tfrac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\tfrac{rx_2}{r-x_3} + \tfrac{ry_2}{r-y_3})z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\tfrac{r}{r-x_3}|x_1z_1| - \tfrac{r}{r-y_3}|y_1z_1| - \tfrac{r}{r-x_3}|x_2z_2| + \tfrac{r}{r-y_3}|y_2z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(|x_1z_1| - |x_2z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-|y_1z_1| + |y_2z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

3.durum: $(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1 < 0, (\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2 > 0$ iken,

a) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 > 0$ ve $y_1z_1 > 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(- \left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(-|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| + |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left((\tfrac{rx_1}{r-x_3} + \tfrac{ry_1}{r-y_3})z_1 + (\tfrac{rx_2}{r-x_3} + \tfrac{ry_2}{r-y_3})z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(-\tfrac{r}{r-x_3}|x_1z_1| + \tfrac{r}{r-y_3}|y_1z_1| + \tfrac{r}{r-x_3}|x_2z_2| - \tfrac{r}{r-y_3}|y_2z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(-|x_1z_1| + |x_2z_2| \right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(|y_1z_1| - |y_2z_2| \right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $x_1z_1 > 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)}\left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|+\left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)\\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right|+\left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1+\left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right|-\frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right|-\frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right|+\frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(\left|x_1z_1\right|-\left|x_2z_2\right|\right)+\frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-\left|y_1z_1\right|+\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

olur.

c) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)}\left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|+\left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)\\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right|+\left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1+\left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(-\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right|-\frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right|-\frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right|+\frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(-\left|x_1z_1\right|-\left|x_2z_2\right|\right)+\frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-\left|y_1z_1\right|+\left|y_2z_2\right|\right)\\
&= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

olur.

d) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 > 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| + \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(-\frac{r}{r-x_3}|x_1z_1| - \frac{r}{r-y_3}|y_1z_1| + \frac{r}{r-x_3}|x_2z_2| - \frac{r}{r-y_3}|y_2z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(-|x_1z_1| + |x_2z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-|y_1z_1| - |y_2z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

4.durum: $(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1 < 0, (\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2 < 0$ iken,

a) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 > 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| - \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(-\frac{r}{r-x_3}|x_1z_1| + \frac{r}{r-y_3}|y_1z_1| - \frac{r}{r-x_3}|x_2z_2| - \frac{r}{r-y_3}|y_2z_2| \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(-|x_1z_1| - |x_2z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(|y_1z_1| - |y_2z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

b) $x_1z_1 > 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right| - \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right) \\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right| - \frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right| - \frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right| - \frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(\left|x_1z_1\right| - \left|x_2z_2\right|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-\left|y_1z_1\right| - \left|y_2z_2\right|\right) \\
&= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

olur.

c) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 > 0$ ve $y_1z_1 > 0, y_2z_2 < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle &= \frac{r^2}{\left(r-\frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right| - \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right) \\
&= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-\left|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1\right| - \left|(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2\right|\right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3}+\frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3}+\frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(-\frac{r}{r-x_3}\left|x_1z_1\right| + \frac{r}{r-y_3}\left|y_1z_1\right| + \frac{r}{r-x_3}\left|x_2z_2\right| - \frac{r}{r-y_3}\left|y_2z_2\right|\right) \\
&= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(-\left|x_1z_1\right| + \left|x_2z_2\right|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(\left|y_1z_1\right| - \left|y_2z_2\right|\right)
\end{aligned}$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

d) $x_1z_1 > 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 > 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right| - \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| - |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\frac{r}{r-x_3}|x_1z_1| - \frac{r}{r-y_3}|y_1z_1| - \frac{r}{r-x_3}|x_2z_2| + \frac{r}{r-y_3}|y_2z_2|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\frac{r}{(r-x_3)}\left(|x_1z_1| - |x_2z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)}\frac{r}{(r-y_3)}\left(-|y_1z_1| + |y_2z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

e) $x_1z_1 < 0, x_2z_2 < 0$ ve $y_1z_1 < 0, y_2z_2 > 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right| - \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2\left(-|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| - |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right)z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right)z_2\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}.\left(-\frac{r}{r-x_3}|x_1z_1| - \frac{r}{r-y_3}|y_1z_1| - \frac{r}{r-x_3}|x_2z_2| + \frac{r}{r-y_3}|y_2z_2|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(-|x_1 z_1| - |x_2 z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(-|y_1 z_1| + |y_2 z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur.

f) $x_1 z_1 < 0, x_2 z_2 > 0$ ve $y_1 z_1 < 0, y_2 z_2 < 0$ ise,

$$\langle \alpha \oplus \beta, \gamma \rangle = \frac{r^2}{\left(r - \frac{r[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 - r^2]}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2}\right)(r-z_3)} \left(-\left|\frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2}\right| - \left|\frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2 + (\overline{x_2}+\overline{y_2})^2 + r^2}\right|\right)$$

$$= \frac{r^2}{r.2r^2(r-z_3)}.2r^2 \left(-|(\overline{x_1}+\overline{y_1})z_1| - |(\overline{x_2}+\overline{y_2})z_2|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(\left(\frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3}\right) z_1 + \left(\frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3}\right) z_2 \right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)}. \left(-\frac{r}{r-x_3}|x_1 z_1| - \frac{r}{r-y_3}|y_1 z_1| + \frac{r}{r-x_3}|x_2 z_2| - \frac{r}{r-y_3}|y_2 z_2|\right)$$

$$= \frac{r}{(r-z_3)} \cdot \frac{r}{(r-x_3)} \left(-|x_1 z_1| + |x_2 z_2|\right) + \frac{r}{(r-z_3)} \frac{r}{(r-y_3)} \left(-|y_1 z_1| - |y_2 z_2|\right)$$

$$= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

olur. $\square$

$S^2 - \{K\}$üzerinde kartezyen koordinatlarda tanımladığımız iç çarpımın coğrafi koordinatlarda karşılığı $\alpha = (u_1, v_1)$, $\beta = (u_2, v_2)$ olmak üzere,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{r^2(\cos u_1 \cos u_2)}{(r - \sin u_1)(r - \sin u_2)} \cdot \begin{cases} |\cos v_1 \cos v_2| + |\sin v_1 \sin v_2|, & (i) \\ -|\cos v_1 \cos v_2| + |\sin v_1 \sin v_2|, & (ii) \\ |\cos v_1 \cos v_2| - |\sin v_1 \sin v_2|, & (iii) \\ -|\cos v_1 \cos v_2| - |\sin v_1 \sin v_2|, & (iv) \end{cases}$$

şeklindedir. Buradaki $(i), (ii), (iii)$ ve (iv) şartları aşağıdaki gibidir.

$$(i) \ \cos v_1 \cos v_2 > 0, \ \sin v_1 \sin v_2 > 0$$
$$(ii) \ \cos v_1 \cos v_2 < 0, \ \sin v_1 \sin v_2 < 0$$
$$(iii) \cos v_1 \cos v_2 > 0, \ \sin v_1 \sin v_2 < 0$$
$$(iv) \cos v_1 \cos v_2 < 0, \ \sin v_1 \sin v_2 < 0$$

Teorem 3.3.2: δ stereografik izdüşümü $S^2 - \{K\}$ üzerindeki küresel taxi iç çarpımını T^2 taksi düzlemindeki taxi iç çarpımına taşır.

İspat:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

küresi üzerinde $K = (0, 0, r)$ kutup noktası olmak üzere

$$\delta : S^2 - \{K\} \to R^2$$

stereografik izdüşümünde $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{K\}$ ya bir $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in R^2$ noktası karşılık gelir.

$$\begin{aligned} \delta(X) &= \overline{X} = \frac{rX - x_3 K}{r - x_3} = \left(\frac{r x_1}{r - x_3}, \frac{r x_2}{r - x_3}, 0 \right) \\ \overline{x_1} &= \frac{r x_1}{r - x_3}, \overline{x_2} = \frac{r x_2}{r - x_3} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca stereografik izdüşüm fonksiyonu bir izomorfizm olduğundan $S^2 - \{K\}$ üzerindeki iç çarpım düzlem taksi geometrideki iç çarpıma taşımak için kullanılabilir.

$$\frac{rx_1}{r-x_3} = \overline{x_1}, \frac{rx_2}{r-x_3} = \overline{x_2}, \frac{ry_1}{r-y_3} = \overline{y_1}, \frac{ry_2}{r-y_3} = \overline{y_2}$$

denklemlerini $S^2 - \{K\}$ üzerindeki iç çarpımda yerine yazarsak

$$\langle \delta(\alpha), \delta(\beta) \rangle = \begin{cases} |\overline{x_1}\overline{y_1}| + |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & x_1y_1 > 0 \text{ ve } x_2y_2 > 0 \ (i) \\ -|\overline{x_1}\overline{y_1}| + |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & x_1y_1 < 0 \text{ ve } x_2y_2 > 0 \ (ii) \\ |\overline{x_1}\overline{y_1}| - |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & x_1y_1 > 0 \text{ ve } x_2y_2 < 0 \ (iii) \\ -|\overline{x_1}\overline{y_1}| - |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & x_1y_1 < 0 \text{ ve } x_2y_2 < 0 \ (iv) \end{cases}$$

elde edilir. Burada $r - x_3$ ve $r - y_3$ pozitif olduğundan bu ifade

$$\left\langle \overline{\alpha}, \overline{\beta} \right\rangle = \begin{cases} |\overline{x_1}\overline{y_1}| + |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & \overline{x_1}\overline{y_1} > 0 \text{ ve } \overline{x_2}\overline{y_2} > 0 \ (i) \\ -|\overline{x_1}\overline{y_1}| + |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & \overline{x_1}\overline{y_1} < 0 \text{ ve } \overline{x_2}\overline{y_2} > 0 \ (ii) \\ |\overline{x_1}\overline{y_1}| - |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & \overline{x_1}\overline{y_1} > 0 \text{ ve } \overline{x_2}\overline{y_2} < 0 \ (iii) \\ -|\overline{x_1}\overline{y_1}| - |\overline{x_2}\overline{y_2}|, & \overline{x_1}\overline{y_1} < 0 \text{ ve } \overline{x_2}\overline{y_2} < 0 \ (iv) \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir ki bu da düzlem taksi geometri için [2] de verilen iç çarpımdır. □

Bölüm 4

$S^2 - \{K\}$ Üzerinde Taksi Norm

Öklidyen geometride herhangi bir α vektörün normu

$$\|\alpha\|_E = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_E}$$

idi.

Küresel taksi geometride de bir vektörün normunu şöyle tanımlayabiliriz:

Teorem 4.1: Her $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{K\}$ için

$$\|.\|_{TS} : S^2 - \{K\} \times S^2 - \{K\} \to R$$

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{TS} &= \tfrac{r}{r-x_3}(|x_1| + |x_2|) \\ &= \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_{TS} + \tfrac{2r^2}{(r-x_3)^2}\,|x_1 x_2|} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_{TS}$ fonksiyonu küresel taksi geometride bir norm belirtir.

İspat: Her $A = (x_1, x_2, x_3)$, $B = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 - \{K\}$ ve $k \in R$ için

i) $\|A\|_{TS} \geq 0$

ii) $\|k \odot A\|_{TS} = |k| \,.\, \|A\|_{TS}$

iii) $\|A \oplus B\|_{TS} \leq \|A\|_{TS} + \|B\|_{TS}$

norm aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

i) $\|A\|_{TS} = \frac{r}{r-x_3}(|x_1| + |x_2|)$ ifadesi tanım gereği pozitiftir.

$\|A\|_{TS} = 0$ ise $\frac{r}{r-x_3}(|x_1| + |x_2|) = 0 \Rightarrow |x_1| = 0$ ve $|x_2| = 0$ dır. Buradan $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{K\}$ olduğundan $x_3 = -r$ dir. Böylece $A = (0, 0, -r) = \mathbf{O}$ olur. Tersine $A = \mathbf{O}$ ise $\|A\|_{TS} = 0$ olur.

ii)

$$\begin{aligned}
\|k \odot A\|_{TS} &= \frac{r}{r - \frac{r\left[k^2(r+x_3)-(r-x_3)\right]}{r[k^2(r+x_3)+(r-x_3)]}} \left(\left| \frac{2krx_1}{r[k^2(r+x_3)+(r-x_3)]} \right| + \left| \frac{2krx_2}{r[k^2(r+x_3)+(r-x_3)]} \right| \right) \\
&= \frac{r\left[k^2(r+x_3)+(r-x_3)\right]}{2(r-x_3)} \cdot \frac{2|k|}{k^2(r+x_3)+(r-x_3)} \left(|x_1| + |x_2|\right) \\
&= |k| \frac{r}{r-x_3} \left(|x_1| + |x_2|\right) \\
&= |k| \, \|\alpha\|_{TS}
\end{aligned}$$

olur.

iii)

$$\begin{aligned}
\|A \oplus B\|_{TS} &= \frac{r}{r - \frac{r\left[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2-r^2\right]}{[(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2]}} \left(\left| \frac{2r^2(\overline{x_1}+\overline{y_1})}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| + \left| \frac{2r^2(\overline{x_2}+\overline{y_2})}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \right| \right) \\
&= \frac{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2}{2r^2} \frac{2r^2(|\overline{x_1}+\overline{y_1}|+|\overline{x_2}+\overline{y_2}|)}{(\overline{x_1}+\overline{y_1})^2+(\overline{x_2}+\overline{y_2})^2+r^2} \\
&= \left| \frac{rx_1}{r-x_3} + \frac{ry_1}{r-y_3} \right| + \left| \frac{rx_2}{r-x_3} + \frac{ry_2}{r-y_3} \right| \\
&\leq \left| \frac{rx_1}{r-x_3} \right| + \left| \frac{ry_1}{r-y_3} \right| + \left| \frac{rx_2}{r-x_3} \right| + \left| \frac{ry_2}{r-y_3} \right| \\
&\leq \|A\|_{TS} + \|B\|_{TS}
\end{aligned}$$

olur. □

Tanım 4.1: $S^2 - \{K\}$, üzerinde $\|.\|_{TS}$ normuna *küresel taxi normu* denir.

Sonuç 4.1: $S^2 - \{K\}$, $\|.\|_{TS}$ normuyla birlikte normlu vektör uzayıdır.

Teorem 4.2: Her $A = (x_1, x_2, x_3)$, $B = (y_1, y_2, y_3)$,
$C = (z_1, z_2, z_3) \in S^2 - \{K\}$ ve $k \in R$ için

$$
\begin{aligned}
(i)\ \|A - B\|_{TS} &\geq \|A\|_{TS} - \|B\|_{TS} \\
(ii)\ \|A - B\|_{TS} &\leq \|A\|_{TS} + \|B\|_{TS} \\
(iii)\ \|A - B\|_{TS} &\leq \|A - C\|_{TS} + \|C - B\|_{TS}
\end{aligned}
$$

özellikleri geçerlidir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
\|A - B\|_{TS} &= \|A \oplus (-B)\|_{TS} \\
&= \left|\frac{rx_1}{r - x_3} - \frac{ry_1}{r - y_3}\right| + \left|\frac{rx_2}{r - x_3} - \frac{ry_2}{r - y_3}\right|
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
\|A - B\|_{TS} &= \left|\frac{rx_1}{r - x_3} - \frac{ry_1}{r - y_3}\right| + \left|\frac{rx_2}{r - x_3} - \frac{ry_2}{r - y_3}\right| \\
&\geq \left|\frac{rx_1}{r - x_3}\right| - \left|\frac{ry_1}{r - y_3}\right| + \left|\frac{rx_2}{r - x_3}\right| - \left|\frac{ry_2}{r - y_3}\right| \\
&= \left|\frac{rx_1}{r - x_3}\right| + \left|\frac{rx_2}{r - x_3}\right| - \left(\left|\frac{ry_1}{r - y_3}\right| + \left|\frac{ry_2}{r - y_3}\right|\right) \\
&= \|A\|_{TS} - \|B\|_{TS}
\end{aligned}
$$

olur.

(ii)

$$\begin{aligned}\|A-B\|_{TS} &= \left|\frac{rx_1}{r-x_3}-\frac{ry_1}{r-y_3}\right|+\left|\frac{rx_2}{r-x_3}-\frac{ry_2}{r-y_3}\right| \\ &\leq \left|\frac{rx_1}{r-x_3}\right|+\left|\frac{rx_2}{r-x_3}\right|+\left|\frac{ry_1}{r-y_3}\right|+\left|\frac{ry_2}{r-y_3}\right| \\ &= \|A\|_{TS}+\|B\|_{TS}\end{aligned}$$

dir.

(iii)

$$\begin{aligned}\|A-B\|_{TS} &= \left|\tfrac{rx_1}{r-x_3}+\tfrac{rz_1}{r-z_3}-\tfrac{rz_1}{r-z_3}-\tfrac{ry_1}{r-y_3}\right|+\left|\tfrac{rx_2}{r-x_3}+\tfrac{rz_2}{r-z_3}-\tfrac{rz_2}{r-z_3}-\tfrac{ry_2}{r-y_3}\right| \\ &\leq \left|\tfrac{rx_1}{r-x_3}-\tfrac{rz_1}{r-z_3}\right|+\left|\tfrac{rx_2}{r-x_3}-\tfrac{rz_2}{r-z_3}\right|+\left|\tfrac{ry_1}{r-y_3}-\tfrac{rz_1}{r-z_3}\right|+\left|\tfrac{ry_2}{r-y_3}-\tfrac{rz_2}{r-z_3}\right| \\ &\leq \|A-C\|_{TS}+\|C-B\|_{TS}\end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.3: Her A ve $B \in S^2-\{K\}$ için

$$d: S^2-\{K\}\times S^2-\{K\}\to R$$

$$d(A,B) = \|A-B\|_{TS}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $S^2-\{K\}$ üzerinde bir metriktir.

İspat: Her $A=(x_1,x_2,x_3)$, $B=(y_1,y_2,y_3), C=(z_1,z_2,z_3)\in S^2-\{K\}$ için

i) $d(A,B)\geq 0$ ve $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$

ii) $d(A,B)=d(B,A)$

iii) $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$

metrik aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

i) $d(A,B) = \|A-B\|_{TS}$ ifadesi tanım gereği pozitiftir.

$d(A,B) = 0$ ise

$$d(A,B) = \|A-B\|_{TS} = \left|\frac{rx_1}{r-x_3} - \frac{ry_1}{r-y_3}\right| + \left|\frac{rx_2}{r-x_3} - \frac{ry_2}{r-y_3}\right| = 0$$

$$\frac{rx_1}{r-x_3} - \frac{ry_1}{r-y_3} = 0 \text{ ve } \frac{rx_2}{r-x_3} - \frac{ry_2}{r-y_3} = 0$$

olur. $r \neq x_3$, $r \neq y_3$ ve $A, B \in S^2 - \{K\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{r-x_3}{r-y_3} y_1 \\ x_2 &= \frac{r-x_3}{r-y_3} y_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

dir.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

ifadesinde (*) daki eşitlikler kullanılırsa

$$\left(\frac{r-x_3}{r-y_3}\right)^2 (y_1^2 + y_2^2) + x_3^2 = r^2$$

$$\left(\frac{r-x_3}{r-y_3}\right)^2 (r^2 - y_3^2) = r^2 - x_3^2$$

$$r^2 + ry_3 - rx_3 - x_3y_3 = r^2 + rx_3 - ry_3 - x_3y_3$$

$$x_3 = y_3$$

elde edilir. Bu eşitlik (*) da kullanılırsa

$$x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 = y_2$$

ve $A = B$ elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \left|\frac{rx_1}{r-x_3} - \frac{ry_1}{r-y_3}\right| + \left|\frac{rx_2}{r-x_3} - \frac{ry_2}{r-y_3}\right| \\ &= \left|\frac{ry_1}{r-y_3} - \frac{rx_1}{r-x_3}\right| + \left|\frac{ry_2}{r-y_3} - \frac{rx_2}{r-x_3}\right| \\ &= d(B,A) \end{aligned}$$

dir.

iii)

$$d(A,B) = \|A-B\|_{TS} \leq \|A-C\|_{TS} + \|C-B\|_{TS} = d(A,C) + d(C,B)$$

olur. □

Teorem 4.4: $(S^2-\{K\}, <,>)$ iç çarpım uzayında herhangi $A = (x_1, x_2, x_3)$ ve $B = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için Schwarz Eşitsizliği diye bilinen

$$|< A, B >_{TS}| \leq \|A\|_{TS} \, \|B\|_{TS}$$

kuralı geçerlidir.

İspat: $A = \mathbf{O}$ olması durumunu ispatlayalım.

$A = \mathbf{O}$ ise $|< A, B >_{TS}| = 0$ ve $\|A\|_{TS} = 0$ olduğundan $\|A\|_{TS} \, \|B\|_{TS} = 0$ olur. Bu durumda eşitsizlik geçerlidir.

$A \neq \mathbf{O}$ olsun.

i) $x_1y_1 > 0$, $x_2y_2 > 0$ veya $x_1y_1 < 0$, $x_2y_2 < 0$ ise,

$$\begin{aligned} |< A, B >_{TS}| &= \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(|x_1y_1| + |x_2y_2|\right) \\ &\leq \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(|x_1y_1| + |x_2y_2| + |x_2y_1| + |x_1y_2|\right) \\ &= \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(|x_1| + |x_2|\right).\left(|y_1| + |y_2|\right) \\ &= \|A\|_{TS} \, \|B\|_{TS} \end{aligned}$$

olur.

ii) $x_1y_1 < 0$, $x_2y_2 > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
|< A,B >_{TS}| &= \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left|(-\left|x_1y_1\right| + \left|x_2y_2\right|)\right| \\
&\leq \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(\left|x_1y_1\right| + \left|x_2y_2\right| + \left|x_2y_1\right| + \left|x_1y_2\right|\right) \\
&= \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right|\right).\left(\left|y_1\right| + \left|y_2\right|\right) \\
&= \|A\|_{TS} \, \|B\|_{TS}
\end{aligned}$$

olur.

iii) $x_1y_1 > 0$, $x_2y_2 < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
|< A,B >_{TS}| &= \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left|(\left|x_1y_1\right| - \left|x_2y_2\right|)\right| \\
&\leq \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(\left|x_1y_1\right| + \left|x_2y_2\right| + \left|x_2y_1\right| + \left|x_1y_2\right|\right) \\
&= \tfrac{r^2}{(r-x_3)(r-y_3)} \left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right|\right).\left(\left|y_1\right| + \left|y_2\right|\right) \\
&= \|A\|_{TS} \, \|B\|_{TS}
\end{aligned}$$

olur. □

BAZI AÇIK PROBLEMLER

Geliştirmeye çalıştığımız Küresel Taksi Geometriye ilişkin bir çok açık problem üretilebilir. Bir kaçının kısmi cevaplarını da bildiğimiz bu problemlerden bazılarını ifade etmekle yetiniyoruz.

1. Küresel taksi uzaklığı ile küresel taksi norm ve küresel taksi iç çarpım arasındaki ilişkiler (varsa) nelerdir?

2. Küresel taksi uzaklığını konu alan izometriler nelerdir?

3. Küre yüzeyi üzerinde küresel taksi uzaklığına bağlı olarak tanımlanabilecek eğriler nasıl belirtilebilir? Bunlardan düzlemsel olanlar, cebirsel olanlar, küresel taksi konikler v.s... gibi.

Referanslar

[1] AKÇA, Z. and KAYA, R: On the Taxicab Trigonometry, Jour. of Inst. of Math. & Comp. Sci. (Math. Ser). Vol. 10, No 3, 151-159 (1997).

[2] EKİCİ, C., KOCAYUSUFOĞLU, I. and AKÇA, Z. :The Norm in Taxicab Geometry, TR. J. of Mathematics, Vol. 22, No 3, 295-307 (1998).

[3] HACISALİHOĞLU, H.Hilmi. : Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, (1986).

[4] KAYA, R., AKÇA, Z., GÜNALTILI, I. and ÖZCAN, M. : General Equation for Taxicab Conics and their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg 19, 1-14 (2000).

[5] KOCAYUSUFOĞLU, I. and ÖZDAMAR, E. : Isometries of Taxicab Geometry, Communications Fac.Sci. Univ. Ank. Series A1, Vol. 47, 73-83 (1998).

[6] KRAUSE, E. F. : Taxicab Geometry, Addison-Wesley, Menlo Park (1975).

[7] LAATSCH, R. : Pyramidal Sections in Taxicab Geometry, Mathematics Magazine, 55, 205-212 (1982).

[8] MENGER, K. : You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, III, (1952).

[9] ÖZCAN, M. and KAYA, R. : On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, OGU MathsPreprint 99.8.

[10] REYNOLDS, B. : Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon J., 7, 77-88 (1980).

[11] SCHATTSCHNEİDER, D.J. : The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91 (1984).

[12] SMART, M. : Küresel Astronomi , İstanbul Üniversitesi , (1984).

[13] SO, S.S. and AL-MASKARI, Z. S. : Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry, Kansas Science Teacher (Journal of Mathematics and Science Teaching), Vol 11, 14-18 (1982).

[14] SOWELL, K. O. : Taxicab Geometry-A New Slant, Mathematics Magazine, 62, 238-248 (1989).

[15] TİAN, S, So, S.S and CHEN, G. : Concerning Circles in Taxicab Geometry, Int. J. Math Educ. Sci. Technol., Vol.28, No.5, 727-733 (1997).