ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SPİN GEOMETRİ, KALİBRASYONLAR VE SÜPERCEBİRLER

Özgün SÜTEMEN

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2020

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SPİN GEOMETRİ, KALİBRASYONLAR VE SÜPERCEBİRLER

Özgün SÜTEMEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Özgür AÇIK

Bu çalışmada, öncelikle spin geometrinin temel kavramları ve teorik fizikteki uygulamalarından biri olan süpergravite arkaplanlarının incelenmesi yapılmıştır. On bir-boyutlu süpergravite arkapalanlarında akının varlığı ve yokluğunda çarpık olmayan kompaktlaştırmalar dikkate alınmıştır. Bu arkaplanlar üzerinde farklı spinör iç çarpım seçenekleri için, süpergravite Killing spinörlerinin bilineer formları oluşturulmuştur. Bilineer formlar tarafından sağlanan denklemeler ve bu denklemlerin çarpım manifoldarına ayrıştırılması yapılmıştır. AdS çözümleri, bazı özel spinör iç çarpımları için bulunabilmektedir. AdS çözümleri için, süpergravite Killing spinörlerin bilineeri çarpım manifoldları üzerindeki KY(Killing-Yano) ve KKKY(kapalı konformal Killing-Yano) formlarına indirgenmiştir. Bunlara ek olarak kalibrasyonlar ile süpergravite geometrileri aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Ağustos 2020, 111 sayfa

Anahtar Kelimeler: Spin Geometri, Spinör Bilineerler ve Kalibrasyonlar, Dirac Operatörü, Kompaktlaştırmalar

ABSTRACT

Master Thesis

SPIN GEOMETRY, CALIBRATIONS AND SUPERALGEBRAS

Özgün SÜTEMEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Assoc. Prof. Özgür AÇIK

In this study, firstly basic notions of spin geometry and supergravity background which is one of its applications of theoretical physics have investigated. Supergravity background in the form of unwarped compactifications with or without fluxes in eleven dimensions have considered. Bilinear forms of supergravity Killing spinors for different spinor inner product choices on these backgrounds have been constructed. The equations satisfied by the bilinear forms and their decompositions into product manifolds have obtained for different inner products. AdS solutions can be found for some special spinors inner product choices. For AdS solutions, bilinears of supergravity Killing spinors have reduced to KY(Killing-Yano) and KKKY(closed conformal Killing-Yano) forms on product manifolds. In addition, relation between calibrations and supergravity geometries have been investigated.

August 2020, 111 pages

Key Words: Spin Geometry, Spinor Bilinears and Calibrations, Dirac Operator, Compactifications

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans süresi boyunca bilgisini, birikimini ve tecrübelerini esirgemeyen, fizik eğitimim boyunca üzerimde çok fazla emeği olan danışman hocam Doç. Dr. Özgür AÇIK'a teşekkürlerimi en içten duygularımla sunarım. Yüksek lisanstaki çalışmalarımızda katkısı ve emeği çok fazla olan, bir eş danışman konumunda olan Doç. Dr. Ümit ERTEM'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte beraber çalıştığımız ve bana yardımcı olan çalışma arkadaşım Aytolun ÇATALKAYA'ya teşekkür ederim. Yüksek lisans tezi çalışmamı 118F086 numaralı proje kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a teşşekür ederim. Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, beni hep destekleyen ve yanımda olan aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

"Her daim düşleri peşinde koşan sabırsızlık zamanının güzel çocuklarına..."

Özgün SÜTEMEN
Ankara, Ağustos 2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

V	Vektör uzayı
V^*	V'nin duali (Dual vektör uzayı)
$\mathbb{K}$	Genel bir sayı alanı
e^a	Ko-çerçeve bazı
d	Dış türev (Cartan türevi)
δ	ko-türev
$\mathcal{L}_X Y$	X'e göre Y'nin Lie türevi
∇_X	X'e göre kovaryant türev
$\lfloor a \rfloor$	a reel sayısına komşu olan iki tam sayıdan küçüğü
$\otimes$	Tensör çarpımı
$\wedge$	Wedge (dış) çarpım
$.$	Clifford çarpımı
$\mathscr{S}_p$	p-derecel(homojen) formların altuzayına iz düşüm operatörü
$\Lambda(V)$	V'nin dış cebri
Alt	Anti-simetrikleştirme gönderimi
i_X	X'e göre iç türev
$*$	Hodge yıldız gönderimi
z	Hacim form
$[\ ,\ ]_{Cl}$	Clifford komütatör
$[\ ,\ ]_{+Cl}$	Clifford anti-komütatör
$\not{D}$	Dirac operatörü
$\not{d}$	Hodge-de Rham operatörü
S	Spinör uzayı
TM	M manifoldunun teğet demeti
T^*M	M manifoldunun ko-teğet demeti
$\Lambda(M)$	M manifoldunun dış demeti

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Modern teorik fiziğin en büyük hedeflerinden biri doğanın temel kuvvetlerini birleştirebilmektir. Bunun için yıllardır farklı birleştirme teorileri oluşturulmuştur. Bu amaç için en umut verici yaklaşımlar on-boyutlu süpersimetrik sicim teorileri ve bu sicim teorilerini on bir-boyutta birleştiren M-teoridir. On-boyutta farklı tiplerde sicim teorileri vardır: tip I, tip IIA, tip IIB, heterotik $E_8 \times E_8$ ve $SO(32)$ teorileridir. Bununla birlikte T-duailte, S-dualite ve U-dualite olarak adlandırılan bazı dualiteler de vardır ve bunlar on bir-boyutlu birleştirilmiş bir M-teorisini işaret etmektedirler (Green, Schwarz & Witten 1987), (Townsend 1997), (Duff 1996), (Becker, Becker & Schwarz, 2007).

Bu on ve on-bir boyutlu teorilerin temel özelliği, düşük enerji limitlerinde bu boyutlardaki süpergravite teorilerine karşılık gelmeleridir. Süpergravite teorileri, süpersimetri dönüşümleri altında değişmeyen bir eyleme dayanan genel görelilik teorisinin bir genişletilmesidir. Farklı boyutlar için farklı süpergravite teorileri bulunmaktadır. Süpergravite teorilerini anlamak, sicim teorilerindeki kütlesiz alanların dinamiklerini bilmek ve sicimlerin ürettiği arkaplanları bulabilmek için önemlidir. Sicim teorisinin ve M-teorinin düşük enerji limiti, on ve on bir boyutlu süpergravite teorilerinin bozonik kısımları tarafından belirlenmektedir. Bozonik süpergravite alan denklemlerinin çözümü süpergravite arkaplanları olarak adlandırılır (Townsend 1999).

İlgili süpergravite teorilerinde tanımlanan akıların varlığında veya yokluğunda daha düşük boyutlara yapılan kompaktlaştırmalar dikkate alınarak özel bir arkaplan sınıfı elde edilir. Kompaktlaştırma için çarpık (warped) veya çarpık olmayan (unwarped) çarpımlar düşünülebilir ve çarpım manifoldları üzerindeki alan denklemleri belirlenir. Farklı bozonik süpergravite teorilerindeki süpersimetri parametreleri, gravitino alanının varyasyonundan kaynaklanan çeşitli süpergravite Killing spinör denklemleri ile belirlenirler. Süpergravite Killing spinörlerinin bilineer formları, spinör uzayında iç çarpımlar kullanılarak oluşturabilir ve bu bilineerler sicim teorisi ve M-teorisinin arkaplanlarının sınıflandırılmasında kullanılırlar (Gauntlett & Pakis 2003), (Gauntlett, Gutowski & Pakis 2004). Arkaplanın boyutuna ve imzasına bağlı olarak çeşitli spinör iç çarpım seçenekleri için farklı sonuçlar bulunmaktadır (Açık, & Ertem 2015), (Açık, & Ertem 2018).

Süpergravite Killing spinörleri, çarpım manifoldlarının geometrik özelliklerine bağlı olarak kompaktlaştırılmış arkaplanlardaki Killing spinörlere veya paralel spinörlere indirgenebiler. Bu tipteki spinörlerin varlığı manifoldun özel holonomi yapılarıyla ilişkilidir (Wang 1989), (Berger 1955), (Joyce 2000), (Ertem 2018). Bu nedenle süpergravite Killing formlarının bilineer formları, çarpım manifoldları üzerindeki diferensiyel form tiplerine indirgenebilir ve bu indirgemenin araştırılması, sicim teorileri ve M-teori arkaplanlarının tüm boyutlardaki sınıflandırma problemi üzerine ışık tutabilir.

M_{11} on bir-boyutlu M-teori arkapalnları için $M_4 \times M_7$, $M_7 \times M_4$, $M_5 \times M_6$, $M_6 \times M_5$ ve $M_3 \times M_8$ çarpık olmayan çarpım yapıları oluşturabilir. Alan denklemlerinin ve süpergravite Killing spinör denkleminin ayrışmaları çarpım manifoldları üzerinde belirlenerek ve olası çözümler bulunabilir. M_{11} üzerinde her iki tip iç çarpım için süpergravite Killing spinörlerinin bilineer formları oluşturulabilir ve bu bilineerleri destekleyen denklemler bulunabilir. Sıfır olmayan bilineer formların iç çarpım seçimine bağlı olduğu gösterilebilir. Ayrıca çarpım manifoldları üzerinde spinör iç çarpım seçimine bağlı olan bilineer form denklemleri çarpım manifoldları üzerinde ayrıştırılabilir (Ertem, Sütemen, Açık & Çatalkaya 2019).

Clifford demeti, M manifoldunun her bir noktasındaki ko-teğet uzaylarının Clifford cebirleri olarak tanımlanır. Spin grup Clifford cebirlerinin alt kümesidir ve spinörler, spin gruplarının indirgenemez temsilleridir. Aynı zamanda spin grubu, Clifford cebirlerinin minimal sol ideallerinin elemanları olarak tanımlanır. Yani, $Cl(M)$ Clifford demetinden $S(M)$ spinör demeti tanımlanabilir. Bu tanımlamada bazı topolojik engeller vardır ($w_2(M)$ ikinci Stiefel-Whitney sınıf yok olması). Bir spinör demeti tanımlayabildiğimiz manifoldlar, spin manifoldları olarak adlandırılır ve spinör demetinin kesitleri de spinör alanları olarak adlandırılır. Dirac ve twistör operatörleri, spinör demetinin kesitleri üzerinde iki tane birinci-dereceden diferensiyel denklem tanımlarlar. Dirac ve twistör operatörlerinin çekirdeklerindeki özel spinör alanları, matematiksel fizikte önemli roller oynamaktadır. Dirac operatörünün çekirdeğindeki spinör alanlarına harmonik spinörler denir ve bunlar kütlesiz Dirac denkleminin çözümlerine karşılık gelirler. Ayrıca Dirac operatörünün sıfırdan farklı özdeğerlerli özspinörleri, kütleli Dirac denkleminin çözümlerine karşılık gelir. Twistör operatörünün çekirdeğindeki spinör alanlarına twistör spinörleri denir. Dirac operatörünün özspinörleri olan twistör spinörleri, Killing spinörleri olarak adlandırılırlar ve kovaryant türeve göre paralel olan Killing spinörlerinin bir altkümesi, paralel spinörler olarak adlandırılırlar. Killing ve paralel spinörler, süpersimetrik alan teorilerinin ve çeşitli boyutlardaki süpergravite teorilerinin süpersimetri üreticileri olarak ortaya çıkarlar. Bu yüzden spin geometri metodları, süpergravite ve sicim teorileri için oldukça merkezi bir öneme sahiptir (Ertem 2018).

Süpercebirler teorik fizikte süpersimetrilerde oldukça yaygın kullanılmaktadır. Bir süpercebir bir $\{\mathbb{Z}\}$-derecelendirilmiş cebirdir. Bunun anlamı değişmeli bir halka ya da cisim üzerinde tek ve çift bileşenlerine ayrışabilen ve derecelendirmeye müsait bir çarpma operatörü olan cebirdir (Kac, Martinez & Zelmanov 2001). Geometrik Killing spinörlerinin kareleştirme gönderimi (squaring mapping) Killing vektör alanlarına karşılık gelir ve bunlar birlikte manifold üzerinde simetri süpercebirleri adı verilen bir süpercebir yapısı oluşturur (Klinker 2005). Süpercebirlerin çift kısmı, Killing vektör alanlarının simetri cebiridir ve tek kısmı ise geometrik Killing spinörlere karşılık gelir (Figueroa-O'Farrill 1999). Ayrıca simetri süpercebirleri Lie süpercebirlerine karşılık gelir. Geometrik Killing spinörlerinin yanısıra bozonik süpergravite teorilerinin süpersimetri üreticileri olan süpergravite Killing spinörleri, çeşitli boyutlardaki süpergravite alan denklemlerinin çözümleri olan süpergravite arkaplanları üzerinde Killing süpercebirleri olarak adlandırılan simetri süpercebirlerinin yapımında da kullanılabilir (de Medeiros, Figueroa-O'Farrill & Santi 2016) , (Figueroa-O'Farrill & Santi 2017). Bu Killing süpercebirleri, tüm boyutlardaki süpergravite arkaplanların sınıflandırma probleminde önemli bir araçtır.

On- veya on bir-boyuttan daha düşük boyutlu bir uzayzamanın kompaktlaştırılmasını incelemekte fayda vardır. Örneğin dört boyutlu uzayzamana kompaktlaştırma yapmak teorik fizik açısından oldukça önemlidir. Ayrıca sicimlere ek olarak, sicim teorisindeki diğer genişletilmiş nesneler veya zarlar açısından zengin bir spektruma sahip olduğu bilinmektedir. Süpergravite çözümleri ayrıca kuantum alan teorilerini incelemek için güçlü araçlar sağlar.

En önemli örnek, anti-de Sitter (AdS) uzay çarpanlarını içeren süpergravite geometrileri üzerinde sicim/M-teorisini tahmin eden konformal olarak değişmeyen kuantum alan teorilerine (CFT) eşdeğer olan AdS/CFT uygunluğudur. Sicim/M-kuramına süpergravite yaklaşımı,konformal alan teorileri hakkında son derece önemli bilgilerin hesaplamasına izin verir (Gauntlett, 2004).

2. DIŞ CEBİR

V, bir $\mathbb{K}$ sayı alanı üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olsun ve burada $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'dir. $V^\star$ dual uzayı V üzerinde lineer fonksiyonların uzayı olarak tanımlanmaktadır.

Dual uzay $V^\star = \{T, \mathbb{K} - \text{çizgisel} \,|\, T : V \to \mathbb{K}\}$ olarak tanımlanmaktadır. $V^\star$'ın V'nin bir $\{X_a\}$ baz için, $\{e^a\}$ bazı $e^a\left(X_b\right) = \delta^a{}_b$ biçiminde tanımlanmaktadır. (p, q) tipinde bir N tensörünü, bir çoklu $\mathbb{K}$-çizgisel gönderim olarak tanımlayabiliriz. Bu gönderim,

$$N : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^\star \times V^\star \times \ldots \times V^\star}_{q} \to \mathbb{K}$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu tür tensörlerin uzayı $T^q_p\left(V\right)$ ile gösterilir ve tensör çarpım işlemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \otimes : T^q_p\left(V\right) \times T^s_r\left(V\right) &\to T^{q+s}_{p+r}\left(V\right) \\ (M, N) &\mapsto M \otimes N \end{aligned}$$

Bir (p, q) tipi N tensörü için q eğer sıfır ise N tensörü p (kovaryantlık) derecesine sahiptir denilmektedir. p (kovaryant) dereceli tamamiyle antisimetrik tensörlerin uzayı $\Lambda_p\left(V\right)$ ile gösterilmektedir ve bu uzayın elemanları p-formlar olarak adlandırılmaktadır.

$$\begin{aligned} &\omega : V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K} \\ &\quad (X_1, X_2, \ldots, X_p) \to \omega\left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right) \end{aligned}$$

$\Lambda_p(V)$'nin $\mathbb{K}$-boyutu ise $\dim \Lambda_p\left(V\right) = \binom{n}{p}$'dir. $\Lambda\left(V\right)$ dış formların uzayı, p-form altuzaylarının vektör uzayları direkt toplamı olarak tanımlanabilmektedir

$$\Lambda\left(V\right) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p\left(V\right). \tag{2.1}$$

Bu sebeple $\dim \Lambda\left(V\right) = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$'dir. $\Lambda\left(V\right)$'nin bu ayrışımı $\mathscr{S}_p$ iz düşümü operatörleri kullanılarak şöyle yazılabilmektedir. $\omega \in \Lambda\left(V\right)$ için

$$\omega = \sum_{p=0}^{n} \mathscr{S}_p\left(w\right). \tag{2.2}$$

p-form altuzaylarından birinde bulunan bir differensiyel forma, p. dereceden *homojendir* denir. $\Lambda(V)$ uzayı, dış çarpım işlemi ile birlikte bir $\mathbb{K}$-cebir yapısı kazanır ve bu cebire V uzayı üzerindeki *dış cebir* denilmektedir, dış cebir birleşmeli bir cebirdir. Dış çarpımın tanımında **Alt** gönderimi kullanılmaktadı, bu gönderim bir p dereceli tensörün tümüyle antisimetrik kısmını bırakır. $N \in T_p(V)$ için,

$$(\textbf{Alt}\ N)(X_1, X_2, \ldots) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) N\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}\right) \qquad \forall X_i \in V \quad (2.3)$$

Burada σ bütün permütasyonlar üzerinden toplamdır ve $\epsilon(\sigma)$ çift permütasyonlar için +1, tek permütasyonlar için -1 değerini alır. Buna göre iki homogen formun dış çarpımı,

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) &\to \Lambda_{p+q}(V) \\ (\omega, \phi) &\mapsto \omega \wedge \phi = \textbf{Alt}(\omega \otimes \phi) \end{aligned}$$

şekiklinde tanımlanmaktadır. Homogen olmayan formlar üzerinde dış çarpım, **Alt** gönderimini toplam üzerine dağılımlı olacak şekilde genişleterek tanımlanır. Dış çarpımın,

$$\omega \wedge \phi = (-1)^{pq} \phi \wedge \omega \qquad \omega \in \Lambda_p(V), \phi \in \Lambda_q(V).$$

özelliğini sağlar. Bir ω p-formu $\{e^a\}$ ko-çerçeve bazı cinsinden,

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \qquad \text{(Einstein toplama anlaşması)},$$

olarak yazılır. Burada $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ sayılarına ω'nın ilgili ko-bazdaki bileşenleri denir. $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(V)$ ayrışımı $\Lambda(V)$'nin $\mathbb{Z}$-derecelendirilmişine karşılık gelir. $\omega \in \Lambda_p(V)$ için $\eta(\omega) = (-1)^p \omega$ şeklinde tanımlanan dönüşüm $\eta(\omega \wedge \phi) = \eta(\omega) \wedge \eta(\phi)$ özdeşliğine sahiptir ve $\eta^2 = 1$'dir; yani $\eta : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ involüter bir cebir otomorfizmidir.

η otomorfizmi $\Lambda(V) = \Lambda^+(V) \oplus \Lambda^-(V)$ şekklinde bir $\mathbb{Z}_2$-derecelendirmesi indükler. Eğer $\eta(\omega) = \omega$ ise, $\omega \in \Lambda^+(V)$ ve eğer $\eta(\omega) = -\omega$ ise, $\omega \in \Lambda^-(V)$ demektir. Bu sebeple $\Lambda^+(V)$ çift formların uzayı ve $\Lambda^-(V)$'ye de tek formların uzayı denir. Ayrışabilir bir (homejen) formun tüm çarpanlarının sırasını ters yüz eden $\xi : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ gönderimi,

$$\xi(\omega \wedge \phi) = \xi(\phi) \wedge \xi(\omega)$$

özelliğine sahiptir ve bu gönderim dış cebirin bir involüsyondur yani involüter bir *anti-otomorfizmidir*. $\omega \in \Lambda_p(V)$ için,

$$\xi(\omega) = (-1)^{\lfloor p/2 \rfloor} \omega. \tag{2.4}$$

Daha sonra $\eta(\omega) = \omega^\eta$ ve $\xi(\omega) = \omega^\xi$ kısaltmaları da kullanılacaktır. $X \in V$ için $\Lambda(V)$ üzerindeki i_X *iç türev (kontraksiyon)* işlemi,

$$i_X : \Lambda_p(V) \to \Lambda_{p-1}(V)$$

olup,

$$i_X(\omega \wedge \phi) = (i_X\omega)\phi + \eta(\omega) \wedge i_X\phi \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır ve η'ya göre bir *anti-türevdir*. i_X dereceyi bir düşürdüğünden dolayı, $i_X\eta\omega = -\eta i_X\omega$ olmaktadır. Her $X, Y \in V$ için $i_Y i_X\omega = -i_X i_Y\omega$ veya $i_X i_X\omega = 0$'dır. Birbirine dual olan $\{e^a\}$,$\{X_a\}$ bazları ve $\omega \in \Lambda_p(V)$ için,

$$e^a \wedge i_{X_a}\omega = p\omega \tag{2.6}$$

V üzerinde bir g metriği olduğu gösterilebilir. Dejenere olamayan $(2,0)$ tipi simetrik bir tensördür. g'nin dejenere olmaması, V'nin tüm elemanlarına g-dik olan bir vektörün sıfır olması anlamına gelir. (V, g) bir g ortogonal uzay olarak adlandırılır. V'nin bir $\{X_a\}$ bazı için g'nin bileşenleri $g_{ab} = g(X_a, X_b)$ ikilisi olarak yazılabilmektedir.

Eğer g, (p, q) imzasına sahipse, o zaman bir $\{X_a\}$ bazı vardır öyle ki

$$g(X_a, X_b) = \eta_{ab} := \begin{cases} +\delta_{ab} & ; a, b \in \{1, 2, \dots, p\} \\ -\delta_{ab} & ; a, b \in \{p+1, \dots, p+q\} \end{cases}$$

Bir metriğin varlığı V ile V^* arasında (sonlu boyut için) bir *izomorfizm* tanımlar. Bu izomorfizm $X, Y \in V$ için $\widetilde{X}(Y) = g(X, Y)$ olacak şekilde tanımlanan

$$\begin{aligned} \sim: V &\to V^* \\ X &\mapsto \widetilde{X} \end{aligned} \tag{2.7}$$

gönderimdir ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\sim: V^* &\to V \\
\alpha &\mapsto \widetilde{\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

$\alpha(Y) = g\left(Y, \widetilde{\alpha}\right)$ olmaktadır. Örneğin, $Y = Y^a X_a$ için dual 1-form $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Y} = g_{ab}Y^b e^a := Y_a e^a$ olarak yazılabilmektedir. Burada $\tilde{Y}(\tilde{\alpha})$'ya, $Y(\alpha)$'nin *metrik duali* denir. $\alpha, \beta \in \Lambda_1(V) = V^*$ için

$$
g^*\left(\alpha, \beta\right) = g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \tag{2.9}
$$

ile verilen bir g^* metriği V^* üzerinde oluşturulabilir ve $g^*(e^a, e^b) := g^{ab}$ ile indis indirme ve kaldırma işlemleri yapılabilir. Dikkat edilirse $g_{ab}g^{bc} = \delta_a{}^c$ olup özel olarak $e_a := g_{ab}e^b$ ve $X^a : g^{ab}X_b$ tanımlamaları daha sonraları sıkça kallanılacaktır. Bir p-form $\omega \in \Lambda_p\left(V\right)$ için bileşenleri

$$
\omega\left(X_1, \ldots, X_p\right) = \frac{1}{p!} i_{X_p} \ldots i_{X_1}\omega \tag{2.10}
$$

olarak yazılmaktadır ve p-formlar üzerinde bir metrik aşağıdaki gibi tanımlabilir

$$
g_p\left(\omega, \phi\right) = \frac{1}{p!}(i_{X_{a_1}} i_{X_{a_2}} \ldots i_{X_{a_p}}\omega)(i_{X^{a_1}} i_{X^{a_2}} \ldots i_{X^{a_p}}\phi) \qquad \forall \omega, \phi \in \Lambda_p\left(V\right). \tag{2.11}
$$

$\dim \Lambda_p\left(V\right) = \dim \Lambda_{n-p}\left(V\right)$ olduğu için $\Lambda_p\left(V\right)$ ve $\Lambda_{n-p}\left(V\right)$ arasında bir izomorfizm vardır. Bu izomorfizm *Hodge gönderimi* olarak adlandırılmaktadır ve $*$ ile gösterilen

$$
\begin{aligned}
* : \Lambda_p\left(V\right) &\to \Lambda_{n-p}\left(V\right) \\
\omega &\mapsto *\omega
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

gönderimi ile doğal bir şekilde ifade edilebilir. Bir $\{e^a\}$ g-ortogonal 1-form bazı için z hacim n-formu

$$
z = e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n \tag{2.13}
$$

olarak tanımlanırsa; Hodge gönderimi,

$$
\omega \wedge *\phi = g_p\left(\omega, \phi\right) z \qquad \forall \omega, \phi \in \Lambda_p\left(V\right), \tag{2.14}
$$

biçiminde tanımlanır. g_p'nin simetrisinden dolayı,

$$\omega \wedge *\phi = \phi \wedge *\omega \tag{2.15}$$

özelliği sağlanır. Geleneksel olarak hacim form $z = *1$ olarak yazılır, ayrıca bir $\omega \in \Lambda_p(V)$ ve $X \in V$ için, $*\left(\omega \wedge \tilde{X}\right) = i_X * \omega$ eşitliği de sağlanır. $\omega \in \Lambda_p(V)$ için $* * \omega = \epsilon_p(g)\omega$ olup $\epsilon_p(g) = (-1)^{p(n-p)} \frac{det\mathbf{g}}{|det\mathbf{g}|}$ olarak tanımlanmaktadır ve $\mathbf{g} = [g_{ab}]$'dir.

$n = 2m$ çift boyutta iken $*$, $\Lambda_m(V)$ *orta-formlar* uzayını (the space of middle forms) değişmez bırakır ve orta-formlar üzerinde bir involüsyondur. Böylece herhangi bir orta form $\omega \in \Lambda_m(V)$ $*$'ın farklı özdeğerli özformları cinsinden $\omega = \omega^+ + \omega^-$ ve $*\omega^\pm = \pm\sqrt{\epsilon_m}\omega^\pm$ olarak ayrışır; ω^+ *kendine dual* ve ω^- *anti kendine-dual* kısımlarıdır . $\{e^a\}$ bir ortogonal ko-çerçeve bazı için hacim formu

$$*1 = \frac{1}{n!}\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \ldots \wedge e^{a_n} \tag{2.16}$$

olarak da yazılabilmektedir. Burada

$$\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } a_i = a_k \quad , \quad i \neq k, \\ +1\,(-1) & \text{eğer } (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,, (1, 2, \ldots, n)\text{'nin bir çift (tek)} \\ & \text{permütasyonu ise.} \end{cases}$$

Böylelikle g^*-ortonormal bir ko-çerçeve bazı cinsinden ifade edilen bir p-form bazının Hodge duali

$$*\left(e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \ldots \wedge e^{a_p}\right) = \frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{a_1 \ldots a_p}{}_{a_{p+1} \ldots a_n} e^{p+1} \wedge \ldots \wedge e^{a_n}. \tag{2.17}$$

eşitliği ile verilmektedir.

3. CLIFFORD CEBİRLERİ

Clifford cebirinin indirgenemez temsilleri, spin gruplarının indirgenemez temsillerine (spinörlere) yol açar. İlerideki bölümleri daha rahat kavramak için, Clifford cebir yapısının anlaşılması gerekmektedir. Clifford cebri, ortogonal dönüşümlerin incelenmesini kolaylaştıracak şekilde inşa edilmiştir. Keyfi boyutlar ve imza için spin gruplarını tanıtmanın sistematik bir yoluna götürür. Clifford cebri içinde terslenebilir elemanlar ile oluşturulan gruba *Clifford grubu* denir.

İlerideki uygulamalar açısından V'yi 1-formların uzayı olarak düşünelim; bu durumda V ve V^* için g-ortonormal bazlar sırasıyla $\{e^a\}$ ve $\{X_a\}$ olarak seçilecektir. Açıkça artık $\Lambda_1(V)$, V^*'a değil V'ye eşit olacaktır. (V, g) bir ortogonal $\mathbb{K}$-çizgisel uzay olsun. $x \in V$ ve $\omega \in \Lambda_p(V)$ için Clifford çarpımı

$$x.\omega = x \wedge \eta(\omega) + i_X\omega \tag{3.1}$$

$$\omega.x = x \wedge \eta(\omega) - i_X\eta(\omega) \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır. Bu çarpımla birlikte $\Lambda(V)$ vektör uzayı bir birleşmeli cebir yapısı kazanır ve oluşan bu cebire (V, g) ortogonal uzayının *Clifford cebri* denir ve $Cl(V, g)$ ile gösterilir. $x, y \in V$ için,

$$\begin{aligned} x.y + y.x &= x \wedge y + i_{\widetilde{x}}y + x \wedge \eta(y) - i_{\widetilde{x}}\eta(y) \\ &= x \wedge y + i_{\widetilde{x}}y - x \wedge y + i_{\widetilde{x}}y \\ &= 2i_{\widetilde{x}}y = 2y(\widetilde{x}) = 2g(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 2g(x, y) \\ &\Rightarrow x.y + y.x = 2g(x, y) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Clifford çarpımının tanımından açıktır ki $x \in V$ ve $\phi \in \Lambda(V)$ için

$$\begin{aligned} x \wedge \phi &= \frac{1}{2}(x.\phi + \eta\phi.x), \\ i_{\widetilde{x}}\omega &= \frac{1}{2}(x.\phi - \eta\phi.x). \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\alpha, \beta \in \Lambda(V)$ için

$$\alpha.\beta = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}}{k!} \left(\eta^k i_{X_{a_1}} i_{X_{a_2}} \ldots i_{X_{a_k}} \alpha\right) \wedge \left(i_{X^{a_1}} i_{X^{a_2}} \ldots i_{X^{a_k}} \beta\right) \tag{3.5}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca $[\quad,\quad]_{Cl}$ Clifford komütatörü

$$[\alpha,\beta]_{Cl}=\alpha.\beta-\beta.\alpha \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır ve denklem (3.5) yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]_{Cl}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{\lfloor k/2\rfloor}}{k!}\Big[&\left(\eta^k i_{X_{a_1}} i_{X_{a_2}}\dots i_{X_{a_k}}\alpha\right)\wedge\left(i_{X^{a_1}} i_{X^{a_2}}\dots i_{X^{a_k}}\beta\right)\\ &-\left(\eta^k i_{X_{a_1}} i_{X_{a_2}}\dots i_{X_{a_k}}\beta\right)\wedge\left(i_{X^{a_1}} i_{X^{a_2}}\dots i_{X^{a_k}}\alpha\right)\Big].\end{aligned} \tag{3.7}$$

İlerleyen bölümlerde yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısında

$$\alpha\underset{k}{\wedge}\beta:=i_{X_{a_1}} i_{X_{a_2}}\dots i_{X_{a_k}}\alpha\wedge i_{X^{a_1}} i_{X^{a_2}}\dots i_{X^{a_k}}\beta \tag{3.8}$$

tanımı yapılabilir. Böylelikle denklem (3.7)

$$[\alpha,\beta]_{Cl}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{\lfloor k/2\rfloor}}{k!}=\left[\eta^k(\alpha)\underset{k}{\wedge}(\beta)-\eta^k\beta\underset{k}{\wedge}\alpha\right] \tag{3.9}$$

halini alır.

$$[\alpha,\beta]_{+Cl}=\alpha.\beta+\beta.\alpha \tag{3.10}$$

$[\quad,\quad]_{+Cl}$ Clifford anti-komütatör olarak tanımlanır ve açıkça

$$[\alpha,\beta]_{+Cl}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{\lfloor k/2\rfloor}}{k!}=\left[\eta^k\alpha\underset{k}{\wedge}\beta+\eta^k\beta\underset{k}{\wedge}\alpha\right] \tag{3.11}$$

olarak yazabilir.

İç türev i_X'in, $Cl\,(V,g)$ üzerinde de anti-türevdir:

$$i_X\,(\alpha.\beta)=(i_X\alpha).\beta+\eta(\alpha).i_X\beta \tag{3.12}$$

Clifford çarpımı homogenliği korumadığından, $Cl\,(V,g)$, $\mathbb{Z}$-derecelendirilmiş bir cebir değildir. Clifford çarpımının tanımı nedeniyle $Cl\,(V,g)$ üzerinde bir $\mathbb{Z}_2$-derecelendirmesi oluşur:

$$Cl\,(V,g)=Cl^0\,(V,g)\oplus Cl^1\,(V,g)\,. \tag{3.13}$$

Yani

$$\omega \in Cl\,(V,g) \text{ için} \begin{cases} \text{eğer} \quad \eta(\omega)=\omega \quad & \text{ise} \quad \omega \in Cl^0\,(V,g)\,, \\ \\ \text{eğer} \quad \eta(\omega)=-\omega & \text{ise} \quad \omega \in Cl^1\,(V,g) \end{cases}$$

ayrışımı mevcuttur. $\alpha \in \Lambda_p\,(V)$ ve $\beta \in \Lambda_q\,(V)$ için

$$\alpha.\beta = \mathscr{S}_{p+q}\,(\alpha.\beta) + \mathscr{S}_{p+q-2}\,(\alpha.\beta) + \ldots + \mathscr{S}_{|p-q|}\,(\alpha.\beta) \tag{3.14}$$

eşitliği denklem (3.5)'ten hemen görülür. $\Phi, \Psi \in Cl\,(V,g)$ için (3.14)'ün ani bir sonucu

$$\mathscr{S}_0\,(\Psi.\Phi) = \sum_p^n \mathscr{S}_0\,(\Psi_p.\Phi_p) \tag{3.15}$$

eşitliğidir. Clifford formları üzerinde bir G metriği

$$G\,(\Phi,\Psi) = \sum_{p=0,1,\ldots,n} g_p\,(\Phi_p,\Psi_p) \tag{3.16}$$

biçiminde tanımlanabilir. Ayrıca $g_p(\Phi_p,\Psi_p) = \mathscr{S}_0(\Phi_p^{\xi}.\Psi_p)$ olduğundan

$$G\,(\alpha,\beta) = \mathscr{S}_0\,\left(\alpha^{\xi}.\beta\right) \tag{3.17}$$

eşitliği sağlanır. Bir Clifford formun Hodge duali,

$$*\Phi = \Phi^{\xi}.z \tag{3.18}$$

özdeşliğini sağlar.

3.1 Reel Clifford Cebirleri

$Cl\,(\mathbb{R}^{p,q},g) := Cl_{p,q}$'de p artı ve q eksi işaretleride ve g için $V = \mathbb{R}^{p,q}$ seçeldiğinde, $\{e^i, f^j\}$ tarafından $\mathbb{R}^{p,q}$ için bir ortonormal baz belirtilir. Burada $i = 1,2,\ldots,p$ ve $j = 1,2,\ldots,q$'dir. Ayrıca $g\,(e^i,e^i) = 1$ ve $\widetilde{e^i}\widetilde{e^i} = 1$'dir ve $(f^j,f^j) = -1$ ve $\widetilde{f^i}\widetilde{f^i} = -1$'dir. Hacim form z ise,

$$\begin{aligned} z &= e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots e^p \wedge f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^q \\ &= e^1.e^2.\ldots.e^p.f^1.f^2.\ldots.f^q \end{aligned}$$

i) $p=0$, $q=0$; $Cl_{0,0}\,\{1\}$ tarafından üretilir ve
$Cl_{0,0} \simeq \mathbb{R}$'e sahip olunur.

ii) $p = 0$, $q = 1$; $Cl_{0,1}$ $\{1, f\}$ tarafından üretilir ve burada $f^2 = f.f = -1$'dir. O zaman $Cl_{0,1} \simeq \mathbb{C}$'dir ve $\{1, f\} \simeq \{1, i\}$.

iii) $p = 0$, $q = 2$'de $Cl_{0,2}$ için bir baz $\{1, f^1, f^2, z\}$'dir ve burada $z = f^1 f^2$'dir. Ayrıca denklem (3.19)'un sol tarafında bulunan $f^1 f^1$ ve $f^2 f^2$ 'nin sonucu -1 olduğundan

$$\begin{aligned} z^2 &= f^1 f^2 . f^1 f^2 \\ &= -f^1 f^1 . f^2 f^2 = -1 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$'dir ve $\{1, f^1, f^2, z\} \simeq \{1, i, j, k\}$. Burada
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ve $ij = k$, $jk = i$ ve $ki = j$.

iv) $p = 1$, $q = 0$'da $Cl_{1,0}$ için bir baz $\{1, e\}$'dir ve $e^2 = 1$.
Eğer $p_1 = \frac{1}{2}(1 + e)$, $p_2 = \frac{1}{2}(1 - e)$ olarak tanımlanırsa $P_i^2 = P_i$'de $i = 1, 2$ ve $P_i.P_j = 0$ için $P_1 + P_2 = 1$'dir.
$Cl_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

v) $p = 1$, $q = 1$; $Cl_{1,1}$ $\{1, e, f, z\}$ tarafından üretilir ve burada $f^2 = 1$ ve $e^2 = 1$'dir. Bu 2×2 real matrislerin cebrine izomorfiktir ve $\{1, e, f, z\}$ 'nin matris şeklinde gösterimi aşağıdaki gibidir

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Cl_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2) \quad \begin{pmatrix} \mathbb{R}(n) & \text{n} \times \text{n real matris} \\ \mathbb{C}(n) & \text{n} \times \text{n kompleks matris} \\ \mathbb{H}(n) & \text{n} \times \text{n kuaterniyonik matris} \end{pmatrix}.$$

vi) $p = 2$, $q = 0$; $Cl_{2,0}$ $\{1, e^1, e^2, z\}$ tarafından üretilir ve burada $(e^1)^2 = 1 = (e^1)^2$'dir. Bu ayrıca $\mathbb{R}(2)$'ye izomorfiktir.

Çizelge 3.1: Clifford satranç tahtası

$Cl_{p,q}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2)\oplus\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4)\oplus\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{R}(8)$
5	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32)\oplus\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$
7	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64)\oplus\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Cl_{2,0} \simeq \mathbb{R}(2)$$

$Cl_{p,q}$ için Clifford satranç tahtası(Clifford chessboard) olarak adlandırlılan tablo (3.1) oluşturulur. Clifford satranç tahtası tablosu daha kompakt bir şekilde tablo (3.2) gibi yazılabilmektedir.

Çizelge 3.2: p pozitif ve q negatif üreticilerine karşılık gelen reel Clifford cebirleri

$p-q\,(\text{mod } 8)$	$Cl_{p,q}$
$0,2$	$\mathbb{R}\left(2^{n/2}\right)$
$3,7$	$\mathbb{C}\left(2^{(n-1)/2}\right)$
$4,6$	$\mathbb{H}\left(2^{(n-2)/2}\right)$
1	$\mathbb{R}\left(2^{(n-1)/2}\right)\oplus\mathbb{R}\left(2^{(n-1)/2}\right)$
5	$\mathbb{H}\left(2^{(n-3)/2}\right)\oplus\mathbb{H}\left(2^{(n-3)/2}\right)$

3.2 Çift Altcebir

Clifford cebrinin $\mathbb{Z}_2$-dereceledirmesi *çift altcebir* olarak adlandırılan bir $Cl^0(V,g)$ çift altcebrinin oluşmasını sağlar. V, $Cl(V,g)$'yi ürettiğinden dolayı 2-formlar $Cl^0(V,g)$ tarafından üretilmektedir. $V=\mathbb{R}^{p+1}$ için $Cl_{p+1,q}$ bir $\{e^i, f^j\}$ bazı tarafından üretilmektedir. Burada $i=1,\ldots,p+1$ ve $j=1,\ldots,q$. Ayrıca $\left(e^i\right)^2=1$ ve $\left(f^j\right)^2=-1$. Ayrıca Cl_{p+1} için üreticlerin kümesi q^0,$e^{p+1}, e^i, e^{p+1}, f^i$ olarak yazılmaktadır. Burada $i=1,\ldots,p$ ve $j=1,\ldots,q$'dir.

$$Cl^0_{p+1,q} \simeq Cl_{q,p} \tag{3.20}$$

Çizelge 3.3: Çift altcebirler

$p-q\,(\mathrm{mod}\,8)$	$Cl^0_{p,q}$
0	$\mathbb{R}\left(2^{n/2}\right)\oplus\mathbb{R}\left(2^{n/2}\right)$
$1,7$	$\mathbb{R}\left(2^{n/2}\right)$
$2,6$	$\mathbb{C}\left(2^{(n-1)/2}\right)$
$3,5$	$\mathbb{H}\left(2^{(n-1)/2}\right)$
4	$\mathbb{H}\left(2^{(n-3)/2}\right)\oplus\mathbb{H}\left(2^{(n-3)/2}\right)$

4. SPİNÖRLER

Clifford cebrinin ve çift altcebrinin indirgenemez temsillerinden, Clifford grubunun indirgenemez temsilleri olan *spinor temsilleri* elde edilir. Düzenli temsil, Clifford cebirini kendi endomorfizm cebirine; yani Clifford cebirinin vektor uzayi yapisi üzerinde cizgisel donusumlerin cebirine gonderir. Bazı vektör altuzayları soldan çarpım altında, yani sol ideallerde korunacağından dolayı; bu temsil indirgenemez olmayacaktır. Düzenli temsilin bir *minimal sol idealin* endomorfizm cebiri içinde indüklediği gönderime, basit Clifford cebirinin *spinör temsili* denir ve minimal sol ideal de spinörlerin uzayı olarak adlandırılır.

$Cl\,(V,g)$'nin bazı elemanları terslenebilirdir. $x, y \in \Lambda_1\,(V) \simeq V$ için aşağıdaki Clifford çarpımı,

$$x.y + y.x = 2g\,(x,y) \tag{4.1}$$

olarak yazılmaktadır. $x = y$ için denklem (4.1) şu şekle dönüşür,

$$\begin{aligned} x.x + x.x =& 2g\,(x,x) \\ x^2 =& g\,(x,x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$Cl\,(V,g)$ içinde terslenebilir elemanlarının grubu,

$$Cl^*\,(V,g) = \{\phi \in Cl\,(V,g)\,|\phi.\phi^{-1} = \phi^{-1}.\phi = 1\} \tag{4.3}$$

olarak tanımlanabilmektedir. Cliffrod grubu,

$$\Gamma\,(V,g) = \{\phi \in Cl^*\,(V,g)\,|\phi.x.\phi^{-1} = x; \forall x \in V\} \tag{4.4}$$

olarak tanımlanabilmektedir. $\Gamma\,(V,g)$'nin bir alt grubu, Pin grubu ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$Pin\,(V,g) = \{\phi \in \Gamma\,(V,g)\,|\phi^{\xi}.\phi = \pm 1\}. \tag{4.5}$$

Γ'nın χ vektör temsili bir $\chi : \Gamma(V.g) \rightarrow Aut\,Cl(V,g)$ gönderimidir. Öyle ki $\phi \in \Gamma(V,g)$ ve $\omega \in Cl(V,g)$ için $\chi(\phi).\omega = \phi.\omega.\phi^{-1}$'dir.

$\chi\left(Pin\left(V,g\right)\right)=O\left(V,g\right)$ ve χ'nin çekirdeği $\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$'dir. $Pin\left(V,g\right)\xrightarrow{2:1}O\left(V,g\right)$'dir yani Pin grubu, ortogonal grubun ikili-örtme grubudur. Pin grubunun çift elemanları *Spin grubu* denilen bir alt grup oluşturur.

$$Spin\left(V,g\right)=Pin\left(V,g\right)\cap Cl^0\left(V,g\right) \tag{4.6}$$

$$\chi\left(Spin\left(V,g\right)\right)=SO\left(V,g\right) \tag{4.7}$$

$$Spin\left(V,g\right)\xrightarrow{2:1}SO\left(V,g\right) \tag{4.8}$$

Bir A cebrinin bir K-temsili ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$) bir K-vektör uzayı E için bir,

$$\rho: A\longrightarrow \mathbf{End}_{\mathbb{K}}\left(E\right) \tag{4.9}$$

$\mathbb{K}$- çizgisel cebir homomorfizmidir; öyle ki $\mathbf{End}_{\mathbb{K}}(E)$, E'nin endomorfizm cebridir. $Pin\left(V,g\right)$'nin bir pinör temsili, $Cl\left(V,g\right)$'nin bir indirgenemez temsilinin kısıtlamasıdır. $Spin\left(V,g\right)$'nin bir spinör temsili, $Cl^0\left(V,g\right)$'nin bir indirgenemez temsilinin kısıtlamasıdır. $V=\mathbb{R}^{p,q}$ için $Cl\left(V,g\right)$, $\mathbb{K}\left(2^n\right)$ veya $\mathbb{K}\left(2^n\right)\oplus\mathbb{K}\left(2^n\right)$'e izomorfiktir, burada $n=p+q$'dur.

Teorem 4.1 i) $\mathbb{R}\left(n\right)$'nin her indirgenemez $\mathbb{R}$-temsili $\mathbb{R}^n$'e izomorfiktir. $T\in\mathbb{R}\left(n\right)$ soldan matris çarpımı ile etki eder.

ii) $\mathbb{H}\left(n\right)$'nin her indirgenemez $\mathbb{H}$-temsili $\mathbb{H}^n$'e izomorfiktir.$T\in\mathbb{H}\left(n\right)$ soldan matris çarpımı ile etki eder.

iii) $\mathbb{C}\left(n\right)$'nin her indirgenemez $\mathbb{C}$-temsili ya $T\in\mathbb{C}\left(n\right)$ soldan matris çarpımı ile $\mathbb{C}^n$'e ya da $\bar{T}\in\mathbb{H}\left(n\right)$ soldan matris çarpımı ile $\mathbb{C}^n$'e izomorfiktir.Buradaki $\bar{T}$ ise kompleks eşleniğidir. (Lang 1955)

Pinör uzayı P veya $P_+\oplus P_-$ olarak tanımlanmaktadır. Spinör uzayı ise S veya $S_+\oplus S_-$ olarak tanımlanmaktadır. Spinör uzayında gösterilen S_+ ve S_- yarı-spinör uzaylarıdır. Tablo (3.2) ve (3.3)'den pinör ve spinör temsillerinin tablosu (4.1) oluşturulmaktadır. Spinörler seçilen farklı temsillere göre farklı adlandırmalar alabilmektedir:

i) Reel temsillerin spinörleri Majorana Spinörleri olarak adlandırılır.

ii) Kompleks temsillerin spinörleri Dirac Spinörleri olarak adlandırılır.

iii) Kuaterniyon temsillerin spinörleri Simplektik Majorana Spinörleri olarak adlandırılır.

Çizelge 4.1: Pinör ve Spinör temsilleri

$p-q$ (mod 8)	P	S	Spinör'ün Tipi
0	$P=\mathbb{R}^{2^{n/2}}$	$S_+\oplus S_-=\mathbb{R}^{2^{(n-2)/2}}\oplus\mathbb{R}^{2^{(n-2)/2}}$	Majorana-Weyl
1	$P_+\oplus P_-=\mathbb{R}^{2^{(n-1)/2}}\oplus\mathbb{R}^{2^{(n-1)/2}}$	$S=\mathbb{R}^{2^{(n-1)/2}}$	Majorana
2	$P=\mathbb{R}^{2^{n/2}}$	$S_+\oplus S_-=\mathbb{C}^{2^{(n-2)/2}}\oplus\mathbb{C}^{2^{(n-2)/2}}$	Dirac-Weyl
3	$P_+\oplus P_-=\mathbb{C}^{2^{(n-1)/2}}\oplus\mathbb{C}^{2^{(n-1)/2}}$	$S=\mathbb{H}^{2^{(n-3)/2}}$	Simplektik Majorana
4	$P=\mathbb{H}^{2^{(n-2)/2}}$	$S_+\oplus S_-=\mathbb{H}^{2^{(n-4)/2}}\oplus\mathbb{H}^{2^{(n-4)/2}}$	Simplektik Majorana-Weyl
5	$P_+\oplus P_-=\mathbb{H}^{2^{(n-3)/2}}\oplus\mathbb{H}^{2^{(n-3)/2}}$	$S=\mathbb{H}^{2^{(n-3)/2}}$	Simplektik Majorana
6	$P=\mathbb{H}^{2^{(n-2)/2}}$	$S_+\oplus S_-=\mathbb{C}^{2^{(n-2)/2}}\oplus\mathbb{C}^{2^{(n-2)/2}}$	Dirac-Weyl
7	$P_+\oplus P_-=\mathbb{C}^{2^{(n-1)/2}}\oplus\mathbb{C}^{2^{(n-1)/2}}$	$S=\mathbb{R}^{2^{(n-1)/2}}$	Majorana

Eğer bir ideal, kendisinden ve sıfırdan başka bir altideal içermiyorsa ona *minimaldir* denir. Spinör temsili Clifford cebrininin minimal sol ideallerine karşılık gelir. Bu yüzden minimal sol ideal $S\subset Cl\,(V,g)$ Spinor uzayı olarak adalandırılır. S üzerinde $Cl\,(V,g)$'nin etkisi soldan Clifford çarpımı ile karakterize edilmektedir. $\omega\in Cl\,(V,g)$ ve $\psi\in S$ için Clifford etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c: Cl\,(V,g)\times S &\to S \\ (\omega,\phi) &\mapsto c\,(\omega,\phi)=\omega.\phi \end{aligned} \tag{4.10}$$

S Spinör uzayının yanı sıra, Spinör uzayının duali olan S^* da tanımlanabilmektedir.

$$S^*:=\{\bar{\psi}|\bar{\psi}:S\to\mathbb{K}\,(\text{ya da }\mathbb{K}\oplus\mathbb{K})\} \tag{4.11}$$

Bu tanım S üzerinde bir spin-invaryant iç çarpım tanımlar. $\phi,\psi\in S$ ve $\bar{\psi}\in S^*$ için,

$$\begin{aligned} S^*\times S &\to \mathbb{K}\,(\text{ya da }\mathbb{K}\oplus\mathbb{K}) \\ \bar{\psi},\phi &\mapsto \bar{\psi}\,(\phi)=(\psi,\phi) \end{aligned} \tag{4.12}$$

sahip olunmaktadır. Burada $s\in Spin\,(V,g)$ için $(s\psi,s\phi)=(\psi,\phi)$ özelliği kullanılmaktadır. İç çarpım bazı özelliklere sahiptir ve bu özellikler aşağıda sıralanmaktadır. Herhangi $\omega\in Cl\,(V,g)$ ve $c\in\mathbb{K}$ için ve ayrıca $\psi,\phi\in S$ için,

$$(\psi,\omega.\phi)=\left(\omega^{\mathcal{J}}.\psi,\phi\right) \tag{4.13}$$

$$(\psi,\phi c)=(\psi,\phi)c \tag{4.14}$$

$$(\psi c,\phi)=c^{j}\,(\psi,\phi) \tag{4.15}$$

Burada $\mathcal{J}$ bir involüsyondur ve iki farklı şekilde ξ veya $\xi\eta$ olarak alınabilmektedir. Ayrıca j, $\mathbb{K}$ üzerinden bir involüsyon olduğundan (burada $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$),

(i) Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ise o zaman j birimdir

(ii) Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ise o zaman j birim ya da kompleks eşlenik işlemidir(*)

(iii) Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ise o zaman j birim, kuaterniyonik eşlenik(^) ya da kuaterniyonik terslenme işlemdir($^{-}$)

ψ ve ϕ'nin yerdeğişimi altında, iç çarpım $(\psi, \phi) = \epsilon\, (\phi, \psi)^j$ olarak yazılabilmektedir. Burada $\epsilon = \pm 1$'dir. Ayrıca $\epsilon = +1$ ise, o zaman $\mathbb{K}^j -$ simetrik iç çarpımdır. Eğer $\epsilon = -1$ ise, o zaman $\mathbb{K}^j -$ çarpık iç çarpımdır.

Çizelge 4.2: İç çarpım sınıflandırılması

1	$\mathbb{R} -$ sim
2	$\mathbb{R} -$ çarpık
3	$\mathbb{C} -$ sim
4	$\mathbb{C} -$ çarpık
5	$\mathbb{C}^* -$ sim
6	$\mathbb{H}^- -$ sim
7	$\mathbb{H}^\wedge -$ sim
8	$\mathbb{R} -$ takas
9	$\mathbb{H} -$ takas
10	$\mathbb{C} -$ takas

Çizelge 4.3: Farklı boyutlar için Clifford cebrinin temsilleri üzerindeki iç çarpım

$Cl_{p,q}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1 1	3 5	7 6	9 $6 \oplus 6$	6 6	4 5	2 1	8 $1 \oplus 1$
1	$1 \oplus 1$ 8	1 2	5 4	6 6	$6 \oplus 6$ 9	6 7	5 3	1 1
2	1 2	8 $2 \oplus 2$	2 2	4 5	6 7	9 $7 \oplus 7$	7 7	3 5
3	5 4	4 2	$2 \oplus 2$ 8	2 1	5 3	7 7	$7 \oplus 7$ 9	7 6
4	6 6	4 5	2 1	8 $1 \oplus 1$	1 1	3 5	7 6	9 $6 \oplus 6$
5	$6 \oplus 6$ 9	6 7	5 3	1 1	$1 \oplus 1$ 8	1 2	5 4	6 6
6	6 7	9 $7 \oplus 7$	7 7	3 5	1 2	8 $2 \oplus 2$	2 2	4 5
7	5 3	7 7	$7 \oplus 7$ 9	7 6	5 4	2 2	$2 \oplus 2$ 8	2 1

Tablo (4.3) sekiz parçadan oluşan satırların herbirinde bulunan iki farklı satır için; ilk satırın involüsyonu $\mathcal{J} = \xi$ ve ikinci satırın involüsyonu ise $\mathcal{J} = \xi\eta$'dır.

Çizelge 4.4: Farklı boyutlar için çift altcebrinin temsilleri üzerindeki iç çarpım

$Cl^0_{p,q}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	8 $1 \oplus 1$	1 1	3 5	7 6	9 $6 \oplus 6$	6 6	4 5	2 1
1	1 1	$1 \oplus 1$ 8	1 2	5 4	6 6	$6 \oplus 6$ 9	6 7	5 3
2	3 5	1 2	8 $2 \oplus 2$	2 2	4 5	6 7	9 $7 \oplus 7$	7 7
3	7 6	5 4	4 2	$2 \oplus 2$ 8	2 1	5 3	7 7	$7 \oplus 7$ 9
4	9 $6 \oplus 6$	6 6	4 5	2 1	8 $1 \oplus 1$	1 1	3 5	7 6
5	6 6	$6 \oplus 6$ 9	6 7	5 3	1 1	$1 \oplus 1$ 8	1 2	5 4
6	4 5	6 7	9 $7 \oplus 7$	7 7	3 5	1 2	8 $2 \oplus 2$	2 2
7	2 1	5 3	7 7	$7 \oplus 7$ 9	7 6	5 4	2 2	$2 \oplus 2$ 8

Tablo (4.4) sekiz parçadan oluşan satırların herbirinde bulunan iki farklı satır için; ilk satırın involüsyonu $\mathcal{J} = \xi$ ve ikinci satırın involüsyonu ise $\mathcal{J} = \xi\eta$'dır. Ayrıca burada satırlar p pozitif üreticileri ve sütunlar q negatif üreticileri tanımlar.

5. FARKLI CEBİR YAPILARI İÇİN HESAPLAMALAR

5.1 Dış Cebir Hesabı

Bir n-boyutlu M manifoldu ele alındığında, bütün $m \in M$ için $T_mM \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ tanjant uzayını m'deki vektörlerin uzayı olarak tanımlanmaktadır. M üzerinde bütün tanjant uzaylarının birleşimi *tanjant demetidir* ve $TM = \underset{m}{\cup} T_mM$'dir. Bir vektör alanı TM'nin bir *kesiti* olarak tanımlanır. M'nin bir (x^μ) yerel koordinat sistemi için T_mM için bir doğal baz $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_m\}$ iken, onun duali olan $\{dx^\nu|_m\}$ de m noktasındaki ko-teğet uzay T_m^* için bir bazdır.

M üzerinde p-form demeti $\Lambda_pM = \underset{m}{\cup} \Lambda_p (T_mM)$ olarak tanımlanmaktadır. Λ_pM'nin kesiti p-form alanlar olarak adlandırılır. $\Lambda(T_m^*M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(T_m^*M)$ m noktasındaki dış cebir olup, $\Lambda(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_p(T_m^*M)$ kümesi de M'nin dış demetidir.

Dış türev: $d : \Gamma\Lambda_pM \to \Gamma\Lambda_{p+1}M$ olarak *dış türev* aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde tanımlanmıştır.

(i) $df\,(X) = Xf$; $f \in \mathcal{F}\,(M)$, $X \in TM$,

(ii) $d\,(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge d\beta$; $\alpha \in \Lambda_pM$, $\beta \in \Lambda M$.
Ayrıca $dd = d^2 = 0$ özdeşliği sağlanır.

Lie türevi: $X, Y \in \Gamma TM$ için $\mathcal{L}_XY$ *Lie türevi*, X'in akışına göre Y'nin değişimi olup

$$\mathcal{L}_XY = [X, Y] \tag{5.1}$$

ile verilir ve gösterilebilir ki Lie türevi

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}. \tag{5.2}$$

özelliğine sahiptir. Bir $\Gamma\alpha \in \Lambda M$ diferansiyel formu için, X'e göre $\mathcal{L}_X$ Lie türevi d ve i_X cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\mathcal{L}_X\alpha = i_Xd\alpha + di_X\alpha. \tag{5.3}$$

Kovaryant türev: M üzerinde bir çizgisel bağlantı ∇

$$\nabla : TM \times TM \to TM \tag{5.4}$$

olup $f, g \in \mathcal{F}(M)$ ve $X, Y, Z \in \Gamma TM$ için aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \tag{5.5}$$

$$\nabla_X(fY + gZ) = X(f)Y + f\nabla_X Y + X(g)Z + g\nabla_X Z. \tag{5.6}$$

∇_X'e, X'e göre *kovaryant türev* denir. Eğer bir $\{X_a\}$ vektör alanları bazı seçilirse, o zaman

$$\nabla_{X_a} X_b = \Gamma^c_{ab} X_c \tag{5.7}$$

eşitliğindeki bileşenlerle ∇'yı belirleyebiliriz. Buradaki Γ^c_{ab} niceliklerine bağlantı katsayıları denir. $\{X_a\}$'ya dual olan $\{e^a\}$ ko-bazı cinsinden

$$\omega^a{}_b(X_a) = \Gamma_{cb}{}^a e^c \tag{5.8}$$

biçiminde tanımlanan niceliklere bağlantı 1-formları denir. Eğer $\forall X \in \Gamma TM$ için $\nabla_X Y = 0$'sa bunu sağlayan Y vektör alanına *paraleldir* denir. ∇_X işlemi diferansiyel formların cebri üzerinde cebir türevdir. $\alpha, \beta \in \Lambda M$ için ise aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X \beta. \tag{5.9}$$

Torsion ve eğrilik: *Torsion operatörü* $\forall X, Y \in \Gamma TM$ için,

$$\mathbf{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{5.10}$$

olarak tanımlanır; açıkça $\mathbf{T}(X, Y) = -\mathbf{T}(Y, X)$'dir. $\mathbf{T}$ ile ilişkili bir $(2, 1)$ tensör alanı T

$$T(X, Y, \alpha) = \alpha(\mathbf{T}(X, Y)). \tag{5.11}$$

biçiminde tanımlanır; burada $\alpha \in \Gamma T^*M$ olup T'ya torsiyon tensörü denir. $\{e^a\}$ yerel ko-bazı cinsinden torsion 2-formları T^a'lar aşağıdaki şekilde tanımlanabilmektedir:

$$T^a(X, Y) = \frac{1}{2} e^a(\mathbf{T}(X, Y)). \tag{5.12}$$

Eğrilik operatörü ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. $X, Y, Z \in \Gamma TM$ için,

$$\mathbf{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{5.13}$$

∇'nın $(3,1)$ eğrilik tensörü R, $\alpha \in \Gamma T^* M$ için,

$$R(X,Y,Z,\alpha) = \alpha(\mathbf{R}(X,Y)Z) \tag{5.14}$$

olarak tanımlanır.

$$R^a{}_b(X,Y) = \frac{1}{2} e^a(\mathbf{R}(X,Y)X_b). \tag{5.15}$$

Eşitliği ile verilen $R^a{}_b$'lere eğrilik 2-formları denir. Buna göre eğrilik tensörü

$$R = R^a{}_b \otimes e^b \otimes X_a \tag{5.16}$$

şeklinde yazılabilmektedir. *Ricci tensörü*

$$Ric(X,Y) = R(X_a, Y, Z, e^a). \tag{5.17}$$

Eşitliği ile tanımlanan $(2,0)$ tipi bir tensör alanıdır. P_b Ricci 1-formları, eğrilik 2-formları $R^a{}_b$ cinsinden $P_b = i_{X_a} R^a{}_b$ şeklinde yazılabilmektedir. *Eğrilik skaleri* ise

$$\mathcal{R} = Ric(X_a, X^a), \tag{5.18}$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{R} = i_{X^a} P_a$ olarak da yazılabilmektedir; dikkat edilirse $\mathcal{R}$'in tanımlanabilmesi için bir metriğe ihtiyaç vardır.

Metrik uyumluluk: Paralel taşıma altında vektörlerin g-uzunlukları korunuyorsa ∇'ya *metrik uyumlu* bir bağlantı denir ve sonuç olarak $\nabla_g = 0$ özelliği sağlanır.

Levi-Civita bağlantısı: Metrik uyumlu ve torsiyonu sıfır olan M üzerindeki tek bağlantı *Levi-Civita bağlantısı* olarak adlandırılır. ∇, (M,g) için bir Levi-Civita bağlantısı ise

$$d = e^a \wedge \nabla_{X_a} \tag{5.19}$$

$$\delta = -i_{X^a} \nabla_{X_a} \tag{5.20}$$

eşitlikleri sağlanır. Metrik yapı varken formlar üzerinde tanımlanabilen ko-türev $\delta = *^{-1}d * \eta$ eşitliği ile verilir. X ve Y vektör alanları için de

$$[\nabla_X, i_Y] = i_{\nabla_X Y}. \tag{5.21}$$

eşitliğinin sağladığı gösterilebilir.

Killing denklemi: Eğer g metiriği bir K vektör alanın integral eğrisi boyunca değişmiyorsa yani $\mathcal{L}_K g = 0$ ise, K'ya (M, g) üzerinde bir *Killing vektör alanları* denir. Lie türevinin

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]} \tag{5.22}$$

özelliğinden dolayı Killing vektör alanlarının kümesi $[\quad,\quad]$ altında bir cebir teşkil edeler. K bir Killing vektör alanı ise, *Killing denklemi* aşağıdaki gibi de yazılabilmektedir

$$\nabla_X \widetilde{K} = \frac{1}{2} i_X d\widetilde{K}. \tag{5.23}$$

5.2 Clifford Cebri Hesaplamaları

ΛM dış demeti üzerinde, dış (wedge,$\wedge$) çarpımın yanı sıra Clifford çarpımı (.) da tanımlanabilmektedir. Bu iç çarpım ile ΛM, M üzerinde $Cl(M)$ Clifford demetine dönüşmektedir. $Cl(M)$'nin kesitleri *Clifford formları* olarak adlandırılmaktadır. Böylelikle yerel $\{e^a\}$ ko-çerçeve bazının elemanları

$$e^a.e^b + e^b.e^a = 2g^{ab} \tag{5.24}$$

özdeşliğini sağlar. Herhangi $\phi \in Cl(M)$ için Clifford çarpımı ve dış çarpım arasında ilişki ise,

$$e^a.\phi = e^a \wedge \phi + i_{X_a}\phi \tag{5.25}$$

$$\phi.e^a = e^a \wedge \eta\phi - i_{X^a}\eta\phi \tag{5.26}$$

ve benzer şekilde tersi yönde ise,

$$e^a \wedge \phi = \frac{1}{2}\Big(e^a.\phi + \eta\phi.e^a\Big) \tag{5.27}$$

$$i_{X^a}\phi = \frac{1}{2}\Big(e^a.\phi - \eta\phi.e^a\Big). \tag{5.28}$$

∇_X kovaryant türevi $Cl(M)$ üzerinde de bir türevdir:

$$\begin{aligned}
\nabla_X(e^a.\phi) &= \nabla_X(e^a \wedge \phi) + \nabla_X i_{X^a}\phi \\
&= \nabla_X e^a \wedge \phi + e^a \wedge \nabla_X\phi + \nabla_X i_{X^a}\phi \\
&= \nabla_X e^a \wedge \phi + e^a \wedge \nabla_X\phi + i_{X^a}\nabla_X + i_{\nabla_X e^a} \\
&= \nabla_X e^a.\phi + e^a.\nabla_X\phi
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Ayrıca yukarıdaki denklemde $i_{\nabla_X e^a}$ terimi için $i_{\nabla_X \widetilde{e^a}} = i_{\widetilde{\nabla_X e^a}}$ özdeşliği kullanılmıştır. Bu yüzden herhangi $\omega, \phi \in Cl(M)$ için,

$$\nabla_X(\omega.\phi) = \nabla_X\omega.\phi + \omega.\nabla_X\phi \tag{5.30}$$

özdeşliği sağlanır.

5.3 Spinör Hesaplamaları

Spinörler, spin grubunun indirgenemez temsilleridirler ve ayrıca Clifford cebirlerinin minimal sol ideallerinin elemanlarıdırlar. Bu yüzden $Cl(M)$ Clifford demetinden bir $S(M)$ *spinör demeti* bazı manifoldlar için tanımlanabilmektedir. Bir spinör demeti tanımlanabilen manifoldlara *spin manifoldlar*, spinör demetlerinin kesitlerine de *spinör alanları* denilmektedir.

Spinör alanları üzerinde kovaryant türev: Spinör alanlarının bir bazı $\{b_i\}$ olarak verilirse bir X vektör alanına göre kovaryant türev

$$\nabla_X b_i = \sigma_X.b_i \tag{5.31}$$

olarak tanımlanır; burada$\sigma_X := \frac{1}{4}\omega_{ab}(X)e^{ab}$'dir. $f \in F(M)$, $\omega \in \Gamma C(M)$, $X \in \Gamma TM$ ve $\psi, \phi \in \Gamma S(M)$ olmak suretiyle spinör kovaryant türevi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $(\nabla_X\psi, \phi) + (\psi, \nabla_X\phi) = X(\psi, \phi)$

(ii) $\nabla_X\psi^c = (\nabla_X\psi)^c$; c =yük eşleniği işlemi

(iii) $\nabla_{fX}\psi = f\nabla_X\psi$

(iv) $\nabla_X(\omega.\psi) = \nabla_X\omega.\psi + \omega.\nabla_X\psi$

$$\nabla_{fX}\psi = f\nabla_X\psi \tag{5.32}$$

$\omega \in Cl(M)$ ve $\psi \in S(M)$ için Leibniz kuralı,

$$\nabla_X(\omega.\psi) = \nabla_X\omega.\psi + \omega.\nabla_X\psi \tag{5.33}$$

Ayrıca bazı spin-değişmez iç çarpım ile uyumluluk sonucunda $\psi, \phi \in S(M)$ için aşağıdaki gibi yazılabilmektedir

$$X(\psi, \phi) = (\nabla_X\psi, \phi) + (\psi, \nabla_X\phi). \tag{5.34}$$

Bu özellikler sayesinde $\phi \in \Gamma S(M)$ ve $\bar{\psi} \in \Gamma S^*(M)$ için ,

$$\nabla_X(\phi \otimes \overline{\psi}) = \nabla_X\phi \otimes \overline{\psi} + \psi \otimes \overline{\nabla_X\psi}. \tag{5.35}$$

olmaktadır. $S(M)$ üzerinde eğrilik operatörü de

$$\mathbf{R}(X,Y)\psi = [\nabla_X, \nabla_Y]\psi - \nabla_{[X,Y]}\psi \tag{5.36}$$

eşitliği ile tanımlanır.

6. TWISTOR VE KILLING SPİNÖRLERİ

6.1 Dirac ve Twistor Operatörleri

∇ spinör Levi-Civita bağlantısının spinör alanlarına

$$\nabla : \Gamma S(M) \to \Gamma T^*M \otimes \Gamma S(M)$$
$$\psi \mapsto e^a \otimes \nabla_{X_a}\psi$$

şeklinde etkideği düşünülebilir. $S(M)$ üzerine $Cl(M)$'nin Clifford etkisi ise, $T^*M \cong \Lambda_1 M \subset Cl(M)$ için,

$$c : \Gamma T^*M \otimes \Gamma S(M) \to \Gamma S(M)$$
$$\tilde{X} \otimes \psi \mapsto \tilde{X}.\psi$$

olarak tarif edilebilir. Böylelikle spinör alanları üzerinde birinci-mertebeden bir operatör

$$c \circ \nabla : \Gamma S(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma T^*(M) \otimes \Gamma S(M) \xrightarrow{c} \Gamma S(M) \tag{6.1}$$

$$\psi \mapsto e^a \otimes \nabla_{X_a}\psi \mapsto e^a.\nabla_{X_a}\psi = \not{D}\psi \tag{6.2}$$

şeklinde tanımlanabilir; $c \circ \nabla := \not{D}$ operatörüne *Dirac operatörü* denir. Fakat bu spinör alanları üzerinde tanımlanabilen tek birinci-mertebeden diferansiyel operatör değildir.

$T^*M \otimes \Sigma M$ demeti

$$T^*M \otimes S(M) \bigoplus = S_1 + S_2 \tag{6.3}$$

$P_1 + P_2 = \mathbb{I}$ ve $\Gamma(T^*M \otimes S(M))$ olan P_1 ve P_2 iz düşüm operatörlerinin yardımıyla ikiye ayrıştırılabilir;

$$P_1 : \Gamma(T^*M \otimes S(M)) \to \Gamma S_1$$
$$\tilde{X} \otimes \psi \mapsto \frac{1}{n} e^a \otimes (e_a.\tilde{X}.\psi)$$

ve

$$P_2 : \Gamma(T^*M \otimes S(M)) \to \Gamma S_2$$
$$\tilde{X} \otimes \psi \mapsto \tilde{X} \otimes \psi - \frac{1}{n} e^a \otimes (e_a.\tilde{X}.\psi)$$

olarak tanımlanmaktadır. P_1 ve P_2'nin c ile bileşkeleri ayrı ayrı alırsa

$$\begin{aligned} c\circ P_1 : \Gamma(T^*M\otimes S(M)) &\xrightarrow{P_1} S_1 \xrightarrow{c} \Gamma S(M) \\ \tilde{X}\otimes\psi \mapsto \frac{1}{n}e^a\otimes(e_a.\tilde{X}.\psi) &\mapsto \frac{1}{n}e^a.e_a\tilde{X}.\psi = \tilde{X}.\psi \end{aligned} \tag{6.4}$$

ve

$$\begin{aligned} c\circ P_2 : \Gamma T^*M\otimes\Gamma S(M) &\xrightarrow{P_2} \Gamma S_2 \xrightarrow{c} \Gamma S(M) \\ \tilde{X}\otimes\psi &\mapsto \tilde{X}\otimes\psi - \frac{1}{n}e^a\otimes(e_a.\tilde{X}.\psi) \\ &\mapsto \tilde{X}.\psi - \frac{1}{n}e^a.e_a\tilde{X}.\psi = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Bir adım daha öteye gitmek amacıyla $c\circ P_i$ operatörlerinin spinör bağlantısı ∇ ile bileşkelerine bakalım.

$i = 1$ durumunda

$$\begin{aligned} c\circ P_1\circ\nabla : \Gamma S(M) &\xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M\otimes S(M)) \xrightarrow{P_1} \Gamma S_1 \xrightarrow{c} \Gamma S(M) \\ \psi &\mapsto e^a\otimes\nabla_{X_a}\psi \mapsto \frac{1}{n}e^b\otimes(e_b.e^a.\nabla_{X_a}\psi) \mapsto \\ &\mapsto \frac{1}{n}e^b.e_b.e^a.\nabla_{X_a}\psi = \not{D}\psi \end{aligned} \tag{6.6}$$

Dirac operatörü elde edilmektedir. Spinör alanları üzerindeki Dirac operatörü Clifford formları üzerindeki Hodge-de Rham operatörüne benzemektedir:

$$\not{d} : \Gamma C(M) \to \Gamma C(M) \quad ; \quad \not{d} := e^a.\nabla_{X_a} \tag{6.7}$$

ve

$$\not{D} : \Gamma S(M) \to \Gamma S(M) \quad ; \quad \not{D} := e^a.\nabla_{X_a}. \tag{6.8}$$

Dirac operatörünün karesi $\not{D}^2$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \not{D}^2\psi =& e^a.\nabla_{X_a}(e^b.\nabla_{X_b}\psi) \\ =& e^a.(\nabla_{X_a}e^b).\nabla_{X_b}\psi + e^a.e^b.\nabla_{X_a}\nabla_{X_b}\psi \\ =& \not{d}e^b.\nabla_{X_b}\psi + \frac{1}{2}(e^a.e^b + e^b.e^a)\nabla_{X_a}\nabla_{X_b}\psi + \frac{1}{2}(e^a.e^b - e^b.e^a)\nabla_{X_a}\nabla_{X_b}.\psi \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$
\begin{aligned}
\not{D}^2\psi =& \not{d}e^a.\nabla_{X_a}\psi + \nabla_{X_a}\nabla_{X^a}\psi + \frac{1}{2}e^a.e^b.[\nabla_{X_a}, \nabla_{X_b}]\psi \\
=& \not{d}e^a.\nabla_{X_a}\psi + \nabla_{X_a}\nabla_{X^a}\psi + \frac{1}{2}e^{ab}.(\mathbf{R}(X_a, X_b) + \nabla_{[X_a,X_b]})\psi
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

eşitliğine ulaşılır. $[X_a, X_b] = (i_{X_a}i_{X_b}de^c)X_c$ ve $\frac{1}{2}e^{ab}.\nabla_{[X_a,X_b]}\psi = -de^c.\nabla_{X_c}\psi$ kullanılırsa,

$$
\not{D}^2\psi = -\delta e^a.\nabla_{X_a}\psi + \nabla_{X_a}\nabla_{X^a}\psi + \frac{1}{2}e^{ab}.\mathbf{R}(X_a, X_b)\psi \tag{6.11}
$$

elde edilir. $\delta = -i_{X^b}\nabla_{X_b}$ tanımından ve spinör alanlarında $\mathbf{R}(X_a, X_b)$'nin etkisi olan

$$
\mathbf{R}(X_a, X_b)\psi = \frac{1}{2}R_{ab}.\psi \tag{6.12}
$$

eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\not{D}^2\psi =& (\nabla_{X_a} + i_{X^b}\nabla_{X_b}e_a)\nabla_{X^a}\psi - \mathcal{R}\psi \\
=& \nabla^2\psi - \frac{1}{4}\mathcal{R}\psi
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

Schröndiger-Lichnerowicz formülü bulunur.

Bir ψ spinör alanı için *Dirac denklemi*,

$$
\not{D}\psi = m\psi. \tag{6.14}
$$

olarak yazılır ve burada m kütleye karşılık gelir. Bu denklem elektronun ve diğer buçuklu spine sahip parçacıkların hareketini tanımlar. Bu yüzden Dirac denkleminin çözümleri Dirac operatörünün özspinörleridir. Dirac operatörünün çekirdeğindeki spinör alanları,

$$
\not{D}\psi = 0 \tag{6.15}
$$

harmonik spinörler olarak adlandırılır ve kütlesiz Dirac denkleminin çözümleridirler.

$i = 2$ durumu da incelenirse

$$
\begin{aligned}
c \circ P_2 \circ \nabla : \Gamma S(M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \xrightarrow{P_2} \Gamma S_2 \xrightarrow{c} \Gamma S(M) \\
\psi \mapsto e^a \otimes \nabla_{X_a}\psi \mapsto (e^a \otimes \nabla_{X_a}\psi - \frac{1}{n}(e_a.\not{D}\psi)) \mapsto \\
\mapsto e^a.\nabla_{X_a}\psi - \frac{1}{n}e^b.e_b.e^a.\nabla_{X_a}\psi = 0.
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

$P_{X_a} := \nabla_{X_a} - \frac{1}{n} e_a . \not{D}$ şeklinde tanımlanan operatör S_2 demetinin yeniden tanımlanması için kullanılabilir. Daha genel olarak bir $X \in \Gamma TM$ için

$$P_X := \nabla_X - \frac{1}{n} \widetilde{X} . \not{D} \tag{6.17}$$

twistör (Penrose) operatörü olarak adlandırılır ve bu operatörün çekirdeğinde olan yani

$$\nabla_X \psi = \frac{1}{n} \tilde{X} . \not{D} \psi \tag{6.18}$$

denklemini sağlayan spinörlere, *twistörler* denir.

Eğer bir ψ spinörü hem kütleli Dirac denkleminin hem de twistör denkleminin bir çözümü ise böyle bir spinör *Killing spinörü* olarak adlandırılır ve

$$\nabla_X \psi = \lambda \tilde{X} . \psi \tag{6.19}$$

denklemini sağlar. Burada λ reel yada saf sanal Killing sayılarıdır.

∇'nın çekirdeğinde bulunan spinörler

$$\nabla_X \psi = 0 \tag{6.20}$$

şeklindeyse, bu spinörler *paralel spinörler* olarak adlandırılır. Paralel spinörler, Killing spinörlerinin $\lambda = 0$ için özel bir durumudur.

6.2 İntegrallenebilirlik Koşulları

Bu bölümde bir(M, g) spin manifoldunun sahip olabileceği özel spinör alanları için integrallenebilirlik koşulları doğrudan verilecektir.

(i) Twistörler

(a) $R_{ab} . \psi = \frac{2}{n} (e_b . \nabla_{X_a} \not{D} \psi - e_a . \nabla_{X_b} \not{D} \psi)$

(b) $P_a . \psi = \frac{2}{n} (e_b . \not{D}^2 \psi) + (n-2) \nabla_{X_b} \not{D} \psi$

(c) $R \psi = -\frac{4(n-1)}{n} \not{D}^2 \psi$

(d) $C_{ab} . \psi = 0$'dır. Burada $C_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{n-2} (e_a . P_b - e_b . P_a) + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \mathcal{R} e_a . e_b$ ile verilen Weyl 2-formudur.

(ii) Killing Spinörler

(a) $R_{ab}.\psi = -4\lambda^2(e_a \wedge e_b).\psi$

(b) $P_n.\psi = -4\lambda^2(n-1)e_b.\psi$

(c) $R\psi = -4\lambda^2 n(n-1)\psi$

(iii) Paralel spinörler

$$P_a.\psi = 0$$

7. HOLONOMİ SINIFLANDIRMASI

7.1 Holonomi Grupları

γ, M üzerinde bir *ilmek(loop)* olsun, yani

$$\gamma : [0,1] \to M \qquad \text{ve} \qquad \gamma(0) = \gamma(1).$$

$X \in T_pM$ bir vektör alalım ve ∇ bağlantısı ile γ boyunca paralel taşıma yapılsın. Daha sonra γ boyunca yapılan yolculuğu yeni bir vektör olan $Y \in T_pM$ ile sonlansın. Böylece γ ilmeği ve ∇ bağlantısı bir lineer dönüşüme yol açar.

$$\begin{aligned} g_\gamma : T_pM &\to T_pM \\ X &\mapsto Y \end{aligned}$$

Bu dönüşümlerin kümesi bir grup oluşturur ve bu gruba M'nin P'deki *holonomi grubu* olarak adlandırılır:

$$Hol(p) = \{g_\gamma | \gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$$

Eğer basit bağlantılı ise $Hol(p)$, p ve γ'dan bağımsızdır ve M'nin holonomi grubu $Hol(M)$ olarak gösterilebilir. Genel olarak $Hol(M)$, $GL(n)$'nin bir altgrubudur.

Eğer ∇ bağlantısı Levi-Civita bağlantısı olarak seçilirse, o zaman $\nabla g = 0$ metrik uyumluluğuna sahiptir ve ∇ boyu korur. Bu yüzden $Hol(M) \subset O(n)$'dir. Eğer M yönlendirilebilir ise $Hol(M) \subset SO(n)$ olmaktadır.

<u>Holonomi ilkesi</u>: M'nin $Hol(M)$ holonomi grubunun $GL(n)$'nin bir altgrubuna indirgenmesi M üzerinde bir *E demetinin (bundle)* bir paralel kesitinin var olmasına eşdeğerdir. Bu paralel kesit $Hol(M)$'nin etkisi altında invaryanttır.

Riemannsal ve Lorentzsel manifoldları olası holonomi gruplarını bulma problemi çözülmüştür. Fakat keyfi imzalı (signature) manifoldlar için bu problem çözülmemiştir.

Çizelge 7.1: Riemannsal durum için Berger tablosu (Besse, 1987)

n	$Hol(M) \subset SO(n)$	Geometri
n	$SO(n)$	jenerik
$2m$	$U(m)$	Kähler
$2m$	$SU(m)$	Calabi-Yau
$4m$	$Sp(m)$	hiperkähler
$4m$	$Sp(m).Sp(1)$	kuaterniyonik Kähler
7	G_2	istisnai
8	$Spin(7)$	istisnai
16	$Spin(9)$	-

Burada $Sp(m).Sp(1) = Sp(m) \times Sp(1)/\mathbb{Z}_2$'dir.

Kähler manifoldları: Bir $n = 2m$ boyutlu M manifoldu için, bir neredeyse kompleks yapı tanımlanabilirse ($J : TM \to TM$ ve $J^2 = -1$ için özelliği ile $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $X, Y \in \Gamma TM$), M *neredeyse kompleks manifold* olarak adlandırılır. Dahası $\nabla J = 0$ ise J'ye bir *kompleks yapı* ve M bir *kompleks manifold* olarak adlandırılır.

Eğer paralel (ve bundan dolayı kapalı) $\nabla \omega = 0$ olan bir simplektik 2-form $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ olacak şekilde varsa, M bir *kähler manifoldudur* ve ω *kähler formu* olarak adlandırılır. ω'nın kovaryant olarak sabit oluşu $U(m)$'ye holonomi kısıtlaması anlamına gelir. p holomorfik ve q anti-holomorfik çarpanları olan M üzerinde (p, q) tipi formlar tanımlanabilir.

Calabi-Yau manifoldları: $SU(m) \subset U(m)$ olduğundan, bu manifoldalar $SU(m)$ holonomili Kähler manifoldlarıdır. Calabi-Yau manifoldları ilk Chern sınıfları yok olan *Ricci-düz Kähler manifoldlarıdır.* J paralel kompleks yapısı ve ω paralel Kähler formunun yanı sıra ayrıca $\Theta \in \Gamma\Lambda^{(p,0)}(M)$ kompleks hacim formu da paraleldir. Bu $SU(m)$'ye holonomi kısıtlanmasını sağlar.

Hiperkähler manifoldları: Bir hiperkähler yapısı, $IJ = -JI = -K$ özelliğine sahip ve $\omega_i(i = I, J, K$ için) üç farklı kapalı simplektik form ile tanımlanır. Hiperkähler manifoldları Ricci-düzdür.

Kuaterniyonik Kähler manifoldları: Kuaterniyonik Kähler manifoldlarının yapısı hiper-Kähler durumuna benzerdir. Fakat kuaterniyonik Kähler manifoldlarının farkı Einstein manifold olmalarıdırlar.

G_2-holonomi manifoldları: $G_2 \subset SO(7)$'dir ve bu grup oktonyon cebrinin otomorfizm grubudur.G_2 holonomisibir paralel 3-formun varlığı ile karakterize edilir. G_2-holonominin manifoldları Ricci-düzdür.

Spin(7)-holonomi manifoldları: $Spin(7) \subset SO(8)$'dir. Bu $Spin(7)$ holonomisi bir Ψ paralel 4-formun varlığı ile karakterize edilir. Bu $Spin(7)$'ya holonomi kısıtlanması anlamına gelir. $Spin(7)$-holonomi manifoldları Ricci-düzdür.

Hem G_2, hem de $Spin(7)$ holonomili manifoldlar paralel spinörlere ifade edilebilirler. Bu Ricci-düzlüğün bir sonucudur.

7.2 Paralel ve Killing Spinörleri İçin Holonomi Sınıflandırması

i) Paralel spinörler:

Daha önceki bölümde görüldüğü gibi Ricci-düzlük paralel spinörlerin varlığı için bir integrallenebilirlik koşuludur. Holonomi ilkesi nedeniyle, paralel spinörlerin varlığı ayrıca holonomi grubunun indirgenmesi anlamına gelir. Bu yüzden Riemannsal durumunda, Ricci-düz özel holonomi manifoldlarında paralel spinörler bulunur. O zaman Berger'ın tablosu ışığında Wang'ın paralel spinörleri kabul eden manifoldlar tablosu (7.2) elde edilir.

Çizelge 7.2: Wang Tablosu (Wang,1989)

n	$Hol(M)$	Geometri	paralel spinörler
$4m+2$	$SU(m+1)$	Calabi-Yau	$(1,1)$
$4m$	$SU(2m)$	Calabi-Yau	$(2,0)$
$4m$	$Sp(m)$	hiperkähler	$(m+1,0)$
7	G_2	istisnai	1
8	$Spin(7)$	istisnai	$(1,0)$

Çift boyutlarda, kompleks spinör demeti iki yanal (chiral) altdemete ayrışır;

$$S(M) = S^{+}(M) \bigoplus S^{-}(M). \tag{7.1}$$

$\psi \in \Gamma S^{+}(M)$ için $iz.\psi = \psi$ ve $\psi \in \Gamma S^{-}(M)$ için $iz.\psi = -\psi$ özdeşlikleri sağlanır ve burada z hacim formdur. $\Gamma S^{\pm}(M)$'nin elemanları *Weyl spinörleri* olarak adlandırılır. Tablodaki (p,q) sırasıyla $\Gamma S^{\pm}(M)$'deki spinörlerin sayısını belirtir.

Özel holonomi manifoldları Sicim ve M-teorisinde önemli bir yere sahiptirler. Sicim teorisinde 4 uzayzaman ve 6 kompakt Riemannsal bouyut söz konusudur:

$$M_{10} = M_4 \times M_6 \tag{7.2}$$

Akı (flux) yokluğunda, M_4 Minkowski uzayzamanı olabilir. Diğer taraftan süpersimetri dönüşümleri M_6 üzerinde paralel spinörlerin var olmasını gerektirir. O zaman M_6, tabloya göre ilk satırda $m = 1$ alınarak bulunur; yani M_6 $SU(3)$ holonomili bir Calabi-Yau 3-katlısı (fold) olmalıdır:

$$M_{10} = \underbrace{M_4}_{\text{Minkowski}} \times \underbrace{M_6}_{\text{Calabi-Yau}} . \tag{7.3}$$

M-teoride ise, 4 uzayzaman ve 7 kompakt Riemannsal boyut ortaya çıkar:

$$M_{11} = M_4 \times M_7. \tag{7.4}$$

Eğer M_4 Minkowski ise M_7 üzerinde paralel spinörlerin varlığı M_7'nin G_2-holonomi manifoldu olmasını gerektirir (tablodaki 4. satırdan);

$$M_{11} = \underbrace{M_4}_{\text{Minkowski}} \times \underbrace{M_7}_{G_2\text{-holonomi}} . \tag{7.5}$$

Eğer $M_{11} = M_3 \times M_8$ ayrışımı yapılırsa, M_3 üç boyutlu Minkowski, M_8 ise $Spin(7)$-holonomi manifoldu olmalıdır (Tablodaki 5. satırdan) ;

$$M_{11} = \underbrace{M_3}_{\text{Minkowski}} \times \underbrace{M_8}_{Spin(7)\text{-holonomi}} . \tag{7.6}$$

ii) Koni oluşturumu (cone construction):

Bir (M, g) manifoldu için, $\tilde{g} = dr^2 + r^2 g$ metriğine sahip $\widetilde{M} = \mathbb{R}^+ \times_{r^2} M$ *çarpık (warped) çarpım* manifoldu M'nin *metrik konisi* olarak adlandırılır. $X \in \Gamma TM$ vektör alanları $\Gamma T\widetilde{M}$'ye kaldırılabilir. $\Gamma T\mathbb{R}^+$ üzerindeki baz vektörü $E = r\frac{\partial}{\partial r}$ (Euler vektörü) olmaktadır. $\widetilde{M}$ üzerinde $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita bağlantısı, M üzerindeki ∇ Levi-Civita bağlantısı ile belirlenir. $X, Y \in \Gamma T\widetilde{M}$ için,

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_E X = \widetilde{\nabla}_X E = X \qquad , \qquad \widetilde{\nabla}_E E = E, \\ \widetilde{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - g(X, Y)E, \end{aligned} \tag{7.7}$$

olmaktadır. Eğrilikler arasındaki ilişkiler ise,

$$\widetilde{\mathbf{R}}(X, Y)Z = \mathbf{R}(X, Y)Z - (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \tag{7.8}$$

$$\widetilde{Ric}(X, Y) = Ric(X, Y) - (n-1)g(X, Y) \tag{7.9}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \frac{1}{r^2}\Big(\mathcal{R} - n(n-1)\Big) \tag{7.10}$$

olarak bulunur. Bu yüzden, eğer M Einstein ise $\widetilde{M}$ Ricci-düzdür. Eğer $\widetilde{M}$ paralel spinörlere sahip ise M, bunlara karşılık gelen Killing spinörlerlerine sahiptir.

iii) Killing Spinörleri:

Killing spinörlerini kabul eden manifoldların sınıflandırma problemini, koni yapısı yoluyla paralel spinörleri kabul eden manifoldların sınıflandırılmasına çevrilmiş olur. Bu yüzden Wang'in tablosundan, Bär'ın tablosuna bir geçiş söz konusu olur.

Sasaki-Einstein manifoldları: Bir M Riemannsal manifoldu üzerinde bir Sasakisal yapı, birim normlu bir K Killing vektör alanı ile verilir ve $X, Y \in \Gamma TM$ için aşağıdaki özellikle sağlanır:

$$\nabla_X \nabla_Y K = -g(X,Y)K + \widetilde{K}(Y)X. \tag{7.11}$$

Eğer Sasaki manifoldu ayrıca Einstein ise Sasaki-Einstein manifoldu olarak adlandırılır.

3-Sasakisel Manifoldlar: Bir M Riemannsal manifoldu üzerinde bir 3-Sasaki yapısı, $\nabla_{K_i} K_j = \epsilon_{ijk} K_k$ özelliğinin sağlandığı Sasakisel yapılardır ($i = 1, 2, 3$).

Neredeyse Kähler manifoldları: Bir M Riemannian manifoldu üzerinde bir neredeyse Kähler yapısı, $J : TM \to TM$ ve $i_X \nabla_X J = 0$ özelliğininsağlayan bir neredeyse kompleks yapıdır. $\nabla J \neq 0$ olmadığı için bu manifoldlar Kähler değillerdir.

Zayıf G_2 manifoldları: Zayıf G_2 manifoldundları $d\phi = \lambda * \phi$ özelliğini sağlayan bir ϕ 3-formu ile karakterize edilirler. G_2 manifoldlarının aksine ϕ kapalı değildir.

Bu manifoldlar da Sicim ve M-teorisi için oldukça önemlidir. Sicim teorisinde $M_{10} = M_4 \times M_6$ ayrışımına sahip iken ve akıların varlığında, M_4 Anti-de Sitter (*AdS*) olabilir ve süpersimetiri dönüşümleri M_6 üzerinde Killing spinörlerinin varlığını gerektirir. O zaman M_6 neredeyse Kähler olmalıdır.

$$M_{10} = \underbrace{M_4}_{AdS_4} \times \underbrace{M_6}_{\text{neredeyse Kähler}} \tag{7.12}$$

$M_{10} = M_5 \times M_5$ ayrışımı için iki farklı sonuç vardır:

$$M_{10} = \underbrace{M_5}_{AdS_5} \times \underbrace{M_5}_{S^5} \qquad \text{veya} \qquad M_{10} = \underbrace{M_5}_{AdS_5} \times \underbrace{M_5}_{\text{Sasaki-Einstein}} . \tag{7.13}$$

M-teoride $M_{11} = M_4 \times M_7$ ayrışımında ve akıların varlığında, M_4 AdS'tir ve eğer iç akı yoksa $M_7 = S^7$'dir. Fakat iç akıların varlığında, Killing spinörlerinin varlığı M_7'nin zayıf G_2 manifoldu olmasını gerektirir.

$$M_{11} = \underbrace{M_4}_{AdS_4} \times \underbrace{M_7}_{S^7} \qquad \text{veya} \qquad M_{11} = \underbrace{M_4}_{AdS_4} \times \underbrace{M_7}_{\text{zayıf } G_2} \tag{7.14}$$

Benzer şekilde $M_{11} = M_5 \times M_6$ ayrışımı için;

$$M_{11} = \underbrace{M_5}_{AdS_5} \times \underbrace{M_6}_{S^6} \qquad \text{veya} \qquad M_{11} = \underbrace{M_5}_{AdS_5} \times \underbrace{M_6}_{\text{neredeyse Kähler}} \quad . \tag{7.15}$$

Çizelge 7.3: Bär'ın Tablosu (Bär,1993)

n	M'nin geometrisi	$\widetilde{M}$ konisi	Killing spinörler
n	yuvarlak küre	düz	$(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$
$4m-1$	3-Sasaki	hiperkähler	$(m+1, 0)$
$4m-1$	Sasaki-Einstein	Calabi-Yau	$(2, 0)$
$4m+1$	Sasaki-Einstein	Calabi-Yau	$(1, 1)$
6	neredeyse Kähler	G_2	$(1, 1)$
7	zayıf G_2	$Spin(7)$	$(1, 0)$

8. SPİNÖR BİLİNEERLER

8.1 Dirac Akımları

Spinör alanlar üzerinde bir spin-invaryant iç çarpım tanımlanabilir. $\psi, \phi \in \Gamma S(M)$ için iç çarpım,

$$(\psi, \phi) = \pm(\phi, \psi)^j \tag{8.1}$$

özelliğine sahiptir. Burada j, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$'de (ilgili boyuttaki Clliford cebrine bağlı olarak) bir involüsyondur. Bu yüzden j, $\mathbb{R}$'de birim, $\mathbb{C}$'de birim veya kompleks eşlenik, $\mathbb{H}$'de kuterniyonik eşlenik veya terslenmedir. İç çarpım boyuta bağlı olarak simetrik veya anti-simetrik (simplektik) olabilir. Herhangi $\alpha \in \Gamma Cl(M)$ ve $c \in \mathbb{K}$ için,

$$(\psi, \alpha.\phi) = (\alpha^{\mathcal{J}}.\psi, \phi) \tag{8.2}$$

$$(\psi c, \phi) = c^j(\psi, \phi) \tag{8.3}$$

olarak yazılır. Burada $\mathcal{J}$ boyuta bağlı olarak $\xi, \xi\eta, \xi^*, \xi\eta^*$ olarak yazılabilir. Bu iç çarpımdan dual spinörlerin uzayı $\Gamma S^*(M)$ tanımlabilir. $\bar{\psi} \in \Gamma S^*(M)$ için,

$$\bar{\psi}(\phi) = (\psi, \phi) \tag{8.4}$$

olarak yazılır. $\Gamma S(M) \otimes \Gamma S^*(M)$ tensör çarpımı düşünüldüğünde bunun $\Gamma S(M)$ üzerinde etkisi $\psi, \kappa \in \Gamma S(M)$ ve $\bar{\phi} \in \Gamma S^*(M)$ için,

$$(\psi \otimes \bar{\phi})\kappa = \psi(\phi, \kappa) \tag{8.5}$$

olarak yazılır. Bu yüzden $\Gamma S(M) \otimes \Gamma S^*(M)$'nin elemanları $\Gamma S(M)$ üzerinde lineer dönüşlerdir. $c : (Cl(M) \otimes S(M)) \to \Gamma S(M)$ olduğundan bu cebir $\Gamma Cl(M)$'ye izomorfiktir. Bu sebeple $\Gamma Cl(M)$'nin elemanları olan diferensiyel formlar olarak $\psi \otimes \bar{\psi} \in \Gamma(S(M) \otimes S^*(M))$ şeklinde yazılabilir.

$\{e^a\}$ herhangi ortogonal ko-çerçevesi için, iç çarpım cinsinden Fierz özdeşliği,

$$\begin{aligned}\psi \otimes \bar{\phi} := \psi\bar{\phi} =& (\phi, \psi) + (\phi, e_a.\psi)e^a + (\phi, e_{ba}.\psi)e^{ab} + \ldots + \\ &+ (\phi, e_{a_p \ldots a_2 a_1}.\psi)e^{a_1 a_2 \ldots a_p} + \ldots + (-1)^{[n/2]}(\phi, z.\psi)z\end{aligned} \tag{8.6}$$

olarak yazılabilir. Burada $e^{a_1 a_2 \dots a_p} = e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge^{a_p}$'dir ve z hacim formdur.

$\psi\bar{\phi}$'nin p-form iz düşümünü $(\psi\bar{\phi})_p$ *spinör bilineerleri* olarak tanımlanır. Eğer $\phi = \psi$ alınırsa ve 1-form $(\psi\bar{\psi})_1$'in metrik duali olan V_ψ vektör alanı ise

$$q : \Gamma S(M) \to \Gamma T^* M$$
$$\psi \mapsto (\psi\bar{\psi})_1 = \widetilde{V_\psi}$$

olarak yazılır ve bu gönderime *kareleştirme gönderimi (squaring mapping)*denir. $\psi\bar{\psi}$'nin p-form bileşenleri,

$$(\psi\bar{\psi})_p = (\psi, e_{a_p \dots a_2 a_1}.\psi) e^{a_1 a_2 \dots a_p} \tag{8.7}$$

olup, bunlara p-form *Dirac akımları* denir.

8.2 Konformal Killing-Yano (KKY) ve Kiling-Yano (KY) Formlar

Bu bölümde özel spinörler için p-form Dirac akımlarının özellikleri incelenecektir.

i) Twistor spinörleri :

∇ Levi-Civita bağlantısı spinör iç çaprpımı ve dualite işlemi ile uyumludur. Yani bu

$$\nabla_X(\psi, \phi) = (\nabla_X \psi, \phi) + (\psi, \nabla_X \phi) \tag{8.8}$$

$$\nabla_X \overline{\psi} = \overline{\nabla_X \psi} \tag{8.9}$$

özdeşliklerini sağlaması demektir. Bir ψ twistor spinörü için $(\psi\overline{\psi})_p$ p-form Dirac akımının kovaryant türevi,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p &= ((\nabla_{X_a}\psi)\overline{\psi})_p + (\psi(\overline{\nabla_{X_a}\psi}))_p \\ &= \frac{1}{n}\Big((e_a.\not{D}\psi)\overline{\psi}\Big)_p + \frac{1}{n}\Big(\psi(\overline{e_a.\not{D}\psi})\Big)_p \end{aligned} \tag{8.10}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $\nabla_{X_a}\psi = \frac{1}{n}\widetilde{X}.\not{D}\psi$ twistor denklemi kullanılmıştır. $\alpha \in \Gamma Cl(M)$, $\psi \in S(M)$ ve $\phi \in \Gamma S^*(M)$ için

$$\alpha(\psi \otimes \overline{\phi}) = \alpha.\psi \otimes \overline{\phi} \tag{8.11}$$

$$(\psi \otimes \overline{\phi}).\alpha = \psi \otimes \overline{\alpha^{\mathcal{J}}.\phi} \tag{8.12}$$

özelliklerini kullanarak

$$\psi(\overline{e_a.\not{D}\psi}) = (\psi\overline{\not{D}\psi}).e_a^{\mathcal{J}} \tag{8.13}$$

denklemi yazılabilir. $\not{D} = e^b.\nabla_{X_b}$ spinörler üzerinde Dirac operatörünün tanımından ve $e^{b\mathcal{J}}.e_a^{\mathcal{J}} = e^b.e_a$ özelliğinden, $\mathcal{J} = \xi$ veya $\xi\eta$ için

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = \frac{1}{n}\Big(e_a.e^b.(\nabla_{X_b}\psi)\overline{\psi} + \psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}).e^b.e_a\Big)_p \tag{8.14}$$

olarak yeniden yazılabilir. ∇ iç çarpım ile uyumlu olduğundan dolayı $(\nabla_{X_b}\psi)\overline{\psi} = \nabla_{X_b}(\psi\overline{\psi}) - \psi(\overline{\nabla_{X_a}\psi})$ şeklinde yazılabilir. Bu yüzden bir önceki denklem

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = \frac{1}{n}\Big(e_a.e^b.\nabla_{X_b}(\psi\overline{\psi}) - e_a.e^b.\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}) + \psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}).e^b.e_a\Big)_p \tag{8.15}$$

olarak yazılabilir. Şimdi yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin her birinin analizi yapılacaktır.

İlk terimin için, $\not{d} = e^a.\nabla_{X_a}$ Hodge-de Rham operatörünü tanımını kullanıldığında,

$$e_a.e^b.\nabla_{X_b}(\psi\overline{\psi}) = e_a.\not{d}(\psi\overline{\psi}) \tag{8.16}$$

olarak yazılabilir.

İkinci ve üçüncü terimler için, Clifford çarpımının açılımı, wedge çarpım ve iç türev cinsinden $e_a.\alpha = e_a \wedge \alpha + i_{X_a}\alpha$ ve $\alpha.e_a = e_a \wedge \eta\alpha - i_{X_a}\eta\alpha$ olarak yazılabilir.

Bütün terimlerin toplamından ve diferensiyel formların dereceleri dikkate alındığı zaman,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p =& \frac{1}{n}\Big[(e_a.\not{d}(\psi\overline{\psi}))_p - 2e_a \wedge e^b \wedge (\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}))_{p-2} \\ & - 2i_{X_a}i_{X^b}(\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}))_{p+2}\Big],\end{aligned} \tag{8.17}$$

ve $(e_a.\not{d}(\psi\overline{\psi}))_p = e_a \wedge (\not{d}(\psi\overline{\psi}))_{p-1} + i_{X_a}(\not{d}(\psi\overline{\psi}))_{p+1}$ özdeşliği kullanılırsa p-form Dirac akımının kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p =& \frac{1}{n}\Big[e^a \wedge (\not{d}(\psi\overline{\psi}) - 2e^b \wedge (\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi})))_{p-1} + i_{X_a}(\not{d}(\psi\overline{\psi}) \\ & - 2i_{X^b}(\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}))_{p+1})\Big]\end{aligned} \tag{8.18}$$

olarak bulunur. Denklem (8.18) soldan e^a ile wedge çarpımılır ve bir p-form α için $e^a \wedge \nabla_{X_a^\alpha} = d_\alpha$ ve $e^a \wedge i_{X_a}\alpha = p\alpha$ denklemleri kullanılırsa,

$$d(\psi\overline{\psi})_p = \frac{p+1}{n}\Big(\not{d}(\psi\overline{\psi}) - 2i_{X^b}(\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}))\Big)_{p+1} \tag{8.19}$$

elde edilir. Ayrıca denklem (8.18) i_{X^a} iç türevi alınırsa ve $-i_{X^a}\nabla_{X_a} = \delta$ ifadesi kullanılırsa,

$$\delta(\psi\overline{\psi})_p = -\frac{n-p+1}{n}\Big(\not{d}(\psi\overline{\psi}) - 2e^b \wedge (\psi(\overline{\nabla_{X_b}\psi}))\Big)_{p-1} \tag{8.20}$$

olarak yazılır. Bu yüzden son üç terimin kıyaslanması sonucunda,

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = \frac{1}{p+1}i_{X_a}d(\psi\overline{\psi})_p - \frac{1}{n-p+1}e_a \wedge (\psi\overline{\psi})_p \tag{8.21}$$

bulunur. Bu denklemin özel bir anlamı vardır ve herhangi $X \in TM$ için bir p-form ω,

$$\nabla_X\omega = \frac{1}{p+1}i_X d\omega - \frac{1}{n-p+1}\widetilde{X} \wedge \delta\omega \tag{8.22}$$

denklemini sağlıyorsa, ω *konformal Killing-Yano (KKY)* formu olarak adlandırılır.

Bu yüzden twistor spinörlerinin p-form Dirac akımları KKY formdurlar. KKY formları konformal Killing vektör alanlarının daha yüksek dereceli formlara anti-simetrik genelleştirilmesidirler. $p = 1$ için ω bir konformal Killing vektörünün metrik dualidir.

ii) Killing spinörleri:

Bir ψ Killing spinörü için $(\psi\overline{\psi})_p$'nin kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p =& ((\nabla_{X_a}\psi)\overline{\psi})_p + (\psi(\overline{\nabla_{X_a}\psi}))_p \\ =& (\lambda e_a.\psi\overline{\psi})_p + (\psi(\overline{\lambda.e_a.\psi}))_p\end{aligned} \tag{8.23}$$

olarak yazılır. Burada Killing spinörünün tanımı $\nabla_{X_a}\psi = \lambda e_a.\psi$ kullanılmıştır. İç çarpımın özelliğinden $\psi(\overline{\lambda.e_a.\psi}) = \lambda^j(\psi\overline{\psi})e_a^{\mathcal{J}}$ denklemine sahip olunur. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p =& (\lambda e_a.\psi\overline{\psi})_p + (\lambda^j(\psi\overline{\psi})e_a^{\mathcal{J}})_p \\ =& \lambda e_a \wedge (\psi\overline{\psi})_{p-1} + \lambda i_{X_a}(\psi\overline{\psi})_{p+1} + \lambda^j e_a^{\mathcal{J}} \wedge (\psi\overline{\psi})^\eta_{p-1} - \lambda^j i_{\widetilde{e_a^{\mathcal{J}}}}(\psi\overline{\psi})^\eta_{p+1}\end{aligned} \tag{8.24}$$

olarak yazılır. Burada wedge çarpımı ve iç türev cinsinden Clifford çarpımının açılımı kullanılmıştır. Daha sonrasında soldan e^a ile wedge çarpım uygulanırsa,

$$d(\psi\overline{\psi})_p = \lambda(p+1)(\psi\overline{\psi})_{p+1} - \lambda^j \text{sgn}(e_a^{\mathcal{J}})(p+1)(\psi\overline{\psi})_{p+1}^{\eta} \tag{8.25}$$

olarak yazılır. i_{X_a} ile iç türevi alınırsa,

$$\delta(\psi\overline{\psi})_p = -\lambda(n-p+1)(\psi\overline{\psi})_{p-1} - \lambda^j \text{sgn}(e_a^{\mathcal{J}})(n-p+1)(\psi\overline{\psi})_{p-1}^{\eta} \tag{8.26}$$

bulunur. Burada, seçim yapmak için dört adet nicelik bulunur. Bunlar:

(i) $\lambda =$ Reel veya saf sanal

(ii) $j = Id$ veya $*$

(iii) $\mathcal{J} = \xi,\ \xi^*,\ \xi\eta$ veya $\xi\eta^*$

(iv) p tek veya çift

Bu yüzden seçim yapmak için 16 adet olasılık vardır ve bu olasılıklar tablo (8.1)'de gösterilmektedir. Her bir olasılık için iki farklı durum vardır. Bu farklı iki durum p sütunun'dan dolayı oluşmaktadır. p'nin ilk sütununa durum 1, p'nin ikinci sütununa durum 2 diyelim.

<u>Durum 1</u>:

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = 2\lambda e^a \wedge (\psi\overline{\psi})_{p-1} \tag{8.27}$$

$$d(\psi\overline{\psi})_p = 0 \tag{8.28}$$

$$\delta(\psi\overline{\psi})_p = -2\lambda(n-p+1)(\psi\overline{\psi})_{p-1} \tag{8.29}$$

<u>Durum 2</u>:

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = 2\lambda i_{X_a}(\psi\overline{\psi})_{p+1} \tag{8.30}$$

$$d(\psi\overline{\psi})_p = 2\lambda(p+1)(\psi\overline{\psi})_{p+1} \tag{8.31}$$

$$\delta(\psi\overline{\psi})_p = 0 \tag{8.32}$$

Durum 1'deki denklem (8.27) ve (8.29) karşılaştırıldığı zaman,

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = -\frac{1}{n-p+1} e_a \wedge \delta(\psi\overline{\psi})_p \tag{8.33}$$

Çizelge 8.1: parametre tablosu

λ	j	$\mathcal{J}$	p	
Re	Id	ξ	tek	çift
Re	Id	ξ^*	tek	çift
Re	*	ξ	tek	çift
Re	*	ξ^*	tek	çift
Im	Id	ξ	tek	çift
Im	Id	ξ^*	tek	çift
Im	*	ξ	çift	tek
Im	*	ξ^*	çift	tek
Re	Id	$\xi\eta$	çift	tek
Re	Id	$\xi\eta^*$	çift	tek
Re	*	$\xi\eta$	çift	tek
Re	*	$\xi\eta^*$	çift	tek
Im	Id	$\xi\eta$	çift	tek
Im	Id	$\xi\eta^*$	çift	tek
Im	*	$\xi\eta$	tek	çift
Im	*	$\xi\eta^*$	tek	çift

olarak yazılabilir ve denklem (8.21)'den KKKY denklemini verir. Durum 2 için de deklem (8.30) ve (8.32) karşılaştırıldığı zaman,

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = \frac{1}{p+1} i_{X_a} d(\psi\overline{\psi})_p \tag{8.34}$$

olarak yazılabilir ve bu ise KY denklemini verir.

KKY denklemini bu eşitliklerle karşılaştırıldığı zaman, durum 1 ve durum 2 KKY denkleminin iki kısmına karşılık gelmektedir.

$$\nabla_X \omega = \underbrace{\frac{1}{p+1} i_X d\omega}_{\text{KY kısmı}} \underbrace{-\frac{1}{n-p+1} \widetilde{X} \wedge \delta\omega}_{\text{KKKY kısmı}} \tag{8.35}$$

Durum 1 KKKY kısmına, durum 2 de KY kısmına karşılık gelir. *Killing-Yano (KY)* formlar ko-kapalı (co-closed)($\delta\omega = 0$) formlardır ve

$$\nabla_X \omega = \frac{1}{p+1} i_X d\omega \tag{8.36}$$

denklemini sağlar. Bunlar, Killing vektör alanlarının daha yüksek dereceli formlara anti-simetrik genellemeleridir. $p = 1$ için, ω bir Killing vektörünün metrik dualidir.

Kapalı (Closed) KKY (KKKY) formlar KKY formlardır $(d\omega = 0)$ ve

$$\nabla_X \omega = -\frac{1}{n-p+1} \widetilde{X} \wedge \delta\omega \tag{8.37}$$

denklemini sağlar. KKY denklemi Hodge dualite invaryantlığına sahiptir. Yani, ω bir p-form KKY ise $*\omega$ da $(n-p)$-form KKY'dir. KKY denklemine * Hodge yıldız operatörü uygulanırsa bu durum açıkca görülecektir.

$$*\nabla_X \omega = \frac{1}{p+1} * i_X d\omega - \frac{1}{n-p+1} * (\widetilde{X} \wedge \delta\omega) \tag{8.38}$$

∇ metrik uyumlu olduğundan dolayı, $*\nabla_X = \nabla_X *$ olarak yazılabilir. $\delta = *^{-1} d * \eta$ tanımından ve herhangi p-form α için $*(\alpha \wedge \widetilde{X}) = i_X * \alpha$ özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} *i_X d\omega &= *i_X * *^{-1} d * *^{-1} \omega \\ &= * * (\delta\eta *^{-1} \omega \wedge \widetilde{X}) \\ &= * * (-\widetilde{X} \wedge \delta *^{-1} \omega) \\ &= * *^{-1} (-\widetilde{X} \wedge \delta * \omega) \\ &= -\widetilde{X} \wedge \delta * \omega \end{aligned} \tag{8.39}$$

olarak yazılır. Burada $*^{-1}$'nin $* * \alpha = (-1)^{p(n-p)} \frac{detg}{|detg|} \alpha$ özdeşliğinden $*$ ile orantılı olduğu kullanılmıştır. Ayrıca

$$\begin{aligned} *(\widetilde{X} \wedge \delta\omega) &= *(-\delta\eta\omega \wedge \widetilde{X}) \\ &= -i_X * \delta\eta\omega \\ &= -i_X * *^{-1} d * \eta\eta\omega \\ &= -i_X d * \omega \end{aligned} \tag{8.40}$$

olarak da yazılabilir. Böylece

$$\nabla_X * \omega = \underbrace{\frac{1}{n-p+1} i_X d * \omega}_{\text{*KY kısmı}} \underbrace{- \frac{1}{p+1} \widetilde{X} \wedge \delta * \omega}_{\text{*KKKY kısmı}} \tag{8.41}$$

denklemi elde eldilmiş olunur. Fakat yukarıdaki analizden de görülebileceği gibi, KKY denkleminin iki kısmı * altında birbirine dönüşür.

KY⟶*KKKY ve KKKY⟶*KY

Bunun anlamı KKKY formları KY formlarının Hodge dualleridir. O zaman ilgili boyutta iç çarpıma bağlı olarak, Killing spinörlerinin p-form Dirac akımının KY formlara (durum 2'de) veya Killing spinörlerin p-form Dirac akımının Hodge dualleri KY formlara (durum 1'de) karşılık gelir.

Durum 1:

$$\nabla_{X_a} * (\psi\overline{\psi})_p = \frac{1}{n-p+1} i_{X_a} d * (\psi\overline{\psi})_p \tag{8.42}$$

Durum 2:

$$\nabla_{X_a} (\psi\overline{\psi})_p = \frac{1}{p+1} i_{X_a} d (\psi\overline{\psi})_p \tag{8.43}$$

Killing spinörlerin p-form Dirac akımı ile elde edilen denklemler (genelleştirilmiş) Maxwell denklemleri

$$dF = 0 \qquad , \qquad d * F = j$$

ile benzer bir yapıya sahiptir.

Durum 1'de

$$d(\psi\overline{\psi})_p = 0 \tag{8.44}$$

$$d * (\psi\overline{\psi})_p = -2(-1)^p \lambda (n-p+1) * (\psi\overline{\psi})_{p-1} \tag{8.45}$$

Bu nedenle $(\psi\overline{\psi})_p$ p-form Dirac akımları, p-form Maxwell alanın F alan gücü gibi davranır ve j kaynak terimi, $*(\psi\overline{\psi})_{p-1}$ bir düşük dereceli Dirac akımının Hodge duallerinden oluşturulur.

Durum 2'de

$$d(\psi\overline{\psi})_p = 2\lambda (p+1) (\psi\overline{\psi})_{p+1} \tag{8.46}$$

$$d * (\psi\overline{\psi})_p = 0 \tag{8.47}$$

Böylece $*(\psi\overline{\psi})_p$, F $(n-p)$-form Maxwell alan gücü gibi davranır ve j kaynak terimi bir yüksek dereceli $(\psi\overline{\psi})_{p+1}$ bir üst dereceden Dirac akımıdır.

iii) Paralel spinörler:

Eğer ψ bir paralel spinör ise yani $\nabla_X \psi = 0$ ise p-form Dirac akımı paralel formlardır,

$$\nabla_X (\psi\overline{\psi})_p = 0. \tag{8.48}$$

Bunlar $\Delta = -(ds + \delta d)$'nın çekirdeğinde olan harmonik formlardır,

$$\Delta(\psi\overline{\psi})_p = 0. \tag{8.49}$$

9. GENİŞLETİLMİŞ SÜPERCEBİRLER

Bir $\mathfrak{g}$ süpercebiri $\mathbb{Z}$-derecelendirilmiş cebirdir ve bunun anlamı değişmeli bir halka ya da cisim üzerinde tek ve çift bileşenlerine ayrışabilen ve derecelendirmeye müsait bir çarpma operatörü olan cebirdir. Geometrik Killing spinörlerinin kareleştirme gönderimi (squaring mapping) Killing vektör alanlarına karşılık gelir ve bunlar birlikte manifold üzerinde simetri süpercebirleri adı verilen bir süpercebir yapısı oluşturur. Süpercebirlerin çift kısmı, Killing vektör alanlarının simetri cebiridir ve tek kısmı ise geometrik Killing spinörlere karşılık gelir. Ayrıca simetri süpercebirleri Lie süpercebirlerine karşılık gelir.

$\mathfrak{g}$ iki bileşeninin direk toplamı olarak yazılmaktadır:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1. \tag{9.1}$$

$\mathfrak{g}_0$ çift kısmı $\mathfrak{g}$'nin bir altcebiridir ve $\mathfrak{g}_1$ tek kısmı ise $\mathfrak{g}_0$'ın bir modülüdür. Çarpım kuralı, bileneer operatör

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \quad , \quad i, j = 0, 1 \tag{9.2}$$

tarafından verilir ve

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0 \tag{9.3}$$

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1 \tag{9.4}$$

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0 \tag{9.5}$$

olmaktadır.

Eğer $[\ ,\ ]$ $\mathfrak{g}_0$ üzerinde antisimetrikse yani $a, b \in \mathfrak{g}_0$ için $[a, b] = -[b, a]$ özdeşliğini sağlıyorsa ve $a, b, c \in \mathfrak{g}_0$ için

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [b, a]] = 0 \tag{9.6}$$

dereceli-Jacobi özdeşliğini sağlıyorsa, $\mathfrak{g}_0$ *Lie cebiri* olarak adlandırılır.

Eğer [,] $\mathfrak{g}_1$ üzerinde simetrikse yani $a, b \in \mathfrak{g}_1$ için $[a, b] = [b, a]$ özdeşliğini sağlıyor ve $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ üzerinde $a, b, c \in \mathfrak{g}$ için

$$[a, [b, c]] - [[a, b], c]] - (-1)^{|a||b|}[b, [a, c]] = 0 \tag{9.7}$$

Jacobi özdeşliğini sağlıyorsa, $\mathfrak{g}$ *Lie süpercebiri* olarak adlandırılır. Denklem (9.7)'de $|a|$, a'nın $\mathfrak{g}_0$ veya $\mathfrak{g}_1$'e ait olmasına bağlı olarak $|a|$'nın 0 veya 1'e karşılık gelen derecesini belirtir. Bir süpercebirin boyutu $(\alpha|\beta)$ olarak gösterilir ve burada α $\mathfrak{g}_0$'ın boyutu, β ise $\mathfrak{g}_1$'in boyutudur.

Bu bölümün devamında KY ve KKKY formlarından oluşturulmuş süpercebir yapıları üzerine yoğunlaşılacaktır.

i) Killing-Yano süpercebileri;

Bir M manifoldu üzerinde Killing vektör alanları, vektör alanlarının Lie parantezine göre Lie cebiri yapısına sahiptir.

$$[K_i, K_j] = c_{ijk} K_k \tag{9.8}$$

Buna *izometri cebri* denir ve burada c_{ijk} yapı sabitleridir. KY formları için, Schouten-Nijenhuis parantezi tanımlanmaktadır ve bu $[\ ,\ ]_{SN}$ ile gösterilir. α bir p-form ve β bir q-form ise bu parantez,

$$[\alpha, \beta]_{SN} = i_{X^a}\alpha \wedge \nabla_{X_a}\beta + (-1)^{pq} i_{X^a}\beta \wedge \nabla_{X_a}\alpha \tag{9.9}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bunun sonucunda bir $(p+q-1)$-form oluşur. $p = q = 1$ için, $[\ ,\ ]_{SN}$ vektör alanlarının Lie parantezine indirgenmektedir. SN parantezi aşağıda gösterilen Lie parantezi özelliklerini sağlar. Bu özellikler;

$$[\alpha, \beta]_{SN} = (-1)^{pq}[\beta, \alpha]_{SN}$$
$$(-1)^{p(r+1)}[\alpha, [\beta, \gamma]_{SN}]_{SN} + (-1)^{q(p+1)}[\beta, [\gamma, \alpha]_{SN}]_{SN}$$
$$(-1)^{r(q+1)}[\gamma, [\alpha, \beta]_{SN}]_{SN} = 0$$

ve burada γ bir r-formdur.

Killing vektör alanları Lie cebiri yapısını sağladığından dolayı, KY formlarının $[\ ,\ ]_{SN}$ altında Lie cebirini oluşturup oluşturmadığı incelenebilir. Bir ω_1 KY p-form ve ω_2 KY q-form için, hangi koşullarda aşağıdaki

$$\nabla_{X_a}[\omega_1,\omega_2]_{SN} = \frac{1}{p+q} i_{X_a} d[\omega_1,\omega_2]_{SN} \tag{9.10}$$

eştiliğine sahip olduğu araştırılmaktadır. Denklem (9.10)'nin sol tarafı için, denklem (9.9)'un tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}[\omega_1,\omega_2]_{SN} =& \nabla_{X_a}(i_{X^b}\omega_1 \wedge \nabla_{X_b}\omega_2 + (-1)^{pq} i_{X^b}\omega_2 \wedge \nabla_{X_b}\omega_1) & (9.11)\\ =& \nabla_{X_a} i_{X^b}\omega_1 \wedge \nabla_{X_b}\omega_2 + i_{X^b}\omega_1 \wedge \nabla_{X_a}\nabla_{X_b}\omega_2 \\ &+ (-1)^{pq}\nabla_{X_a} i_{X^b}\omega_2 \wedge \nabla_{X_b}\omega_1 + (-1)^{pq} i_{X^b{\omega_2}} \wedge \nabla_{X_a}\nabla_{X_b}\omega_1 & (9.12)\end{aligned}$$

elde edilmektedir. Burada normal koordinatlar için $[i_{X^b}, \nabla_{X_a}] = 0$ ve KY denklemlerinin (8.36) kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}[\omega_1,\omega_2]_{SN} =& \frac{1}{(p+1)(q+1)}(i_{X^b} i_{X_a} d\omega_1 \wedge i_{X_b} d\omega_2 \\ &+ (-1)^{pq} i_{X^b} i_{X_a} d\omega_2 \wedge i_{X_b} d\omega_1) \\ &+ \frac{1}{q+1} i_{X^b}\omega_1 \wedge \nabla_{X_a} i_{X_b} d\omega_2 \\ &+ \frac{(-1)^{pq}}{p+1} i_{X^b}\omega_2 \wedge \nabla_{X_a} i_{X_b} d\omega_1 \end{aligned} \tag{9.13}$$

elde edilmektedir. $\nabla_{X_a} i_{X_b} = i_{X_b}\nabla_{X_a}$ özdeşliği ve KY formların integrallenebilirlik koşulu kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}[\omega_1,\omega_2]_{SN} =& \frac{1}{(p+1)(q+1)}(i_{X^b} i_{X_a} d\omega_1 \wedge i_{X_b} d\omega_2 \\ &+ (-1)^{pq} i_{X^b} i_{X_a} d\omega_2 \wedge i_{X_b} d\omega_1) \\ &+ \frac{1}{q} i_{X^b}\omega_1 \wedge i_{X_b}(R_{ca} \wedge i_{X^c}\omega_2) \\ &+ \frac{(-1)^{pq}}{p} i_{X^b}\omega_2 \wedge i_{X_b}(R_{ca} \wedge i_{X^c}\omega_1) \end{aligned} \tag{9.14}$$

elde edilir. Denklem (9.10)'in sağ tarafı için,

$$\frac{1}{p+q} i_{X_a} d[\omega_1,\omega_2]_{SN} = \frac{1}{p+q} i_{X_a} d(i_{X_b}\omega_1 \wedge \nabla_{X_b}\omega_2 + (-1)^{pq} i_{X^b}\omega_2 \wedge \nabla_{X_b}\omega_1) \tag{9.15}$$

bulunur ve biraz cebirle

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p+q} i_{X_a} d[\omega_1, \omega_2]_{SN} =& \frac{1}{(p+1)(q+1)} (i_{X^b} i_{X_a} d\omega_1 \wedge i_{X_b} d\omega_2 \\
&+ (-1)^{pq} i_{X^b} i_{X_a} d\omega_2 \wedge i_{X_b} d\omega_1) \\
&- \frac{(-1)^p}{pq} i_{X^a} (i_{X^b} \omega_1 R_{cb} \wedge i_{X^c} \omega_2)
\end{aligned} \tag{9.16}
$$

elde edilmektedir.

Genel olarak, denklem (9.14) ve (9.16)'in karşılaştırmasından görüldüğü gibi denklem (9.10) elde edilmektedir. Fakat denklem (9.14) ve (9.16)'de $R_{ab} = ce_a \wedge e_b$ sabit eğrilik koşulu kullanılırsa denklem (9.10) elde edilmektedir. Bu sebeple KY formlar, sabit eğrilikli manifoldlarda Lie süpercebirleri oluştururlar ve bu

$$
\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1 \tag{9.17}
$$

olarak gösterilmektedir. Buradaki bileşenlerden $\mathfrak{k}_0$ çift kısmı tek dereceli KY formlara ve $\mathfrak{k}_1$ tek kısmı çift dereceli KY formlara karşılık gelir.

$$
[\ ,\ ]_{SN} : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0 \rightarrow \mathfrak{k}_0 \quad \text{(p ve q tek ise p+q-1 tek)} \tag{9.18}
$$

$$
[\ ,\ ]_{SN} : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_1 \quad \text{(p tek, q çift ise p+q-1 çift)} \tag{9.19}
$$

$$
[\ ,\ ]_{SN} : \mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_0 \quad \text{(p ve q çift ise p+q-1 tek)} \tag{9.20}
$$

ve $[\ ,\ ]_{SN}$ derecelendirilmiş Jacobi özdeşliğini sağlamaktadır.

KY formların integrallenebilirlik koşulundan, KY formların ikinci ve yüksek dereceden türevleri kendi başlarına yazılabilmektedir. Bu sebepten dolayı n-boyutlu KY p-formların azami sayıları, ω ve $d\omega$'nın bağımsız serbestlik derecelerinin sayımından

$$
K_p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \tag{9.21}
$$

olarak bulunabilmektedir ve bu sayılara sabit eğrilikli manifoldlarda ulaşılabilinmektedir. Dolayısıyla KY süpercebirlerin boyutu $(K_{\text{tek}}|K_{\text{çift}})$'dir ve burada

$$K_{\text{tek}} = \sum_{k=1}^{[n/2]} \begin{pmatrix} n+1 \\ \\ 2k \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad K_{\text{çift}} = \sum_{k=1}^{[n-1/2]} \begin{pmatrix} n+1 \\ \\ 2k+1 \end{pmatrix}. \tag{9.22}$$

ii) Konformal Killing-Yano süpercebileri;

Konformal Killing vektör alanları da Lie parantezine göre Lie cebiri yapısına sahiptir.

$$[C_i, C_j] = f_{ijk} C_k \tag{9.23}$$

bu cebir, *konformal cebir* olarak adlandırılır. KKY formları için, $[\,,\,]_{KKY}$ KKY parantezi tanımlanmaktadır. Bir ω_1 KKY p-form ve ω_2 KKY q-form için, KKY parantezi

$$\begin{aligned}[\omega_2, \omega_1]_{KKY} =& \frac{1}{q+1} i_{X^a}\omega_1 \wedge i_{X_a} d\omega_2 + \frac{(-1)^p}{p+1} i_{X^a} d\omega_1 \wedge i_{X_a}\omega_2 \\ &+ \frac{(-1)^p}{n-q+1}\omega_1 \wedge \delta\omega_2 + \frac{1}{n-p+1}\delta\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned} \tag{9.24}$$

KKY parantezi SN parantezinden farklıdır fakat hafif modifikasyonlar içermektedir. $[\,,\,]_{KKY}$ de derecelendirilmiş Lie parantezinin özelliklerini sağlamaktadır. Bir ω_1 KKY p-form ve ω_2 KKY q-form için $[\omega_1, \omega_2]_{KKY}$ bir $(p+q-1)$-formdur. Bu yüzden KKY formlar, kümesi bir süpercebir oluşturur ve bu

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0 \oplus \mathfrak{c}_1 \tag{9.25}$$

olarak gösterilir. Buradaki bileşenlerden $\mathfrak{c}_0$ çift kısmı tek dereceli KKY formlara ve $\mathfrak{c}_1$ tek kısmı çift dereceli KY formlara karşılık gelir.

$$[\,,\,]_{KKY} : \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_0 \rightarrow \mathfrak{c}_0 \tag{9.26}$$

$$[\,,\,]_{KKY} : \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1 \rightarrow \mathfrak{c}_1 \tag{9.27}$$

$$[\,,\,]_{KKY} : \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_1 \rightarrow \mathfrak{c}_0 \tag{9.28}$$

KKY formların integrallenebilirlik koşulundan, ω, $d\omega$, $\delta\omega$ ve $d\delta\omega$'nın bağımsız serbestlik derecesinin sayımından; n-boyutta KKY p-formların azami sayıları bulunur:

$$
\begin{aligned}
C_p = 2\begin{pmatrix} n \\ \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ \\ p+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n+2 \\ \\ p+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(n+2)!}{(p+1)!(n-p+1)!}. \qquad (9.29)
\end{aligned}
$$

Bu yüzden KKY süpercebirinin boyutu $(C_{\text{tek}}|C_{\text{çift}})$

$$
C_{\text{tek}} = \sum_{k=1}^{[n/2]} \begin{pmatrix} n+2 \\ \\ 2k \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C_{\text{çift}} = \sum_{k=1}^{[n-1/2]} \begin{pmatrix} n+2 \\ \\ 2k+1 \end{pmatrix}. \qquad (9.30)
$$

olmaktadır. Tüm KY formları aynı anda KKY formlarıdır ve KY p-formlarına karşılık gelmeyen KKY p-formlarının sayısı,

$$
\begin{aligned}
C_p - K_p = \begin{pmatrix} n+2 \\ \\ p+1 \end{pmatrix} &- \begin{pmatrix} n+1 \\ \\ p+1 \end{pmatrix} \\
= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} & \qquad (9.31)
\end{aligned}
$$

tarafından verimektedir.

Sırada Killing ve twistör spinörleri kullanarak genişletilmiş süpercebilerin incelemesi yapılmaktadır:

i) Killing süpercebileri;

Killing vektörler ve Killing spinörler kullanılarak bir süpercebir yapısı,

$$
\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1 \qquad (9.32)
$$

olarak tanımlanmaktadır. Bileşenlerden $\mathfrak{k}_0$ çift kısmı Killing vektör alanlarının Lie cebrine karşılık gelir ve $\mathfrak{k}_1$ tek kısmı ise Killing spinörlerinin kümesine karşılık gelir. Süpercebirlerin parantezi Killing vektör alanlarının parantezidir

$$
[\ ,\ ] : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0 \to \mathfrak{k}_0 \qquad (9.33)
$$

$$
(K_1, K_2) \to [K_1, K_2]. \qquad (9.34)
$$

Çift-tek parantezi spinör alanları üzerinde Lie türevidir,

$$\pounds : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_1 \tag{9.35}$$

$$(K, \psi) \mapsto \pounds_K \psi \tag{9.36}$$

ve tek-çift parantezi Killing spinörünün Dirac akımıdır

$$()_1 : \mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_0 \tag{9.37}$$

$$(\psi, \phi) \mapsto (\psi\overline{\phi})_1 = \widetilde{V_{\psi,\phi}}. \tag{9.38}$$

Jacobi özdeşlikleri,

$$[K_1, [K_2, K_3]] + [K_2, [K_3, K_1]] + [K_3, [K_1, K_2]] = 0 \tag{9.39}$$

$$[\pounds_{K_1}, \pounds_{K_2}]\psi = \pounds_{[K_1,K_2]}\psi \tag{9.40}$$

$$\mathcal{L}_K(\psi\overline{\phi}) = (\pounds_K\psi)\overline{\phi} + (\overline{\pounds_K\phi}) \tag{9.41}$$

$$\pounds_{V_\psi}\psi = 0 \tag{9.42}$$

eşitliklerine karşılık gelir. Bu özdeşliklerin ilk üçü Lie türevinin özelliklerinden otomatik olarak sağlanmaktadır fakat sonuncusu otomatik olarak sağlanamamaktadır. Son özdeşliğin sağlanmadığı manifoldlar için, Killing süpercebirleri Lie süpercebirleridir. Bu süpercebirlerin yapısı, sabit eğrilik manifoldlarında daha yüksek dereceli KY formlarını içerecek şekilde genişletilebilir,

$$\overline{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1 \tag{9.43}$$

Bileşenlerden $\mathfrak{k}_0$ çift kısmı, tek KY formların Lie cebrine karşılık gelir ve $\mathfrak{k}_1$ tek kısmı, Killing spinörlerinin kümesine karşılık gelir. Genişletilmiş süpercebirlerin parantezi aşağıdakiler olarak tanımlanmaktadır.

Çift-çift parantezi KY formların SN parantezidir,

$$[\,,\,]_{SN} : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0 \to \mathfrak{k}_0 \tag{9.44}$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto [\omega_1, \omega_2]_{SN}. \tag{9.45}$$

Çift-tek parantezi Killing spinörlerin simetri operatörleridir,

$$L : \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_1 \tag{9.46}$$

$$(\omega, \psi) \mapsto L_\omega\psi = (i_{X^a}\omega).\nabla_{X_a}\psi + \frac{p}{2(p+1)}d\omega.\psi. \tag{9.47}$$

Tek-tek parantezi Killing spinörlerin p-form Dirac akımıdır,

$$()_p : \mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_0 \tag{9.48}$$

$$(\psi, \phi) \mapsto (\psi\overline{\phi})_p. \tag{9.49}$$

Jacobi özdeşlikleri,

$$[\omega_1, [\omega_2, \omega_3]_{SN}]_{SN} + [\omega_2, [\omega_3, \omega_1]_{SN}]_{SN} + [\omega_3, [\omega_1, \omega_2]_{SN}]_{SN} = 0 \tag{9.50}$$

$$[L_{\omega_1}, L_{\omega_2}]\psi = L_{[\omega_1,\omega_2]_{SN}}\psi \tag{9.51}$$

$$[\omega, (\psi\overline{\phi})]_{SN} = (L_\omega\psi)\overline{\phi} + \psi(\overline{L_\omega\phi}) \tag{9.52}$$

$$L_{(\psi\overline{\psi})_p}\psi = 0 \tag{9.53}$$

şeklindedir.

İlk özdeşlik SN parantezinin özellikleri nedeniyle sağlanmaktadır fakat diğer üç özdeşlik genellikle sağlanmaz. Bu yüzden $\overline{\mathfrak{k}}$ sabit eğrilik manifoldlarda bir süpercebirdir.

ii) Konformal süpercebileri;

Konformal Killing vektörler ve twistör spinörleri kullanılarak bir süpercebir yapısı,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0 \oplus \mathfrak{c}_1 \tag{9.54}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bileşenlerden $\mathfrak{c}_0$ çift kısmı konformal Killing vektör alanlarının Lie cebrine karşılık gelir ve $\mathfrak{c}_1$ tek kısmı ise twistör spinörlerinin kümesine karşılık gelir. Süpercebirlerin parantezi konformal Killing vektör alanlarının Lie parantezidir. Genişletilmiş süpercebirlerin parantezi aşağıdakiler olarak tanımlanmaktadır.

Çift-çift parantezi konformal Killing vektörlerin Lie parantezidir,

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_0 \to \mathfrak{c}_0 \tag{9.55}$$

$$(C_1, C_2) \to [C_1, C_2]. \tag{9.56}$$

Çift-tek parantezi twistör alanları üzerinde Lie türevidir,

$$\pounds - \frac{1}{2}\mu : \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{c}_1 \tag{9.57}$$

$$(C, \psi) \mapsto \pounds_C\psi - \frac{1}{2}\mu\psi. \tag{9.58}$$

Tek-Tek parantezi twistör spinörlerinin Dirac akımıdır,

$$()_1 : \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{c}_0 \tag{9.59}$$

$$(\psi, \phi) \mapsto (\psi\overline{\phi})_1 = \widetilde{V_{\psi,\phi}}. \tag{9.60}$$

Jacobi özdeşlikleri otomatik olarak sağlanmamaktadır. Bu süpercebir yapısı, sabit eğrilik manifoldlarına daha yüksek dereceli KKY formlara veya normal KKY formlarına sahip Einstein manifoldlarını içerecek şekilde genişletilebilir.

$$\bar{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}_0 \oplus \mathfrak{c}_1 \tag{9.61}$$

$\mathfrak{c}_0$ çift kısmı, KKY formların (veya normal KKY formların) Lie cebirlere karşılık gelmektedir ve $\mathfrak{c}_1$ çift kısmı, twistör spinörlerin kümesine karşılık gelmektedir. Genişletilmiş konformal süpercebirlerin parantezi aşağıdakiler olarak tanımlanmaktadır.

Çift-çift parantezi KKY formların SN parantezidir,

$$[\ ,\ ]_{KKY} : \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_0 \to \mathfrak{c}_0 \tag{9.62}$$

$$(\omega_1, \omega_2) \to [\omega_1, \omega_2]_{KKY}. \tag{9.63}$$

Çift-tek parantezi twistör spinörlerin üzerinde simetri operatörleridir,

$$L : \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{c}_0 \tag{9.64}$$

$$(\omega, \psi) \mapsto L_\omega \psi = (i_{X^a}\omega).\nabla_{X_a}\psi + \frac{p}{2(p+1)}d\omega.\psi + \frac{p}{2(n-p+1)}\delta\omega.\psi. \tag{9.65}$$

Tek-tek parantezi twistör spinörlerin p-form Dirac akımıdır,

$$()_p : \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{c}_0 \tag{9.66}$$

$$(\psi, \phi) \mapsto (\psi\overline{\phi})_p. \tag{9.67}$$

Jacobi özdeşlikleri otomatik olarak sağlanmamaktadır. Bu yüzden $\bar{\mathfrak{c}}$ sabit eğrilik manifoldlarda (veya normal KKY formlarla Einstein manifoldlarda) bir süpercebirdir, fakat bir Lie süpercebir değildir.

10. 11-BOYUTLU SÜPERGRAVİTE

Süpergravite teorisinin tutarlılığı ve değişmezliği için yüksek boyutlu, yüksek spinli fermiyonik alanlar ve uygun süpersimetri dönüşümleri ile ekstra bozonik alanların tanıtılması gerekir. Bir S süpergravite eylemi bozonik (ϕ_i) ve fermiyonik (ψ_i) alanları içerir.

$$S = S_b + S_f \tag{10.1}$$

Buradaki S_b bozonik kısım $S_b = \int \mathcal{L}_b(\phi_i, \nabla_\mu \phi_i)$ şeklindedir ve kütle çekimine karşılık gelir. S_f fermiyonik kısım ise $S_f = \int \mathcal{L}_f(\psi_i, \nabla_\mu \psi_i)$ şeklindedir ve maddeye karşılık gelmektedir.

Süpersimetri dönüşümleri bozonik ve fermiyonik alanları birbiriyle ilişkilendirir. Bir ϵ spinör parametresi için, süpersimetri dönüşümleri

$$\delta_\epsilon \phi = \bar{\epsilon}.\psi \tag{10.2}$$

$$\delta_\epsilon \psi = (\nabla + f(\phi))\epsilon \tag{10.3}$$

olarak yazılır ve burada δ alanın varyasyonu anlamına gelir.

Fermiyonik alan ve değişkenleri sıfır olarak alındığı zaman ($\psi_i = 0$), bozonik süpergravite elde edilir ve bunun çözümleri teorinin tutarlı arka planını verir. Sicim ve M-teorilerinin düşük enerji limitlerinde on- ve on bir-boyutlu süpergravite teorilerinin bozonik kısımları tarafından tanımlanmaktadır.

$\psi_i = 0$ için on bir- boyutlu süpergravite teorisinin bozonik kısmı ele alınmıştır. g bir metrik, F bir kapalı 4-form ve M_{11} bir Lorentzsel spin manifoldu olsun. Burada F *akı (flux)* 4-formu olarak adlandırılır ve M_{11} üzerinde tanımlanan on bir- boyutlu süpergravite teorisinin bozonik kısmının eylemi,

$$S = \frac{1}{12\kappa_{11}^2} \int \Big(R_{AB} \wedge *_{11} e^{AB} - \frac{1}{2} F \wedge *_{11} F - \frac{1}{6} \mathcal{A} \wedge F \wedge F \Big) \tag{10.4}$$

olarak yazılır. Burada κ_{11} on bir-boyutlu süpergravite çiftlenim sabitidir. $A, B = 0, 1, 2, \ldots, 10$ değerlerini alır ve $*_{11}$ on bir-boyutta Hodge yıldız operatörüdür. R_{AB} eğrilik 2-form, e^A

ko-çerçeve bazı ve $\mathcal{A}$, F akı 4-formun 3-form potansiyelidir ve

$$F = d\mathcal{A} \tag{10.5}$$

olarak yazılır. Denklem (10.4)'ün ilk terimi gravitasyona, ikinci terim Maxwell-benzeri ve üçüncü terimi Chern-Simons terimlerine karşılık gelmektedir. On bir-boyutlu bozonik süpergravitenin alan denklemleri yukarıdaki eylem denkleminden e^A ve $\mathcal{A}$ varyasyonları hesaplanarak

$$*_{11}(i_{X_B}P_A) = \frac{1}{2}i_{X_A}F \wedge *_{11}i_{X_B}F - \frac{1}{6}g_{AB}F \wedge *_{11}F \qquad \text{(Einstein)} \tag{10.6}$$

$$d *_{11} F = \frac{1}{2}F \wedge F \qquad \text{(Maxwell-benzeri)} \tag{10.7}$$

$$dF = 0 \qquad \text{(kapalılık)} \tag{10.8}$$

bulunur. Burada i_{X_A} iç türev veya büzülme operatörü olarak tanımlanır. g_{AB} metriğin bileşenleri ve P_A, $P_A = i_{X^B}R_{BA}$ olarak yazabilen eğrilik 2-formlarından tanımlanan Ricci 1-formlarıdır. Ayrıca fermiyonik kısmın içindeki gravitino alanının varyasyonu, süpersimetri parametresi olan ϵ spinöründe bir koşula neden olur ve bozonik kısım aşağıdaki süpergravite Killing denlemini verir,

$$\nabla_{X^A}\epsilon = -\frac{1}{24}(e^A.F - 3F.e^A).\epsilon. \tag{10.9}$$

ϵ süpersimetri parametresi, M_{11} üzerinde $\mathbb{R}^{32}$'ye karşılık gelen S spinör demetinin bir elemanıdır ve bundan dolayı bir Majorana spinörüdür.

Daha sonraki bölümlerde, $M = M_d \times M_{11-d}$ tipi (10.6), (10.7), (10.8) alan denklemlerinin çözümleri olan süpergravite arkaplanlarının çarpık-olmayan çeşitli *kompaklaştırmaları (compactification)* ele alınacaktır. Bu arka planlarda denklem (10.9)'da tanımlanan süpergravite Killing spinörlerinin bilineer formları oluşturulacaktır. Daha sonra iç ve dış akıları olan veya olmayan çözümlerde, bu bilineer formların çarpım manifoldları üzerinde KY ve KKKY formlarına indirgenmesinin (veya indirgenememesinin) AdS veya Minkowski tipi M_d çözümlerinin varlığını (veya yokluğunu) gerektirdiği gösterilecektir.

11. 11-BOYUTLU SÜPERGRAVİTE ARKAPLANLARI

Bu bölümde akının varlığı veya yokluğunda çarpık-olmayan kompaklaştırmaların süpergravite arkaplanları ele alınacaktır. Bu arkapalanlar $M = M_d \times M_{11-d}$ tipinde yazılabilen çözümler olacaktır. Genel olarak süpergravite arkaplanları olarak adlandırılan bu ifade, d'nin aldığı özel durumlar için *süpergravite çözümleri* olarak adlandırılacaktır. M_{11} on bir-boyutlu arkaplanlar için, çarpık-olmayan çarpım yapıları $M_4 \times M_7$, $M_7 \times M_4$, $M_5 \times M_6$, $M_6 \times M_5$ ve $M_3 \times M_8$ tipi olan süpergravite çözümleri incelenecektir.

11.1 $M_4 \times M_7$ Tipi Çözümler

Bu bölümde M_{11} on bir-boyutlu süpergravitenin $M_{11} = M_4 \times M_7$ tipi çarpım yapısı dikkate alınacaktır. Burada M_4 Lorentzsel spin 4-manifold ve M_7 Riemannsal spin 7-manifoldtur. Önceki denklemlerde karşımıza çıkan çerçeve ve ko-çerçeve baz indisleri $\mathcal{A} = \{a, \alpha\}$ olarak iki parçaya ayrılacaktır. Burada $a = 0, 1, 2, 3$ ve $\alpha = 4, 5, \ldots, 9, 10$ değerlerini alır. Clifford cebri bazı,

$$e^{\mathcal{A}} = \{e^a \otimes 1_7, iz_4 \otimes e^\alpha\} \tag{11.1}$$

olarak ayrışır. Burada e^a, M_4 üzerinde Clifford cebri bazıdır ve z_4, M_4 üzerinde hacim formdur. 1_7, M_7 üzerine birimdir ve e^α, M_7 üzerinde Clifford cebri bazıdır. Burada

$$e^a.e^b + e^b.e^a = 2g^{ab} \tag{11.2}$$

$$e^\alpha.e^\beta + e^\beta.e^\alpha = 2g^{\alpha\beta} \tag{11.3}$$

olmaktadır ve ${z_4}^2 = -1$ özelliği ve z_4'ün M_4 üzerindeki bütün 1-formlar ile anti-komüte edebilme özelliği kullanılırsa metrik $g^{AB} = \{g^{ab}, g^{\alpha\beta}\}$ olarak ayrışabilmektedir. Benzer şekilde F akı 4-form

$$F = \{\lambda iz_4, \mu\phi\} \tag{11.4}$$

olarak ayrıştıralabilir. Burada λ ve μ birer sabittir ve ϕ, M_7 üzerinde bir 4-formdur. M_4 ve M_7 üzerindeki akı bileşenleri sırasıyla dış ve iç akılar olarak adlandırılır. λ ve μ iç ve dış akı bileşenlerinin varlığını veya yokluğunu belirlerler. ϵ süpersimetri parametresi dört-boyutta ϵ_4 ve yedi-boyutta ϵ_7'den

$$\epsilon = \epsilon_4 \otimes \epsilon_7 \tag{11.5}$$

şeklinde oluşturulacaktır. $M_4 \times M_7$ çarpım yapısı için, (10.6)-(10.8) alan denklemleri dört- ve yedi-boyutlu denklemlere ayrıştırılacaktır. (10.6) Maxwell denklemi ve (10.8) kapalılık koşulu için, denklem (11.4)'deki F akı 4-formun ayrışımı kullanılacaktır. Bunlara ek olarak, herhangi $M_n = M_p \times M_q$ çarpım yapısı için $*_n$ Hodge yıldız operatörü

$$*_n(\alpha \wedge \beta) = (-1)^{l(p-k)} *_p \alpha \wedge *_q \beta \tag{11.6}$$

denklemini sağlamaktadır. Burada α, M_p üzerinde bir k-form ve β, M_q üzerinde bir l-formdur. Bu denklem ışığında,

$$\begin{aligned} *_{11}F &= i\lambda *_{11} (z_4 \wedge 1_7) + \mu *_{11} (1_4 \wedge \phi) \\ &= i\lambda(*_4 z_4 \wedge *_7 1_7) + \mu(*_4 1_4 \wedge *_7 \phi) \\ &= -i\lambda z_7 + \mu z_4 \wedge *_7 \phi \end{aligned} \tag{11.7}$$

olarak yazılır. Burada $*_7 1_7 = z_7$ ve $*_4 1_4 = z_4$ eşitlikleri kullanılmıştır. Bu denklemin dış türevinini alırsak ve $dz_7 = 0 = dz_4$ kullanılırsa

$$d *_{11} F = \mu z_4 \wedge d *_7 \phi \tag{11.8}$$

olarak hesaplanır. Denklem (10.7) eşitliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned} F \wedge F &= (i\lambda z_4 + \mu\phi) \wedge (i\lambda z_4 + \mu\phi) \\ &= i\lambda z_4 \wedge i\lambda z_4 + i\lambda z_4 \wedge \mu\phi + \mu\phi \wedge i\lambda z_4 + \mu\phi \wedge \mu\phi \\ &= -\lambda^2 z_4 \wedge z_4 + 2\lambda\mu z_4 \wedge \phi + \mu^2 \phi \wedge \phi \\ &= 2i\lambda\mu z_4 \wedge \phi \end{aligned} \tag{11.9}$$

olarak hesaplanır. Burada $z_4 \wedge z_4 = (e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4) \wedge (e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4) = 0$ 'dır. $dz_4 = 0$ ve $\phi \wedge \phi = 0$ (M_7 üzerinde 8-form olmadığı için)'dir. Bunun sonucunda Maxwell denkleminin sol tarafı ve sağ tarafı eşitlenirse ve $dF = 0$ olduğu kullanırsa

$$\begin{aligned} d *_7 \phi &= i\lambda\phi \\ d\phi &= 0 \end{aligned} \tag{11.10}$$

olarak hesaplanır. Bu özellikler M_7 üzerinde bir zayıf G_2 yapısı tanımlar ve ϕ birleşmeli 4-forma karşılık gelir. Böylece M_7 uygun bir zayıf G_2 manifolduna veya Sasaki-Einstein manifolduna ya da 3-Sasakian manifolduna karşılık gelecektir. Dahası $dF = 0$ olduğundan ϕ, M_7 üzerinde bir KKKY 4-formdur ve bunun sonucu olarak bir geometrik Killing spinöründen üretilmelidir. z_4 ise M_4 üzerinde bir hacim form olduğundan dolayı M_4 üzerinde bir KY formudur ve sonuç olarak $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ için F akı 4-form M_4 ve M_7 üzerinde KY ve KKKY formlarından üretilmektedir.

Denklem (10.6) Einstein alan denklemi M_4 ve M_7 bileşenlerine ayrılabilir. F akı 4-formun ayrışımı Einstein alan denklemine yazıldığında ve aşağıdaki hesaplar sonucunda, Einstein alan denklemi bileşenlerine ayırılır.

$$F \wedge *_{11} F = (\lambda^2 + \mu^2 g_4(\phi, \phi)) z_{11}$$

F akı 4-formun iç türevini alırsak ve dört- ve yedi boyutlu- kısımlarını ayrıldığında,

$$\begin{aligned} i_{X_A} F &= i_{X_a}(i\lambda z_4 \wedge 1_7 + 1_4 \wedge \mu\phi), i_{X_\alpha}(i\lambda z_4 \wedge 1_7 + 1_4 \wedge \mu\phi) \\ &= (i\lambda i_{X_a} z_4 \wedge 1_7), (\mu 1_4 \wedge i_{X_\alpha}\phi) \\ &= (i\lambda *_4 e_a \wedge 1_7), (\mu 1_4 \wedge i_{X_\alpha}\phi) \end{aligned} \tag{11.11}$$

ve benzer şekilde

$$i_{X_B} F = (i\lambda *_4 e_b \wedge 1_7), (\mu 1_4 \wedge i_{X_\beta}\phi) \tag{11.12}$$

olarak yazılır. Denklem (11.12)'e soldan $*_{11}$ uygulanırsa ve yardımcı denklem (11.6) ile,

$$*_{11} i_{X_B} F = i\lambda(-e_b \wedge z_7), \mu(z_4 \wedge *_7 i_{X_\beta}\phi) \tag{11.13}$$

olarak hesaplanır. O halde

$$\begin{aligned} i_{X_A} F \wedge *_{11} i_{X_B} F &= \lambda^2((*_4 e^a \wedge e^b) \wedge z_7), \mu^2(z_4 \wedge (i_{X_\alpha}\phi \wedge *_7 i_{X_\beta}\phi)) \\ &= \{-\lambda^2 g_{ab} z_{11}, \mu^2 g_4(\phi, \phi) g_{\alpha\beta} z_{11}\} \end{aligned} \tag{11.14}$$

olarak bulunur.

(10.6) Einstein alan denkleminin sol tarafı ise $i_{X_B}P_A = \{i_{X_b}P_a, i_{X_\beta}P_\alpha\}$ olarak ayrışır. Burada P_a ve P_α sırasıyla M_4 ve M_7 üzerinde Ricci 1-formlardır. Böylece denklemin sol tarafını ve sağ tarafını (bulduğumuz sonuçları ve katsayıları yerine koyduktan sonra) eşitlersek,

$$i_{X_b}P_a = -\frac{1}{3}\Big(2\lambda^2 + \frac{\mu^2}{2}g_4(\phi,\phi)\Big)g_{ab} \tag{11.15}$$

$$i_{X_\beta}P_\alpha = -\frac{1}{6}\Big(\lambda^2 + \mu^2 g_4(\phi,\phi)\Big)g_{\alpha\beta} + \frac{\mu^2}{2}g_3\Big(i_{X_\alpha}\phi, i_{X_\beta}\phi\Big) \tag{11.16}$$

olarak M_4 ve M_7 ayrışımı yapılır.

Bunun anlamı şudur, $\lambda = \mu = 0$ için hem M_4 hem M_7 Ricci-düz manifoldlardır. $\lambda \neq 0$ ve $\mu = 0$ özel durumu için M_4 negatif eğrilikli ve M_7 ise pozitif eğrilikli Einstein manifoldlarıdır(1-form bazı M_7 üzerinde saf sanal olduğundan dolayı metrik bileşenleri ekstra eksi işaretine sahip olacak).

Sırada denklem (10.9) süpergravite Killing spinör denkleminin çarpım manifoldlarına ayrışımının analizi vardır. Denklem (11.5)'den (10.9) süpergravite Killing spinör denkleminin sol tarafı,

$$\nabla_{X^A}\epsilon = \nabla_{X^a}\epsilon_4 \otimes \epsilon_7 + \epsilon_4 \otimes \nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 \tag{11.17}$$

olarak yazılmaktadır. Denklemin sağ tarafı ise aşağıda yapılan hesaplamalardan sonra,

$$\begin{aligned} e^A.F =&(e^a \otimes 1_7 + iz_4 \otimes e^\alpha).(\lambda iz_4 \otimes 1_7 + 1_4 \otimes \mu\phi) \\ =&(e^a \otimes 1_7).(\lambda iz_4 \otimes 1_7) + (e^a \otimes 1_7).(1_4 \otimes \mu\phi) + (iz_4 \otimes e^\alpha).(\lambda iz_4 \otimes 1_7) \\ &+ (iz_4 \otimes e^\alpha)(1_4 \otimes \mu\phi) \\ =&(e^a.\lambda iz_4) \otimes 1_7 + (e^a \otimes \mu\phi) + (\lambda 1_4 \otimes e^\alpha) + (iz_4 \otimes \mu e^\alpha.\phi) \end{aligned} \tag{11.18}$$

olarak yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} -3F.e^A =& -3(\lambda iz_4 \otimes 1_7 + 1_4 \otimes \mu\phi).(e^a \otimes 1_7 + iz_4 \otimes e^\alpha) \\ =& -3((\lambda iz_4.e^a \otimes 1_7) + (\lambda 1_4 \otimes e^\alpha) + (e^a \otimes \mu\phi) + (iz_4 \otimes \mu\phi.e^\alpha)) \end{aligned} \tag{11.19}$$

olarak yazılır. Şimdi bulduğumuz bu sonuçların ışığında süpergravite Killing spinör denkleminin sağ ve sol tarafını eşitlersek,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X^a}\epsilon_4 \otimes \epsilon_7 + \epsilon_4 \nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 = & \mp \frac{1}{6}\lambda e^a.\epsilon_4 \otimes \epsilon_7 + \frac{1}{12}e^a.\epsilon_4 \otimes \mu\phi.\epsilon_7 \\
& + \frac{1}{12}\lambda\epsilon_4 \otimes e^\alpha.\epsilon_7 \mp \frac{1}{24}\epsilon_4 \otimes \mu(e^\alpha.\phi - 3\phi.e^\alpha).\epsilon_7
\end{aligned} \tag{11.20}
$$

olarak hesaplanır. Burada z_4 hacim formun çift boyutlar üzerinde 1-form ile anti-komütesi $z_4.e^a = -e^a.z_4$ ve bir Lorentzsel 4-manifold üzerinde $(iz_4)^2 = 1$ olması kullanılmıştır. Ayrıca $iz_4.\epsilon_4 = \mp\epsilon_4$'dür. M_4 ve M_7 üzerinde süpergravite Killing spinör denkleminin ayrışımı, iç ve dış akıların varlığı veya yokluğu için ayrı ayrı düşünülmelidir. Akısız durum $\lambda = 0 = \mu$ için,

$$\nabla_{X^a}\epsilon_4 = 0 \tag{11.21}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 = 0 \tag{11.22}$$

olarak yazılır. Bunun anlamı ϵ_4 ve ϵ_7 sırasıyla M_4 ve M_7 üzerinde paralel spinörlerdir. Bu, (11.15) ve (11.16) denklemlerindeki Ricci-düzlük özelliği ile tutarlıdır. Paralel spinörleri kabul eden 7-boyutlu Riemannsal manifoldları G_2 holonomi manifoldlarına karşılık gelir. Paralel spinörleri kabul eden 4 boyutlu Lorentzsel manifoldları Minkowski veya düzlem-dalga uzayzamanları olabilir. Ancak, Ricci-düzlük özelliği durumu Minkowski uzayzamanıyla daraltılmaktadır. O zaman bu durum $\text{Mink}_4 \times G_2$ çözümüne karşılık gelmektedir.

Sadece dış akının varlığı $\lambda \neq 0$ ve $\mu = 0$ için,

$$\nabla_{X^a}\epsilon_4 = \mp \frac{1}{6}\lambda e^a.\epsilon_4 \tag{11.23}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 = -\frac{1}{12}\lambda e^\alpha.\epsilon_7 \tag{11.24}$$

olarak yazılır. Bu ϵ_4 ve ϵ_7'nin (11.15) ve (11.16) denklemlerinden Einstein manifoldları ile tutarlı olan sırasıyla M_4 ve M_7 üzerinde geometrik Killing spinörleri olduğu duruma karşılık gelir. M_4 ve M_7 üzerindeki geometrik Killing spinörleri sırasıyla reel ve sanal Killing spinörleridir. Sanal Killing spinörleri kabul eden 7-boyutlu Riemannsal manifoldları zayıf G_2 manifoldlarına karşılık gelir. Killing spinörünün kabul edilmesi durumunda, has bir zayıf G_2 manifoldudur. İki ve üç Killing spinörünün varlığı için, sırasıyla Sasaki-Einstein ve 3-Sasaki manifoldlarına karşılık gelir. Maksimum sayıda Killing spinörü varsa ise M_7 bir S^7 yuvarlak küredir. Reel Killing spinörleri kabul eden negatif eğrilikli 4-boyutlu Einstein manifoldları AdS_4 uzayzamanına karşılık gelir. O zaman bu durumda çözümler $AdS_4 \times S^7$ ve $AdS_4 \times$ zayıf G_2'ye karşılık gelir.

Genel durum $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ için, iç ve dış akılar sıfırdan farklıdır. İç akı ϕ'nin KKKY form denklemini sağladığını biliyoruz ki bu onların geometrik Killing spinörlerinden üretildiği anlamına gelir. Eğer ϕ, $\phi.\epsilon_7 = \mp\frac{1}{2}\epsilon_7$ denklemini sağlıyorsa süpergravite Killing spinör denkleminin ayrışımı

$$\nabla_{X^a}\epsilon_4 = -\frac{1}{6}\Big(\pm\lambda + \frac{\mu}{4}\Big)e^a.\epsilon_4 \tag{11.25}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 = \frac{1}{12}\Big(\lambda \pm \frac{\mu}{4}\Big)e^\alpha.\epsilon_7 \pm \frac{\mu}{8}\phi.e^\alpha.\epsilon_7 \tag{11.26}$$

olarak yazılır. Dahası denklem (11.26) daha sade bir şekilde yazılabilir. Bir 1-form e^α'nın keyfi bir ω ile Clifford çarpımının wedge çarpımı ve iç türev cinsinden

$$e^\alpha.\omega = e^\alpha \wedge \omega + i_{X^\alpha}\omega \tag{11.27}$$

$$\omega.e^\alpha = e^\alpha \wedge \eta\omega - i_{X^\alpha}\eta\omega \tag{11.28}$$

olarak yazılır. Burada η otomorfizmi bir p-form ω'ya $\eta\omega = (-1)^p\omega$ olarak etkir. O zaman,

$$\phi.e^\alpha = e^\alpha.\phi - 2i_{X^\alpha}\phi \tag{11.29}$$

olarak yazılır. Denklem (11.10)'a i_{X^α} iç türev operatörü uygulanırsa,

$$di_{X^\alpha} *_7 \phi = -\frac{3\lambda}{4}i_{X^\alpha}\phi \tag{11.30}$$

$$i_{X^\alpha}d *_7 \phi = i\lambda i_{X^\alpha}\phi \tag{11.31}$$

bulunur. $\mathcal{L}_{X^\alpha} = di_{X^\alpha} + i_{X^\alpha}d$ Lie türevinin tanımından,

$$\mathcal{L}_{X^\alpha} *_7 \phi = \frac{i\lambda}{4}i_{X^\alpha}\phi \tag{11.32}$$

elde ederiz. Eğer ϕ üzerinde,

$$(\mathcal{L}_{X^\alpha} *_7 \phi).\epsilon_7 = i\lambda e^\alpha.\epsilon_7 \tag{11.33}$$

koşulu sağlanıyorsa o zaman denklem (11.26)

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 = \frac{1}{12}\Big(\lambda \mp \frac{25}{2}\mu\Big)e^\alpha.\epsilon_7 \tag{11.34}$$

şekline dönüşür. Şimdi eğer μ sabiti $\mu = \pm\frac{\lambda}{5}$ olarak seçersek süpergravite Killing spinör denklemi ayrışımları

$$\nabla_{X^a}\epsilon_4 = \mp\frac{7}{40}\lambda e^a.\epsilon_4 \tag{11.35}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 = -\frac{1}{8}\lambda e^\alpha.\epsilon_7 \tag{11.36}$$

olur ve bunlar M_4 ve M_7 üzerinde geometrik Killing spinörlerine karşılık gelir. Bu, $\phi.\epsilon_7 = \mp\frac{1}{2}\epsilon_7$ koşulu ile uyumludur. Eğer ϕ, bilineer 4-form ϵ_7'den oluşturuluyorsa o zaman Fierz özdeşliğinden bu koşulu otomatik olarak sağlamaktadır. Bu nedenle çarpım manifoldlarında geometrik Killing spinörü elde etmek için ϕ üzerindeki tek kısıtlama koşulu denklem (11.32)'tir. Aslında, ϕ tarafından sağlanan denklemler M_7'nin bir zayıf G_2 manifoldu olduğu duruma karşılık gelir ve ϕ onun üzerinde tanımlanan ko-birleşmeli 4-formdur. Bu durumda denklem (11.15) ve (11.16)'daki $g_4(\phi,\phi)$ sabittir ve $g_3(i_{X_\alpha}\phi, i_{X_\beta}\phi)$ ile $g_{\alpha\beta}$ orantılıdır. Yani denklem (11.15) ve (11.16), M_4 ve M_7'nin Einstein manifoldları olduğunu ima eder. O zaman $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ genel durumunda $\mu = \pm\frac{\lambda}{5}$ özel seçimi için, çözümler $AdS_4 \times S^7$ ve $AdS_4 \times$ zayıf G_2'ye karşılık gelir. Fakat $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ genel durumu için, (11.20) süpergravite Killing spinör denklemi M_4 ve M_7 bileşenlerine ayrılamaz ve genel bir çözüm bulunamaz.

Sadece iç akının varlığına karşılık gelen son durum $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$ için denklemler bir önceki duruma benzeyecektir. Fakat denklem (11.15), (11.16), (11.35) ve (11.36)'da $\lambda = 0$ alınırsa denklem (11.15) ve (11.16), M_4 ve M_7'nin Einstein manifoldları olduğunu ima eder. Fakat bu durumda denklem (11.35) ve (11.36) paralel spinörleri kabul etmeleri gerektiğini ima etmektedir ve durum tutarsızdır. Bu sebepten dolayı $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$ durumu için çözüm yoktur.

<u>Bilineer Formlar</u>:

Bu kısımda denklem (10.9)'un tanımını kullanılarak süpergravite Killing spinörlerin bilineer formları kurulacaktır. Bir ϵ spinörünün spinör bilineeri, $(\ ,\ )$ spinör iç çarpımı tarafından tanımlanmaktadır ve bu farklı derece diferensiyel formların toplamı olarak

$$
\begin{aligned}
\epsilon\bar{\epsilon} =&(\epsilon,\epsilon)+(\epsilon,e_a.\epsilon)e^a+(\epsilon,e_{ab}.\epsilon)e^{ab}+\ldots+(\epsilon,e_{a_p\ldots a_2a_1}.\epsilon)e^{a_1a_2\ldots a_p}\\
&+\ldots+(-1)^{[n/2]}(\epsilon,z.\epsilon)z
\end{aligned}
\tag{11.37}
$$

şeklinde yazılır. Burada $e_{a_1a_2\ldots a_p}=e^{a_1}\wedge e^{a_2}\wedge\ldots\wedge e^{a_p}$ olup ve z de hacim formdur. ϵ spinörünün p-form bilneerleri spinör bilneerlerin p-form bileşenleri

$$
(\epsilon\bar{\epsilon})_p=(\epsilon,e_{a_p\ldots a_2a_1}.\epsilon)e^{a_1a_2\ldots a_p}
\tag{11.38}
$$

olarak tanımlanır. Fakat M_{11}'in spinör demeti üzerinde iki farklı spinör iç çarpımı ele alınabilir. Elimizde $Cl_{10,1}$ Clifford cebri vardır ve bunun çift alt cebri $Cl^0_{10,1}$, $Cl_{1,9}$'a izomorfiktir. Bu yüzden spinör uzayı $\mathbb{R}^{32}$'ye izomorfiktir ve Majorana spinörleri söz konusudur. Burada $\xi\eta$ involüsyonu ile $\mathbb{R}$-çarpık veya ξ involüsyonu ile $\mathbb{R}$-simetrik spinör iç çarpımı seçilebilir. Bu iki farklı seçim farklı sonuçlara neden olacaktır. Sonraki bölümlerde her iki durum ayrı ayrı ele alınacaktır ve iki durumda da çarpım manifoldları üzerinde bilineer formların ayrışımı analiz edilecektir.

$\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$ İç Çarpımı:

Öncelikle spinör iç çarpımı $\xi\eta$ involüsyonu ile $\mathbb{R}$-çarpık olarak seçilecektir ve çarpım manifoldları üzerinde bilneer formların ayrışımı bulanacaktır. Bir spinörden oluşturulan bilneer formlar $S\otimes S^*$'ın elemanlarıdır ve burada S spinör uzayı, S^* spinör uzayının dualidir. ∇ bağlantısı $(\ ,\ )$ spinör iç çarpımı ile uyumlu olduğundan ve bir dereceyi koruduğundan, p-form bilineerlerin üzerindeki $()_p$ iz düşüm operatörü ile de uyumludur ve bir ϵ süpergravite Killing spinörü için,

$$
\begin{aligned}
\nabla_X(\epsilon\bar{\epsilon})_p =&((\nabla_X\epsilon)\bar{\epsilon})_p+(\epsilon\overline{\nabla_X\epsilon})_p\\
=&-\frac{1}{24}\Big((\widetilde{X}.F-3F.\widetilde{X}).\epsilon\bar{\epsilon}\Big)_p-\frac{1}{24}\Big(\epsilon\overline{(\widetilde{X}.F-3F.\widetilde{X}).\epsilon}\Big)_p
\end{aligned}
\tag{11.39}
$$

olup, burada denklem (10.9) kullanılmıştır. Herhangi ψ spinörü için, $\overline{\psi}$ dual spinörü involüsyon operatörü $\overline{\psi}=\psi^{\mathcal{J}}$ olarak yazılır. $\mathcal{J}=\xi\eta$ olduğundan, ω formu ve ψ spinörü için $\overline{\omega.\psi} = (\omega.\psi)^{\xi\eta} = \psi^{\xi\eta}.\omega^{\xi\eta} = \overline{\psi}.\omega^{\xi\eta}$ olarak yazılır. Bu bilgiler ışığında,

$$\begin{aligned}\overline{(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}).\epsilon} =& \overline{\epsilon}.(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}.F)^{\xi\eta} \\ =& \overline{\epsilon}(F^{\xi\eta}.\widetilde{X}^{\xi\eta} - 3\widetilde{X}^{\xi\eta}.F^{\xi\eta}) \\ =& -\overline{\epsilon}.(F.\widetilde{X} - 3\widetilde{X}.F)\end{aligned} \tag{11.40}$$

olarak yazılır. Bunu denklem (11.39)'de kullanırsak,

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = -\frac{1}{24}\Big((\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}).\epsilon\overline{\epsilon}\Big)_p + \frac{1}{24}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.(F.\widetilde{X} - 3\widetilde{X}.F)\Big)_p \tag{11.41}$$

olarak elde edilir. Eğer denkleme $\frac{1}{6}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.(F.\widetilde{X} - \widetilde{X}.F)\Big)_p$ terimini ekleyip çıkartırsak,

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = -\frac{1}{24}\Big((\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}).\epsilon\overline{\epsilon}\Big)_p + \frac{1}{24}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X})\Big)_p + \frac{1}{6}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.(F.\widetilde{X} - \widetilde{X}.F)\Big)_p \tag{11.42}$$

elde ederiz. Bu yüzden ϵ süpergravite Killing spinörünün bileneer form denklemi ayrıca *süpergravite Killing form denklemi* olarak da adlandırılır ve

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = -\frac{1}{24}\Big([(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}), \epsilon\overline{\epsilon}]_{Cl}\Big)_p + \frac{1}{6}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.[F, \widetilde{X}]_{Cl}\Big)_p \tag{11.43}$$

bulunur. Burada $[\ ,\ ]_{Cl}$ Clifford parantezidir. Ayrıca,

$$\widetilde{X}.F = \widetilde{X} \wedge F + i_X F \tag{11.44}$$

$$F.\widetilde{X} = \widetilde{X} \wedge F - i_X F \tag{11.45}$$

olarak yazılabildiğinden,

$$\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X} = -2\widetilde{X} \wedge F + 4i_X F \tag{11.46}$$

$$F.\widetilde{X} - \widetilde{X}.F = -2i_X F \tag{11.47}$$

yazılabilir. Bu bilgiler sayesinde (11.43) süpergravite Killing form denklemi

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = \frac{1}{12}\Big([\widetilde{X} \wedge F, \epsilon\overline{\epsilon}]_{Cl}\Big)_p - \frac{1}{6}\Big([i_X F, \epsilon\overline{\epsilon}]_{Cl}\Big)_p - \frac{1}{3}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.i_X F\Big)_p \tag{11.48}$$

şekline dönüşür. Bir on bir-boyutlu Lorentzsel manifoldu üzerinde bir spinörün sıfır-olmayan bilineer formları sadece, $1-$, $2-$, $5-$, $6-$, $9-$ ve $10-$ formlardır. Bu bilineer formları ekte bulunanan tablo ek2'den üzerinden görülebilir. Bu yüzden ϵ süpergravite Killing spinörünün bilineer formları,

$$\epsilon\overline{\epsilon} = (\epsilon\overline{\epsilon})_1 + (\epsilon\overline{\epsilon})_2 + (\epsilon\overline{\epsilon})_5 + (\epsilon\overline{\epsilon})_6 + (\epsilon\overline{\epsilon})_9 + (\epsilon\overline{\epsilon})_{10} \tag{11.49}$$

şeklindedir. Clifford parantezinin tanımını ve denklem (3.9)'da verilen iz düşüm operatörünü göz önünde bulundurarak tüm bilineer formların denklemleri oluşturulur. $p = 1$ için, denklem (11.48)'den gelen $(\epsilon\overline{\epsilon})_1$ bileneer 1-form için

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\overline{\epsilon})_1 = \frac{1}{144}F \underset{4}{\wedge} i_{X_A}(\epsilon\overline{\epsilon})_6 - \frac{1}{6}i_{X_A}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_2 \tag{11.50}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$d(\epsilon\overline{\epsilon})_1 = \frac{1}{72}F \underset{4}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_6 - \frac{1}{3}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_2 \tag{11.51}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon})_1 = 0 \tag{11.52}$$

bulunur. Denklem (11.50) ve (11.51) karşılaştırıldığımızda, kolayca görülebilir ki $(\epsilon\overline{\epsilon})_1$,

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\overline{\epsilon})_1 = \frac{1}{2}i_{X_A}d(\epsilon\overline{\epsilon})_1 \tag{11.53}$$

denklemini sağlar ve bundan dolayı $(\epsilon\overline{\epsilon})_1$ bir KY 1-formdur. $(\epsilon\overline{\epsilon})_1$ 1-forma dual olan vektör alanı bir Killing vektör alanıdır.

Denklem (11.48)'den $(\epsilon\overline{\epsilon})_2$ bileneer 2-form için,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_A}(\epsilon\overline{\epsilon})_2 =& \frac{1}{36}F \underset{3}{\wedge} i_{X_A}(\epsilon\overline{\epsilon})_5 + \frac{1}{144}e_A \wedge (F \underset{4}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_5) - \frac{1}{3}(\epsilon\overline{\epsilon})_1 \underset{1}{\wedge} i_{X_A}F \\ &+ \frac{1}{18}(\epsilon\overline{\epsilon})_5 \underset{3}{\wedge} i_{X_A}F\end{aligned} \tag{11.54}$$

olarak hesaplanır ve bu ayrıca,

$$d(\epsilon\overline{\epsilon})_2 = (\epsilon\overline{\epsilon})_1 \underset{1}{\wedge} F \tag{11.55}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon})_2 = \frac{11}{72}F \underset{4}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_5 \tag{11.56}$$

denklemleri bulunur. Bu yüzden KY denklemini sağlamamaktadır.

$p = 5$ bilineer form denklemi için

$$\begin{aligned}\nabla_{X_A}(\epsilon\overline{\epsilon})_5 =& \frac{1}{6}(e_A \wedge F) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_2 - \frac{1}{3}i_{X_A}F \wedge (\epsilon\overline{\epsilon})_2 + \frac{1}{6}i_{X_A}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_6 \\ &- \frac{1}{36}(e_A \wedge F) \underset{3}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_6 + \frac{1}{6}(e_A \wedge F) \underset{5}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_{10}\end{aligned} \tag{11.57}$$

olarak yazılır. Burada denklemin sağ tarafındaki terimler $(\widetilde{X}\wedge F)\underset{k}{\wedge}\alpha = kF\underset{k-1}{\wedge}i_X\alpha + (-1)^k\widetilde{X}\wedge(F\underset{k}{\wedge}\alpha)$ özdeşliği kullanarak daha açık bir şekilde yazılabilir. (11.57)'ın dış türevini ve ko-türevini alırsak,

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_5 = -F\wedge(\epsilon\bar{\epsilon})_2 + \frac{1}{24}F\underset{4}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_{10} \tag{11.58}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_5 = \frac{2}{3}F\underset{1}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_1 - \frac{1}{18}(\epsilon\bar{\epsilon})_6\underset{4}{\wedge}F \tag{11.59}$$

bulunur ve bu yüzden KY denklemini sağlamamaktadır.

$p=6$ bilineer form denklemi için,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_6 =& \frac{1}{144}(e_A\wedge F)\underset{4}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_9 - \frac{1}{3}(\epsilon\bar{\epsilon})_5\underset{1}{\wedge}i_{X_A}F + \frac{1}{18}(\epsilon\bar{\epsilon})_9\underset{3}{\wedge}i_{X_A}F\\ &+ \frac{1}{6}(e_A\wedge F)\wedge(\epsilon\bar{\epsilon})_1 - \frac{1}{12}(e_A\wedge F)\underset{2}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_5\end{aligned} \tag{11.60}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_6 = \frac{1}{3}F\underset{1}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_5 + \frac{1}{6}F\wedge(\epsilon\bar{\epsilon})_1 \tag{11.61}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_5 = -\frac{1}{144}F\underset{4}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_9 + \frac{7}{6}F\underset{1}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_1 + F\underset{2}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_5 \tag{11.62}$$

olarak hesaplanır ve bu yüzden KY denklemini sağlamamaktadır.

$p=9$ bilineer form denklemi için,

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_9 = \frac{1}{6}(e_A\wedge F)\underset{1}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_6 - \frac{1}{36}(e_A\wedge F)\underset{3}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_{10} - \frac{1}{3}i_{X_A}F\wedge(\epsilon\bar{\epsilon})_6 + \frac{1}{6}F\underset{3}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_{10} \tag{11.63}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_9 = -\frac{1}{3}\Big(F\wedge(\epsilon\bar{\epsilon})_6 + F\underset{2}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_{10}\Big) \tag{11.64}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_9 = -\frac{1}{6}F\underset{3}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_{10} \tag{11.65}$$

olarak hesaplanır ve bu yüzden KY denklemini sağlamamaktadır.

$p=10$ bilineer form denlemi için,

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_{10} = -\frac{1}{12}(e_A\wedge F)\underset{2}{\wedge}(\epsilon\bar{\epsilon})_9 - \frac{1}{3}(\epsilon\bar{\epsilon})_9\underset{1}{\wedge}i_{X_A}F + \frac{1}{6}(e_A\wedge F)\wedge(\epsilon\bar{\epsilon})_5 \tag{11.66}$$

ve

$$d(\epsilon\overline{\epsilon})_{10} = -\frac{1}{3} F \underset{1}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_9 \tag{11.67}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon})_{10} = -\frac{1}{3}\Big(F \wedge (\epsilon\overline{\epsilon})_5 + F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon})_9 \Big) \tag{11.68}$$

olarak hesaplanır ve bu yüzden KY denklemini sağlamamaktadır. Bu nedenle, 1-form bilineer hariç süpergravite Killing spinörlerinin tüm yüksek dereceli bilineer formları , KY formlara karşılık gelmez ve farklı tipteki denklemleri sağlar.

Şimdi bilineer formların M_4 ve M_7 üzerine ayrışımını ele alacağız. ϵ süpergravite Killing spinörü (11.5) olarak ayrışabildiğinden dolayı, spinör bilineerleri $\epsilon\overline{\epsilon} = \{\epsilon_4\overline{\epsilon}_4, \epsilon_7\overline{\epsilon}_7\}$ olarak ayrışır. $\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)} := \epsilon_4\overline{\epsilon}_4$ ve $\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)} := \epsilon_7\overline{\epsilon}_7$ tanımlarını yaparsak, çarpım manifoldlarında p-form bilineerler

$$(\epsilon\overline{\epsilon})_p = \{(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_p, (\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_p\} \tag{11.69}$$

eşitliğine karşılık gelir. Diferensiyel formların derecesi hacim formundan daha büyük olamayacağı için,

$$\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)} = (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 + (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.70}$$

$$\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)} = (\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_1 + (\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_2 + (\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_5 + (\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_6 \tag{11.71}$$

eşitliklerine sahip olunur.

Ayrıca, M_4ve M_7 üzerindeki spinör iç çarpım seçeneklerine bağlı olarak, ϵ_4 ve ϵ_7'den oluşturulan sıfır olmayan bilineerlerin özellikleri belirlenebilir. M_4 Lorentzsel manifoldu olup spinör uzayı $\mathbb{C}^2 \bigoplus \mathbb{C}^2$'ye karşılık gelmektedir ve spinörler Dirac-Weyl spinörleridir. M_7 ise Riemannsal manifoldu olup spinör uzayı $\mathbb{R}^8$'e karşılık gelmektedir ve spinörler Majorana spinörleridir. Ekte bulunan tablo ek 2'den dolayı tablo (11.1)'de verilen bileneerlere sahip olunur. Bu nedenle, çarpım manifoldları üzerindeki bilineer formların ayrışmasında dört farklı durumu ayrı ayrı ele almalıyız.

i) $M_4 : \mathbb{C}^*$-sym ξ ve $M_7 : \mathbb{R}$-çarpık ξ için

Çizelge 11.1: Farklı spinör iç çarpım seçenekleri için sıfır-olmayan bilineerlerin özellikleri

iç çarpım	1	2	5	6
i) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sim ξ	R	I		
M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ	$\times$	✓	$\times$	✓
ii) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sim ξ	R	I		
M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
iii) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$	✓	✓		
M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ	$\times$	✓	$\times$	✓
iv) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$	✓	✓		
M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Yukarıdaki tabloda sıfır-olmayan bilineerleri göz önüne aldığımız zaman ve denklem (11.4)'den F akı 4-formun bileşenlerini dikkate aldığımızda, 1-form bilineer denkleminin ayrışımı

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = -\frac{i\lambda}{6} i_{X_a} z_4 \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.72}$$

$$0 = \frac{\mu}{144}\phi \underset{4}{\wedge} i_{X_\alpha}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_6 - \frac{\mu}{6} i_{X_\alpha}\phi \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_2 \tag{11.73}$$

olarak yazılır. (11.72) eşitliğinde λ reel ve (11.73) eşitliğinde ise $\mu = 0$ olmalıdır. Ayrıca (11.72) eşitliğinden,

$$d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = -\frac{i\lambda}{3} z_4 \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.74}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = 0 \tag{11.75}$$

eşitliklerini elde ederiz. O zaman $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1$,

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = \frac{1}{2} i_{X_a} d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.76}$$

denklemini sağlar ve M_4 üzerine 1-form bilineerin indirgenmesi bir KY 1-formdur.

Benzer şekilde, denklem (11.54) 2-form bilineer denklemi

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = -\frac{i\lambda}{3}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \underset{1}{\wedge} i_{X_a}z_4 \tag{11.77}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_2 = 0 \tag{11.78}$$

olarak ayrışır ve (11.77)'den

$$d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = i\lambda z_4 \underset{1}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.79}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = 0 \tag{11.80}$$

eşitliklerini elde ederiz. O zaman $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2$,

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = \frac{1}{3}i_{X_a}d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.81}$$

denklemini sağlar ve bir KY 2-formdur.

Fakat (11.78)'deki eşitlik $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(7)})_2$'nin bir paralel form olduğunu söylemektedir ve bundan dolayı ϵ_7 paralel spinöründen oluşturulmalıdır. Bu denklem, (11.23) ve (11.24)'de λ'nın 0 olmasını ima etmektedir. O zaman M_4 üzerindeki bilineerler paralel formlara karşılık gelir ve ayrıca ϵ_4 bir paralel spinördür. Dolayısıyla, iç çarpım seçimi, F akısını yok olmaya zorlar ve 5-form ve 6-form bilineer denklemlerin ayrıştırılması da bunu ima eder. O zaman sonuç olarak ilk çarpım seçimi sadece Mink$_4 \times G_2$ çözümünü vermektedir.

ii) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sim ξ ve M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$ için

Bu durumda M_7 üzerinde bütün bilineer formlar yukarıda belirtilen Tablo 10.1'den dolayı otomatik olarak sıfırdır. Bu yüzden yedi-boyutlu kısımların ayrışımları aşikardır ve μ üzerinde bir kısıtlama vermez. M_4 için seçilen iç çarpım birinci durumdaki ile aynıdır ve

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = \frac{1}{2}i_{X_a}d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.82}$$

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = \frac{1}{3}i_{X_a}d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.83}$$

denklemleri sağladığı için, dört-boyutlu kısmın bileşenleri KY formlara karşılık gelir.

Dahası bunlar özel KY formlara karşılık gelir ve

$$\nabla_{X_a} d(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = \frac{2}{9}\lambda^2 e_a \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.84}$$

$$\nabla_{X_a} d(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_2 = \frac{1}{3}\lambda^2 e_a \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.85}$$

olarak hesaplanır. Bu, ϵ_4'ün bir geometrik Killing spinörüne karşılık gelmesi gerektiği anlamına gelir. Bu aynı zamanda λ üzerinde bir kısıtlama gerektirmez ve bundan dolayı bu iç çarpım seçimi için her türlü çözüm mümkündür. Bu çözümler $AdS_4 \times$ zayıf G_2, $AdS_4 \times S^7$ ve Mink$_4 \times G_2$'dir.

iii) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ ve M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ için

Bu durum için M_7 üzerinde seçilen spinör iç çarpımı birinci durum (i) ile aynıdır. Bu nedenle bu seçim ayrıca $\lambda = 0$ ve $\mu = 0$ olduğunu ve bundan dolayı M_4ve M_7 üzerindeki bilineerler paralel formlara karşılık gelir. Çözüm ise sadece Mink$_4 \times G_2$'dir.

iv) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ ve M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$ için

Bu durum için M_7 üzerinde seçilen spinör iç çarpımı ikinci durum (ii) ile aynıdır. Bu yüzden λ ve μ üzerinde kısıtlama yoktur. M_4 üzerinde seçilen spinör iç çarpımın 1-form ve 2-form bilineerlerin reel ya da saf sanal olmasını belirlemez ve bundan dolayı sadece λ reel olarak seçildiğinde $AdS_4 \times$ zayıf G_2 ve $AdS_4 \times S^7$ çözümlerine sahip olunur. Mink$_4 \times G_2$ çözümü zaten $\lambda = \mu = 0$ seçimi için vardır.

Özetlenecek olursa, M_{11} üzerinde $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$ için spinör iç çarpım seçimi ve $M_4 \times M_7$ çözümleri arasıdaki ilişki aşağıdaki tablo (11.2)'de görülmektedir.

$\mathbb{R}$-sim ξ İç Çarpımı:

Bu ikinci durumda spinör iç çarpımında M_{11} on bir-boyutlu Lorentzian manifoldu üzerinde ξ involüsyonu ile $\mathbb{R}$-sym olarak seçildi ve bu durumun bilineer formlarının ayrışımı dikkate

Çizelge 11.2: Seçilen $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$ iç çarpım ile çözümler arasındaki ilişki

M_{11} : $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$	Çözümler
i) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sym ξ M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ	Mink$_4 \times G_2$
ii) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sym ξ M_7 : $\mathbb{R}$-sym $\xi\eta$	Mink$_4 \times G_2$ $AdS_4 \times S^7$, $AdS_4 \times$ zayıf G_2
iii) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ	Mink$_4 \times G_2$
iv) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ M_7 : $\mathbb{R}$-sym $\xi\eta$	Mink$_4 \times G_2$ $AdS_4 \times S^7$, $AdS_4 \times$ zayıf G_2 (λ reel ise)

alındı. p-form bileneer denklemi (11.39)'deki gibi

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = -\frac{1}{24}\Big((\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}).\epsilon\overline{\epsilon}\Big)_p - \frac{1}{24}\Big(\epsilon\overline{(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}).\epsilon}\Big)_p \tag{11.86}$$

aynı şekilde yazılmaktadır. Fakat bu durumdaki involüsyon ξ'dir. Bir ω Clifford formu ve bir ψ spinörü için, $\overline{\omega.\psi} = \psi^\xi.\omega^\xi = \overline{\psi}.\omega^\xi$ eşitliklerine sahip oluruz. Bu yüzden de

$$\overline{(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}).\epsilon} = \overline{\epsilon}(F.\widetilde{X} - 3.\widetilde{X}F) \tag{11.87}$$

olarak yazılır ve burada $F^\xi = F$ ve $\widetilde{X}^\xi = \widetilde{X}$ kullanılmıştır. Denklem (11.86)'a $\frac{1}{6}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.(F.\widetilde{X} - \widetilde{X}.F)\Big)_p$ terimini ekleyip çıkartırsak,

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = -\frac{1}{24}\Big([(\widetilde{X}.F - 3F.\widetilde{X}), \epsilon\overline{\epsilon}]_{+Cl}\Big)_p + \frac{1}{6}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}[F, \widetilde{X}]_{Cl}\Big)_p \tag{11.88}$$

olarak hesaplanır. Burada $[\ ,\ ]_{+Cl}$ Clifford antikomütatörüdür. Dış çarpım ve iç türev cinsinden süpergravite Killing form denklemi (11.46) ve (11.47)'den

$$\nabla_X(\epsilon\overline{\epsilon})_p = \frac{1}{12}\Big([\widetilde{X} \wedge F, \epsilon\overline{\epsilon}]_{+Cl}\Big)_p - \frac{1}{6}\Big([i_X F, \epsilon\overline{\epsilon}]_{+Cl}\Big)_p - \frac{1}{3}\Big(\epsilon\overline{\epsilon}.i_X F\Big)_p \tag{11.89}$$

olarak yazılır. $\mathbb{R}$-sim ξ iç çarpımı için sıfır-olmayan bilineer formlar $0-$, $1-$, $4-$, $5-$, $8-$ ve $9-$ formlardır ve ϵ süpergravite Kiliing spinörü için,

$$\epsilon\bar{\epsilon} = (\epsilon\bar{\epsilon})_0 + (\epsilon\bar{\epsilon})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon})_4 + (\epsilon\bar{\epsilon})_5 + (\epsilon\bar{\epsilon})_8 + (\epsilon\bar{\epsilon})_9 \tag{11.90}$$

olmaktadır. Önceki bölümde yapılan benzer hesaplamalar ile denklem (11.89)'den farklı dereceler için bilineer form denklemleri bulunabilir.

$p = 0$ için

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_0 = \frac{1}{144} F \underset{4}{\wedge} i_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_5 \tag{11.91}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_0 = \frac{1}{144} F \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5 \tag{11.92}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_0 = 0 \tag{11.93}$$

olarak hesaplanır. O zaman $(\epsilon\bar{\epsilon})_0$, $\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_0 = i_{X_A} d(\epsilon\bar{\epsilon})_0$ eşitliğini sağlar ve bundan dolayı bir KY 0-formdur.

$p = 1$ için

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_1 = \frac{1}{144}(e_A \wedge F) \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_4 + \frac{1}{18}(\epsilon\bar{\epsilon})_4 \underset{3}{\wedge} i_{X_A} F \tag{11.94}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_1 = -\frac{1}{36} F \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_4 \tag{11.95}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_1 = \frac{1}{144} F \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_4 \tag{11.96}$$

olarak hesaplanır. $p = 4$ için

$$\begin{aligned}\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_4 =& \frac{1}{6}(e_A \wedge F) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_1 - \frac{1}{36}(e_A \wedge F) \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5 + \frac{1}{144} F \underset{4}{\wedge} i_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_9 \\ &+ \frac{1}{3}(\epsilon\bar{\epsilon})_1 \wedge i_{X_A} F + \frac{1}{6} i_{X_A} F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5\end{aligned} \tag{11.97}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_4 = -\frac{7}{6} F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_1 + \frac{1}{12} F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5 + \frac{5}{144} F \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_9 \tag{11.98}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_4 = \frac{5}{6} F \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_1 - \frac{1}{18} F \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5 \tag{11.99}$$

olarak hesaplanır.

$p = 5$ için

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_5 = \frac{1}{6}e_A \wedge F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_0 - \frac{1}{12}(e_A \wedge F) \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_4 + \frac{1}{144}(e_A \wedge F) \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_8 - \frac{1}{3}(\epsilon\bar{\epsilon})_4 \underset{1}{\wedge} i_{X_A}F + \frac{1}{18}(\epsilon\bar{\epsilon})_8 \underset{3}{\wedge} i_{X_A}F \tag{11.100}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_5 = \frac{1}{2}F \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_4 + \frac{1}{12}F \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_8 \tag{11.101}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_5 = -\frac{7}{6}F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_0 + \frac{13}{12}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_4 - \frac{19}{144}F \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_8 \tag{11.102}$$

olarak heasplanır.

Benzer şekide $p = 8$ için

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_8 = \frac{1}{6}(e_A \wedge F) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5 - \frac{1}{36}(e_A \wedge F) \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_9 - \frac{1}{3}i_{X_A}F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_5 + \frac{1}{6}i_{X_A}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_9 \tag{11.103}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_8 = -\frac{1}{2}F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_5 - \frac{1}{4}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_9 \tag{11.104}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_8 = \frac{1}{6}F \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_5 + \frac{5}{36}F \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_9 \tag{11.105}$$

olarak hesaplanır.

Son olarak $p = 9$ için

$$\nabla_{X_A}(\epsilon\bar{\epsilon})_9 = \frac{1}{6}e_A \wedge F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_4 - \frac{1}{12}(e_A \wedge F) \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_8 - \frac{1}{3}(\epsilon\bar{\epsilon})_8 \underset{1}{\wedge} i_{X_A}F \tag{11.106}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon})_9 = -\frac{1}{6}F \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_8 \tag{11.107}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon})_9 = -\frac{1}{2}F \wedge (\epsilon\bar{\epsilon})_4 + \frac{3}{4}F \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon})_8 \tag{11.108}$$

olarak hesaplanır. Bu yüzden sadece 0-fom bilineer KY forma karşılık gelir ve diğer yüksek dereceli bilineerler farklı denklemleri sağlamaktadır.

Şimdi bilineer form denklemlerinin M_4 ve M_7 üzerine ayrışmasını inceleyeceğiz. Çarpım manifoldları üzerinde bilineer formlar

$$\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)} = (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \tag{11.109}$$

$$\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)} = (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_0 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \tag{11.110}$$

olarak yazılır. Ekte bulunan Tablo (**??**) spinör iç çarpımına bağlı olarak bilineer formların özellikleri aşağıdaki Tablo (11.3)'te verilmektedir. Bir önceki çarpım durumunda olduğu gibi 4 farklı ayrışma ele alınacaktır.

Çizelge 11.3: Farklı spinör iç çarpım seçenekleri için sıfır-olmayan bilineerlerin özellikleri

iç çarpım	0	1	4	5
i) $M_4 : \mathbb{C}^*$-sym ξ	R	R	R	
$M_7 : \mathbb{R}$-çarpık ξ	×	×	×	×
ii) $M_4 : \mathbb{C}^*$-sym ξ	R	R	R	
$M_7 : \mathbb{R}$-sym $\xi\eta$	✓	×	✓	×
iii) $M_4 : \mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$	×	✓	×	
$M_7 : \mathbb{R}$-çarpık ξ	×	×	×	×
iv) $M_4 : \mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$	✓	×	✓	
$M_7 : \mathbb{R}$-sym $\xi\eta$	✓	×	✓	×

i) $M_4 : \mathbb{C}^*$-sim ξ ve $M_7 : \mathbb{R}$-çarpık ξ için

Bu iç çarpım seçeneği için M_4 üzerinde bilineer form denklemleri

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0 =&0 && (11.111)\\
\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 =&\frac{i\lambda}{36} z_4 \underset{3}{\wedge} i_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 + \frac{i\lambda}{144} e_a \wedge (z_4 \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4) \\
&+ \frac{i\lambda}{18}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \underset{3}{\wedge} i_{X_a} z_4 && (11.112)\\
\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 =&\frac{i\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \wedge i_{X_a} z_4 && (11.113)
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu yüzden $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0$ sabittir ve bilineer formların dış türev ve ko-türevleri alındığında,

$$\begin{aligned}
d(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 =&0 && (11.114)\\
\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 =&\frac{i\lambda}{18} z_4 \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 && (11.115)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 =&0 && (11.116)\\
\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 =&-\frac{i\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \underset{1}{\wedge} z_4 && (11.117)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O zaman denklem (11.111) - (11.113) ile denklem (11.114) - (11.117) karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 =&-\frac{1}{4} e_a \wedge \delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 && (11.118)\\
\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 =&-e_a \wedge \delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 && (11.119)
\end{aligned}$$

KKKY denklemlerini sağladığını görülmektedir. Dahası bunların ayrıca da

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_a}\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 =&-\frac{4\lambda^2}{9} i_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 && (11.120)\\
\nabla_{X_a}\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 =&-\frac{\lambda^2}{9} i_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 && (11.121)
\end{aligned}$$

özel KKKY formlara karşılık geldiği görülmektedir. Bu yüzden ϵ_4, özel KKKY formlarına karşılık gelen süpergravite Killing formları üreten bir geometrik Killing spinörüdür. M_7 üzerindeki bütün bilineer form denklemleri aşikardır ve bundan dolayı bu iç çarpım seçimi için bütün çözüm tiplerine sahip olunmaktadır. Bu çözümler $AdS_4 \times$ zayıf G_2, $AdS_4 \times S^7$ ve Mink$_4 \times G_2$'dir.

ii) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sim ξ ve M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$ için

Bu durum için, M_4 bir önceki durum ile aynıdır. Bundan dolayı $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4$ özel KKKY formlardır. M_7 için,

$$
\begin{aligned}
p = 0: \quad & \nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_0 = 0 && (11.122)\\
p = 1: \quad & 0 = \frac{\mu}{36}\phi \underset{3}{\wedge} i_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 + \frac{\mu}{18}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \underset{3}{\wedge} i_{X_\alpha}\phi \\
& \quad + \frac{\mu}{144}e_\alpha \wedge (\phi \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4) && (11.123)\\
p = 4: \quad & \nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 = 0 && (11.124)\\
p = 5: \quad & 0 = \frac{\mu}{6}e_\alpha \wedge \phi \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_0 - \frac{\mu}{12}(e_\alpha \wedge \phi) \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \\
& \quad - \frac{\mu}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \underset{1}{\wedge} i_{X_\alpha}\phi && (11.125)
\end{aligned}
$$

denklemleri bulunur. $\mu = 0$ olmalıdır, yani 0- ve 4-form paraleldir. Bundan dolayı çözümler $\lambda \neq 0$ için $AdS_4 \times$ zayıf G_2, $AdS_4 \times S^7$ ve $\mu = 0$ için Mink$_4 \times G_2$'dir.

iii) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ ve M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ için

Bu durum için M_4 üzerinde

$$
\begin{aligned}
p = 0: \quad & 0 = 0 && (11.126)\\
p = 1: \quad & \nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = 0 && (11.127)\\
p = 4: \quad & 0 = \frac{i\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \wedge i_{X_a}z_4 && (11.128)
\end{aligned}
$$

olarak yazılır ve $\lambda = 0$'dır. M_7 üzerinde yedi-boyutlu denklemler aşikardır ve çözüm sadece Mink$_4 \times G_2$'dir.

iv) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ ve M_7 : $\mathbb{R}$-sym $\xi\eta$ için

Bu durumda M_4 için durum (iii) ile ve M_7 içinde de durum (ii) ile aynıdır. Bu yüzden λ ve μ yok olur ve çözüm sadece Mink$_4 \times G_2$'dir.

Unutulmamalıdır ki, ilgili spinor iç çarpım seçimleri için AdS çözümleri mevcut olduğunda, süpergravite Killing formları çarpım manifoldları üzerinde özel KKKY formlarına ayrışmaktadır. Özetleyecek olursak, M_{11} üzerinde $\mathbb{R}$-sym ξ iç çarpımı için, spinör iç çarpım seçimi ve $M_4 \times M_7$ çözümleri arasıdaki ilişki aşağıdaki tablo (11.4)'te görülmektedir.

Çizelge 11.4: Seçilen $\mathbb{R}$-sym ξ iç çarpım ile çözümler arasındaki ilişki

M_{11} : $\mathbb{R}$-sim ξ	Çözümler
i) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sim ξ M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ	Mink$_4 \times G_2$ $AdS_4 \times S^7$, $AdS_4 \times$ zayıf G_2
ii) M_4 : $\mathbb{C}^*$-sim ξ M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$	Mink$_4 \times G_2$ $AdS_4 \times S^7$, $AdS_4 \times$ zayıf G_2
iii) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ M_7 : $\mathbb{R}$-çarpık ξ	Mink$_4 \times G_2$
iv) M_4 : $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$ M_7 : $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$	Mink$_4 \times G_2$

11.2 $M_7 \times M_4$ Tipi Çözümler

Bu kısımda, M_{11} on bir-boyutlu arkaplanlanın çarpım yapısı $M_{11} = M_7 \times M_4$ olarak ele alınacaktır. Burada M_7 bir Lorentzsel spin 7-manifoldudur ve M_4 Riemannsal spin 4-manifoldudur. On bir-boyut indisleri $A = \{a, \alpha\}$ olarak ayrışacaktır. Burada $a = 0, 1, 2, \ldots, 6$ ve $\alpha = 7, 8, 9, 10$'dur. Clifford cebir bazı,

$$e^A = \{1_7 \otimes e^\alpha, e^a \otimes z_4\} \tag{11.129}$$

olarak bileşenlerine ayrılır. Burada 1_7, M_7 üzerinde birim; e^a, M_7 üzerinde Clifford cebrinin bazı; z_4, M_4 üzerinde hacim form ve e^α, M_4 üzerinde Clifford cebrinin bazıdır. F akı

4-form,

$$F = \{\lambda\phi, \mu z_4\} \tag{11.130}$$

olarak bileşenlerine ayrılır. Burada λ ve μ sabitlerdir. ϕ ise M_7 üzerinde 4-formdur. Benzer şekilde ϵ süpersimetri parametresi

$$\epsilon = \epsilon_7 \otimes \epsilon_4 \tag{11.131}$$

olarak yazılabilir. Alan denklemleri bir önceki bölümdeki gibi bileşenlerine ayrıştırılır. Maxwell-benzeri denklem,

$$d *_7 \phi = \mu\phi \tag{11.132}$$

$$d\phi = 0 \tag{11.133}$$

olarak yazılır. Bunun anlamı ϕ, M_7 üzerinde KKKY 4-formdur ve bir geometrik Killing spinörü tarafından üretilmiştir. z_4 hacim formu aynı zamanda KY 4-form olduğundan, F akı formu KY ve KKKY formları ve dolayısıyla $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ için geometrik Killing spinörleri tarafından üretirilir.

Einstein alan denkleminin ayrışımı aşağıdaki denklemlerde M_4 ve M_7 üzerinde sırasıyla

$$i_{X_b} P_a = \frac{\lambda^2}{2}\Big(g_3(i_{X_a}\phi, i_{X_b}\phi)\frac{1}{3}g_4(\phi,\phi)g_{ab}\Big) - \frac{\mu^2}{6}g_{ab} \tag{11.134}$$

$$i_{X_\beta} P_\alpha = \frac{1}{3}\Big(\mu^2 - \frac{\lambda^2}{2}g_4(\phi,\phi)\Big)g_{\alpha,\beta} \tag{11.135}$$

olarak yazılır. Bunun anlamı $\lambda = \mu = 0$ için hem M_7 hem de M_4 Ricci-düz manifoldlardır. $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$ özel durumu için M_7 negatif eğrilikli, M_4 ise pozitif eğrilikli Einstein manifoldlarıdır.

Süpergravite Killing spinör denkleminin çarpım manifoldlarına ayrışması

$$\begin{aligned}\nabla_{X^a}\epsilon_4 \otimes \epsilon_7 + \epsilon_4 \nabla_{X^\alpha}\epsilon_7 =& \frac{1}{12}\lambda\phi.\epsilon_7 \otimes e^\alpha.\epsilon_4 + \frac{1}{12}\mu e^a.\epsilon_7 \otimes \epsilon_4 \\ &\mp \frac{1}{6}\epsilon_7 \otimes \mu e^\alpha.\epsilon_4 \mp \frac{1}{24}\lambda(e^a.\phi - 3\phi.e^a).\epsilon_7 \otimes .\epsilon_4\end{aligned} \tag{11.136}$$

olarak hesaplanır. Burada $z_4.e^\alpha = -e^\alpha.z_4$ eşitliği kullanılmıştır ve M_4 Riemannian manifoldu için $z_4^2 = 1$'dir ve ayrıca $z_4.\epsilon_4 = \pm\epsilon_4$ varsayımı yapılacaktır. O zaman $\lambda = \mu = 0$

akısız durum için, çarpım manifoldları üzerinde iki tane denkleme sahip olunur.

$$\nabla_{X^a}\epsilon_7 = 0 \tag{11.137}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_4 = 0 \tag{11.138}$$

Bunun anlamı şudur ki, ϵ_7 ve ϵ_4 sırasıyla M_7 ve M_4 üzerinde paralel spinörlerdir ve hem M_7 hem de M_4 Ricci-düz manifoldlardır. Paralel spinörleri kabul eden 4-boyutlu Riemannsal manifoldlar $SU(2)$ holonomisi ile Calabi-Yau manifoldlarına karşılık gelir (ve aynı zamanda $Sp(1)$ holonomisi ile hiperkähler manifoldlarına karşılık gelir fakat $SU(2)$ holonomisi ile Calabi-Yau manifoldlarına eşdeğer olur). Paralel spinörleri kabul eden 7-boyutlu Ricci-düz manifoldlar Minkowski olmaktadırlar. Bu yüzden akısız durum $\text{Mink}_7 \times CY_2$'ye karşılık gelmektedir. Sadece iç akının varlığında $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$ olup

$$\nabla_{X^a}\epsilon_7 = \frac{\mu}{12}e^a.\epsilon_7 \tag{11.139}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_4 = \mp\frac{\mu}{6}e^\alpha.\epsilon_4 \tag{11.140}$$

olarak yazılır. Bundan dolayı ϵ_7 ve ϵ_4 sırasıyla M_7 ve M_4 üzerinde geometrik Killing spinörlerine karşılık gelir. Bu sebepten M_7 ve M_4 Einstein manifoldlarıdır. Geometrik Killing spinörlerini kabul eden tek 4-boyutlu Riemannsal manifold S^4'tür ve bu durumda çözüm $AdS_7 \times S^4$'e karşılık gelmektedir. Eğer hem iç hem de dış akı sıfırdan farklı ise ($\lambda \neq 0$) ve $\mu \neq 0$ ayrıca $\phi.\epsilon_7 = \pm\frac{1}{2}\epsilon_7$ eşitliği sağlanıyor ise süpergravite Killing spinör denklemi

$$\nabla_{X^a}\epsilon_7 = \frac{1}{12}\Big(\mu - \frac{\lambda}{4}\Big)e^a.\epsilon_7 \pm \frac{\lambda}{8}\phi.e^a.\epsilon_7 \tag{11.141}$$

$$\nabla_{X^\alpha}\epsilon_4 = \pm\frac{1}{6}\Big(\frac{\lambda}{4} - \mu\Big)e^\alpha.\epsilon_4 \tag{11.142}$$

olarak ayrışır. Bir önceki bölümde yaptığımız benzer hesaplamalar sonucunda eğer ϕ

$$(\mathcal{L}_{X^a} *_7 \phi).\epsilon_7 = \mu e^a.\epsilon_7 \tag{11.143}$$

koşulunu sağlarsa, denklem (11.139) ve (11.140) bir geometrik Killing spinörüne dönüşür ve hem ϵ_7 hem de ϵ_4 geometrik Killing spinörleridirler. Fakat bu durum yeni bir çözüm vermez ve çözüm $AdS_7 \times S^4$'e karşılık gelir. $\lambda \neq 0$ ve $\mu = 0$ durumu için alan denklemleri ve Killing spinör denklemi bir tutarsızlık verir ve bu nedenle bu durum bir çözüme karşılık gelmez.

Süpergravite Killing spinörünün bilineer formlarının ayrışımı farklı spinor iç çarpım seçenekleri için ayrı ayrı araştırılmalıdır. M_{11} üzerinde $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$ spinör iç çarpım seçimi için, süpergravite Killing formları

$$(\epsilon\bar{\epsilon})_p = \{(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_p, (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_p\} \tag{11.144}$$

denklem (11.48)'i sağlarlar ve sıfır-olmayan bilineer formlar sırasıyla M_7 ve M_4 üzerinde

$$\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)} = (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_2 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6 \tag{11.145}$$

$$\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)} = (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.146}$$

biçimindedirler. M_7 bir Lorentzsel 7-manifold olduğundan spinör uzayı $\mathbb{H}^4$'tür ve spinörleri, simplektik Majorana spinörleridir. M_4 bir Riemannsal 4-manifold olduğundan spinör uzayı $\mathbb{H} \bigoplus \mathbb{H}$'dir ve spinörleri, simplektik Dirac-Weyl spinörleridir.Ekte bulunan tablo (**??**)'den, Tablo (11.5)'de verilen seçilen iç çarpım seçenekleri için bilineerler oluşturulmaktadır. Bunlar için 4 farklı durum ele alınacaktır.

Çizelge 11.5: Farklı spinör iç çarpım seçenekleri için sıfır-olmayan bilineerlerin özellikleri

iç çarpım	1	2	5	6
i) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ	R	V	R	V
$M_4 : \mathbb{H}$-takas ξ	✓	×		
ii) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ	R	V	R	V
$M_4 : \mathbb{H}^- -$ sim $\bigoplus \mathbb{H}^- -$ sim $\xi\eta$	V	V		
iii) $M_7 : \mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$
$M_4 : \mathbb{H}$-takas ξ	✓	×		
iv) $M_7 : \mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$
$M_4 : \mathbb{H}^- -$ sim $\bigoplus \mathbb{H}^- -$ sim $\xi\eta$	V	V		

i) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ ve $M_4 : \mathbb{H}$-takas ξ için

Bu durumda M_7 üzerinde bilineer form denklemleri M_{11}'deki $(\epsilon\bar{\epsilon})_1$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_2$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_5$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_6$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_9$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_{10}$ denklemlerinin indirgenmesiyle,

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 = \frac{\lambda}{144}\phi \underset{4}{\wedge} i_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6 - \frac{\lambda}{6} i_{X_a}\phi \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_2 \tag{11.147}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_2 =& \frac{\lambda}{36}\phi \underset{3}{\wedge} i_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 + \frac{\lambda}{144} e^a \wedge (\phi \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5) \\ &- \frac{\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 \underset{1}{\wedge} i_{X_a}\phi + \frac{\lambda}{18}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \underset{3}{\wedge} i_{X_a}\phi\end{aligned} \tag{11.148}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 =& \frac{\lambda}{6}(e^a \wedge \phi) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_2 - \frac{\lambda}{3} i_{X_a}\phi \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_2 \\ &+ \frac{\lambda}{6} i_{X_a}\phi \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6 - \frac{\lambda}{36}(e_a \wedge \phi) \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6\end{aligned} \tag{11.149}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6 =& -\frac{\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \underset{1}{\wedge} i_{X_a}\phi + \frac{\lambda}{6}(e_a \wedge \phi) \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 \\ &- \frac{\lambda}{12}(e_a \wedge \phi) \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5\end{aligned} \tag{11.150}$$

$$0 = \frac{\lambda}{6}(e_a \wedge \phi) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6 - \frac{\lambda}{3} i_{X_a}\phi \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_6 \tag{11.151}$$

$$0 = \frac{\lambda}{6}(e_a \wedge \phi) \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \tag{11.152}$$

bulunurlarken, M_4 üzerinde ise

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = 0 \tag{11.153}$$

$$0 = -\frac{\mu}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \underset{1}{\wedge} i_{X_\alpha} z_4 \tag{11.154}$$

denklemleri bulunur. M_7 üzerinde denklem (11.151) ve (11.152), M_4 üzerinde denklem (11.154) görülebileceği gibi hem λ hem de μ yok edilmelidir, yani $\lambda = \mu = 0$ olmalıdır. O zaman bilineer formlar paraleldir ve bunlar ϵ_7 ve ϵ_4 paralel spinörleri tarafından üretilmişlerdir. Bundan doalyı bu durum akısız duruma karşılık gelir ve çözüm Mink$_7 \times CY_2$'dir.

ii) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ ve $M_4 : \mathbb{H}^- - \text{sim} \bigoplus \mathbb{H}^- - \text{sim}\ \xi\eta$ için

Bu seçenek için, M_7 üzerinde bilineer form denklemleri, durum (i) ile iç çarpımları aynı olduğu için aynıdır. M_4 üzerindeki denklemler ise

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = -\frac{\mu}{6} i_{X_\alpha} z_4 \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.155}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_2 = -\frac{\mu}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \underset{1}{\wedge} i_{X_\alpha} z_4 \tag{11.156}$$

olmaktadır. Bundan dolayı $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$'a sahip olunur. $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2$ saf vektör nicelikleri oldukları içiniç çarpım tablosundan μ bir reel sayıya karşılık gelir. Dahası denklem (11.155) ve (11.156)'den,

$$d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = -\frac{\mu}{3} z_4 \underset{2}{\wedge} (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.157}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = 0 \tag{11.158}$$

ve

$$d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = \mu(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \underset{1}{\wedge} z_4 \tag{11.159}$$

$$\delta(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = 0 \tag{11.160}$$

olmaktadır. Bu yüzden $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2$ KY formlara

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = \frac{1}{2} i_{X_\alpha} d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.161}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = \frac{1}{3} i_{X_\alpha} d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.162}$$

ve aslında bunlar özel KY formlara

$$\nabla_{X_\alpha} d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 = \frac{2\mu^2}{9} e_\alpha \wedge (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.163}$$

$$\nabla_{X_\alpha} d(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 = \frac{\mu^2}{3} e_\alpha \wedge (\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2 \tag{11.164}$$

karşılık gelirler. Bundan dolayı bu iç çarpım seçimi, $AdS_7 \times S^4$ çözümüne karşılık gelmektedir. ϵ_7 geometrik Killing spinörü bir özel KKKY formu olan ϕ akı bileşenini ve ϵ_4 ise geometrik Killing spinörü özel KY formlar olan $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\overline{\epsilon}^{(4)})_2$'yi üretir. Eğer $\mu = 0$ seçilirse çözüm Mink$_7 \times CY_2$'ye indirgenir ve bilineer formlar paralel formlara karşılık gelir.

iii) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ ve M_4 : $\mathbb{H}$-takas ξ için

M_7'deki tüm bilineer formlar da bu iç çarpım seçiminde sıfır olmadığından, bilineer formlar tarafından sağlanan denklemler, önceki iç çarpım seçimlerindekilerle aynıdır. Benzer şekilde, M_4 üzerindeki denklemler durum (i) ile aynı iç çarpıma sahip olduğundan aynıdır ve $\lambda = \mu = 0$'a sahip oluruz. Bu yüzden, ϵ_7 ve ϵ_4 paralel spinörlerdir ve bu seçim

$\mathrm{Mink}_7 \times CY_2$ çözümünü verir.

iv) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ ve M_4 : $\mathbb{H}^-$-sim $\bigoplus \mathbb{H}^-$-sym $\xi\eta$ için,

Bu seçimdeki bilineer form denklemleri durum (ii) ile ve $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$'a sahip oluruz. ϵ_7 geometrik Killing spinörü bir özel KKKY formu olan ϕ akı bileşenini ve ϵ_4 geometrik Killing spinörü ise özel KY formlar olan $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_2$'yi üretir. Bu yüzden çözümler $AdS_7 \times S^4$ ve $\mathrm{Mink}_7 \times CY_2$'ye karşılık gelir. Sonuç olarak M_{11} üzerinde $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$ spinör iç çarpım seçimi için elde ettiğimiz çözümler Tablo (11.6)'da verilmektedir.

Çizelge 11.6: Seçilen $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$ iç çarpım ile çözümler arasındaki ilişki

M_{11} : $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$	Çözümler
i) M_7 : $\mathbb{H}^-$-sim ξ M_4 : $\mathbb{H}$-takas ξ	$\mathrm{Mink}_7 \times CY_2$
ii) M_7 : $\mathbb{H}^-$-sym ξ M_4 : $\mathbb{H}^- - \mathrm{sim} \bigoplus \mathbb{H}^- - \mathrm{sim}\ \xi\eta$	$\mathrm{Mink}_7 \times CY_2$ $AdS_7 \times S^4$
iii) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ M_4 : $\mathbb{H}$-takas ξ	$\mathrm{Mink}_7 \times CY_2$
iv) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ M_4 : $\mathbb{H}^- - \mathrm{sim} \bigoplus \mathbb{H}^- - \mathrm{sim}\ \xi\eta$	$\mathrm{Mink}_7 \times CY_2$ $AdS_7 \times S^4$

AdS çözümlerinin varlığında süpergravite Killing formlarının özel KY formlarına ayrıldığı dikkate alınmalıdır. M_{11} üzerinde $\mathbb{R}$-sym ξ spinör iç çarpım seçimi için, süpergravite Killing formları,

$$(\epsilon\bar{\epsilon})_p = \{(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_p, (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_p\} \tag{11.165}$$

denklem (11.89)'i sağlamaktadırlar ve sıfır-olmayan bilineer formlar sırasıyla M_7 ve M_4 üzerinde

$$\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)} = (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_0 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \tag{11.166}$$

$$\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)} = (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 + (\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \tag{11.167}$$

olmaktadırlar. Tablo (11.7)'de verildiği gibi, M_7 ve M_4'te seçilen iç çarpımlar için bilineer formların özelliklerine sahip olunur.

Çizelge 11.7: Farklı spinör iç çarpım seçenekleri için sıfır-olmayan bilineerlerin özellikleri

iç çarpım	0	1	4	5
i) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ	R	R	R	R
$M_4 : \mathbb{H}$-takas ξ	✓	✓	✓	
ii) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ	R	R	R	R
$M_4 : \mathbb{H}^- -$ sim $\bigoplus \mathbb{H}^- -$ sim $\xi\eta$	R	V	R	
iii) $M_7 : \mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$
$M_4 : \mathbb{H}$-takas ξ	✓	✓	✓	
iv) $M_7 : \mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$
$M_4 : \mathbb{H}^- -$ sim $\bigoplus \mathbb{H}^- -$ sim $\xi\eta$	R	V	R	

Süpergravite Killing formlarının ayrışımı için dört farklı seçimi düşünelim:

i) $M_7 : \mathbb{H}^-$-sim ξ ve $M_4 : \mathbb{H}$-takas ξ için

$(\epsilon\bar{\epsilon})_0$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_1$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_4$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_5$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_8$, $(\epsilon\bar{\epsilon})_9$ için bilineer form denklemleri M_7 üzerinde

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_0 = \frac{\lambda}{144}\phi \underset{4}{\wedge} i_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \tag{11.168}$$

$$\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 = \frac{\lambda}{144}(e_a \wedge \phi) \underset{4}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 + \frac{\lambda}{18}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \underset{3}{\wedge} i_{X_a}\phi \tag{11.169}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 =& \frac{\lambda}{6}(e_a \wedge \phi) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 - \frac{\lambda}{36}(e_a \wedge \phi) \underset{3}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \\ &+ \frac{\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_1 \wedge i_{X_a}\phi + \frac{\lambda}{6} i_{X_a}\phi \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5\end{aligned} \tag{11.170}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_a}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 =& \frac{\lambda}{6} e_a \wedge \phi \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_0 - \frac{\lambda}{12}(e_a \wedge \phi) \underset{2}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \\ &- \frac{\lambda}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \underset{1}{\wedge} i_{X_a}\phi\end{aligned} \tag{11.171}$$

$$0 = \frac{\lambda}{6}(e_a \wedge \phi) \underset{1}{\wedge} (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 - \frac{\lambda}{3} i_{X_a}\phi \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_5 \tag{11.172}$$

$$0 = \frac{\lambda}{6} e_a \wedge \phi \wedge (\epsilon\bar{\epsilon}^{(7)})_4 \tag{11.173}$$

ve M_4 üzerinde

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0 = 0 \tag{11.174}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = \frac{\mu}{18}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \underset{3}{\wedge} i_{X_\alpha} z_4 \tag{11.175}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 = \frac{\mu}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \wedge i_{X_\alpha} z_4 \tag{11.176}$$

olarak bulunur. Denklem (11.172) ve (11.173) bize $\lambda = 0$'ı vermektedir. Denklem (11.174)'dan ise $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0$ bir sabittir ve (11.175) ve (11.176)'den

$$d(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = 0 \tag{11.177}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 = \frac{\mu}{18}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \underset{4}{\wedge} z_4 \tag{11.178}$$

ve

$$d(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 = 0 \tag{11.179}$$

$$\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 = -\frac{\mu}{3}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \underset{1}{\wedge} z_4 \tag{11.180}$$

denklemleri bulunur. Bu yüzden, $(\widetilde{X} \wedge F) \underset{k}{\wedge} \alpha = kF \underset{k-1}{\wedge} i_{X^\alpha} + (-1)^k \widetilde{X} \wedge (F \underset{k}{\wedge} \alpha)$ özdeşliği tekrardan kullanılırsa

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = -\frac{1}{4} e_\alpha \wedge \delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.181}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 = -e_\alpha \wedge \delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \tag{11.182}$$

bulunurlar; yani $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4$ nicelikleri KKKY formlara karşılık gelir. Dahası bunlar

$$\nabla_{X_\alpha}\delta(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 = -\frac{4\mu^2}{9} i_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1 \tag{11.183}$$

$$\nabla_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 = -\frac{\mu^2}{9} i_{X_\alpha}(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4 \tag{11.184}$$

denklemlerini sağladıkları için özel KKKY formlara karşılık gelirler.

Bundan dolayı, bu iç çarpım seçeneği $AdS_7 \times S^4$ çözümüne karşılık gelir ve ϵ_7 geometrik Killing spinörü bir özel KKKY form olan ϕ akı bileşenini üretir ve ϵ_4 geometrik Killing spinörü ise özel KKKY formlar olan $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0$, $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4$ bilineer formlarını üretir. Eğer $\mu = 0$ seçersek o zaman çözüm Mink$_7 \times CY_2$'ye indirgenir ve bilineer formlar paralel formlara karşılık gelir.

ii) M_7 : $\mathbb{H}^-$-sim ξ ve M_4 : $\mathbb{H}^- - \text{sim} \bigoplus \mathbb{H}^- - \text{sim}\ \xi\eta$ için

Bu iç çarpım seçimi için, M_7 üzerindeki bilineer form denklemleri, (11.168)-(11.173) denklemleri ile aynıdır ve $\lambda = 0$'a sahip olunur. (i) durumu ile aynı sıfır-olmayan bilineerlere sahip oldunduğu için, M_4 üzerindeki bilineer form denklemleri (11.174)-(11.176) ile aynıdır. Bununla birlikte bu iç çarpım seçimi için, $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1$ bir vektör kuaterniyon iken $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0$ ve $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4$ bilineerleri reel sayılardır. Bu yüzden (11.175) ve (11.176) eşitlikleri, μ'nün bir vektör kuaterniyonu olması gerektiği anlamına gelir. Böylece eğer F akı 4-formu reel olarak seçilirse, denklem (11.175) ve (11.176)'in tutarlılığı ancak $\mu = 0$ alarak sağlanır. Böylece çözüm sadece Mink$_7 \times CY_2$'dir.

iii) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ ve M_4 : $\mathbb{H}$-takas ξ için

Bu iç çarpım seçimi için M_7 üzerinde bütün bilineer formlar sıfırdan farklı olduklarından, bunların sağlandıkları sağlanan denklemler (11.168)-(11.173) ile aynıdır. Benzer şekilde M_4 üzerindeki denklemler (i) durumu ile aynıdır ve bu durumda $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_0$, $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_1$ ve $(\epsilon\bar{\epsilon}^{(4)})_4$ özel KKKY formlarıdır ve $\lambda = 0$ ve $\mu \neq 0$'a sahip olunur. Bu yüzden çözüm $AdS_7 \times S^4$'e karşılık gelir ve $\mu = 0$ özel durumu için Mink$_7 \times CY_2$ çözümüne sahip oluruz.

iv) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ ve M_4 : $\mathbb{H}^- - \text{sim} \bigoplus \mathbb{H}^- - \text{sim}\ \xi$ için,

M_7 üzerinde bilineer form denklemleri (11.168)-(11.173)'e karşılık gelir. M_4 durum (ii) ile aynıdır ve $\lambda = \mu = 0$'a sahip olunur. Bu yüzden ϵ_7 ve ϵ_4 paralel spinörleri paralel formları üretir ve Mink$_7 \times CY_2$ çözümüne sahip oluruz.

Sonuç olarak M_{11} üzerinde $\mathbb{R}$-sim ξ'nin iç çarpım seçimi için $AdS_7 \times S^4$ ve Mink$_7 \times CY_2$ çözümleri ile M_7 ve M_4 üzerinde iç çarpım seçimleri arasındaki ilişki Tablo (11.8)'de gösterilmiştir. AdS çözümlerinin varlığında süpergravite Killing formlarının özel KKKY formlarına ayrıştığına dikkat edilmelidir.

Çizelge 11.8: Seçilen $\mathbb{R}$-sim ξ iç çarpım ile çözümler arasındaki ilişki

M_{11} : $\mathbb{R}$-sym ξ	Çözümler
i) M_7 : $\mathbb{H}^-$-sim ξ M_4 : $\mathbb{H}$-takas ξ	Mink$_7 \times CY_2$ $AdS_7 \times S^4$
ii) M_7 : $\mathbb{H}^-$-sim ξ $M_4 : \mathbb{H}^- -$ sim $\bigoplus \mathbb{H}^- -$ sim $\xi\eta$	Mink$_7 \times CY_2$
iii) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ M_4 : $\mathbb{H}$-takas ξ	Mink$_7 \times CY_2$ $AdS_7 \times S^4$
iv) M_7 : $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$ $M_4 : \mathbb{H}^- -$ sim $\bigoplus \mathbb{H}^- -$ sim $\xi\eta$	Mink$_7 \times CY_2$

11.3 $M_5 \times M_6$, $M_6 \times M_5$ ve $M_3 \times M_8$ Tipi Arkaplanlar

Bu bölümde M_{11} için $M_4 \times M_7$ ve $M_7 \times M_4$ ayrışmaları dışındaki farklı ayrışma türleri için çarpım manifoldlarını ele alacağız. Örneğin $M_5 \times M_6$, $M_6 \times M_5$ ve $M_3 \times M_8$ tipi çözümleri inceleyeceğiz. Sadece çarpık-olmayan çarpım manifoldlarını ele aldığımızı unutmayalım ve bu durumda bu tür arkaplanların, seçilen farklı spinör iç çarpımları tarafından oluşturulan KY ve KKKY formlarına indirgenebilen süpergravite Killing formunu bilineerleri için ilgilendiğimiz örnekleri vermeyecektir. Bunun nedeni, AdS çözümlerinin yalnızca bu tür arka planlar için bir çarpık faktör varlığında ortaya çıkabilmektedir ve çarpık-olmayan durumda AdS çözümlerine ulaşılamamaktadır.

$M_5 \times M_6$ tipi çözüm için,

$$e^A = \{e^a \otimes iz_6, 1_5 \otimes e^\alpha\} \tag{11.185}$$

$$F = \{\lambda\psi, \mu\phi\} \tag{11.186}$$

$$\epsilon = \epsilon_5 \otimes \epsilon_6 \tag{11.187}$$

olarak ayrışır. Burada ψ, M_5 üzerinde bir 4-formdur; ϕ, M_6 üzerinde bir 4-fordur ve λ, μ birer sabittir. Fakat bu seçim için Maxwell-benzeri, Einstein ve süpergravite Killing spinör denklemlerinin tutarlı ayrışımı sadece akısız durum $\lambda = \mu = 0$ için mümkündür. Bundan dolayı bu durum için çözüm $\text{Mink}_5 \times CY_3$'tür.

$M_6 \times M_5$ tipi çözüm için, bir önceki duruma benzerdir ve tutarlı ayrışım sadece akısız duruma karşılık gelir. Fakat bu durumda herhangi bir çözüm yoktur, çünkü paralel spinörleri kabul eden beş-boyutlu kompakt Riemannsal manifoldlar yoktur.

$M_3 \times M_8$ tipi çözüm için,

$$e^A = \{e^a \otimes z_8, 1_3 \otimes e^\alpha\} \tag{11.188}$$

$$F = \{0, \mu\phi\} \tag{11.189}$$

$$\epsilon = \epsilon_3 \otimes \epsilon_8 \tag{11.190}$$

olarak ayrışır. Burada ϕ, M_8 üzerinde bir 4-formdur. Benzer şekilde, tutarlı ayrışım sadece $\mu = 0$'da akısız durumdadır ve spinör iç çarpımının bütün tipleri için çözüm sadece $\text{Mink}_3 \times Spin(7)$'dir.

Çizelge 11.9: M_{11}'deki spinor iç çarpım seçimine bağlı olarak AdS çözümleri için bilineerlerin KY ve KKKY formlarına indirgenmesi.

M_{11} üzerinde iç çarpım	Arkaplan	M_4'te bilineerlerin indirgenmesi
$\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$	$AdS_4 \times M_7$	özel KY 1- ve 2-form
$\mathbb{R}$-sim ξ	$AdS_4 \times M_7$	özel KKKY 1- ve 4-form
$\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$	$AdS_7 \times S^4$	özel KY 1- ve 2-form
$\mathbb{R}$-sim ξ	$AdS_7 \times S^4$	özel KKKY 1- ve 4-form

12. KALİBRASYONLAR

Bir M n-boyutlu manifoldunun, bir N p-boyutlu altmanifoldu ele alındığında; $\forall x \in N$ için her T_xN, T_xM teğet uzayının bir p-boyutlu altuzayıdır. $\mathbb{R}^n$ ile T_xM özdeşleştirilebilir ve o zaman T_xM, $\mathbb{R}^n$'de p-düzlem ile özdeştirilmiş olur. Euclidessel uzay $\mathbb{E}^n$'de, yönlendirilmiş p-düzlemlerinin kümesi $G(p|n)$ olarak tanımlanılır ve $\mathbb{E}^n$'de yönlendirilmiş p-düzlemlerin *Grassmannyan*'ı olarak adlandırılır.

p-form ile p-düzlem özdeşleştirilebilir. π, $\mathbb{R}^n$'de bir p-düzlem olsun. π için bir baz $e_1, e_2, \ldots, e_p$ ise o zaman p-vektör $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_p$ π bir hacim elemanı tanımlar ve bu π için bir yönelim tanımlar.

$\mathbb{E}^n$'de düz çizgi, aynı sınıra sahip tüm eğriler arasında yön değiştirmeyen eğridir ve minimum uzunluktur. Eğrinin yerine, $\mathbb{E}^n$'de m-boyutlu bir altmanifold ve bir sabit yön yerine, teğet m-düzlem yönlerinin belirli bir topluluğunun topluluklarını ele alalım. Eğer S'nin tüm teğet düzlemleri belirlenen bu topluluğa ait oluyorsa, o zaman aynı sınıra sahip tüm yönlendirilmiş m-yüzüyler arasında alan-minimize edendir. O zaman S aynı sınıra sahip tüm yönlendirilmiş yüzüyler arasında minimum alandır. Bu tanjant düzlem yönlerinin topluluğu $G(m|n)$ *Grassmannyan'ın yüzü* olarak adlandırılır.

$\varphi \in \Lambda^p(\mathbb{E}^n)^*$, $\mathbb{E}^n$ üzerinde bir sabit katsayılı olsun p-form ψ; $G(p|n)$ Grassmannyan üzerinde sürekli bir fonksiyonla kısıtlanan, $\Lambda^p(\mathbb{E}^n)$ üzerinde bir lineer fonksiyondur:

$$\varphi : \Lambda^p(\mathbb{E}^n) \to \mathbb{R}. \tag{12.1}$$

$G(p|n)$ kompakt olduğundan, bu fonksiyon bir maksimuma sahip olur ve bu değer φ'nin *kokütlesi* olarak adlandırılır ve $||\varphi||$ ile gösterilir. Eğer φ kokütlesi 1 olacak şekilde normalize edilmiş ise buna *kalibrasyon* denir.

$G(\varphi)$, $G(p|n)$'de φ'nin maksimuma ulaştığı noktaları belirtsin. $G(\varphi)$ φ-Grassmannyan olarak bilinir ve $\pi \in G(\varphi)$ düzlemlerinin φ tarafından kalibre edildiği söylenebilmektedir. Bu teori, $\mathbb{E}^n$'de sabit katsayılı kalibrasyonlar ile sınırlı değildir. Aslında, herhangi bir (M, g)

Riemannsal manifoldunda d-kapalı formlara genellenebilir. φ'nin kokütlesi, artık her bir noktada kokütlelerin supremumudur (M'deki noktaların üzerinde). Artık bir kalibrasyon,

i) Kapalı bir form φ ($d\varphi = 0$),

ii) Bir x noktasında tüm yönlendirilmiş p-düzlemleri için $\varphi_x(\xi) \leq \operatorname{vol} \xi$ eşitsizliğini sağlayan birim kokütleye sahip olacak şekilde normalize edilmiş bir form olarak tanımlanabilir.

N, p boyutlu M'nin bir yönlendirilmiş bir altmanifoldu olsun. O zaman $\forall x \in N$ için tanjant uzay T_xN bir yönlendirilmiş p-düzlemidir. N, φ'ye göre bir *kalibre edilmiş bir altmanifold* eğer $\varphi|_{T_xN} = \operatorname{vol} T_xN$ ise.

Önerme 12.1 (M, g) bir Riemannsal manifold, φ M üzerinde bir kalibrasyon ve N M üzerinde bir kompakt φ-altmanifold olsun. O zaman N kendi homoloji sınıfında minimum hacimdir.

İspat. $\dim N = p$ için $[N] \in H_p(M, \mathbb{R})$ ve $[\varphi] \in H^p(M, \mathbb{R})$ sırasıyla, N ve φ'nin homoloji ve kohomoloji sınıfı olsun.

$$N = N' + \partial\Sigma \qquad \Rightarrow [N] = [N']$$
$$\varphi = \psi + d\alpha \qquad \Rightarrow [\varphi] = [\psi]$$

ve o zaman,

$$[\varphi].[N] = \int_{x\in N} \varphi|_{T_xN} = \int_{x\in N} \operatorname{vol} T_xN = \operatorname{vol} N \tag{12.2}$$

olduğundan N bir *kalibre edilmiş altmanifold* olur.

Eğer N', $[N'] = [N]$ ile M'nin herhangi başka kompakt p-altmanifoldu ise

$$[\varphi].[N] = [\varphi].[N'] = \int_{x\in N'} \varphi|_{T_xN'} \leq \int_{x\in N'} \operatorname{vol} T_xN' = \operatorname{vol} N'. \tag{12.3}$$

olduğundan N' bir kalibre edilmiş altmanifold değildir.

Böylece N bu homoloji sınıfında minimumli hacimdir ve bu yüzden kalibre edilmiş altmanifoldlar minimum hacim altmanifoldlardır. ■

(M,g) üzerinde bir φ kalibrasyonu sadece aşikar olmayan kalibre edilmiş altmanifoldlara sahiptir. Eğer bunlar M üzerinde yönlendirilmiş tanjant k-düzlükler ise.

Bir geometri, bir manifold üzerinde belirli tensör alanlarının varlığı yoluyla belirlenen bir tür yapıdır. Örneğin metrik Riemann geometrisine kapalı dejenere-olmayan 2-form simplektik geometriye ve kompleks yapı da ($J^2 = -1$) kompleks geometriye karşılık gelir. Bir geometri tanımlamak, çerçeve demetinin yapı grubunun indirgenmesi ile ilgilidir.

Bir diferensiyel n-manifold üzerinde, çerçeve demeti bir temel $GL(n,\mathbb{R})$ demetidir. Bir metriğin takdimi, yapı gurubunu $O(n)$'e indirger ve ortonormal çerçevelere sahip olunur. Bir yönelimi tanımlayan bir hacim formu, yapı grubunu $SO(n)$'e indirger. $n = 2m$ için bir kompleks yapı, yapı grubunu $GL(m,\mathbb{C})$'ye indirger ve kompleks çerçevelere sahip olunur.

Genel olarak, bir manifold üzerinde bir G-yapı çerçeve demetinin yapı grubunun $G \subset GL(n,\mathbb{R})$bir indirgemesidir ve yerel çerçeveler G-ilişkilidir. Çerçeve demetinin yapı grubunun indirgemesi, manifoldun holonomi grubunun indirgenmesine eşdeğerdir.

kompleks yapı

simplektik 2-form $\xrightarrow{n=2m}$ $U(m)$'ye indirgenme $\longrightarrow$ Kähler geometrisi

(Kähler form)

kompleks yapı

Kähler 2-form $\xrightarrow{n=2m}$ $SU(m)$'ye indirgenme $\longrightarrow$ Calabi-Yau geometrisi

(holomorfik m-form)

üçlü kompleks yapı

üçlü Kähler form $\xrightarrow{n=4k}$ $Sp(k)$'ya indirgenme $\longrightarrow$ hiperkähler geometrisi

(holomorfik $2k$-form) (Ricci-düz)

üçlü kompleks yapı

üçlü Kähler formları $\xrightarrow{n=4k} Sp(k).Sp(1) = \dfrac{Sp(k) \times Sp(1)}{\mathbb{Z}_2}$'ya indirgenme $\rightarrow$ kuaterniyonik

(holomorfik $2k$-form) Kähler geometrisi(Einstein)

birleşmeli 3-form $\xrightarrow{\quad n=7 \quad} G(2)$'ye indirgenme $\longrightarrow G_2$ geometrisi

(ko-birleşmeli 4-form)

Cayley 4-form $\xrightarrow{\quad n=8 \quad} Spin\,(7)$'ye indirgenme $\longrightarrow Spin\,(7)$ geometrisi

Geometriler ayrıca kalibre edilmiş altmanifoldların varlığıyla da belirtilebilir. Geometrilerin tanımında kullanılan özel tensör alanları kalibrasyonlara karşılık gelir.

- Kähler geometrisi: ω Kähler 2-form bir kalibrasyondur ve kalibre edilmiş altmanifoldlar holomorfik eğrilerdir. Daha genel olarak,$1 \leq k \leq m$ için $\frac{\omega^k}{k!}$ bir kalibrasyondur ve kalibre edilmiş altmanifoldlar kompleks k-boyutlu altmanifoldlardır.

- Kalabi-Yau geometrisi: θ bir holomorfik hacim m-form. $\mathbb{R}e(\theta)$ reel kısmı bir kalibrasyondur ve kalibre edilmiş altmanifoldlar özel Lagrangian (SLAG) altmanifoldlardır.

- G_2-geometrisi: ϕ birleşmeli 3-form ve $*\phi$ ko-birleşmeli 4-formun ikisi de kalibrasyondur. Kalibre edilmiş ϕ-altmanifoldları birleşmeli 3-foldlardır ve kalibre edilmiş $*\phi$-altmanifoldları ko-birleşmeli 4-foldlardır.

- $Spin(7)$ geometri: φ Cayley 4-form bir kalibrasyondur ve kalibre edilmiş altmanifoldlar Cayley 4-foldlardır.

- Kuaterniyonik Kähler geometri: $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ üçlü Kähler formlardır ve $\theta_I, \theta_J, \theta_K$ üçlü holomorfik formlardır. $\Xi = \frac{1}{2}\theta_J + \frac{1}{2}\frac{1}{k!}\omega_I^k$ bir kalibrasyondur. Kalibre edilmiş altmanifoldlar komplex Lagrangian ($\mathbb{C}$LAG) k-manifoldlardır.

Zarlar bu özel holonomi manifoldları üzerinde kalibre edilmiş altmanifoldları sarabilirler.

12.1 On Bir-Boyutlu Süpergravite Zar Çözümleri

M5-zar geometrisi için metrik,

$$ds^2 = H^{-1/3}(\eta_{ij}d\xi^i d\xi^j) + H^{2/3}dx^I dx^I \; (g = H^{-1/3}\eta_{5+1} + H^{2/3}g_5) \tag{12.4}$$

ve F akı 4-form

$$F = \pm 3 *_5 dH \tag{12.5}$$

olarak yazılır. Burada $i, j = 0, 1, \ldots, 5$ ve $I = 1, 2, \ldots, 5$'dir. η_{5+1} altı-boyutlu Minkowski uzayzamanın metriğidir. H harmonik fonksiyonu $\nabla^2 H = 0$ olarak tanımlanır.

$$H(r) = 1 + \frac{a^3}{r^3}, \qquad r^2 = x^I x^I \quad \text{ve} \quad a^3 = \pi N \ell_p^3$$

ℓ_p Planck uzunluğudur ve N ise $r = 0$'da çakışan beşzarların sayısıdır. M5-zarı iki limite sahiptir. $r \to \infty$ için $\lim\limits_{r\to\infty} H(r) = 1$'dir ve M5-zar metriği on bir-boyutlu Minkowski çözümüne indirgenir. $r \approx 0$ olduğunda, yakın ufuk limitine sahip olunur. $r \approx 0$ için $H(R) \approx \frac{a^3}{r^3}$ olup

$$ds^2 = \frac{r}{a}(\eta_{ij}d\xi^i d\xi^j) + \frac{a^2}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega_4) \tag{12.6}$$

elde edilir ve $d\Omega_4$, S^4 yuvarlak dört-küre üzerinde metriktir. Bir koordinat dönüşümünden sonra,

$$ds^2 = R^2\Big[\frac{\eta_{ij}d\xi^i d\xi^j + d\rho^2}{\rho^2}\Big] + \frac{R^2}{4}d\Omega_4 \tag{12.7}$$

olarak yeniden yazılır. Bu denklemin sağ tarafının ilk terimi AdS_7'ye, ikinci terimi S^4'e karşılık gelir ve $R = 2(\pi N)^{1/3}\ell_p$'dir. Bu metrik $AdS_7 \times S^4$ çözümüme karşılık gelir. R, AdS_7'nin yarıçapına karşılık gelir. Bundan dolayı M5-zar geometrisi, Minkowski ve $AdS_7 \times S^4$ arasında bir interpolasyondur.
M2-zar geometrisi için metrik ve akı,

$$ds^2 = H^{-2/3}(\eta_{ij}d\xi^j d\xi^j) + H^{1/3}dx^I dx^I \; (g = H^{-2/3}\eta_{2+1} + H^{1/3}g_8) \tag{12.8}$$

$$A = \pm\frac{1}{H}d\xi^0 \wedge d\xi^1 \wedge d\xi^2, \; F = dA = 0 \tag{12.9}$$

olarak yazılır. Burada $i, j = 0, 1, 2$ ve $I = 1, 2, \ldots, 8$'dir. H harmonik form

$$H(r) = 1 + \frac{a^b}{r^b} \tag{12.10}$$

olarak tanımlanır. Burada $a^b = 2^5\pi^2 N\ell_p^b$ ve $r^2 = x^I x^I$. M2-zar iki limite sahiptir. $r \to \infty$ olduğunda $\lim_{r\to\infty} H(r) = 1$ olur ve M2-zar metriği Minkowski çözümüne indirgenir. $r \approx 0$ olduğunda $H(r) \approx \left(\frac{a}{r}\right)^b$ olur ve

$$ds^2 = \frac{r^4}{a^4}(\eta_{ij} d\xi^i d\xi^j) + \frac{a^2}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega_7) \tag{12.11}$$

elde edilir ve $d\Omega_7$, S^7 yuvarlak yedi-küre üzerindeki metriktir. Bir koordinat dönüşümünden sonra,

$$ds^2 = R^2\Big[\frac{\eta_{ij} d\xi^i d\xi^j + d\rho^2}{\rho^2}\Big] + 4R^2 d\Omega_7 \tag{12.12}$$

olarak yeniden yazılır. Bu denklemin sağ tarafının ilk terimi AdS_4'e, ikinci terimi S^7'ye karşılık gelir ve $R = \left(\frac{N\pi^2}{2}\right)^{1/6} \ell_p$'dir. R, AdS_4'ün yarıçapına karşılık gelir. Bundan dolayı M2-zar geometrisi, Minkowski ve $AdS_4 \times S^7$ arasında bir interpolasyondur.

12.2 M2-Zar Evren-Hacim Teorisi

Bir g metrik ve A akı 3-form ile iki boyutlu zarın(M2-zar) sabit bir on birboyutlu geometride yayıldığını düşüneceğiz. Bozonik dinamik alanlar W, M2-zarının evren-hacminden on bir-boyutlu hedef uzay geometrisine $x^\mu(\sigma)$ gönderimleridirler. σ^i, $i = 0, 1, 2$ W üzerinde koordinatlar ve x^μ, $\mu = 0, 1, \ldots, 10$ ise on bir-boyutlu geometri üzerinde koordinatlardırlar. M2-zarın yeniden parametrelendirmeler altında değişmez eylemi,

$$S = T_2 \int_W d^3\sigma[-\det \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu g_{\mu\nu}(x)]^{1/2} + \frac{1}{3!}\epsilon^{ijk}\partial_i x^{\mu_1}\partial_j x^{\mu_2}\partial_k x^{\mu_3} A_{\mu_1\mu_2\mu_3} \tag{12.13}$$

olarak yazılır. Burada T_2 zarın gerilimidir. Ayrıca denklemin sağ tarafındaki ilk terim metriğin evren-hacmine karşılık gelen hacim elemanıdır ve *Nambu-Goto eylemi* olarak adlandırılır. İkinci terim, zarın elektrik 4-form yükü taşıdığı için ortaya çıkar; elektrik yüklü bir parçacığın bir vektör potansiyeline bağlanmasını genelleştirir.

$A = 0$ ve

$$ds^2 = -dt^2 + g_{MN} dx^M dx^N \tag{12.14}$$

metriğine sahip bir $D = 11$ süpergravite arkaplanı için $\sigma^0 = t$ alınıp (12.13) ifadesi değerlendirilirse enerji fonksiyoneli

$$E = T^2 \int_{W'} d^2\sigma [m_{ab}]^{1/2} \tag{12.15}$$

olarak yazılabilir. Burada $a, b = 1, 2$, W' evren-hacminin uzaysal kısımı ve m_{ab} ise M2-zar evren-hacmi üzerinde indirgenmiş metriğin uzaysal kısımıdır.

$$m_{ab} = \partial_a x^M \partial_b x^N g_{MN} \tag{12.16}$$

olarak yazılır. Hareket denkleminin enerji fonksiyonelini minimize eden çözümleri M2-zarın uzaysal kısımının bir minimal yüzey olmasını gerektirir. Şimdi kompakt minimal yüzeyleri saran M2-zarlar ile ilgilenilecektir.

Arkaplan geometrisi $A = 0$ alınarak $M_{11} = \mathbb{R}^{1,10-d} \times M_d$ ile sınırlandırılsın. Burada M_d özel holonomiye sahipttir. M2-zar evren-hacim teorisi süpersimetriktir ve süpersimetriyi koruyan sardığı devirlere *süpersimetrik devirler* denir. Şimdi ise süpersimetrik devirlerin, ilgili kalibrasyonun Killing spinörlerden oluşturulduğu kalibre edilmiş devirlere eşdeğer olduğununa bakılacak. M2-zarın bir bozonik evren-hacmi için fermiyonların süpersimetri varyasyoları

$$(1 - \Gamma).\epsilon = 0 \qquad \Gamma.\epsilon = \epsilon \tag{12.17}$$

koşulu ile verilir. Burada ϵ bir 11-boyutlu süpergravite Killing spinörü ve Γ ise

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}} \Gamma^0.\gamma \tag{12.18}$$

olarak tanımlanır. Burada $\gamma = (\frac{1}{2!}\epsilon^{ab}\partial_a x^M \partial_b x^N \Gamma_{MN})$ ve $\Gamma^2 = 1$'dir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta önceki bölümlere göre notasyon farklılığıdır. $\Gamma_{MN} = \frac{1}{2}(\Gamma_M.\Gamma_N - \Gamma_N.\Gamma_M)$ ile $e_a \wedge e_b = \frac{1}{2}(e_a.e_b - e_b.e_a)$ benzerdir.

Denklem (12.17) koşulu ϵ spinöründen oluşturulmuş bir 2-formla kalibre edilmiş 2-düzlemin koşuluna eşdeğerdir.

$$\begin{aligned}
\left(\epsilon, \frac{(1-\Gamma)}{2}.\epsilon\right)' &= \epsilon^\dagger \frac{(1-\Gamma)^2}{2}\epsilon \\
&= \epsilon^\dagger \frac{(1-\Gamma)}{2}\frac{(1-\Gamma)}{2}\epsilon \\
&= ||\frac{(1-\Gamma)}{2}\epsilon||^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{12.19}$$

olarak yazılır. Eğer ϵ $(\epsilon,\epsilon)' = \epsilon^{\dagger}\epsilon = 1$ olarak normalize ediliyorsa ve Γ'nın tanımı kullanılırsa,

$$\sqrt{\det m} \geq \epsilon^{+}\Gamma^{0}.\gamma.\epsilon = -\epsilon\gamma\epsilon = -(\epsilon,\gamma.\epsilon) \tag{12.20}$$

olarak yazılabilir. Böylece 2-form

$$\varphi = -\frac{1}{2!}(\epsilon,\Gamma_{MN}.\epsilon)dx^{M}\wedge dx^{N} \qquad = -\frac{1}{2!}\bar{\epsilon}\Gamma_{MN}\epsilon dx^{M}\wedge dx^{N} \tag{12.21}$$

tanımlanabilir.

$$\varphi|_{W'} \leq \mathrm{vol}\, W' = \sqrt{\det m} \tag{12.22}$$

olması nedeniyle φ kalibrasyon koşulunu sağlar ve ayrıca kapalıdır. M2-zar φ 2-form tarafından kalibre edilmiş süpersimetrik bir devri sarar. M_d arkaplanları üzerinde sadece 2-form kalibrasyonlar Kähler kaibrasyonlarıdır ve φ bir Kähler 2-forma eşittir.

Çizelge 12.1: Özel holonomi manifoldlarına karşılık gelen kalibrasyonlar

Özel holonomi manifoldları	Kalibrasyonlar
$Spin(7)$-holonomi (8 boyut)	Cayley 4-form $\Psi \rightarrow$ Cayley 4-devirleri
G_2-holonomi (7 boyut)	birleşmeli 3-form $\phi \rightarrow$ birleşmeli 3-devirleri ko-birleşmeli 4-form $*\phi \rightarrow$ ko-birleşmeli 4-devirleri
Calabi-Yau m-foldlar ($2m$-boyut)	Kähler kalibrasyonları $\frac{1}{k!}\omega^{k} \rightarrow$ Kähler $2k$-devirleri SLAG kalibrasyonları $Re(e^{i\theta}\Omega) \rightarrow$ SLAG m-devirleri $2m = 4$ ve $k = 1$ için $\rightarrow$ SLAG= Kähler $2m = 8$ ve $k = 2$ için $\rightarrow \frac{1}{2}\omega^{2} + Re(e^{i\theta}\Omega) = \Psi$ Kähler+SLAG=Cayley
Hiperkähler m-foldlar ($4m$-boyut)	üçlü Kähler kalibrasyonları $\rightarrow$ kuaterniyonik 4-devirleri $\mathbb{C}$LAG kalibrasyonları $\rightarrow$ $\mathbb{C}$LAG $2m$-devirleri

Çizelge 12.2: 11-boyutta M2-zarın kalibre edilmiş devirleri sarmasının farklı yolları

Arkaplan	M2-zar evren-hacim	Kalibrasyon
$\mathbb{R}^{1,6} \times CY_2$	$\mathbb{R} \times (\Sigma_2 \subset CY_2)$	Kähler (SLAG)
$\mathbb{R}^{1,4} \times CY_3$	$\mathbb{R} \times (\Sigma_2 \subset CY_3)$	Kähler
$\mathbb{R}^{1,2} \times CY_4$	$\mathbb{R} \times (\Sigma_2 \subset CY_4)$	Kähler
$\mathbb{R} \times CY_5$	$\mathbb{R} \times (\Sigma_2 \subset CY_5)$	Kähler

12.3 Genelleştirilmiş Kalibrasyonlar

Akıların yokluğunda, zar evren-hacimleri kalibre edilmiş minimal altmanifoldlara karşılık gelirler. Akıların varlığında ise, zar evren-hacimleri minimal yüzeylere karşılık gelmez. p dereceli bir genelleştirilmiş kalibrasyon, bir yönlendirilmiş M manifoldu üzerindeki bir ϕ p-formudur. Bu T_mM'de her yönlendirilmiş ξ p-düzlem için her m noktasında $\phi_\xi|_m \leq \mathrm{vol}\,\xi$ eşitsizliğini sağlamalıdır. Standart kalibrasyon için, $d\phi = 0$ olduğu önceden söylenmişti. Fakat bu genelleştirilmiş kalibrasyonlar için geçerli değildir; $d\phi \neq 0$. Sıfır-olmayan sağ taraf, sıfır-olmayan akı ile ilişkilidir. Bu yüzden bir genelleştirilmiş kalibrasyon

i) $\phi_\xi \leq \mathrm{vol}\,\xi$

ii) $d\phi = i_K F$ (11-boyutlu süpergravite)

durumlarını sağlayan bir p-formdur. Burada K bir zamansal Killing vektörüdür ve F akı 4-formdur. Bir ϕ genelleştirilmiş kalibrasyonunun bir $m\epsilon M$ noktasındaki $C_m(\phi)$ temas kümesi,

$$C_m(\phi) = \{\xi \in G(p, T_mM) | \phi_\xi = \mathrm{vol}\,\xi\} \tag{12.23}$$

olarak tanımlanır. M'nin ξ genelleştirilmiş kalibre edilmiş altmanifoldları, $\phi_\xi = \mathrm{vol}\,\xi$ olanlarıdır. Standart kalibre edilmiş altmanifoldlar hacmi minimize ederler. Genelleştirilmiş kalibrasyınlar karşılık gelen altmanifoldlar minimize ederler.

Bir D kapalı altmanifold için $E(D) = \mathrm{vol}\,(D) - \int_D \phi$ fonksiyoneli tanımlansın ve burada ϕ bir p-formdur. Bu zar eylemleri için enerji fonksiyoneline karşılık gelir.

Çizelge 12.3: 11-boyutta M5-zarın kalibre edilmiş devirleri sarmasının farklı yolları

Arkaplan	M5-zar evren-hacmi	Kalibrasyon
$\mathbb{R}^{1,6} \times CY_2$	$\mathbb{R}^{1,3} \times (\Sigma_2 \subset CY_2)$	Kähler
$\mathbb{R}^{1,4} \times CY_3$	$\mathbb{R}^{1,2} \times (\Sigma_3 \subset CY_3)$	SLAG
	$\mathbb{R}^{1,3} \times (\Sigma_2 \subset CY_2)$	Kähler
	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset CY_3)$	Kähler
$\mathbb{R}^{1,4} \times CY_3$	$\mathbb{R}^{1,3} \times (\Sigma_2 \subset CY_3)$	Kähler
$\mathbb{R}^{1,2} \times CY_4$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset CY_4)$	SLAG
$\mathbb{R}^{1,2} \times CY_4$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset CY_4)$	Kähler
$\mathbb{R}^{1,4} \times CY_3$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset CY_3)$	Kähler
$\mathbb{R} \times CY_5$	$\mathbb{R} \times (\Sigma_5 \subset CY_5)$	SLAG
$\mathbb{R}^{1,2} \times CY_2 \times CY_2'$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_2 \subset CY_2) \times (\Sigma_2' \subset CY_2')$	Kähler=SLAG
$\mathbb{R} \times CY_2 \times CY_3$	$\mathbb{R} \times (\Sigma_2 \subset CY_2) \times (\Sigma_3 \subset CY_3)$	SLAG
$\mathbb{R}^{1,2} \times Spin(7)$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset Spin(7))$	Cayley=SLAG+Kähler
$\mathbb{R}^{1,2} \times HK_2$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset HK_2)$	$\mathbb{C}$LAG
$\mathbb{R}^{1,3} \times G_2$	$\mathbb{R}^{1,2} \times (\Sigma_3 \subset G_2)$	birleşmeli
$\mathbb{R}^{1,3} \times G_2$	$\mathbb{R}^{1,1} \times (\Sigma_4 \subset G_2)$	kobirleşmeli

Teorem 12.1 ϕ, M'de bir genelleştirilmiş kalibrasyon olsun, o zaman M'nin X genelleştirilmiş kalibre edilmiş altmanifoldları yukarıdaki enerjiyi minimalize ederler.

İspat. X, M'nin bir genelleştirilmiş kalibre edilmiş altmanifoldu olsun ve D, X'te bir açık yuvar (ball) olsun. D', M'de açık yuvar olsun öyle ki $\partial D = \partial D'$. O zaman

$$\begin{aligned} E(D) &= \text{vol }(D) - \int_D \phi \\ &= \int_D \phi - \int_D \phi \\ &= 0 = \int_{D'} \phi - \int_{D'} \phi \end{aligned} \tag{12.24}$$

ϕ, D üzerinde hacim forma eşit olduğundan $\phi_D = \text{vol}\, D$ ve $\phi_{D'} \leq \text{vol}\, D'$'dür.

$$\begin{aligned}\int_{D'} \phi &\leq \text{vol}\,(D') \\ &\leq \text{vol}\,(D') - \int_{D'} \phi \quad \Rightarrow E(D) \leq E(D') \\ &= E(D') \end{aligned} \tag{12.25}$$

Bu yüzden, genelleştirilmiş kalibre edilmiş altmanifoldlar enerjiyi minimalize ederler. ■

Standart kalibrasyonlar, genelleştirilmiş kalibrasyonların ($d\phi \neq 0$) özel durumudur. Standart kalibrasyonlar için enerji fonksiyoneli hacime karşılık gelir. Kalibre edilmiş altmanifoldlar minimal hacimli altmanifoldlardır ve genelleştirilmiş kalibre edilmiş altmanifoldlar ise minimal enerjili altmanifoldlardır.

13. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, öncelikle dış cebir ve Clifford cebirlerinin temel tanımlamaları yapılmıştır. Daha sonra Pin ve Spin gruplarını tanımlayarak spinörler tanıtılmıştır. Bu cebir yapıları üzerindeki hesaplamalar gösterildekten ve temel operatörler tanımlandıktan sonra spin geometrinin temelleri verilmiştir.

Spinör iç çarpım seçimlerinin, çarpık olmayan kompaktlaştırmalara karşılık gelen on bir-boyutlu süpergravite arkaplanları için merkezi bir role sahip olduğu görülmüştür. Özellikle çözümlerin var olmabilmesi, çarpım manifoldları üzerindeki bazı özel tip spinör iç çarpımlarının seçimine bağlıdır. Çarpık olmayan $M_4 \times M_7$ ve $M_7 \times M_4$ tipi ayrışımlarda AdS çözümlerinin varlığı, çarpım manifoldlarında spinör iç çarpım seçimine büyük ölçüde bağlıdır. Bölüm (11.1) ve (11.2)'de görüldüğü gibi, sadece bazı özel spinör iç çarpım seçimleri için AdS çözümleri bulunabilmektedir. Tablo (11.2), (11.4) (11.6) ve (11.8)'de çarpım manifoldları üzerinde seçilen iç çarpımlar ile AdS çözümleri arasındaki ilişkiler gösterilmiştir.

Ayrıca, AdS çözümleri için M_{11}'de süpergravite Killing formları ile çarpım manifoldları üzerindeki gizli simetriler arasında bir ilişki olduğu göstermiştir. İç çarpım seçimi AdS çözümleri için, süpergravite Killing spinörlerinin bilineer formları olan süpergravite Killing formları, çarpım manifoldları üzerindeki KY ve KKKY formlara indirgenmektedir. Bu sayede on bir-boyutlu süpergravite arkaplanları üzerinde KY ve KKKY formları bulunmuştur. AdS çözümleri arasındaki ilişkilere yol açan yöntemler; spinör iç çarpım seçimleri ve KY-KKKY formlarına indirgeme, sicim ve M-teorisi arkaplanları için bir sınıflandırma prosedürünün ilk adımı olarak görülebilir.

M-teorisi arkaplanlarının çarpık çarpım kompaktlaştırmaları durumu da başka bir çalışmada araştırılabilir. Açıkça görülmektedir ki, böyle bir durumda çarpık çarpan içerecekleri için, alan ve bilineer form denklemleri çarpık olmayan durumdan farklı olacaktır. Öte yandan bu araştırmalar, on-boyutlu sicim arkaplanlarına kadar genişletilebilir ve bunların spinör iç çarpım seçimlerine bağımlılıkları belirlenebilir.

Böylece çözümler, spinör iç çarpımlar ve bilineer formların indirgenmesi arasındaki ilişkileri bularak, olası sınıflandırma şemaları bu şekilde elde edilebilir. Spinör iç çarpım seçiminin konfomal alan teorisi eşdeğeri, AdS/CFT karşılık gelimi çerçevesinde de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Açık, Ö. & Ertem, Ü. 2018. *Generalized symmetry superalgebras*, arXiv:1806.01079.

Açık, Ö. 2017. *Field equations from Killing spinors*, Journal of Mathematical Physics 59, 023501.

Açık, Ö. & Ertem, Ü. 2018. *Generalized symmetry superalgebras*, arXiv:1806.01079.

Açık, Ö. & Ertem, Ü. 2015. *Higher-degree Dirac currents of twistor and Killing spinors in supergravity theories*, Quantum Gravity 32.

Açık, Ö. & Ertem, Ü. 2015. *Hidden symmetries and Lie algebra structures from geometric and supergravity Killing spinors*, Quantum Gravity 33, 165002.

Alekseevsky, D., Chrysikos, T. & Taghavi-Chabert, A. 2019. *Decomposable (4,7) solutions in eleven-dimensional supergravity*, Classical Quantum Gravity, 36, 075002.

Becker, K., Becker, M. & Schwarz, J. H. 2007. *String Theory and M-theory: A Modern Introduction*,Cambridge U. P.: Cambridge UK.

Behrndt, K. & Jeschek, C. 2003. *Fluxes in M-theory on 7-manifolds and G structures*, JHEP04, 002.

Behrndt, K. & Jeschek, C. 2004. *Fluxes in M-theory on 7-manifolds: G-structures and superpotential*, Nucl. Phys. B 694, 99.

Benn, I. M. & Tucker, R. W. 1987. *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*. IOP Publishing Ltd, Bristol.

Berger, M. (1955). *Sur les groupes d'holonomie homogene des variétés a connexion affines et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France 83, 279.

Bilal, A., Derendinger, J. P. & Sfetsos, K. 2002. *(Weak) G2 holonomy from self-duality, flux and supersymmetry*, Nucl. Phys. B, 628, 112.

de Felice, O. 2018. *Flux backgrounds and Exceptional Generalised Geometry*. Doktora Tezi, De L'Université Pierre Et Marie Curie.

de Medeiros, P., Figueroa-O'Farrill, J. & Santi, A. 2016. *Killing superalgebras for Lorentzian four-manifolds*, JHEP 06, 106.

Duff, M. J. 1996. *M Theory (The Theory Formerly Know As Strings)*, International Journal of Modern Physics AVol. 11, No. 32, pp. 5623-5641.

Ertem, Ü., Sütemen, Ö., Açık, Ö. & Çatalkaya, A. 2019. *Choices of spinor inner products on M-theory backgrounds*, arXiv:1907.09737

Ertem, Ü. 2018. *Spin Geometry and Some Applications*, arXiv:1801.06988

Ertem, Ü. 2016. *Supergravity backgrounds and symmetry superalgebras*,Turkish Journal of Physics, 40: 113-126.

Figueroa-O'Farrill, J. 2000. *Intersecting brane geometries*, J.Geom.Phys. 35, 99-125.

Figueroa-O'Farrill, J. 1999. *On the supersymmetries of anti-de Sitter vacua*, Class. Quantum Grav. 16, 2043.

Figueroa-O'Farrill, J., Hackett-Jones, E., Moutsopoulos, G. & Simon, J. 2009. *On the maximal superalgebras of supersymmetric backgrounds*, Class. Quantum Grav. 26, 035016.

Figueroa-O'Farrill, J. & Santi, A. 2017. *On the algebraic structure of Killing superalgebras*, Adv. Theor. Math. Phys. 21, 1115.

Fre, P. & Trigiante, M. 2006. *Twisted tori and fluxes: A no go theorem for Lie groups of weak G2 holonomy*, Nucl. Phys. B, 751, 343.

Friedrich, T., Kath, I., Moroianu, A. & Semmelmann, U. 1997. *On nearly parallel G2-structures*, J. Geom. Phys., 23, 259.

Gauntlett, J. P. 2004. *Branes, Calibrations and Supergravity*, arXiv:hep-th/0305074.

Gauntlett, J. P. & Pakis, S. 2003. *The geometry of D= 11 Killing spinors*, Journal of High Energy Physics, Volume 2003, JHEP04.

Gauntlett, J. P., Gutowski J. B. & Pakis, S. 2003. *The geometry of D= 11 null Killing spinors*, Journal of High Energy Physics, Volume 2003, JHEP12.

Green, M. M., Schwarz, J. H. & Witten, E. 1987. *Superstring Theory; vols. 1 and 2*, Journal of Cambridge U. P.: Cambridge, UK.

Harvey, R. B. & Lawson, H. B. 1982. *Calibrated geometries.* Acta Mathematica, 148, 47-157.

Hirshfelder, J. O., Curtis, C. F. & Bird, R. B**.,** 1964. *Molecular Theory of Gases and Liquids.* John Wiley and Sons, Inc.

House, T. & Micu, A. 2005. *M-theory compactifications on manifolds with G2 structure*, Classical Quantum Gravity 22, 1709.

Joyce, D. 2007. *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford University Press Inc., Oxford.

Joyce, D. 2000. *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Science Publications, Oxford.

Kac, V. G., Martinez, C., & Zelmanov, E. 2001, *Graded Simple Jordan Superalgebras of Growth One*, American Mathematical Society 150, 711.

Kaste, P., Minasian R. & Tomasiello, A. 2003. *Supersymmetric M-theory compactifications with fluxes on seven-manifolds and G-structures*, JHEP07, 004.

Klinker, F. 2005. *Supersymmetric Killing structures*, Commun. Math. Phys. 255, 419.

Lang, S. 1955. *Algebra.* Springer Inc.

Lawson, H. B. & Michelsohn, M. L. 1989. *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton.

Lichnerowicz, A. & Michelsohn, M. L. 1988 *Killing spinors, twistor spinors and Hijazi inequality*. Journal of Geometry and Physics, 5, 1.

Lichnerowicz, A. 1989. *On the twistor spinors.* Letters in Mathematical Physics, 18, 333.

Lukas, A. & Saffin, P. M. 2005. *M-theory compactification, fluxes, and AdS4*, Phys. Rev. D 71, 046005.

Semmelmann, U. 2003. *Conformal Killing forms on Riemannian manifolds*, Math. Z., 245, 503.

Townsend, P. K. 1997. *Four lectures on M-theory*, arxiv:hep-th/9612121.

Townsend, P. K. 1999 *Novelties in String Theory: Proceedings of the Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory*, World Scienti

c Publ., Singapore, 1999, p.177.

Wang, M. Y. 1989. *Parallel spinors and parallel forms*, Ann. Global Anal. Geom. 7 (1989) 59.

EK 1

İÇ ÇARPIM SEÇİMİNE BAĞLI OZELLİKLER

Tezde kullanılan manifoldlar için olası spinör iç çarpımları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Manifold	İç çarpım
11-d Lorentzsel	$\mathbb{R}$-sim ξ , $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$
3-d Lorentzsel	$\mathbb{R}$-sim ξ , $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$
4-d Lorentzsel	$\mathbb{C}^*$-sim ξ , $\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$
5-d Lorentzsel	$\mathbb{H}^-$-sym ξ , $\mathbb{H}^-$-sim $\xi\eta$
11-d Lorentzsel	$\mathbb{R}$-sim ξ , $\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$
6-d Lorentzsel	$\mathbb{H}^-$-sim$\oplus\mathbb{H}^-$-sim ξ , $\mathbb{H}$-takas $\xi\eta$
7-d Lorentzsel	$\mathbb{H}^-$-sim ξ , $\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$
8-d Riemannsal	$\mathbb{R}$-takas ξ , $\mathbb{R}$-sim$\oplus\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$
7-d Riemannsal	$\mathbb{R}$-çarpık ξ , $\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$
6-d Riemannsal	$\mathbb{C}$-çarpık ξ , $\mathbb{C}^*$-sim $\xi\eta$
5-d Riemannsal	$\mathbb{H}^-$-sim ξ , $\mathbb{H}^-$-sim $\xi\eta$
4-d Riemannsal	$\mathbb{H}$-takas ξ , $\mathbb{H}^-$-sim$\oplus\mathbb{H}^-$-sim $\xi\eta$

Tezde dikkate alınan manifoldların iç çarpım seçimleri için bilineer p-formların özellikleri, bir sonraki sayfada bulunan tabloda verilmiştir.

Manifold	İç çarpım	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Lorentzain M_{11}	$\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
Lorentzsel M_{11}	$\mathbb{R}$-sim ξ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
Lorentzsel M_3	$\mathbb{R}$-sim ξ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$								
Lorentzsel M_3	$\mathbb{R}$-çarpık $\xi\eta$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$								
Lorentzsel M_4	$\mathbb{C}^*$-sim ξ	R	R	I	I	R							
Lorentzsel M_4	$\mathbb{C}$-çarpık $\xi\eta$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$							
Lorentzsel M_5	$\mathbb{H}^-$-sim ξ	R	R	V	V	R	R						
Lorentzsel M_5	$\mathbb{H}^-$-sim $\xi\eta$	R	V	V	R	R	V						
Lorentzsel M_6	$\mathbb{H}^-$-sim$\oplus\mathbb{H}^-$-sim ξ	R	R	V	V	R	R	V					
Lorentzsel M_6	$\mathbb{H}^-$-takas $\xi\eta$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$					
Lorentzsel M_7	$\mathbb{H}^-$-sim ξ	R	R	V	V	R	R	V	V				
Lorentzsel M_7	$\mathbb{H}^\wedge$-sim $\xi\eta$	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$				
Riemannsal M_8	$\mathbb{R}$-takas ξ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$			
Riemannsal M_8	$\mathbb{R}$-sim$\oplus\mathbb{R}$-sim $\xi\eta$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$			
Riemannsal M_7	$\mathbb{R}$-çarpık ξ	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$				
Riemannsal M_7	$\mathbb{R}$-sim$\xi\eta$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$				
Riemannsal M_6	$\mathbb{C}$-çarpık ξ	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$					
Riemannsal M_6	$\mathbb{C}^*$-sim $\xi\eta$	R	I	I	R	R	I	I					
Riemannsal M_5	$\mathbb{H}^-$-sim ξ	R	R	V	V	R	R						
Riemannsal M_5	$\mathbb{H}^-$-sim $\xi\eta$	R	V	V	R	R	V						
Riemannsal M_4	$\mathbb{H}^-$-takas ξ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$							
Riemannsal M_4	$\mathbb{H}^-$-sim$\oplus\mathbb{H}^-$-sim $\xi\eta$	R	V	V	R	R							

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özgün SÜTEMEN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 23/09/1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise : Kirami Refia Alemdaroğlu Lisesi (2010)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (2017)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı (2020)

Yayınları:

Açık, Ö., Çatalkaya, A., Ertem, Ü. & Sütemen, Ö. 2019. Motion of membranes in space-times with torsion. Classical and Quantum Gravity, Volume 36, Number 19.

Ertem, Ü., Sütemen, Ö., Açık, Ö. & Çatalkaya, A. 2019. Choices of spinor inner products on M-theory backgrounds. arXiv:1907.09737.