УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ"

УДК 512.542

На правах рукописи

Молокова Елена Александровна

ФОРМАЦИОННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПО СИСТЕМЕ ОБОБЩЕННО ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель —
член–корреспондент АН Беларуси,
доктор физико–математических
наук, профессор Л.А.Шеметков

Гомель — 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Все используемые обозначения и определения соответствуют принятым в книгах [12], [2], [3].

Ниже везде G — некоторая группа.

Будем различать знак включения множеств $\subseteq$ и знак строгого включения $\subset$;

$\cap$ и $\cup$ — соответственно знаки пересечения и объединения множеств;

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;

π — некоторое пустое или непустое множество простых чисел;

$\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$ — дополнение к π в множестве всех простых чисел; в частности, $p' = \mathbb{P} \backslash \{p\}$;

p, q — простые числа;

примарное число — любое число вида $p^\alpha,\ p \in \mathbb{P}$;

$|G|$ — порядок группы G;

1 — единичный элемент и единичная подгруппа группы G;

$\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей натурального числа n;

$\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G;

π-группа — группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$;

p-группа — группа G, для которой $\pi(G) = \{p\}$;

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G;

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G;

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

G_p — силовская p-подгруппа группы G;

$G_{p'}$ — дополнение к силовской p-подгруппе в группе G, т.е. p' - холловская подгруппа группы G;

$H \leq G$ — H является подгруппой группы G;

$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G;

нетривиальная подгруппа — неединичная собственная подгруппа;

$H \trianglelefteq G$ — H является нормальной подгруппой группы G;

$M < \cdot G$ — M является максимальной подгруппой группы G;

$M \cdot < G$ — M является минимальной подгруппой группы G;

$M \cdot \triangleleft G$ — M является минимальной нормальной подгруппой группы G;

$|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G;

$\pi(G : H) = \pi(|G : H|)$

$C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в группе G;
$N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G;
$Z(H)$ — центр группы G;

Если A и B — группы, то $A \times B$ — прямое произведение A и B;
$A\lambda B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B, $(A \cap B = 1)$;
$A \simeq B$ — подгруппы A и B изоморфны.

Левым смежным классом группы G по подгруппе H называется множество aH элементов вида ah, где a — фиксированный элемент из G, а h пробегает все элементы подгруппы H. Элемент a называется *представителем* смежного класса aH. Аналогично определяется *правый смежный класс* $Ha = \{ha|h \in H\}$.

Подгруппа H группы G называется *нормальной* в G, если $xH = Hx$ для всех $x \in G$. Равенство $xH = Hx$ означает, что для любого $h_1 \in H$ существует $h_2 \in H$ такой, что $xh_1 = h_2x$.

Совокупность $\overline{G} = \{xH|x \in G\}$ левых смежных классов группы G по подгруппе H с операцией $(xH)(yH) = xyH$ образует группу с единичным элементом eH и обратным элементом $(aH^{-1}) = a^{-1}H$.

Группа $\overline{G}$ называется *факторгруппой* группы G по подгруппе H и обозначается через G/H.

Если G — конечная группа, то число различных левых смежных классов по подгруппе H также конечно и оно называется *индексом* подгруппы H в группе G и обозначается $|G : H|$.

Пусть p — простое число. Подгруппа P конечной группы G называется *силовской p-подгруппой*, если $|P|$ есть наибольшая степень простого числа p, делящего порядок группы G. Если $|G| = p^\alpha n$, $(p, n) = 1$, то порядок силовской p-подгруппы равен p^α. Если p не делит порядок группы G, то указанной степенью будет p^0. В этом случае силовская p-подгруппа будет единичной подгруппой.

Группа G называется *p-группой*, если она совпадает со своей силовской p-подгруппой, т.е. $|G| = p^\alpha$.

Подгруппа порядка $|G|_\pi$ называется *π-холловской* подгруппой группы G.

Если π состоит из одного простого числа p , то π-холловская подгруппа является силовской p-подгруппой.

Подгруппа H называется *π-подгруппой*, если множество простых делителей порядка H содержится в π. По определению, единичная подгруппа является π-подгруппой.

Конечную группу будем называть *примарной*, если порядок ее есть степень простого числа. Единичную группу будем считать примарной.

Пусть G — неединичная группа и пусть M — такая подгруппа группы G, которая не содержится ни в какой другой подгруппе, отличной от G. Тогда M называется *максимальной подгруппой.* Максимальная подгруппа единичной группы — есть она сама. Из определения максимальной подгруппы следует, что она либо нормальна, либо совпадает со своим нормализатором.

Группа G называется:
примарной, если $|\pi(G)| \leq 1$;
бипримарной, если $|\pi(G)| = 2$.

Цепь — это совокупность вложенных друг в друга подгрупп. Ряд подгрупп — это цепь, состоящая из конечного числа членов и проходящая через группу G и единичную подгруппу 1.

Ряд подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = 1$ называется:
субнормальным, если $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$ для любого $i > 0$;
нормальным, если $H_i \trianglelefteq G$ для любого i;
главным, если $H_i/H_{i+1} \cdot\!\triangleleft\, G/H_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, t-1$.
центральным, если все подгруппы этого ряда нормальны в G и $H_i/H_{i+1} \subseteq Z(G/H_i)$.
композиционным, если он является субнормальным и для всех $i = 1, 2, \ldots, t$ выпоняется одно из следующих двух равносильных условий:
1) H_{i-1}/H_i — простая группа;
2) между H_{i-1} и H_i нельзя вставить ни одной подгруппы, нормальной в H_{i-1}.

Группа Шмидта — это конечная ненильпотентная группа, все собственные группы которой нильпотентны.

Секция группы G — это фактор-группа ее некоторой подгруппы. Подгруппа R покрывает (изолирует) секцию A/B, если $RB \supseteq A$ (соответственно $R \cap A \subseteq B$). Предпоследний, отличный от 1, член главного ряда группы G будем называть минимальной нормальной подгруппой.

Факторы главного ряда называются *главными факторами.* Главный фактор H/K группы G называется *нефраттиниевым*, если $H/K \nsubseteq \Phi(G/K)$.

Группу G называют:

p-замкнутой, если $G_p \trianglelefteq G$;

p-нильпотентной, если $G_{p'} \trianglelefteq G$;

p-разрешимой, если в G существует нормальный ряд, факторы которого либо p-группы, либо p'-группы;

p-сверхразрешимой, если каждый ее главный фактор является либо p'-группой, либо циклической группой;

нильпотентной, если она удовлетворяет одному из следующих равносильных условий:

1) G разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп:

$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$;

2) все силовские подгруппы группы G нормальны;

p-нильпотентной, если $G_{p'} \trianglelefteq G$;

разрешимой, если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$ ($G^{(n)}$ — n-й коммутант группы G), то есть ряд коммутантов заканчивается единичной подгруппой: $G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(t)} = 1$;

сверхразрешимой, если она удовлетворяет одному из следующих равносильных условий:

1) обладает главным рядом, все индексы которого являются простыми числами;

2) обладает нормальным рядом, у которого все факторы — циклические подгруппы.

Экспонента группы G — это наименьшее общее кратное порядков всех ее элементов.

Группа G является *прямым произведением* своих подгрупп $A_1, A_2, \cdots$, A_t, $t \geq 1$, если выполняются условия:

а) $A_i \trianglelefteq G, i = 1, 2, \cdots, t$

б) $G = A_1\ A_2\ \cdots A_t$

в) $A_i \cap (A_1\ A_2 \cdots A_{i-1}\ A_{i+1} \cdots A_t) = E$. $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_t$ — прямое произведение.

Централизатор — это совокупность элементов группы G, перестановочных с каждым элементом из множества S:

$C_G(S) = \{x \in G | xs = sx, s \in S\}$.

Если $S = G$, то говорят о *центре* группы: $C_G(S) = Z(G)$ — совокупность элементов, перестановочных с каждым элементом из группы G:

$Z(G) = \{x \in G | xz = zx, z \in G\}$.

Пересечение всех подгрупп группы G, содержащих элемент g, называется *циклической подгруппой*, порожденной элементом g: $< g >$, т.е. $< g > = \bigcap_{g \in H \leq G} H$.

Классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$.

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Классы групп и формации принято обозначать прописными готическими буквами.

Если формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}$ называется *подформацией* формации $\mathfrak{F}$.

За некоторыми классами закреплены стандартные обозначения:
$\mathfrak{E}$ — класс всех групп;
$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп;
$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;
$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;
$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп;
$\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех разрешимых π-групп;
$\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп;
$\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп.

Единичная формация — это непустой класс групп, состоящий лишь из единичных групп.

По определению, пустое множество является формацией (пустая формация).

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп, G — группа.

$\mathfrak{F}$ - корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$ группы G называется пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — формация, то $G^{\mathfrak{F}}$ является наименьшей нормальной подгруппой группы G, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп, то $G^{\mathfrak{U}}$ называется *сверхразрешимым корадикалом* группы G.

$O^{\pi}(G)$ — π-корадикал группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что и $G \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *наследственным или замкнутым* относительно подгрупп, если из того, что $G \in \mathfrak{X}$ следует, что и каждая подгруппа группы G также принадлежит $\mathfrak{X}$.

Произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} | G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$

Функция вида f : простыечисла $\rightarrow$ {формации групп} называется *локальным спутником.*

При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Непустая формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω-насыщенной*, если она n-кратно ω-насыщенна для всех n. Пустую формацию $\oslash$ считают тотально ω-насыщенной.

Главный фактор H/K группы G назовем *$\mathfrak{F}$-центральным ($\mathfrak{F}$-эксцентральным)*, если H/K f-централен (соответственно f-эксцентрален) в G для некторого внутреннего локального спутника f формации $\mathfrak{F}$. При $K = 1$ мы получаем понятие $\mathfrak{F}$-центральной и $\mathfrak{F}$-эксцентральной минимальной подгруппы.

Нормальная секция (в частности, главный фактор) $H/K \neq 1$ группы G называется f-центральной в G, если выполняется одно из следующих условий:

1) для любого $p \in \pi(H/K)$ $G/C_G(H/K) \in f(p)$;

2) H/K — πd-группа и $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого $p \in \pi \cap \pi(H/K)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Нормальная подгруппа N группы G называется *$\mathfrak{F}$-гиперцентральной* в G, если существует ряд $1 = H_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_r = N$, причем факторы N_{i+1}/N_i являются $\mathfrak{F}$-центральными главными в группе G. Произведение всех $\mathfrak{F}$-гиперцентральных подгрупп группы G вновь является $\mathfrak{F}$-гиперцентральной подгруппой группы G. Она обозначается $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ и называется *$\mathfrak{F}$-гиперцентром* группы G. Для формации $\mathfrak{N}$ нильпотентных групп часто используют обозначение $Z_{\infty}(G)$ вместо $Z_{\mathfrak{N}}(G)$.

Через $LF(f)$ обозначается класс всех групп, у которых все главные факторы f-центральны. Класс $\mathfrak{F} = LF(f)$ является насыщенной формацией; при этом f называется локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Спутник f называется внутренним, если $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого числа p.

Элемент $x \neq 1$ группы G назовем *$Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1)$K \neq xK \in Z_{\mathfrak{F}}(G/K)$ для некоторой нормальной подгруппы K из G;

2) группа G имеет такой $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор L/K, что $x \in L$ и $x \notin K$. Единичный элемент также будем считать $Z_{\mathfrak{F},G}$-элементом.

Локальный спутник f насыщенной формации $\mathfrak{F}$ назовем *полувнутренним*, если для любого простого p либо $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, либо $f(p)$ совпадает с классом $\mathfrak{E}$ всех групп.

Максимальная подгруппа M группы G называется *$\mathfrak{F}$-нормальной, если $M \supseteq G^{\mathfrak{F}}$. В противном случае M называется $\mathfrak{F}$-абнормальной.*

Скажем, что подгруппа K группы G обладает π-дополнением H в группе G, если $HK = G$ и $|H \cap K|$ не делится на числа из π. Подгруппу H с этим свойством будем называть π-дополнением для подгруппы (к группе) K в группе G, а подгруппу K — π-дополняемой подгруппой группы G.

Добавлением к нормальной подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$.

Нормальную подгруппу R группы G назовем $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G.

Элемент x конечной группы G называется Q-центральным в G, если существует центральный главный фактор H/K группы G такой, что $x \in H\backslash K$.

Назовем группу M минимальным добавлением к группе K группы G, если $G = MK$, но $G \neq M_1K$ для каждой собственной подгруппы M_1 группы M.

Подгруппу H группы G назовем добавляемой в G, если в G существует собственная подгруппа K, такая, что $G = HK$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе Гашюца [1] 1963 года был впервые выделен класс насыщенных формаций, а также был предложен способ их конструирования при помощи специальных функций. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. В работе [1] также была введена концепция f-центрального главного фактора: пусть функция f сопоставляет каждой группе некоторую формацию. Главный фактор H/K группы G называется f-центральным, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. Напомним, что функция f, определенная на множестве простых чисел со значениями во множестве всех формаций, называется формационной функцией. Если формация $\mathfrak{F}$ состоит в точности из всех тех групп, у которых все главные факторы $\mathfrak{F}$-центральны, то функция f называется спутником формации $\mathfrak{F}$.

Идеи, заложенные в отмеченной работе Гашюца, привлекли внимание многих специалистов по алгебре (см., например, [2], [3], [4]), и исследования, связанные с изучением спутников формаций, составили одно из доминирующих направлений современной теории классов групп.

В 1991г. Л.А.Шеметковым была предложена новая концепция обобщенно центрального элемента. Элемент x группы G он назвал Qf-центральным (f-некоторый спутник), если $x \in H \setminus K$ для некоторого f-центрального главного фактора H/K группы G. Это понятие было использовано в работе Х.А.Аль-Шаро и Л.А.Шеметкова [5] под названием $Z_{f,G}$-элемента; в этой работе рассматривалась проблема формационной распознаваемости группы по заданной системе Qf-центральных элементов. Этой же проблеме и посвящена настоящая диссертация.

Пусть f — спутник формации $\mathfrak{F}$, Θ — функтор, выделяющий в каждой группе некоторую систему ее элементов. Мы скажем, что группа G $\mathfrak{F}$-распознаваема по системе $\Theta(G)$, если из того, что все элементы из $\Theta(G)$ Qf-центральны, вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$.

В диссертации исследуется следующий вопрос: для каких функторов Θ группа G $\mathfrak{F}$-распознаваема?

В 1954 году Хупперт в работе [6] в качестве системы $\Theta(G)$ рассматривал множество всех элементов, не содержащихся в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$; в этих терминах теорема Хупперта может быть сформулирована следующим образом: если f — внутренний локальный спутник формации всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$, то из того, что каждый элемент группы G, не лежащий в $\Phi(G)$, является Qf-центральным, вытекает, что группа

G сверхразрешима. Обобщению теоремы Хупперта была посвящена работа Бэра 1959 года [7], в которой в качестве системы Qf-центральных элементов выступало множество $H \setminus \Phi(H)$, где H — нормальная подгруппа группы G. В работах [8], [10] были получены критерии сверхразрешимости и p-сверхразрешимости конечных групп, связанные с дополняемостью или добавляемостью примарных циклических подгрупп. Анализ показывает, что результаты работ [8], [10] обусловлены наличием Qf-центральных элементов.

Таким образом, задача формационной распознаваемости группы с системой ее обобщенно центральных элементов является актуальной и дальнейшей ее реализации посвящена настоящая диссертационная работа.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

На протяжении последних 40 лет предметом пристального внимания исследователей по теории конечных групп является одно из важных и интенсивно развивающихся направлений—теория формаций.

Понятие формации было впервые введено в работе Гашюца [1]. Формация — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В работе Гашюца [1] предложены также концепция насыщенной формации и концепция f-центрального главного фактора. Пусть функция f сопоставляет каждой группе некоторую формацию. Главный фактор H/K группы G называется f-центральным, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$.

Если класс групп $\mathfrak{F}$ состоит в точности из всех тех групп, у которых все главные факторы $\mathfrak{F}$-центральны, то функция f называется спутником класса $\mathfrak{F}$. Изучению спутников формаций были посвящены многочисленные работы (см.[12], [2], [4].)

В 1991г. Л.А.Шеметков предложил новую концепцию обобщенно центрального элемента. Элемент x группы G он назвал Qf-центральным (f-некоторый спутник), если $x \in H \backslash K$ для некоторого f-центрального главного фактора H/K группы G. Это понятие было использовано в работе [5] под названием $Z_{f,G}$-элемента; в этой работе рассматривалась проблема формационной распознаваемости группы по заданной системе Qf-центральных элементов. Этой же проблеме и посвящена настоящая диссертация. Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными.

Пусть f — спутник формации $\mathfrak{F}$, Θ — функтор, выделяющий в каждой группе некоторую систему ее элементов. Мы скажем, что группа G $\mathfrak{F}$-распознаваема по системе $\Theta(G)$, если из того, что все элементы из $\Theta(G)$ Qf-центральны, вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$.

В диссертации исследуется следующий вопрос.

Основной вопрос.

При заданной формации $\mathfrak{F}$ со спутником f для каких функторов Θ каждая группа G $\mathfrak{F}$-распознаваема?

В работе [5] в качестве системы $\Theta(G)$ рассматривалась система элементов простого порядка и порядка 4. В классической теореме Хупперта 1954 года [6] в качестве $\Theta(G)$ рассматривалось множество всех элементов, не содержащихся в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$; в этих терминах теорема Хупперта может быть сформулирована следующим образом: если f —

внутренний локальный спутник формации всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$, *то из того, что каждый элемент группы* G, *не лежащий в* $\Phi(G)$, *является* Qf*-центральным, вытекает, что группа* G *сверхразрешима. Обобщению теоремы Хупперта была посвящена работа Бэра 1959 года [7], в которой в качестве системы* Qf*-центральных элементов выступало множество* $H \setminus \Phi(H)$, *где* H *— нормальная подгруппа группы* G. *В работах [9], [10] были получены критерии сверхразрешимости и p-сверхразрешимости конечных групп, связанные с дополняемостью или добавляемостью примарных циклических подгрупп. Анализ показывает, что результаты работ [9], [10] обусловлены наличием* Qf*-центральных элементов.*

Таким образом, задача формационной распознаваемости группы по системе ее обобщенно центральных элементов вполне актуальна.

Связь работы с крупными научными программами, темами.

Диссертация выполнена в рамках госбюджетной темы "Структурная теория классов групп"Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины (№ госрегистрации в БелИСА - 20011227). Тема входит в Межвузовскую программу фундоментальных исследований "Анализ и динамические системы". Выполнение темы запланировано на 2001-2005г.

Цель и задачи исследования.

Цель диссертации — нахождение систем обобщенно центральных элементов, влияющих на вхождение группы в насыщенную формацию. Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

— установление связи между сверхразрешимостью группы G *и наличием примарных обобщенно центральных элементов, не входящих в подгруппу Фраттини силовских подгрупп и всей группы;*

— характеризация насыщенных формаций с помощью обобщенно центральных элементов.

Объект и предмет исследования.

Объектом исследования является выделенная система p-элементов группы G. *Предмет исследования — влияние обобщенной центральности выделенных элементов на вхождение группы в насыщенную формацию.*

Методология и методы проведенного исследования.

В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп и теории формаций. Из абстрактной теории групп использовались теоретико-групповые методы исследования непростых конечных групп, причем основным методом является метод π*-свойств конечных* *групп. Кроме того, использовались методы математической индукции и редукции к известным результатам. Из теории классов групп используются методы формационного исследования наборов подгрупп, а так же методики исследования, опубликованные в журнальных статьях различных авторов.*

Научная новизна и значимость полученных результатов.

Все результаты диссертации являются новыми. Установлены новые факты формационной определяемости конечной группы по системе обобщенно центральных элементов. В работе получили дальнейшее развитие результаты Р.Бэра, В.Хупперта, С.Н.Черникова, В.А.Ведерникова и Н.И.Кулешов (см. [1], [7], [9], [10]).

Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты в диссертации являются новыми и могут быть использованы в исследованиях по теории групп. Отдельные результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов на математических факультетах ВУЗов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Распознавание p-сверхразрешимых групп по системе $Q\mathfrak{U}$-центральных элементов (теорема 3.1 [29]).

2. Свойства G-главных факторов p-сверхразрешимых нормальных подгрупп конечных групп с системой $Q\mathfrak{U}$-центральных элементов (теорема 4.1 [30]).

3. $\mathfrak{F}$-распознавание конечной группы с системой $Q\mathfrak{F}$-центральных элементов ($\mathfrak{F}$ — насыщенная формация) (теоремы 5.3, 5.4, 5.5 [31]).

Личный вклад соискателя.

В совместно опубликованных работах постановка задачи и общие идеи доказательств принадлежат научному руководителю, а сами доказательства получены соискателем самостоятельно и независимо от соавторов.

Апробация результатов диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины, на XXVI научной конференции по естественным, техническим и гуманитарным наукам (Беларусь, г.Минск, 1998г.); на VII Белорусской математической конференции (Беларусь, г.Минск, 19–24 июня 2000г.); на

IV Международной алгебраической конференции, посвященной 60-летию профессора Ю.И.Мерзлякова (Россия, г.Новосибирск, 7–11 августа 2000г.); на IV Международной алгебраической конференции в Украине (Украина, г.Львов, 4–9 августа 2003г.); на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения"(Россия, г.Тула, 19–24 мая 2003г.); на Международной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения профессора А.И.Кокорина (Россия, г.Иркутск, 25–28 августа 2004г.); на IX Белорусской математической конференции (Беларусь, г.Гродно, 2004г.); на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов–2005"(Украина, г.Севастополь, 2005г.).

Опубликованность результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях, 1 препринте и 7 тезисах докладов. Общее количество страниц опубликованных материалов — 36.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, 6 глав, заключения и списка использованных источников (38 наименований). Объем диссертации — 54 страницы.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю — члену-корреспонденту НАН Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору Леониду Александровичу Шеметкову за внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все рассматриваемые в диссертации группы конечны. Терминология и обозначения стандартны, их можно найти в [12], [2], [3].

Данная диссертационная работа посвящена изучению строения р-сверхразрешимых групп.

Далее изложено краткое содержание диссертации по главам.

Глава 1 содержит обзор основных результатов диссертации.

В главе 2 приведены некоторые известные результаты, используемые в основном тексте диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3 — 6.

Цель третьей главы "Характеризация конечных р-сверхразрешимых групп"явля изучение р-сверхразрешимых групп с силовскими р-подгруппами, используя следующее определение:

Определение *(предложено Л.А. Шеметковым). Элемент x назовем* $Q\mathfrak{U}$*-центральным, если существует такой циклический главный фактор* H/K *группы* G*, что* $x \in H \backslash K$.

Была доказана следующая теорема:

3.1. Теорема *[29]. Пусть* P *— силовская р-подгруппа конечной группы* G*. Группа* G *р-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из* $P \backslash \Phi(P) \cup Phi(G)$ $Q\mathfrak{U}$*-централен в* G.

Цель четвертой главы состоит в нахождении новых свойств р-сверхразрешими нормальных подгрупп конечных групп. Изучению групп, определяемых свойствами системы подгрупп, уделяли внимание многие авторы. Например, С.Н. Черников внес выдающийся вклад в исследование групп с ограничениями для подгрупп. В работе [10] им было показано, что конечная группа G *с абелевыми силовскими подгруппами тогда и только тогда сверхразрешима, когда каждая ее примарная циклическая подгруппа, дополняемая хотя бы в одной содержащей ее силовской подгруппе из* G*, дополняема и в самой группе* G*. Этот результат получил развитие в работах других авторов (см., например, [19], [23], [5] и др.).*

В четвертой главе "О р-сверхразрешимых нормальных подгруппах конечных групп" нами получены некоторые новые результаты в этом направлении.

Используя определение 3.1. главы 3, были доказаны следующие теоремы:

4.1. Теорема *[30]. Пусть p — простое число, $H \trianglelefteq G$, P — силовская p-подгруппа из H. Если каждый элемент из $P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$ является $Q\mathfrak{U}$-центральным в G, то H p-сверхразрешима и каждый ее нефраттиниев G-главный p-фактор имеет порядок p.*

Заметим, что из теоремы 4.1 вытекает теорема 3.1.

Важное место в исследованиях групп по заданным свойствам системы подгрупп занимают вопросы, связанные с понятием факторизации группы. Напомним, что группа называется вполне факторизуемой, если каждая ее подгруппа дополняема в ней. Конечные вполне факторизуемые группы были описаны в работе Холла [18]. В дальнейшем Ю.М. Горчаков установил в [6], что для полной факторизуемости конечной группы G достаточно, чтобы в G были дополняемыми лишь ее минимальные подгруппы.

Начиная с 1953 г., С.Н. Черников и его ученики выпустили серию работ, исследующих группы с системой дополняемых подгрупп. Во многих случаях (см. [20], части 7 — 8 и приложение) группы или оказывались сверхразрешимыми, или имели свойства, сходные с свойствами $\mathfrak{U}$-групп.

Напомним, что подгруппа A строго добавляема в G, если существует добавление $B \neq G$ к A в группе G. В.А. Ведерников и Н.И. Кулешов доказали, что конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая примарная циклическая подгруппа строго добавляемая в силовской подгруппе группы G, строго добавляема в группе G.

Целью пятой главы является обобщение результатов работ [10] и [19] рассматривая $\mathfrak{U}$ — произвольную насыщенную формацию.

Главным инструментом рассуждений является понятие $Z_{f,G}$-элемента, представленного в [12].

В главе 5. " Характеризация групп и формаций" доказаны следующие результаты:

5.1. Лемма*[31]. Пусть $G = AB$, где B — максимальная подгруппа группы G и $A =< a >$ — циклическая 2-подгруппа группы G. Тогда a является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом. Более того, $G = AM$ для некоторой нормальной максимальной подгруппы M группы G.*

5.2. Лемма*[31]. Пусть $G = AB$, где $B \neq G$ и $A =< a >$ — циклическая p-подгруппа группы G, $p > 2$. Допустим, что G — p-разрешимая группа с абелевой силовской p-подгруппой. Тогда a является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

5.3. Лемма*[31]. Пусть G — p-разрешимая группа. Предположим, что каждая циклическая p-подгруппа, строго добавляемая в силовской p-подгруппе* *группы G, строго добавляема в G. Тогда каждая циклическая p-подгруппа строго добавляемая в силовской p-подгруппе группы G, порождается $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

5.3. Теорема *[31].Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полувнутренний спутник. Пусть $\omega = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \mathfrak{E}\}$, G — группа. Предположим, что для каждого $p \in \omega$ выполняется следующее условие: каждый элемент $x \in G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{f,G}$-элементом. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Из теоремы 5.3 получены следствия:

5.3.1. Следствие *[31]. Группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

5.3.2. Следствие *[31]. Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда каждый элемент из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом.*

5.4. Теорема *[31]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полувнутренний спутник. Пусть $\omega = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \mathfrak{E}\}$, G — группа, содержащая абелеву силовскую p-подгруппу для каждого $p \in \omega$. Предположим, что для каждого $p \in \omega$ выполняется следующее утверждение: каждая циклическая p-подгруппа, дополняемая в силовской p-подгруппе группы G, порождается $Z_{f,G}$-элементом. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Из теоремы 5.4 были получены следствия:

5.4.1. Следствие *[31]. Пусть G — группа, содержащая абелеву силовскую p-подгруппу G_p. Тогда группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая циклическая p-подгруппа, дополняемая в G_p, порождается $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

5.4.2. Следствие *[31]. Пусть G — группа, содержащая абелеву силовскую p-подгруппу G_p. Тогда G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая циклическая p-подгруппа группы G, дополняемая в G_p, порождается $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом.*

5.5. Теорема *[31]. Пусть p — простое число, $H \trianglelefteq G$ и подгруппа H_p абелева. Предположим, что каждая циклическая подгруппа, дополняемая в H_p, порождается $Q\mathfrak{U}$-центральным в группе G элементом. Тогда H p-сверхразрешима и каждый ее G-главный p-фактор имеет порядок p.*

В главе 6 устанавливается связь между результатами предыдущих глав и исследованиями групп, обладающих заданной системой S-квазинормальных подгрупп.

Доказаны следующие теоремы.

6.1 Теорема *[39]. Пусть H — нормальная подгруппа группы G, p — простое число. Предположим, что либо H p-разрешима, либо p — наименьшее простое число, делящее порядок H. Если максимальные подгруппы силовской p-группы из H являются S-квазинормальными в G, то H p-сверхразрешима и её нефраттиниевы G-главные p-факторы циклические.*

6.2 Теорема *[39]. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из K являются S-квазинормальными в G, то K сверхразрешима и её нефраттиниевы G-главные факторы циклические.*

ГЛАВА 2

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Методы доказательства

В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп. Привлечены также элементы теории чисел и методы теории классов групп, в частности, методы теории формаций.

2.2. Используемые результаты

В настоящем разделе представлен ряд общих понятий, играющих важную роль в данной работе, а также приведены необходимые результаты, которые используются в диссертации наиболее часто. Остальные используемые результаты приводятся со ссылками в основном тексте работы.

2.2.1. Теорема [12, Теорема 4.1] *В любой pd-группе G подгруппа $F_p(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных pd-факторов группы G.*

2.2.2. Теорема [2, Теорема A.9.13] *Пусть H_1 и H_2 — G-главные ряды нормальной подгруппы H конечной группы G. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между главными факторами этих рядов такое, что соответствующие факторы G-изоморфны и фраттиниевы главные факторы из H_1 отображаются во фраттиниевы факторы из H_2.*

2.2.3. Теорема [12, Теорема 12.4] *Пусть H — некоторое минимальное добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если H содержит по крайней мере одну силовскую p-подгруппу группы K, то K p-нильпотентна.*

2.2.4. Теорема [12, Теорема 4.2] *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удостоверяют следующим условиям:*

1)$N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \oslash$;

3) $N_2 \subseteq \Phi(G)$

В частности, если $N/N \cap \Phi(G)$ имеет нормальную холловскую π-подгруппу, то N также обладает нормальной холловской π-подгруппой.

2.2.5. Лемма [12, Следствие 4.2.1] *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$. Если $N \trianglelefteq G$ и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

2.2.6. Лемма [12, Следствие 4.2.2] *Если* $N \trianglelefteq G$ *и* $N/N \cap \Phi(G)$ π-*сверхразрешима, то и* N π-*сверхразрешима.*

2.2.7. Лемма [12, Следствие 4.2.3] *Если* $N \trianglelefteq G$ *и* $N/N \cap \Phi(G)$ *сверхразрешима, то и* N *сверхразрешима.*

2.2.8. Теорема [12, Теорема 4.4] *Группа* $G \neq 1$ *сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.*

2.2.9. Лемма [26, Следствие V.1.2] *Если факторгруппа* $G/\Phi(G)$ *циклическая, то группа* G *также циклическая.*

2.2.10. Теорема [2, Теорема A.7.12] *Если группа* G *содержит нормальную циклическую подгруппу* K *и факторгруппа* G/K *сверхразрешима, то группа* G *сверхразрешима.*

2.2.11. Лемма [12, Следствие 4.2.1] *Пусть* N *— нормальная подгруппа группы* G*, причем факторгруппа* $N/N \cap \Phi(G)$ *является нильпотентной. Тогда подгруппа* N *также нильпотентна.*

2.2.12. Лемма [14, Лемма 3.1] *Пусть* N *и* L *— нормальные подгруппы группы* G*. Пусть* P/L *— силовская* p*-подгруппа группы* NL/L*, а группа* M/L *— максимальная подгруппа группы* P/L*. Если* P_p *— силовская* p*-подгруппа группы* $P \cap N$*, то* P_p *— силовская* p*-подгруппа группы* N*, причем* $D = M \cap N \cap P_p$ *— максимальная подгруппа в группе* P_p *и* $M = LD$*.*

2.2.13. Лемма [2, с.36] *Пусть* H/K *— главный фактор группы* G*. Тогда* $F(G) \subseteq C_G(H/K)$*.*

2.2.14. Лемма [2, с.36] *Пусть* G *— разрешимая группа. Тогда* $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$*.*

2.2.15. Лемма [12, Следствие 4.1.1] *В любой группе* G *подгруппа Фиттинга* $F(G)$ *совпадает с пересечением централизаторов в* G *всех главных факторов группы* G*.*

2.2.16. Лемма [26, Лемма I.3.4] *Если* $G/Z(G)$ *— циклическая группа, то* $G = Z(G)$ *и группа* G *абелева.*

2.2.17. Лемма [15, Лемма 26.5] *Если* G *— сверхразрешимая группа и* p *— наибольший простой делитель порядка* G*, то силовская* p*-подгруппа группы* G *нормальна.*

2.2.18. Лемма [10, с. 3] *Пусть G — конечная группа и все силовские подгруппы группы G абелевы. Группа G является сверхразрешимой тогда и только тогда, когда каждая примарная циклическая подгруппа, дополняемая в силовской подгруппе группы G, дополняема и в группе G.*

2.2.19. Лемма [9, с. 107] *Конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая примарная циклическая подгруппа, добавляемая в силовской подгруппе группы G, добавляема и в группе G.*

2.2.20. Теорема [2, Теорема (Гашюца) IV. 4.6] *Непустая формация $\mathfrak{F}$ насыщена тогда и только тогда, когда она имеет локальный спутник.*

2.2.21. Лемма [12, Теорема 8.1] *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полувнутренний спутник. Пусть H/L — нефраттиниев G-главный фактор из $G^{\mathfrak{F}}$ такой, что $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \pi(H/L)$. Тогда фактор H/L f-эксцентрален в G.*

2.2.22. Лемма [12, Лемма 11.6] *Пусть $G = AB$. Тогда для любого простого числа p существуют такие силовские p-группы P, P_1, P_2 соответственно в G, A и B, что $P = P_1P_2$.*

2.2.23. Лемма [16] *Если $G = AB$, $N \trianglelefteq A$, $N \subseteq A \cap B$, то $B_G \supseteq N$.*

2.2.24. Теорема [3, глава VI]

1) $\mathfrak{U} = LF(f)$, где f — локальный спутник, такой, что $f(p)$ для каждого простого числа p есть класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

2) Пусть ${}_p\mathfrak{U}$ — класс всех p-сверхразрешимых групп. Тогда ${}_p\mathfrak{U} = LF(f)$, где f — локальный спутник, такой что $f(p)$ есть класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$ и $f(q) = \mathfrak{E}$ для каждого простого $q \neq p$.

3) Пусть простое число p делит порядок главного фактора H/K группы G. Тогда $H/K_p\mathfrak{U}$-централен ($\mathfrak{U}$ — централен) тогда и только тогда, когда $|H/K| = p$.

2.2.25. Теорема [3, Теорема 6.6] *Пусть G — p-разрешимая группа с абелевой силовской p-подгруппой. Тогда $l_p(G) \leq 1$.*

2.2.26. Лемма [3, Теорема 9.1] *Если группа G p-сверхразрешима,то $l_p(G) \leq 1$.*

2.2.27. Лемма [17, с. 1324] *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — группа. Если $G^{\mathfrak{F}}$ имеет абелеву силовскую p-подгруппу для каждого простого числа $p \in \omega$, то существует подгруппа H такая, что $G = HG^{\mathfrak{F}}$ и $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ есть ω'-группа.*

2.2.28. Лемма [17, с. 1326] *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$ *и* $f(p) \in \mathfrak{F}$ *для некоторого простого* p. *Если силовская* p-*подгруппа в* $G^{\mathfrak{F}}$ *абелева, то* $G^{\mathfrak{F}}$ *не имеет* f-*центральных* G-*главных* p-*факторов.*

2.2.29. Лемма [17] *Если подгруппа* H *группы* G S-*квазинормальна, то* $N_G(H) \supseteq O^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p}$.

2.2.30. Лемма [17] *Пусть* H *— нормальная* p-*подгруппа группы* G, L *— нормальная подгруппа группы* G, $L \subseteq H$. *Если максимальные подгруппы в группе* H S-*квазинормальны в* G, *то максимальные подгруппы из группы* H/L *также* S-*квазинормальны в* G/L.

2.2.31. Лемма [17] *Пусть* H *— нормальная* p-*подгруппа группы* G, L *—* S-*квазинормальная подгруппа группы* G. *Тогда* $H \cap L$ S-*квазинормальна в группе* G.

2.2.32. Лемма [21] *Если* p-*подгруппа* H *группы* G S-*квазинормальна, то* H *субнормальна в* G *и* $N_G(H) \supseteq O^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p}$.

2.2.33. Лемма [5] *Пусть* H *— нормальная* p-*подгруппа группы* G, L *—* S-*квазинормальная подгруппа группы* G. *Тогда группа* $H \cap L$ S-*квазинормальна в группе* G.

2.2.34. Лемма *Пусть* H *— подгруппа группы* G, $H_p \subseteq G_p$, P *— максимальная подгруппа в* G_p, $P \not\supseteq H_p$. *Тогда пересечение* $P \cap H_p$ *максимально в* H_p.

Доказательство. Так как P *— максимальная подгруппа в* G_p, *то* $G_p = PH_p$, $|G_p : P| = p$. *Тогда* $|G_p| : |P| = p$, $|G_p| = \frac{|P|\ |H_p}{|H_p \cap P|}$. *Значит,* $|H_p : H_p \cap P| = p$. *Лемма доказана.*

2.2.35. Лемма [12] *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$.ТогдаFимеетвнутреннийлокальныйспутни
причем для любого p *имеет место* $f_1(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$.

2.2.36. Лемма [12] *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$, A *и* B *—* f-*гиперцентральные нормальные подгруппы группы* G. *Тогда* AB *также является* f-*гиперцентральной в* G.

2.2.37. Лемма [12] *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$, *где спутник* f *внутренний. Пусть* R *— такая нормальная подгруппа группы* G, *что* $G/R \in \mathfrak{F}$. *Если* R f-*гиперцентральна в* G, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

2.2.38. Лемма [12] *Пусть формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ является S-замкнутой, H — подгруппа группы G. Если K — $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы G, то любой H-главный фактор группы $K \cap H$ $\mathfrak{F}$-централен в H.*

2.2.39. Лемма [9, Теорема 1] *Конечная группа G тогда и только тогда сверхразрешима, когда каждая ее примарная циклическая подгруппа, добавляемая хотя бы в одной содержащей ее силовской подгруппе из G, добавляема и в группе G.*

2.2.40. Лемма [9, Лемма 1] *Пусть $G = AB$, где A и B — подгруппы группы G, причем силовская 2-подгруппа A_2 из A не является силовской 2-подгруппой в G, B — абелева с циклической 2-подгруппой B_2. Тогда в G существует нормальная подгруппа N, такая, что $G = B_2N$ и $|G : N| = 2$.*

2.2.41. Лемма [9, Лемма 2] *Группа G является p-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда $\overline{G} = G/O'_p(G) = \overline{G_p}\lambda\overline{H}$, где $\overline{G_p}$ нормально вложена в $\overline{G}$, $\overline{H}$ — абелева подгруппа из $\overline{G}$.*

2.2.42. Лемма [9, Лемма 3] *Группа G тогда и только тогда 2-нильпотентна, когда каждая циклическая 2-подгруппа группы G, добавляемая в содержащей ее силовской 2-подгруппе из G, добавляема и в G.*

2.2.43. Лемма [9, Лемма 4] *Всякая циклическая p-подгруппа, добавляемая в содержащей ее силовской p-подгруппе группы G, добавляема в самой группе G тогда и только тогда, когда добавляема в G каждая p-подгруппа, добавляемая в содержащей ее силовской p-подгруппе.*

2.2.44. Лемма [9, Лемма 5] *Если в p-разрешимой группе G добавляема каждая циклическая подгруппа из G_p, добавляемая в G_p, то группа G p-сверхразрешима.*

2.2.45. Лемма [9, Лемма 6] *Если группа G p-сверхразрешима, то каждая p-подгруппа из G, добавляемая в содержащей ее силовской p-подгруппе из G, добавляема и в группе G.*

2.2.46. Лемма [12, Следствие 8.1.2] *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, $L/K - G$ — главный фактор группы $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда спарведливы следующие утверждения:*

1) если L/K $\mathfrak{F}$-централен в G, то $L/K \subseteq \Phi(G/K) \cap Z(G^{\mathfrak{F}}/K)$

2) если $L/K \nsubseteq \Phi(G/K)$, то L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален в G.

2.2.47. Лемма [12, Лемма 1.2] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая формация,* $K \trianglelefteq G$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$*;*

2) если $G = HK$*, то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$*;*

3) если $G = HK$ *и* $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$*, то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$*.*

2.2.48. Лемма [10, Лемма 1] *Пусть* $K \trianglelefteq G$ *и* P *— некоторая* p*-подгруппа группы* G*. Если* P_1 *силовская* p*-подгруппа* PK*, то* $N_{G/K}(P/K) = N_G(P_1)K/K$*.*

2.2.49. Лемма [10, Лемма 1] *Пусть* $K \trianglelefteq G$ *и* P *— некоторая* p*-подгруппа группы* G*. Если* P *является силовской* p*-подгруппой в* PK *и* P f*-гиперцентральна в* $N_G(P)$*, то* PK/K f*-гиперцентральна в* $N_{G/K}(PK/K)$*.*

2.2.50. Лемма [10, Лемма 4] *Пусть* $G = ML$*, где* M *— максимальная подгруппа, а* L *— минимальная нормальная подгруппа группы* G*. Если* $M \cap L = 1$ *и* $L \subseteq G^{\mathfrak{F}}$*, то* $M^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} \cap M$*.*

2.2.51. Лемма [12, Лемма 3.9] *Справедливы следующие утверждения:*

1) если H/K *— главный фактор группы* G *и* $p \in \pi(H/K)$*, то* $G/C_G(H/K)$ *не содержит неединичных нормальных* p*-подгрупп, причем* $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$*;*

2) если A *– группа операторов группы* G *и* R/T *—* A*-композиционный* p*-фактор группы* G*, то* $A/C_A(R/T)$ *не имеет неединичных нормальных* p*-подгрупп.*

2.2.52. Лемма [12, Следствие 4.1.2] *Для любой* π*-разрешимой группы* G *имеет место включение* $C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G)$*.*

2.2.53. Лемма [12, Следствие 4.1.5] *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

2.2.54. Лемма [12, Следствие 4.1.4] *Коммутант* p*-сверхразрешимой группы* p*-нильпотентен.*

2.2.55. Лемма [12, Следствие 4.5.41] *Пусть* $K \trianglelefteq G$ *и* $|G : M|$ *есть простое число для любой не содержащей* K *максимальной подгруппы* M *группы* G*. Тогда* K*-сверхразрешима.*

2.2.56. Лемма [12, Следствие 4.8.1] *Пусть группа* G *имеет две нормальные* π*-сверхразрешимые подгруппы, индексы которых взаимно просты. Тогда* G π*-сверхразрешима.*

2.2.57. Лемма [12, Следствие 4.8.2] *Пусть группа G имеет две нормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых взаимно просты. Тогда G сверхразрешима.*

2.2.58. Лемма [12, Лемма 5.9] *Пусть H/K — главный фактор группы $G \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:*

1) H/K $\mathfrak{N}$-централен в G тогда и только тогда, когда $H/K \subseteq Z(G/K)$;

2) если H/K $\mathfrak{S}$-централен в G, то $|H/K|$ — степень простого числа;

3) если $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп, то фактор H/K $\mathfrak{F}$ -централен в G тогда и только тогда, когда $|H/K|$ — простое число.

2.2.59. Лемма [12, с. 97] *Пусть каждый главный фактор группы G обладает циклической силовской p-подгруппой. Тогда p-сверхразрешимый корадикал группы G обладает абелевой силовской p-подгруппой и не имеет композиционных факторов порядка p.*

2.2.60. Лемма [12, Теорема 8.2] *Пусть M — максимальная подгруппа разрешимой группы G, $\mathfrak{F}$ — формация с внутренним спутником f. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) M $\mathfrak{F}$-нормальна в G;

2) если M не покрывает главный фактор H/K группы G, то $M/M_G \in f(H/K)$.

2.2.61. Лемма [12, Теорема 8.4] *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, M — максимальная подгруппа группы G, не покрывающая некоторый ее главный фактор L/K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если L/K $\mathfrak{F}$-централен, то M не покрывает фактор $LG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$, который G-изоморфен L/K;

2) если L/K $\mathfrak{F}$-централен, то M не покрывает фактор $L \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$, который G-изоморфен L/K.

2.2.62. Лемма [12, с. 678] *Пусть M — минимальное добавление к нормальной подгруппе K в группе G, p — простое число. Если M содержит по крайней мере одну силовскую p-подгруппу группы K, то K является p-нильпотентной.*

2.2.63. Лемма [12, Следствие 9.3.1] *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, H — $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы G.*

Тогда $G/C_G(H) \in \mathfrak{F}$.

2.2.64. Лемма [12, Лемма 11.1] *Подгруппа H тогда и только тогда является минимальным добавлением к нормальной подгруппе K группы G, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

2.2.65. Лемма [12, Лемма 11.2] *Пусть H — минимальное добавление к нормальной подгруппе K группы G. Тогда $\pi(H) = \pi(G/K)$.*

2.2.66. Лемма [12, Лемма 11.4] *Если $K \trianglelefteq G$ и P — силовская p-подгруппа группы G, то $P \cap K$ является силовской p-подгруппой в K, а PK/K является силовской p-подгруппой группы G/K.*

2.2.67. Лемма [1, с. 97] *Пусть K — нормальная подгруппа группы G со следующими свойствами:*

1) G/K является p-группой;

2) $K = O^p(K)$;

3) K имеет абелеву силовскую p-подгруппу P.

Тогда K дополняема в G.

2.2.68. Лемма [12, Лемма 11.7] *Пусть нормальная подгруппа K группы G обладает π-дополнением в G. Тогда для любого $p \in \pi$ силовская p-подгруппа из K дополняема в любой ее содержащей силовской p-подгруппе группы G.*

2.2.69. Лемма [24, с. 263] *Пусть группа G имеет циклическую силовскую p-подгруппу. Тогда G либо p-сверхразрешима, либо имеет главный фактор, являющийся простой группой порядка, делящегося на $|G|_p$.*

2.2.70. Лемма [1, с. 97] *Пусть K — нормальная абелева подгруппа группы G. Если для любого простого p подгруппа $G_p \cap K$ дополняема в G_p, то K дополняема в G.*

2.2.71. Лемма [25, с. 678] *Пусть $\pi = \sigma \cup \tau$. Нормальная подгруппа K группы G обладает π-дополнением в G, если выполняются следующие условия:*

1) любое минимальное добавление к K в G является σ-дополнением;

2) для любого $p \in \tau$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.

2.2.72. Лемма [22, с. 50] *Нормальная подгруппа K группы G обладает π-дополнением в G, если для любого $p \in \pi$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

2.2.73. Лемма [22, с. 50] *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого делителя p индекса $|G : K|$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

2.2.74. Лемма [12, Следствие 11.5.1] *Если силовская p-подгруппа из $O^{\pi}(G)$ абелева для любого $p \in \pi$, то $O^{\pi}(G)$ обладает дополнением в G.*

ГЛАВА 3

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ p-СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Напомним, что конечная группа называется p-сверхразрешимой (p — простое число), если порядок каждого ее главного фактора или равен p, или не делится на p. Цель настоящей главы — дать характеризацию конечных p-сверхразрешимых групп, используя следующее определение:

Определение (предложено Л.А. Шеметковым). *Элемент x называется $Q\mathfrak{U}$ -центральным, если существует такой циклический главный фактор H/K группы G, что $x \in H\backslash K$.*

3.1. Лемма *Пусть P — подгруппа группы G, $\Phi(P)$ — подгруппа Фраттини группы P, K — нормальная подгруппа группы G.*
Тогда $\Phi(P)K/K \subseteq \Phi(PK/K)$.

Доказательство.
Обозначим $C = \Phi(P)K$. Так как $\Phi(P) \subseteq P$, то $C = \Phi(P)K \subseteq PK$.
Рассмотрим отображение:
$\varphi : xK \mapsto x(P \cap K)$, *где $x \in P$.*
φ является изоморфным отображением факторгруппы PK/K на факторгруппу $P/P \cap K$.
По лемме 2.2.15 имеем:
$\varphi : C/K \mapsto C \cap P/(P \cap K) = \Phi(P)(P \cap K)/(P \cap K)$.
Используя лемму 2.2.14, получаем, что
$\Phi(P)(P \cap K)/(P \cap C) \subseteq \Phi(P/(P \cap K))$.
Так как φ — изоморфизм, то $\Phi(P)K/K \subseteq \Phi(PK/K)$. Что и требовалось доказать.

3.2. Лемма *Пусть $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G, B — p'-группа. Тогда все p-элементы группы G содержатся в A.*

Доказательство.
Известно, что порядок группы G:
$|G| = \frac{|A|\ |B|}{|A \cap B|}$. *Отсюда $|G|_p = |A|_p$.*
Следовательно, силовская подгруппа из группы A является силовской p-подгруппой группы G.
Пусть A_p — некоторая силовская подгруппа группы A. Тогда все сопряженные с A_p подгруппы содержатся в A: $A_p^x \subseteq A$, так как подгруппа A

нормальна в группе G. Значит, все силовские p-подгруппы группы G содержатся в A. Что и требовалось доказать.

3.1.Теорема *[29] Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G. Тогда G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из $P \backslash \Phi(P) \cup \Phi(G)$ $Q\mathfrak{U}$-централен в G.*

Доказательство.

Пусть группа G p-сверхразрешима. Очевидно, любой p-элемент группы G $Q\mathfrak{U}$-централен в G, а значит, и любой элемент из $P\backslash\Phi(P)$ $Q\mathfrak{U}$-централен в G. Обратно, пусть каждый элемент из $P\backslash\Phi(P)$ $Q\mathfrak{U}$-централен в G. Докажем, что G p-сверхразрешима. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда существуют группы, для которых оно не выполняется. Выберем среди всех таких групп группу G наименьшего порядка. Положим $R = O_{p'}(G)$. Рассмотрим изоморфное отображение $\varphi : P \rightarrow PR/R$. Очевидно,

$(P/\Phi(P))^{\varphi} = (PR/R)\backslash\Phi(PR/R)$.

Возьмем элемент $y \in P\backslash\Phi(P)$. Согласно условию, существует циклический главный фактор S/L группы G , такой, что $y \in S\backslash L$. Очевидно, что

$SR/LR \cong S/S \cap LR = S/L(S \cap R)$.

Так как S/L — главный фактор, то $L(S \cap R)$ совпадает либо с S, либо с L. Пусть $L(S \cap R) = S$. Так как $S \cap R$ — p'-подгруппа, то по лемме 3.2 все p-элементы из $L(S \cap R)$ содержатся в L. Следовательно, из $L(S \cap R) = S$ следует, что $y \in L$. Получаем противоречие. Итак, $L(S \cap R) = L$. Отсюда следует, что SR/LR изоморфна S/L. Тогда очевидно, что $y \in SR\backslash LR$. Итак, если $R \neq 1$, то по предположению, G/R p-сверхразрешима. Но тогда группа G также является p-сверхразрешимой. Таким образом, будем считать, что $R = O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-сверхразрешимых групп. Рассмотрим $\mathfrak{F}$-корадикал T группы G. По теореме Гашюца [теорема 2.2.20], T не содержится в $\Phi(G)$.

Пусть $K/T \cap \Phi(G)$ — главный фактор группы G, такой, что $K/T \cap \Phi(G) \subseteq T/T \cap \Phi(G)$. Ясно, что p делит порядок $K/T \cap \Phi(G)$. Тогда по лемме 2.2.20, $K/T \cap \Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный нефраттиниев главный фактор группы G. В дальнейшем будем считать, что K — нормальная подгруппа группы G наименьшего порядка, удовлетворяющая следующим условиям: $K \subseteq T$ и $K/K \cap \Phi(G)$ — нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.

Введем обозначение: $\Phi = K \cap \Phi(G)$. *Рассмотрим* G*-главный ряд подгруппы* K, *проходящий через* $K \cap \Phi(G)$:

$K \supset K \cap \Phi(G) = \Phi = \Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \cdots \supset \Phi_n = 1$ *(1).*

Фактор K/Φ *является нефраттиниевым, а факторы* Φ_{i-1}/Φ_i *фраттиниевы для любого* $i = 1, 2, \cdots, n$. *Тогда по теореме 2.2.2 каждый* G*-главный ряд группы* K *имеет только один нефраттиниев главный фактор, и все нефраттиниевы* G*-главные факторы группы* K G*-изоморфны. Пусть* D/Φ *— минимальное добавление к* K/Φ *в* G/Φ. *Можно считать, что* P *содержит некоторую силовскую* p*-подгруппу* D_p *группы* D. *Значит,* $P = D_pK_p$, *где* K_p *— силовская* p*-подгруппа из* K. *По теореме 2.2.3,* D_p/Φ *не содержит* K_p/Φ. *Следовательно, существует такой элемент* $x \in P$, *что* $x\Phi \in (K_p/\Phi)\backslash\Phi(P/\Phi)$. *Поскольку* $\Phi(P)\Phi/\Phi$ *содержится в* $\Phi/(P/\Phi)$, *то* $x \notin \Phi(P)$ *и* $x \notin \Phi$. *Так как* $\Phi = K \cap \Phi(G)$, $x \in K_p \subseteq K$ *и* $x \notin \Phi$, *то* $x \notin \Phi(G)$. *По условию, существует циклический главный фактор* S/L *группы* G, *такой, что* $x \in S\backslash L$. *Очевидно, что* SK/LK G*-изоморфна группе* $S/L(S \cap K)$, *и* $L(S \cap K)$ *совпадает либо с* L, *либо с* S.

Так как $x \in (S \cap K)\backslash L$, *то получаем* $S = L(S \cap K)$. *Итак,* S/L G*-изоморфна* $S \cap K/L \cap K$. *Более того,* $x \in S \cap K$ *и* $x \notin L \cap K$.

Рассмотрим ряд

$K \supset \cdots \supset S \cap K \supset L \cap K \cdots \supset 1$ *(2).*

Если предположить, что фактор $S \cap K/L \cap K$ *нефраттиниев, то он* G*-изоморфен фактору* K/Φ *ряда (1). Но фактор* $S \cap K/L \cap K$ *является циклическим, а фактор* K/Φ *циклическим не является. Получаем противоречие.*

Итак, $S \cap K/L \cap K$ *— фраттиниев главный фактор.*

Рассмотрим два случая:

1 случай. $L \cap K \subseteq \Phi$.

Рассмотрим G*-главный ряд:*

$K \supset \cdots \supset S \cap K \supset L \cap K = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_{i-1} \supset L_i \supset \cdots \supset 1.$

По теореме 2.2.2 K/Φ G*-изоморфен нефраттиниеву фактору* L_{i-1}/L_i *для некоторого* i.

Так как $|L_{i-1}| < |K|$, *то получаем противоречие с выбором* K.

2 случай. $L \cap K \subseteq \Phi(G) \cap K = \Phi$.

Поскольку фактор $S \cap K/L \cap K$ *фраттиниев, и* $L \cap K \subseteq \Phi(G)$, *то по лемме 2.2.13* $S \cap K/L \cap K \subseteq \Phi(G/L \cap K) = \Phi(G)/L \cap K$ *и, значит,* $S \cap K \subseteq \Phi(G)$. *Отсюда следует, что* $S \cap K \subseteq \Phi(G) \cap K = \Phi$.

Но это противоречит тому, что x *принадлежит* $S \cap K$, *но не принадлежит* Φ. *Теорема доказана.*

Теорема 3.1 является расширением следующего классического результата Хупперта:

3.2. Теорема *[6] Если $G/\Phi(G)$ p-сверхразрешима, то и G p-сверхразрешима.*

В условии теоремы 3.2 каждый p-элемент, не лежащий в $\Phi(G)$, является $Q\mathfrak{U}$-центральным. В теореме 3.1. условие $Q\mathfrak{U}$-центральности накладывается только на такие элементы силовской p-подгруппы P группы G, которые не лежат в $\Phi(P)$ и в $\Phi(G)$.

Краткие выводы.

В настоящей главе представлена новая характеризация конечных p-сверхразреш групп при использовании понятия $Q\mathfrak{U}$*-центральности элемента* x*. Получено расширение классического результата Хупперта о том, что из p-сверхразрешимости факторгруппы* $G/\Phi(G)$ *следует p-сверхразрешимость группы* G*. Доказано, что группа* G *p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из* $P\backslash\Phi(P)\cup\Phi(G)$ $Q\mathfrak{U}$*-централен в* G*.*

ГЛАВА 4

О p-СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В 1959г. Бэр доказал, что если H нормальная подгруппа группы G и каждый G-главный pd-фактор группы $H/\Phi(H)$ циклический, то H p-сверхразрешима и каждый ее G-главный p-фактор является циклическим. (см. [7]). В условии этой теоремы каждый p-элемент из подгруппы H, не лежащий в $\Phi(H)$, является $Q\mathfrak{U}$-центральным. В настоящей главе мы рассматриваем более общую ситуацию. Мы изучаем случай, когда H — такая нормальная подгруппа группы G, что каждый элемент силовской p-подгруппы P из H, не лежащий в $\Phi(P) \cup \Phi(G)$, является $Q\mathfrak{U}$-центральным в группе G. В такой ситуации подгруппа H также оказывается p-сверхразрешимой.

Доказана следующая теорема:

4.1 Теорема *[30] Пусть p — простое число, $H \trianglelefteq G$, P — силовская p-подгруппа из H.Если каждый элемент из $P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$ является $Q\mathfrak{U}$-центральным в G, то H p-сверхразрешима и каждый ее нефраттиниев G-главный p-фактор имеет порядок p.*

Доказательство.

В случае $H = G$ результат следует из теоремы 3.1. Поэтому будем считать $H \neq G$. Предположим, что теорема неверна. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. По условию, каждый элемент из $P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$ $Q\mathfrak{U}$-централен в группе G. Положим $R = O_{p'}(H)$. Рассмотрим факторгруппу G/R. По лемме 3.1

$\Phi(P)R/R = \Phi(PR/R)$ *(1),*

$\Phi(G)R/R \subseteq \Phi(G/R)$ *(2).*

Возьмем элемент

$yR \in (PR/R)\backslash(\Phi(PR/R) \cup \Phi(G/R))$, *где* $y \in P$.

Тогда ввиду (1) и (2) $y \in P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$. Согласно условию, существует циклический главный фактор S/L группы G, такой, что $y \in S\backslash L$. Очевидно, что $SR/LR \cong S/S \cap LR = S/L(S \cap R)$. Так как S/L — главный фактор, то $L(S \cap R)$ совпадает либо с S, либо с L. Пусть $L(S \cap R) = S$. Так как $S \cap R$ — p'-подгруппа, то все p-элементы из $L(S \cap R)$ содержатся в L. Следовательно, из $L(S \cap R) = S$ следует, что $y \in L$. Получаем противоречие. Итак, $L(S \cap R) = L$. Отсюда следует,что SR/LR, изоморфна S/L. Тогда очевидно, что $y \in SR\backslash LR$, $yR \in (SR/R)\backslash(LR/R)$. Значит, *условие теоремы для G/R выполняется. Итак, если $R \neq 1$, то по индукции H/R p-сверхразрешима и каждый ее G/R-главный p-фактор циклический. Но тогда H также p-сверхразрешима и каждый ее G -главный p-фактор циклический. Таким образом, будем считать, что $R = O_{p'}(H) = 1$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-сверхразрешимых групп. Рассмотрим $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G. Порядок каждого G-главного фактора между $HG^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ либо равен p, либо не делится на p. Тогда ясно, что порядок каждого G-главного фактора между H и $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ также либо равен p, либо не делится на p. Пусть T — нормальная подгруппа из G наименьшего порядка со следующим свойством: T содержится в $H \cap G^{\mathfrak{F}}$, а каждый нефраттиниев G-главный pd-фактор между $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ и T имеет порядок p. Очевидно, T не содержится в $\Phi(G)$. Пусть $K/T \cap \Phi(G)$ — главный фактор группы G такой, что $K/T \cap \Phi(G) \subseteq T/T \cap \Phi(G)$. По теореме 2.2.1 p делит порядок $K/T \cap \Phi(G)$. Тогда по лемме 2.2.46 $K/T \cap \Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный нефраттиниев главный фактор группы G. В дальнейшем будем считать, что K — нормальная подгруппа группы G наименьшего порядка, удовлетворяющая следующим условиям: $K \subseteq T$ и $K/K \cap \Phi(G)$ — нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G. Введем обозначение: $\Phi = K \cap \Phi(G)$. По теореме 2.2.2 каждый G-главный ряд группы K имеет только один нефраттиниев G-главный фактор, и все нефраттиниевы G-главные факторы группы K G-изоморфны. Пусть D/Φ — минимальное добавление к K/Φ в G/Φ. Очевидно, можно считать, что P содержит некоторую силовскую p-подгруппу $(H \cap D)_p$ группы $H \cap D$. Значит, $P = (H \cap D)_p K_p$, где K_p — силовская p-подгруппа из K. По теореме 2.2.3 $(H \cap D)_p/\Phi$ не содержит K_p/Φ. Следовательно, существует такой элемент $x \in P$, что $x\Phi \in (K_p/\Phi) \backslash \Phi(P/\Phi)$. Поскольку $\Phi(P)\Phi/\Phi$ содержится в $\Phi(P/\Phi)$, то $x \notin \Phi(P)$ и $x \notin \Phi(G)$. По условию, существует циклический главный фактор S/L группы G, такой, что $x \in S \backslash L$. Очевидно, что SK/LK G-изоморфна группе $S/L(S \cap K)$ и $L(S \cap K)$ совпадает либо с L, либо с S.

Так как $x \in (S \cap K) \backslash L$, то получаем $S = L(S \cap K)$. Итак, S/L G-изоморфна $S \cap K/L \cap K$. Более того, $x \in S \cap K$ и $x \notin L \cap K$. Если фактор $S \cap K/L \cap K$ нефраттиниев, то он G-изоморфен K/Φ, и мы получаем противоречие. Итак, $S \cap K/L \cap K$ — фраттиниев главный фактор. Используя теорему 2.2.2, опять приходим к противоречию. Итак, $L \cap K \subseteq \Phi$. Поскольку фактор $S \cap K/L \cap K$ фраттиниев, то мы получаем следующее: $S \cap K \subseteq \Phi$. Но это противоречит тому, что x принадлежит $S \cap K$, но не принадлежит Φ. Теорема доказана.

Краткие выводы

В настоящей главе проведены исследования свойств p-сверхразрешимых нормальных подгрупп конечных групп, из которых результаты предыдущей главы вытекают как частные случаи. Доказано обобщение теоремы Бэра о p-сверхразрешимой нормальной подгруппе. Показано, что если каждый элемент из $P \backslash (\Phi(P) \cup \Phi(G))$ *является* $Q\mathfrak{U}$*-центральным в* G*, то* H *p-сверхразрешима и каждый ее нефраттиниев* G*-главный p-фактор имеет порядок* p *(* H *— нормальная подгруппа группы* G*,* P *— силовская p-подгруппа из* H*).*

ГЛАВА 5

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Напомним, что добавлением к подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$. Если $A \cap B = 1$, то B называется дополнением к A в G.

Вполне факторизуемые группы (то есть группы, в которых каждая подгруппа дополняема) во множестве конечных групп были исследованы в [18] и в общем случае были исследованы в [19], [8]. Заметим, что конечные вполне факторизуемые группы содержатся в формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых конечных групп. Наличие у группы тех или иных подгрупп и их взаимное расположение в группе является важной характеристикой этой группы. Это обстоятельство явилось основным стимулом для появления большого числа публикаций, связанных с изучением групп с заданными системами подгрупп. Начиная с 1953 г., С.Н. Черников и его ученики опубликовали серию работ, исследующих группы с системой дополняемых подгрупп. Во многих случаях [см.[20], главы 7 — 8 и приложение] исследованные группы или оказывались сверхразрешимыми, или имели свойства, сходные свойствам $\mathfrak{U}$-групп. Напомним следующую теорему Черникова:

5.1. Теорема*[10]. Пусть G — конечная группа, такая, что каждая силовская подгруппа группы G абелева. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая примарная циклическая подгруппа, дополняемая в силовской подгруппе группы G, дополняема в G.*

Аналогичная ситуация возникает при изучении групп с системой добавляемых подгрупп. Мы говорим, что подгруппа A строго добавляема в G, если существует добавление $B \neq G$ к A в группе G.

В.А. Ведерников и Н.И. Кулешов доказали следующую теорему:

5.2. Теорема*[9]. Конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая примарная циклическая подгруппа, строго добавляемая в силовской подгруппе группы G, строго добавляема в группе G.*

В настоящей главе мы дадим характеризацию произвольных насыщенных формаций с помощью $Z_{f,G}$-элементов. Мы распространим теоремы 5.1 и 5.2 на произвольные насыщенные формации. С помощью лемм, приведенных ниже, покажем, что теоремы 5.1 и 5.2 в действительности описывают ситуацию, в которой существование множества $Z_{f,G}$-элементов предполагает включение рассматриваемой группы в формацию $\mathfrak{U}$ сверхразрешимых групп.

Для доказательства следующей леммы 5.2 потребуются результаты, полученные в лемме 2 из [6].

5.1. Лемма *[31]. Пусть $G = AB$, где B — максимальная подгруппа группы G и $A =< a >$ — циклическая 2-подгруппа группы G. Тогда a — $Z_{\mathfrak{N},G}$-элемент. Более того, $G = AM$ для некоторой нормальной максимальной подгруппы M группы G.*

Доказательство.

Предположим, что $B_G \neq 1$ и рассмотрим факторгруппу G/B_G. По индукции xB_G является $Z_{\mathfrak{N},G/B_G}$-элементом. Следовательно, x является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом, и лемма верна. Предположим, что $B_G = 1$. Тогда, по лемме 2.2.23, мы имеем $A \cap B = 1$. Рассмотрим представление группы G подстановками левых смежных классов по подгруппе B. Так как $B_G = 1$, то это представление является точным степени $n = |A|$. Следовательно, мы можем считать, что G является подгруппой симметрической группы S_n. Ясно, что a является нечетной подстановкой. Отсюда $AA_n = S_n$. Значит, $G = A(G \cap A_n)$ и $|G : G \cap A_n| = 2$.

5.2. Лемма *[31]. Пусть $G = AB$, где $B \neq G$ и $A =< a >$ — циклическая p-подгруппа группы G, $p > 2$. Допустим, что G — p-разрешимая группа с абелевой силовской p-подгруппой. Тогда a является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

Доказательство.

Принимая во внимание теорему 2.2.24, нам нужно показать, что существует циклический главный фактор H/K группы G такой, что $a \in H$ и $a \notin K$. Предположим, что лемма неверна и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Очевидно, что $A_G \neq A$ и $B_G \neq B$. Если $B_G \neq 1$, то aB_G является $Z_{\mathfrak{U},G/B_G}$-элементом. Тогда a является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом. Отсюда мы можем заключить, что $B_G = 1$. Тогда по лемме 2.2.23 получаем: $A \cap B = 1$. Так как $B_G = 1$, то $O_{p'}(G) = 1$. По теореме 2.2.25, силовская p-подгруппа P группы G нормальна. Очевидно, что $P = A \times (P \cap B)$, где пересечение $P \cap B$ нормально в группе G. Фактор $P/P \cap B$ — циклический, и если мы рассмотрим главный фактор P/S группы G такой, что $S \supseteq P \cap B$, то можно заключить, что a является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.

5.3. Лемма *[31].Пусть G — p-разрешимая группа. Предположим, что каждая циклическая p-подгруппа, строго добавляемая в силовской p-подгруппе группы G, строго добавляема в G. Тогда каждая циклическая p-подгруппа, строго добавляемая в силовской p-подгруппе группы G, порождается $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

Доказательство.

Предположим, что группа G — минимальный контрпример. Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то лемма верна для $G/O_{p'}(G)$ по индукции, и, следовательно, для группы G. Таким образом, $O_{p'}(G) = 1$. Обозначим $\Phi = \Phi(G) \cap G^{\mathfrak{F}}$. Пусть H/Φ — G-главный фактор из $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то по теореме 2.2.4 и теореме 2.2.24 факторгруппа H/Φ не является циклической. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, такая что $MH = G$ и $M \cap H = \Phi$. Тогда по лемме 2.2.22 $M_pH = G_p$, где M_p и G_p — силовские p-подгруппы в M и G соответственно. Более того, $M_p \cap H = \Phi$. Отсюда следует, что H содержит элемент x такой, что $x \notin \Phi(G_p)$ и $x \notin \Phi$. По условию, $< x > C = G$, где C — максимальная подгруппа группы G. Так как $x^p \in \Phi$, то $|G : C| = p$. Отсюда $|H/\Phi| = p$. Получили противоречие.

5.3. Теорема *[31]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полувнутренний спутник. Пусть $\omega = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \mathfrak{E}\}$, G — группа. Предположим, что для каждого $p \in \omega$ выполняется следующее условие: каждый элемент $x \in G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{f,G}$-элементом. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство.

Предположим, что теорема неверна. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Так как спутник f полувнутренний, то каждая ω'-группа содержится в формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $|G|$ делится на простые числа из ω. Обозначим $T = O_{\omega'}(G)$. Рассмотрим гомоморфизм $G \to \overline{G} = G/T$. Покажем, что $\overline{G} = G/T$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $\overline{x} \in \overline{G_p} \backslash \Phi(\overline{G_p})$, $p \in \omega$. Так как T — ω'-группа, мы можем считать, что $x \in G_p \backslash \Phi(G_p)$. По предположению, существует f-центральный фактор H/L группы G такой, что $x \in H$ $x \notin L$. Ясно, что фактор HT/LT G-изоморфен фактору $H/L(H \cap T)$.

Более того, $L(H \cap T)$ совпадает либо с L, либо с H. Равенство $L(H \cap T) = H$ невозможно, так как $x \in H$ и $x \notin L$. Отсюда следует, что фактор HT/LT G-изоморфен фактору H/L. Очевидно, что $x \in HT$ и $x \notin LT$.

Таким образом, $\overline{H}/\overline{L}$ — f-центральный главный фактор группы G, и $\overline{x} \in \overline{H}$, $\overline{x} \notin \overline{L}$. Если $T \neq 1$, то по индукции $\overline{G}$ принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Но тогда и группа G также принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Таким образом, $T = O_{\omega'}(G) = 1$.

Назовем нормальную подгруппу U группы G "f-предельной", если $U \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $U/U \cap \Phi(G)$ — f-эксцентральный главный фактор группы G. Так как G не принадлежит насыщенной формации $\mathfrak{F}$, то имеем $G^{\mathfrak{F}} \neq G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$. Если $K/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ — G-главный фактор из $G^{\mathfrak{F}}$, то группа K является f-предельной, так как фактор $K/K \cap \Phi(G)$ — f-эксцентрален по теореме

2.2.21 (заметим, что по теореме 2.2.4 порядок группы $K/K \cap \Phi(G)$ делят простые числа из ω).

Следовательно, мы должны показать, что группа G не имеет f-предельных нормальных подгрупп. Предположим, что это утверждение неверно и K — f-предельная нормальная подгруппа группы G. Пусть K имеет минимальный порядок среди всех f-предельных нормальных подгрупп группы G.

Обозначим $\Phi = K \cap \Phi(G)$ и рассмотрим гомоморфизм $G \to \overline{G} = G/\Phi$. Ниже мы используем следующий факт: по теореме 2.2.2 каждый G-главный ряд группы K имеет только нефраттиниевы главные факторы и все нефраттиниевы G-главные факторы группы K попарно G-изоморфны. Пусть M — минимальное добавление к $\overline{K}$ в $\overline{G}$ и p — простое число из ω, делящее $|\overline{K}|$.

По лемме 2.2.22 $\overline{G_p} = \overline{M_p}\ \overline{K_p}$, где G_p, M_p и K_p — силовские p-подгруппы группы G, M и K соответственно. Тогда $\overline{M_p}$ не содержит $\overline{K_p}$. Тогда $\overline{G_p}$ имеет максимальную подгруппу $\overline{M_p}^*$, которая содержит $\overline{M_p}$ и не содержит $\overline{K_p}$. Пусть $\overline{x} \in \overline{K_p} \backslash \overline{M_p}^*$. Очевидно, что $\overline{x} \in \overline{K_p} \backslash \Phi(\overline{G_p})$. Так как $\Phi(G_p)\Phi \backslash \Phi$ содержится в $\Phi(\overline{G_p})$, мы получаем, что $x \notin \Phi(G_p)$ и $x \notin \Phi$. По условию теоремы существует f-центральный главный фактор H/L группы G такой, что $x \in H$ и $x \notin L$. Очевидно, что фактор HK/LK G-изоморфен фактору $H/L(H \cap K)$, и $L(H \cap K)$ совпадает либо с L, либо с H. Так как $x \in H \cap K$ и $x \notin L$, то равенство $L = L(H \cap K)$ невозможно. Следовательно, $H = L(H \cap K)$. Таким образом, фактор H/L G-изоморфен $H \cap K/L \cap K$. Более того, $x \in H \cap K$ и $x \notin L \cap K$. Если фактор $H \cap K/L \cap K$ нефраттиниев, то он G-изоморфен K/Φ по теореме 2.2.2, и мы получаем противоречие. Таким образом, $H \cap K/L \cap K$ — фраттиниев главный фактор. Если $L \cap K$ не содержится в Φ, то, по выбору K, подгруппа $L \cap K$ не является f-предельной, то есть $L \cap K/L \cap K \cap \Phi$ — f-центральный нефраттиниев главный фактор группы G. Применяя теорему 2.2.2, снова получаем противоречие. Предположим, что $L \cap K$ содержится в Φ. Так как фактор $H \cap K/L \cap K$ фраттиниев, то получаем: $H \cap K \subseteq \Phi$. Напомним, что $x \in H \cap K$ и $x \notin \Phi$. Получаем противоречие. Теорема доказана.

5.3.1. Следствие *[31]. Группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

5.3.2. Следствие *[31]. Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда каждый элемент из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом.*

5.1. Замечание. *Используя лемму 5.1 и лемму 5.3, можем сделать вывод, что теорема 5.2 является следствием теоремы 5.3. Действительно,* *Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы 5.2. Ясно, что циклическая 2-подгруппа является строго добавляемой в силовской 2-подгруппе G_2 тогда и только тогда, когда она порождается элементом, не лежащим в $\Phi(G_2)$. Таким образом, по лемме 5.1 каждый элемент a из $G_2 \backslash \Phi(G_2)$ является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом. По следствию 5.3.2 группа G_2 2-нильпотентна, а, значит, разрешима. Теперь по лемме 5.3 для любого простого $p > 2$ каждый элемент x из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом. По следствию 5.3.1 группа G сверхразрешима.*

5.4. Теорема *[31]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полувнутренний спутник. Пусть $\omega = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \mathfrak{E}\}$, G — группа, содержащая абелеву силовскую p-подгруппу для каждого $p \in \omega$. Предположим, что для каждого $p \in \omega$ выполняется следующее утверждение: каждая циклическая p-подгруппа, дополняемая в силовской p-подгруппе группы G, порождается $Z_{f,G}$-элементом. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство.

Используем индукцию по порядку группы. Предположим, что теорема неверна и пусть группа G — контрпример наименьшего порядка. Обозначим $T = O_{\omega'}(G)$ и рассмотрим $\overline{G_p} = G/T$. Возьмем p-элемент $\overline{a}$ такой, что $p \in \omega$, $a \in G_p$, группа $< \overline{a} >$ дополняема в силовской p-подгруппе $\overline{G_p}$ группы $\overline{G}$. Так как отображение $x \to \overline{x} = xT$, $x \in G_p$, является изоморфизмом из G_p в $\overline{G_p}$, то $< a >$ дополняема в G_p. По предположению, существует f-центральный главный фактор H/L группы G такой, что $a \in H$ и $a \notin L$. Очевидно, что фактор HT/LT G-изоморфен фактору $H/L(H \cap T)$. Так как $a \in H$ и $a \notin L$, то равенство $H = L(H \cap T)$ невозможно. Следовательно, фактор HT/LT G-изоморфен фактору H/L. Мы видим, что условия теоремы сохраняются для $\overline{G}$. Если $T \neq 1$, то по индукции имеем: $G/T \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $G \in \mathfrak{F}$, так как $f(p) = \mathfrak{E}$ для каждого $p \in \pi(T)$. Получим противоречие. Таким образом, $O_{\omega'}(G) = 1$. Теперь рассмотрим $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G. Так как $O_{\omega'}(G) = 1$, то получаем, что простые числа из ω делят порядок $|G^{\mathfrak{F}}|$. По предположению, $G^{\mathfrak{F}}$ содержит абелеву силовскую p-подгруппу для каждого $p \in \omega$. По лемме 2.2.27 существует подгруппа M такая, что $G = MG^{\mathfrak{F}}$ и $M \cap G^{\mathfrak{F}}$ является ω'-группой. Выберем простое число p из $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \cap \omega$ и рассмотрим силовскую p-подгруппу P из $G^{\mathfrak{F}}$. Принимая во внимание лемму 2.2.22, мы можем заключить, что $G_p = M_p P$, где G_p и M_p — силовские p-подгруппы группы G и M соответственно. Очевидно, что M_p является дополнением к P в группе G_p. Возьмем в P дополняемую циклическую подгруппу $A =< a >$. Очевидно, что A дополняема в G_p. По *условию, существует f-центральный G-главный фактор H/L, такой, что $a \in H$ и $a \notin L$.*

Рассмотрим

$HG^{\mathfrak{F}}/LG^{\mathfrak{F}} \simeq H/H \cap LG^{\mathfrak{F}} = H/L(H \cap G^{\mathfrak{F}})$.

Если $H = L(H \cap G^{\mathfrak{F}})$, то H/L и $H \cap G^{\mathfrak{F}}/L \cap G^{\mathfrak{F}}$ — G-изоморфные главные факторы. Таким образом, $H \cap G^{\mathfrak{F}}/L \cap G^{\mathfrak{F}}$ — f-центральный G-главный фактор, содержащий нееденичный p-элемент $a(L \cap G^{\mathfrak{F}})$. Следовательно, $H \cap G^{\mathfrak{F}}/L \cap G^{\mathfrak{F}}$ — f-центральный G-главный p-фактор. Это противоречит лемме 2.2.28. Теперь рассмотрим случай $L = L(H \cap G^{\mathfrak{F}})$. Но и в этом случае мы получаем противоречие, так как $a \notin L$ и $a \in H \cap G^{\mathfrak{F}}$.

5.4.1. Следствие *[31]. Пусть G — группа, содержащая абелеву силовскую p-подгруппу G_p. Тогда группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая циклическая p-подгруппа, дополняемая в G_p, порождается $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом.*

5.4.2. Следствие *[31]. Пусть G — группа, содержащая абелеву силовскую p-подгруппу G_p. Тогда G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая циклическая p-подгруппа группы G, дополняемая в G_p, порождается $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом.*

5.2. Замечание. *Учитывая лемму 5.2 и лемму 5.3, видим, что теорема 5.1 является следствием теоремы 5.2. Действительно, пусть группа G удовлетворяет условию теоремы 5.1. По лемме 5.2 каждая циклическая 2-подгруппа, дополняемая в силовской 2-подгруппе G_2 группы G, порождается $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом. По следствию 5.4.2 группа G 2-нильпотентна, а, значит, разрешима. Теперь, применяя лемму 5.3 и следствие 5.4.1, мы видим, что G сверхразрешима.*

5.5. Теорема*[31]. Пусть p — простое число, $H \trianglelefteq G$ и H_p абелева. Предположим, что каждая циклическая подгруппа, дополняемая в H_p, порождается $Q\mathfrak{U}$-центральным в группе G элементом. Тогда H p-сверхразрешима и каждый ее G-главный p-фактор имеет порядок p.*

Доказательство.

Предположим, что теорема неверна. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. По условию, каждая циклическая подгруппа, дополняемая в H_p, порождается $Q\mathfrak{U}$-центральным в группе G элементом. Положим $R = O_p(H)$. Рассмотрим факторгруппу G/R. По условию $H \trianglelefteq G$ и H_p абелева. Рассмотрим факторгруппу H_pR/R. Так как

H_p абелева, то факторгруппа H_pR/R представима в виде прямого произведения циклической группы $< yR >$ и факторгруппы K/R:

$H_pR/R =< yR > \times K/R$, где $y \in H_pR$

Тогда $y = xr$, где $x \in H_p$, $r \in R$.

Значит, $yR = xrR = xr$, так как $r \in R$.

Рассмотрим отображение

$\varphi : h \to hR$, где $h \in H_p$.

$\varphi : H_p \to H_pR/R$ является изоморфизмом.

Значит, φ переводит элемент x в xR, $\varphi :< x >\mapsto< xR >=< x >^{\varphi}$.

Отсюда,

$H_p = (< xR > \times K/R)^{\varphi^{-1}} =< x > \times K_1$. Тогда $H_pR/R =< yR > \times K/R =< xR > \times K/R$.

Согласно условию, существует циклический главный фактор S/L группы G такой, что $y \in S$, $y \notin L$. Очевидно, что $SR/LR \cong S/S \cap LR = S/L(S \cap R)$.

Так как S/L – главный фактор, то $L(S \cap R) = S$ или $L(S \cap R) = L$.

Равенство $L(S \cap R) = S$ невозможно, так как $y \in S$ и $y \notin L$.

Действительно, так как $S \cap R$ – p'-подгруппа, то все p-элементы из $L(S \cap R)$ содержатся в L (по лемме 3.2).

Следовательно, из $L(S \cap R) = S$ следует, что $y \in L$. Получаем противоречие.

Итак, $L(S \cap R) = L$. Отсюда следует, что SR/LR изоморфна S/L.

Рассмотрим факторгруппу G/R. $S/L \cong SR/R/(LR/R)$ – главный фактор группы G/R. Возьмем элемент $x \in S \backslash L$. Тогда элемент $y = xr \in SR$, $y = xr \notin LR$. Действительно, $xr = lr_1$, где $l \in L$. [1]

Отсюда $x = lr_1r^{-1} \in LR$.

Тогда $lr_1r^{-1} \in L$, $r_1r^{-1} \in L$. Это значит, что $r_1r^{-1} = 1$, то есть $r_1 = r/\$$.

Но тогда $xr = lr$ из равенства [1].

Следовательно, $x = l \in L$. Получаем противоречие тому, что $x \in S$, но $x \notin L$.

Значит, $y \in SR \backslash LR$. Тогда $yR \in SR/R$, $yR \notin LR/R$. Значит, условие теоремы для G/R выполняется.

Если $R \neq 1$, то по индукции H/R p-разрешима и каждый ее G/R-главный фактор циклический. Но тогда H также p-сверхразрешима, и каждый ее G-главный p-фактор циклический. Таким образом, будем считать, что $R = O_{p'}(H) = 1$.

Рассмотрим теперь два случая.

1 случай. *Подгруппа H группы G p-разрешима.*

Так как $R = O_{p'}(H) = 1$ *и* H_p *— абелева, то* $H_p \trianglelefteq H$ *(по теореме 2.2.25). Поэтому можно считать, что* $H_p = H$ *является абелевой* p*-группой. Пусть подгруппа* H *представима в виде* $H = < x > \times B$*, где* B *— некоторая подгруппа группы* H*. Тогда найдется циклический главный фактор* S/L *группы* G *такой, что* $x \in S \backslash L$*.*

Рассмотрим G*-изоморфизм:*

$SH/LH \cong S/(S \cap LH) = S/L(S \cap H)$

Возможны два случая: $L(S \cap H) = L$ *или* $L(S \cap H) = S$*.*

Предположим, что $L(S \cap H) = L$*.*

Так как элемент $x \in S$*,* $x \notin L$*,* $x \in H$*, то* $x \in S \cap H$*. Тогда* $x \in L(S \cap H) = L$*.*

Получаем противоречие.

Итак, $L(S \cap H) = S$*. Тогда* $S/L \cong S \cap H/(L \cap H)$*. Таким образом,* $S \cap H/(L \cap H)$ *является циклическим* G*-главным фактором подгруппы* H*, причем,* $x \in (S \cap H) \backslash (L \cap H)$*.*

Пусть $< x_1 >, < x_2 >, \cdots, < x_n >$ *— совокупность всех циклических подгрупп, дополняемых в* H*. Как было установлено выше, подгруппа* H *обладает циклическим* G*-главным фактором* S_i/L_i*, таким, что* $x_i \in S_i$*,* $x_i \notin L_i$*,* $i = 1, 2, \cdots, n$*.*

Пусть f *— локальный спутник формации* $\mathfrak{U}$ *такой, что* $f(p)$ *— класс всех абелевых групп экспоненты, делящей* $p-1$ *(теорема 2.2.24.). Тогда* $G/C_G(S_i/L_i) \in f(p)$*, а, значит,* $G/C \in f(p)$*, где* $C = \bigcap\limits_{i=1} (S_i/L_i)$*.*

Так как H *- абелева* p*-подгруппа, то* $H \subseteq C$*.*

Пусть Q *— силовская* q*-подгруппа из* C*,* $q \neq p$*. Фактор* S_i/L_i *является центральным в* C*, а, значит, он является центральным и в* HQ*. Тогда элементы* x_1*,* $x_2, \cdots, x_n$ *являются* $Q\mathfrak{U}$*-центральными в* HQ*. По следствию 5.3.2. подгруппа* HQ *будет* p*-нильпотентна, а, значит, и нильпотентна. Тогда* $HQ = H \times Q$*. Это означает, что* $C/C_C(H)$ *является* p*-группой. Таким образом,* $G/C_C(H) \in \mathfrak{N}_p f(p)$*. Так как*

$G/C_G(H) \cong G/C_C(H)/(C_G(H)/C_C(H))$

и $\mathfrak{N}_p f(p)$ *— формация, то* $G/C_G(H) \in \mathfrak{N}_p f(p)$*.*

Отсюда следует, что каждый главный p*-фактор подгруппы* H *является* $\mathfrak{U}$*-центральным, а, следовательно, имеет простой порядок по теореме Хупперта (теорема 2.2.274).*

2 случай. *Подгруппа* H *группы* G *не* p*-разрешима.*

Пусть R *—* p*-разрешимый корадикал подгруппы* H*. Так как силовская* p*-подгруппа* R_p *из* R *абелева, то по лемме 2.2.30 существует такая подгруппа* D*, что* $H = DR$ *и порядок* $|D \cap R|$ *не делится на* p*. Тогда* $H_p = D_p \times R_p$ *для* *некторых силовских p-подгрупп* H_p, D_p *и* R_p *из подгрупп* H, D, R *соответственно (по лемме 2.2.22). Следовательно, каждая циклическая подгруппа из* R_p, *дополняемая в* R_p, *дополняема и в* H_p.

Пусть $R_p =< x > \times B$, *где* B *— некоторая подгруппа группы* R_p. *Тогда найдется циклический главный фактор* S/L *группы* H *такой, что* $x \in S$, *но* $x \notin L$.

Рассмотрим H*-изоморфизм:*

$SR_p/LR_p \cong S/S \cap LR_p = S/L(S \cap R_p)$.

Возможны два случая: $L(S \cap R_p) = L$ *или* $L(S \cap R_p) = S$.

Предположим, что $L(S \cap R_p) = L$. *Так как элемент* $x \in S$, $x \notin L$, $x \in R_p$, *то* $x \in S \cap R_p$. *Тогда* $x \in L(S \cap R_p) = L$.

Получаем противоречие.

Итак, $L(S \cap R_p) = S$.*Тогда* $S/L \cong S \cap R_p/(L \cap R_p)$. *Таким образом,* $S \cap R_p/(L \cap R_p)$ *является циклическим* H*-главным фактором подгруппы* R *, причем* $x \in (S \cap R_p) \backslash (L \cap R_p)$.

Следовательно, $S \cap R/(L \cap R)$ *является* $\mathfrak{U}$*-центральным* H*-главным фактором подгруппы* R. *Но по теореме 2.2.28 это невозможно.*

Теорема доказана.

Краткие выводы.

В главе 5 "Характеризация групп и формаций" найдена характеризация насыщенных формаций с помощью $Z_{f,G}$-элементов. Дано расширение результатов работ С.Н. Черникова [27], а также В.А. Ведерникова и Н.И. Кулешова [9] на произвольные насыщенные формации. Доказано, что группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом; группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда каждый элемент из $G_p \backslash \Phi(G_p)$ является $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом; группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая циклическая p-подгруппа, дополняемая в G_p, порождается $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом; группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая циклическая p-подгруппа группы G, дополняемая в G_p, порождается $Z_{\mathfrak{N},G}$-элементом.

ГЛАВА 6

ГРУППЫ С S-КВАЗИНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В данной главе устанавливается связь между результатами предыдущих глав и исследованиями групп, обладающих заданной системой S-квазинормальных подгрупп. Напомним, что подгруппа H группы G называется S-квазинормальной, если она перестановочна с каждой силовской подгруппой группы G.

Большое внимание S-квазинормальным подгруппам уделял О.Кегель в работе [21]. В работе [10] доказано, что если K — такая нормальная подгруппа группы G, что G/K сверхразрешима, а максимальные подгруппы силовских подгрупп из K являются S-квазинормальными в G, то G сверхразрешима.

Мы установим, что этот результат даже в более общем виде может быть получен как приложение наших предыдущих результатов о группах с системой $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементов.

Доказана следующая теорема.

6.1 Теорема *[39]. Пусть H — нормальная подгруппа группы G, p — простое число. Предположим, что либо H p-разрешима, либо p — наименьшее простое число, делящее порядок H. Если максимальные подгруппы силовской p-группы из H являются S-квазинормальными в G, то H p-сверхразрешима и её нефраттиниевы G-главные p-факторы циклические.*

Доказательство.

Пусть P — максимальная подгруппа из H_p. По условию подгруппа P S-квазинормальна в группе G, а, значит, и в подгруппе H. По лемме 2.2.46 подгруппа P нормальна в H. Таким образом, по теореме 3.1 каждый элемент из $H_p \backslash \Phi(H_p)$ является $Z_{\mathfrak{U},G}$-элементом. По теореме 3.1 H p-сверхразрешима. Таким образом, при $H = G$ теорема верна.

Пусть теперь H — собственная p-сверхразрешимая подгруппа группы G. Если в подгруппе H_p имеется только одна максимальная подгруппа, то H_p является циклической. Тогда все G-главные p-факторы подгруппы H являются циклическими.

Рассмотрим теперь случай, когда в группе H_p содержится более одной максимальной подгруппы, причём по условию они S-квазинормальны, а по лемме 2.2.32 субнормальны. Поэтому H_p нормальна в группе G. Значит, ввиду индукции можно считать, что $H_p = H$.

В случае $H \subseteq \Phi(G)$ теорема верна. Пусть $H \nsubseteq \Phi(G)$. Тогда $HX = G$, где X — максимальная подгруппа группы G. Так как H содержится в G_p, то по лемме 2.2.22 $H_pX_p = G_p$, $X_p \subseteq P_1$, где P_1 — максимальная подгруппа группы G_p, P_1 нормальна в G_p.

Пересечение $H_1 = P_1 \cap H$ является максимальной подгруппой группы H по лемме 2.2.34, причём $P_1 \cap H \trianglelefteq G_p$.

Пусть $H = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k$ — цепь максимальной длины со свойствами: $H_i \trianglelefteq G$, $|H_{i-1} : H_i| = p$, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Если $H_k \subseteq \Phi(G)$, то теорема верна. Пусть $H_k \nsubseteq \Phi(G)$. Тогда $H_kY = G$, где Y — максимальная подгруппа группы G. Так как H_k содержится в G_p, то $H_kY_p = G_p$, Y_p содержится в P_2, где P_2 — максимальная подгруппа группы G_p, P_2 нормальна в G_p. Пересечение $P_2 \cap H$ является максимальной подгруппой группы H по лемме 2.2.34, подгруппа $P_2 \cap H$ S-квазинормальна в группе G по условию теоремы.

Пересечение $P_2 \cap H_k = (P_2 \cap H) \cap H_k \trianglelefteq G_p$ является максимальной подгруппой группы H_k. Тогда по лемме 2.2.33 пересечение $P_2 \cap H_k$ S-квазинормально в группе G. Следовательно, $P_2 \cap H_k \trianglelefteq G$ по лемме 2.2.32.

Обозначим $H_{k+1} = P_2 \cap H_k$. Получим цепь $H = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{k+1}$, где $H_i \trianglelefteq G$, $|H_{i-1} : H_i| = p$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$. Получаем противоречие с выбором цепи. Теорема доказана.

6.2 Теорема *[39]. Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из K являются S-квазинормальными в G, то K сверхразрешима и её нефраттиниевы G-главные факторы циклические.*

Доказательство.

Применяем теорему 6.1 для любого простого делителя порядка H.

6.2.1. Следствие *[39]. Предположим, что K — такая нормальная подгруппа группы G, что G/K сверхразрешима, а максимальные подгруппы силовских подгрупп из K являются S-квазинормальными в группе G. Тогда G сверхразрешима.*

Доказательство.

По теореме 6.2 все нефраттиниевы G-главные факторы группы H циклические. Так как G/K сверхразрешима, то все нефраттиниевы главные факторы группы G циклические. Отсюда и из насыщенности формации $\mathfrak{U}$ следует, что группа G сверхразрешима. Следствие доказано.

Краткие выводы

В главе 6 найдены приложения результатов, полученных в предыдущих главах, к исследованию групп с заданной системой S-квазинормальных подгрупп. Доказано, что если максимальные подгруппы силовской p-группы из H (H нормальна в G, H p-разрешима, либо p — наименьшее простое число, делящее порядок H) являются S-квазинормальными в G, то H p-сверхразрешима и её нефраттиниевы G-главные p-факторы циклические; если максимальные подгруппы силовских подгрупп из K (K нормальна в G) являются S-квазинормальными в G, то K сверхразрешима и её нефраттиниевы G-главные факторы циклические.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации устанавливается существование систем обобщенно центральных элементов, влияющих на вхождение конечной группы в насыщенную формацию.

Получены следующие результаты:

— доказано распознавание p-сверхразрешимых конечных групп по системе $Q\mathfrak{U}$-центральных элементов [29];

— найдены новые свойства G-главных факторов p-сверхразрешимых нормальных подгрупп конечных групп с системой $Q\mathfrak{U}$-центральных элементов [30];

— доказано $\mathfrak{F}$-распознавание конечной группы с системой $Q\mathfrak{F}$-центральных элементов($\mathfrak{F}$—насыщенная формация) [31].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] *Gaschutz W. Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen // J.Math. — 1952.— Bd. 190. — C. 93 — 107.*

[2] *K.Doerk, T.Hawkes, Finite soluble grops. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. — 889 p.*

[3] *B. Huppert, Endliche Gruppen I. — Berlin — Heidelberg — New York: Sppringer — Verlag, 1967. — 792 s.*

[4] *Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука. — 1989. — 256 с.*

[5] *Аль-Шаро Х.А., Шеметков Л.А. О подгруппах простого порядка в конечной группе // Укр. мат. журнал. — 2002. — Т. 54, № 6. — С. 745 — 752.*

[6] *Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math.Z. — 1954. — №60. — C.409 — 434.*

[7] *Baer R. Supersoluble immersion // Canad. J.Math. — 1959. № 11. — P.353 — 369.*

[8] *Черникова (Баева)Н.В. Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. — 1956. — № 39(81). — С. 273 — 292.*

[9] *Ведерников В.А., Кулешов Н.И. Характеризация конечных сверхразрешимых групп // Вопросы алгебры. — 1996. — № 9. — С.107 — 113.*

[10] *Черников С.Н. Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. — Киев: Инст-т математики АН УССР, 1979. — С.3 — 15.*

[11] *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups //J.Pure Appl.Algebra. — 1998. — Vol.127. — P. 113 — 118.*

[12] *Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 272 с.*

[13] Gorenstein D. Finite Groups, 2nd edn. — New York: Harper and Row (reprinted by Chelsea), 1980. — 527 p.

[14] Guo Wenbin, Shum K.P., Skiba A.N. G-Covering Subgroup Systems for the Classes of supersoluble and nilpotent Groups // Israel J. Math. — 2003. — № 138. — С. 125 — 138.

[15] Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие. — Гомель: УО "ГГУ им. Ф.Скорины", 2003. — 319 с.

[16] Tchounikhin S. Simplicite du groupe fini et les ordres de ses classes d'elements conjugues // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1930. — № 191. — С.397 — 399.

[17] Шеметков Л.А. О формационных свойствах конечных групп // ДАН СССР. — 1972. — 204, № 6. — С. 1324 — 1327.

[18] Hall, P. Complemented groups // J. London Math. Soc. — 1937. — № 12. — P. 201 — 204.

[19] Черникова (Баева)Н.В. Вполне факторизуемые группы // Докл. Акад. Наук СССР. — 1953. — № 92. — С. 877 — 880.

[20] Chernikov, S.N. Groups with Prescribed Properties of a System of Subgroups // Nauka. — Moskow. — 1980.

[21] Kegel O.H. Sylov-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math.Z. — 1962. — Vol. 78. — P. 205 — 221.

[22] Шеметков Л.А. О существовании π-дополнений к подгруппам конечных групп // ДАН СССР. — 1970. — 195, № 1. — С. 50 — 52.

[23] Ведерников В.А. О некоторых классах конечных групп // Докл. АН БССР. — 1988. — Т.32, № 10. — С. 872 — 875.

[24] Виландт (Wielandt H.) Пути развития структурной теории конечных групп // В кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958. (обзорные доклады). — М.: 1962. — С. 263 — 276.

[25] Шеметков Л.А. Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп // Укр. матем. ж. — 1971. — 23, № 5. — С. 678 — 689.

[26] *Горбачев В.И. Локальные $\mathfrak{F}$-подгруппы конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 2. — 1986.— С. 62 — 72.*

[27] *Го Вэньбинь Конечные группы с f-гиперцентральным условием для примарных подгрупп // Вопросы алгебры. — Изд-во Гомельского университета. — Гомель, 1996. Т.9. — С. 90 — 106*

[28] *Шеметков Л.А. О частично разрешимых конечных группах // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114), № 1. — С. 97 — 107.*

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах:

[29] Молокова Е.А. Характеризация конечных p-сверхразрешимых групп // Известия ГГУ им.Ф.Скорины. — 2003. — №1(16). — С.116 — 117.

[30] Молокова Е.А. О p-сверхразрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Известия ГГУ им.Ф.Скорины. — 2004. — №6(27). — С.156–157.

[31] Kh.A.Al-Sharo, E.A.Molokova, L.A.Shemetkov Factorizable Groups and Formations. // Acta Applicandae Mathematicae. — 2005. — № 85. — P.3 — 10.

Препринт:

[32] Молокова Е.А. Формационное распознавание конечных групп по системе обобщенно центральных элементов. — Гомель, 2004. — 13с. — (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины; декабрь 2004).

Тезисы докладов:

[33] Молокова Е.А. Некоторые свойства L-композиционных формаций // VIII Белорусская математическая конференция: Тез. докл., Беларусь, г.Минск, 19 — 24 июня 2000 г./ Минск, 2000.— С.55.

[34] Молокова Е.А. Некоторые свойства ω-локальных формаций // IV Международная алгебраическая конференция, посвященная 60-летию Ю.И.Мерзлякова: Тез. докл., Россия, г.Новосибирск, 7 — 11 августа 2000г./ Новосибирск, 2000. — С.120 — 121.

[35] Kh.A.Al-Sharo, E.A.Molokova, L.A.Shemetkov Factorizable groups and formations. // V Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения": Тез. докл., Россия, г.Тула. — Тула, 19 — 24 мая 2003г./ Тула, 2003. — С.259 — 260.

[36] Kh.A.Al-Sharo, E.A.Molokova, L.A.Shemetkov. Formations and factorizable groups // IV Международная алгебраическая конференция в Украине: Тез. докл., Украина, г.Львов, 4 — 9 августа 2003г./ Львов, 2003. — С.20 — 21.

[37] *Молокова Е.А., Шеметков Л.А. Характеризация конечных p-сверхразрешимых групп // Материалы Международной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения профессора А.И.Кокорина: Тез. докл., Россия, г.Иркутск, 25—28 августа 2004г./ Иркутск, 2004. — С.79.*

[38] *Молокова Е.А., Шеметков Л.А. Новая характеризация p-сверхразрешимых групп // IX Белорусская математическая конференция: Тез. докл., Беларусь, г.Гродно, 3—6 ноября 2004г./ Гродно, 2004. — С.40 — 41.*

[39] *Молокова Е.А., Шеметков Л.А. Конечные группы с системой S-квазинормальных подгрупп // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2005": Тез. докл., Украина, г.Севастополь, 2005г./ Севастополь, 2005.— С. 137.*