

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ EKSENDE DARALAN ANKASTRE KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN
YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet AKTAŞ

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Konstrüksiyon Programı

AĞUSTOS 2020

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ EKSENDE DARALAN ANKASTRE KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN
YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Mehmet AKTAŞ
(503171214)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Konstrüksiyon Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

AĞUSTOS 2020

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503171214 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Mehmet AKTAŞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “İKİ EKSENDE DARALAN ANKASTRE KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Cemal BAYKARA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mahmut Cüneyt FETVACI
İstanbul Üniversitesi

Teslim Tarihi : 7 Ağustos 2020
Savunma Tarihi : 27 Ağustos 2020





*Bu zorlu dönemde güvenini ve desteğini her zaman hissettiğim annem Yeter
AKTAŞ'a,*



ÖNSÖZ

Öncelikle bu zorlu süreçte yardımını, tecrübesini, desteğini esirgemeyen ve çalışmanın her anında yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye teşekkür ederim.

Tez döneminde desteğini ve yardımlarını her daim hissettiğim arkadaşlarım Hasan KIYIK ve Yunus Emre COŞKUN'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Bu dönemde her an maddi/manevi destekçim olan sevgisini ve desteğini her daim hissettiğim aileme de şükranlarımı sunarım.

Ağustos 2020

Mehmet Aktaş



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vii
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	1
1.2 Literatür Araştırması	2
2. TİTREŞİM.....	5
2.1 Titreşim Sınıfları	6
2.1.1 Serbest ve zorlanmış titreşimler.....	6
2.1.2 Sönümsüz ve sönümlü titreşimler	6
2.1.3 Lineer ve lineer olmayan titreşimler	7
3. SONLU ELEMAN METODU	9
4. KİRİŞ TEORİLERİ.....	11
4.1 Euler-Bernoulli Kirişi Sonlu Eleman Formülasyonu	13
4.1.1 Rijitlik matris formülasyonu	16
4.1.2 Kütle matris formülasyonu.....	17
4.1.3 İndirgenmiş rijitlik-kütle matrislerinin bulunması ve frekans hesabı	18
5. LİNEER ŞEKİLDE İKİ EKSENDE DARALAN KİRİŞİN MODELLENMESİ	21
6. SONLU ELEMAN YÖNTEMİ SONUÇLARI.....	25
7. PAKET PROGRAMDAN ALINAN SONUÇLAR.....	31
8. KİRİŞ UZUNLUĞUNUN DOĞAL FREKANS ETKİSİ	39
9. SONUÇLAR VE YORUMLAR.....	47
KAYNAKÇA	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51



KISALTMALAR

SEM : Sonlu Eleman Metodu





SEMBOLLER

A_1	: Kirişin Serbest Ucundaki Kesit Alanı
A_0	: Kirişin kökteki kesit alanı
$A(x)$	: Kirişin x Konumundaki Kesit Alanı
b	: Kiriş Genişliği
b_0	: Kökteki Kiriş Genişliği
b_1	: Serbest Uçtaki Kiriş Genişliği
$b(x)$	: Kirişin x Konumundaki Genişliği
c_b	: Kiriş Genişliği Daralma Oranı
c_h	: Kiriş Kalınlığı Daralma Oranı
E	: Elastisite Modülü
EI	: Kirişin Rijitliği
$F(t)$	: Zaman Bağlı Kuvvet
H	: Hermitian Şekil Fonksiyonları
h	: Kiriş Kalınlığı
h_0	: Kökteki Kiriş Kalınlığı
h_1	: Serbest Uçtaki Çubuğun Kalınlığı
$h(x)$	: Kirişin x Konumundaki Kalınlığı
I_{y0}	: Kirişin Kökteki Alan Atalet Momenti
I_{y1}	: Serbest Uçtaki Alan Atalet Momenti
$I_y(x)$	: Kirişin x Konumundaki Alan Atalet Momenti
$[K]$	: Rijitlik Matrisi
k	: Yay Sabiti
L	: Kiriş Eksen Boyunca Uzunluk
M	: Eğilme Momenti
$[M]$	: Kütle Matrisi
m,n	: Daralan Kirişlerin Üstel Sabitleri
r	: Sönüm Sabiti
T	: Periyot
t	: Zaman
V	: Kayma Kuvveti

$v(x)$	: Yer Değiştirme Fonksiyonu
X	: Genlik
$q(x,t)$	: Kirişe Uygulanan Basınç Kaynaklı Kuvvet
ω	: Açısal Frekans
ρ	: Yoğunluk
$v(x,t)$	: Kirişte Kayma Sebebi ile Oluşan Yer Değişimi
θ_i	: Eğim Açısı
$\theta(x)$	: Eğim Açısı Fonksiyonu



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 6.1 : Analizleri yapılan kirişin özellikleri.....	25
Çizelge 6.2 : 50 elemana bölünmüş ve Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi ile çözülmüş ankastre kirişin farklı daralma oranları için ilk dört modu.....	26
Çizelge 6.3 : 100 elemana bölünmüş ve Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi ile çözülmüş ankastre kirişin farklı daralma oranları için ilk dört modu.....	27
Çizelge 6.4 : 200 elemana bölünmüş ve Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi ile çözülmüş ankastre kirişin farklı daralma oranları için ilk dört modu.....	28
Çizelge 7.1 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden.....	31
Çizelge 7.2 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden.....	33
Çizelge 7.3 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden.....	35
Çizelge 8.1 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.6$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değeri (Hertz cinsinden).....	37
Çizelge 8.2 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değeri (Hertz cinsinden).....	38
Çizelge 8.3 : $c_h=0.6$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değeri (Hertz cinsinden).....	39



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Periyodik titreşim hareket grafiği.	5
Şekil 2.2 : Periyodik olmayan titreşim hareketi.	6
Şekil 2.3 : Lineer titreşim hareketi yapan bir sistem.	7
Şekil 3.1 : Sonlu eleman yöntemine göre elemanlarına ayrılmış bir anahtar.	9
Şekil 4.1 : Elementlerine ayrılmış bir ankastre kiriş.	12
Şekil 4.2 : P yükünün etkisi ile eğilmeye maruz kalmış ankastre Euler-Bernoulli kirişi.	12
Şekil 4.3 : P yükünün etkisi ile eğilmeye maruz kalmış Timoshenko kirişi.	13
Şekil 4.4 : İki noktadan oluşan kiriş sistemi.	14
Şekil 5.1 : İki ekseninde lineer olarak daralan kiriş modeli.	21
Şekil 5.2 : Farklı kesitlere sahip boylamsal elemanların “m” ve “n” şekil faktörleri	23
Şekil 6.1 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için birinci mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.	28
Şekil 6.2 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için ikinci mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.	29
Şekil 6.3 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için üçüncü mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.	29
Şekil 6.4 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için dördüncü mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.	30
Şekil 7.1 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş.	29
Şekil 7.2 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş.	30
Şekil 7.3 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için ABAQUS'ta yapılan analiz sonucu kirişin ilk mod değerindeki hali gözükmemektedir.	30
Şekil 7.4 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş.	31
Şekil 7.5 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş.	32
Şekil 7.6 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için ABAQUS'ta yapılan analiz sonucu kirişin ilk mod değerindeki hali gözükmemektedir.	32
Şekil 7.7 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş.	33
Şekil 7.8 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş.	34
Şekil 7.9 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için ABAQUS'ta yapılan analiz sonucu kirişin ilk mod değerindeki hali gözükmemektedir.	34
Şekil 7.10 : Kirişin 1. mod değerinde aldığı şekil.	35
Şekil 7.11 : Kirişin 2. mod değerinde aldığı şekil.	36
Şekil 7.12 : Kirişin 3. mod değerinde aldığı şekil.	36
Şekil 7.13 : Kirişin 4. mod değerinde aldığı şekil.	37

Şekil 8.1 : $ch=0.3$ ve $cb=0.6$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösteren grafik.	37
Şekil 8.2 : $ch=0.3$ ve $cb=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösteren grafik.	38
Şekil 8.3 : $ch=0.6$ ve $cb=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösteren grafik.	39
Şekil 8.4 : Farklı L değerlerinin $ch=0.3$ ve $cb=0.8$ değerleri için doğal frekans grafiği.	43
Şekil 8.5 : $ch=0.3$ ve $cb=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki birinci mod değeri.	45
Şekil 8.6 : $ch=0.3$ ve $cb=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki ikinci mod değeri.	46
Şekil 8.7 : $ch=0.3$ ve $cb=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki üçüncü mod değeri.	46
Şekil 8.8 : $ch=0.3$ ve $cb=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki dördüncü mod değeri.	47



İKİ EKSENDE DARALAN ANKASTRE KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Kiriş problemleri günümüzde birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. İnşaat mühendisliğinde binalar, köprüler vb. yapılarda çeşitli kesitlere sahip şekillerde kullanılırken, makina mühendisliğinde şaftlar, kaldıraç sistemleri gibi yapılarda, uçak mühendisliğinde ise helikopter palleri, kanat kirişleri vb. yapılarda kullanılabilirler.

Kirişlerin bu geniş kullanım alanları bazı sorunları da çözmemizi gerektirmektedir. Bunlardan en önemlilerinden biri de titreşim problemleridir. Kirişler farklı kesitlerde olabildikleri gibi daralan veya genişleyen profillere de sahip olabilmektedirler. Bu tezdeki amaç ise iki eksen de daralan veya genişleyen ankastre kirişlerin serbest titreşim durumlarının incelenmesidir.

Kiriş teorileri bu tarz sistemlerin yapısal analizlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Basit bir şekilde sistemlerin analizlerini gerçekleştirmemize olanak sağlamaktadır. Bu tezde kiriş teorileri, günümüzde pek çok araştırmanın da konusu olan sonlu eleman yöntemi ile kullanılmıştır. Her ne kadar sonlu eleman yöntemi hesapları karmaşık gözükse de günümüzde gelişen bilgisayar sistemleri ile oldukça kolay bir şekilde bu analizler gerçekleştirilebilmektedir. Bu tezde ise Euler-Bernoulli sonlu eleman kiriş teorisi kullanılmıştır. Bu teoride kayma kaynaklı etkiler göz önüne alınmamaktadır. Euler- Bernoulli kiriş teorisine göre kirişin tarafsız eksenini şekil değiştirme sonrası da kiriş eksenine dik olan doğrular ile dik açı yapmaktadır. Yani kesit düzleminde herhangi bir deformasyon meydana gelmemektedir. Bu tezdeki sonlu eleman çözümünde her bir elemanın iki düğüm noktasından oluştuğu ve bu noktaların da ikişer serbestlik derecesine sahip olduğu kabul edilmiştir. Bundan dolayı her bir eleman 4 serbestlik derecesine sahiptir. Bu teori ile ilgili formülasyonlar MATLAB programında kodlanmıştır ve verdiği sonuçlar incelendiğinde ise gerçeğe oldukça yakın olduğu görülmüştür. Daha sonra ABAQUS paket programı ile aynı kirişin bilgisayar ortamında analizi tekrar gerçekleştirilmiştir. MATLAB'deki koddan alınan sonuçlar literatür ile uyumluluğu açısından boyutsuz olarak da elde edilmiştir.

Bu tez kapsamında kabul edilen kiriş ankastre olarak bir ucundan yataklanmış, izotropik, iki eksen de daralan ve kesiti iki eksen de simetrik olan bir kiriştir. Aynı zamanda bu kiriş simetrik ve izotropik olarak kabul edilmektedir. Bundan dolayı iki düzlemdeki titreşim hareketi birbirini etkilememektedir.

Giriş bölümünde kirişlerin kullanım alanları, tezin amacı, kullanılan yöntemler, yazılımlar ve yapılan kabullerden bahsedilmiştir. Çok sık kullanılan iki sonlu eleman metodu ile ilgili yüzeysel bilgiler de verilmiştir. Bu metodlar Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorileridir. İki tezin birbirinden en önemli farkları Euler-Bernoulli teorisinde kayma etkileri göz ardı edilirken Timoshenko teorisinde ise kayma etkileri göz önüne alınmaktadır. Daha sonra literatür araştırmasına yer verilmiştir.

Daha sonra tezin konusu kapsamında olduğundan dolayı titreşim hakkında genel bir bilgilendirme yapılmıştır. Ardından titreşim sınıflandırılmıştır ve bu sınıflar hakkında da kısa bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sonlu eleman yöntemi ile alakalı bilgiler verilmiştir. Burada sonlu eleman yönteminin gelişen teknoloji ile işimizi nasıl kolaylaştırdığından ve kullanılan programdan bahsedilmiştir. Bu işlemler yapılırken en önemli noktalardan birinin de kullanılan teoriye uygun şekil fonksiyonlarının bulunması olduğu belirtilmiştir. Buradaki amaç ileride daha detaylı olarak kullanılacak sonlu eleman metodu hakkında fikir sahibi olunmasıdır.

Sonraki bölümde kiriş teorileri hakkında daha detaylı bilgi verilmiştir. Burada ilk literatürdeki teorilerden bazıları belirtilmiştir. Bunlardan sıklıkla kullanılan Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorileri hakkında detaylı açıklama yapılmıştır. Bu tez kapsamında da kullanılan Euler-Bernoulli teorisi detayları ile anlatılmış, formülasyonları gösterilmiştir. Daha sonra uygun şekil fonksiyonlarının hesaplanmasından sonra her bir elemana ait rijitlik ve kütle matrisleri bulunmuştur. Daha sonra bu matrisler uygun formatta birleştirilerek genelleştirilmiş rijitlik ve kütle matrisleri elde edilmiştir. Ardından ankastre kiriş sınır koşulları uygulanmış ve indirgenmiş rijitlik ve kütle matrisleri bulunmuştur. Bu matrisler uygun formüllerde yerlerine konularak sonuçlar literatür ile uyumlu olacak şekilde boyutsuz olarak elde edilmiştir. Daha sonra MATLAB programında yazılmış kod ile elde edilen sonuçları doğrulamak adına farklı daralma oranlarındaki kirişler Catia V5 programında modellenip, Hypermesh programında sonlu elemanlarına ayrılmıştır. Daha sonra da ABAQUS paket programı ile analizleri yapıp MATLAB’de yazılan kod doğrulanmıştır.

Son kısımda ise literatürdeki çalışmalara ek olarak kirişin boyunun doğal frekans üzerine etkisi incelenmiştir.

Sonuçlar literatür ile karşılaştırıldığında ise yüzdesel olarak çok ufak sapmalar olduğu görülmüştür.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF DOUBLE TAPERED CANTILEVER BEAMS BY USING FINITE ELEMENT METHODS

SUMMARY

A beam is a structure which one of its dimensions is larger than the other ones. Larger dimension is defined as the axis of the beam and the sections of the beams can vary from C section to I section or varying sections at different locations, which is called as tapered beams, of the beam or the constant section etc.

Beams are one of the most regularly used structures in different engineering operations. Because of this, analysis of the beam structures drew attention of lots of resarchers. Beams' simple and effective structure caused them to be used in different areas of engineering. Examples for these areas are helicopter blades or wings at aeronautical engineering, as I or T beams at buildings or bridges at civil enginnering, levers and shafts at mechanical engineering etc.

With the usage of beams one can encounter different engineering problems. These problems can vary from dynamic to static. In this thesis free vibration problems of the double tapered beams are the focus. The beam that is considered in this thesis is isotropic, symmetric in two axis, homogenous and cantilever.

Lots of beam theories have been produced depending on various assumptions, and these assumptions ended up with different accuracy levels. With the help of these theories one can easily solve the engineering problems of the beams. In these theories Euler-Bernoulli theory is one of the simplest and commonly used one. The main supposition of this theory is that no deformation exist in the plane of the cross section.

Finite element methods have been used as the main tool to get results for the dynamic behaviour of the double tapered beams in this thesis. The most commonly used finite element methods are Euler-Bernoulli and Timoshenko theories. As it is stated before in Euler-Bernoulli beam theory there is no deformation in the cross section plane. This also means that shear effects are dismissed in Euler-Bernoulli beam theory, while in Timoshenko theory all calculations are performed by taking shear effect into considiration. Finite element methods have recieved considirable amounts of attention in recent years with help of progress in computer technologies. Since by using computers to calculate finite element equations, scientists save lots of time. In this thesis MATLAB computer program is used to solve the equations. With the help of this program, the results can be obtained easily, more accurately and swiftly. With the code, which is written in MATLAB, element number, taper ratios, material properties etc. can be assigned manually. The results obtained from the program are accurately close to the results obtained from the literature. After this step, the beam has been analyzed in ABAQUS program to verify the results gathered from the MATLAB code. These two results are quite similar to the results of the literature. The results which are obtained from the MATLAB are in dimensionless form since the literature results are in this type.

In finite element solution, every element has two nodes and each node has two degrees of freedom. Which means that the each element has four degrees of freedom. While solving by using Euler-Bernoulli finite element beam theory two neighboring element must have continued deflection and slope at common nodes.

In the first chapter of the thesis, common areas of usage for the beams, purpose of the thesis, programs that have been used, theories which are benefited and assumptions are explained. After this the the most commonly used beam theories explained. These theories are Euler-Bernoulli and Timoshenko theories as stated before. In order to prove the accuracy of the results that are taken from the MATLAB code, both ABAQUS analysis have been made and a literature overview performed. After this section a detailed literature review is represented.

After this chapter a general representation of the vibration, since the vibration is the main problem of the thesis, is demonstrated. After a general overview to the vibration, different types of it have been explained. These are free or forced vibrations, damped or undamped vibrations and linear or nonlinear vibrations. In free vibrations there is no outer force to trigger the vibration of the system, while in forced vibration there must be an outer effect to generate the vibration. Damped vibrations' oscillation amplitude decrease over time because of the damping effects such as force. While undamped vibrations preserve their amplitude. Linear vibration means that the magnitude of the system output must be proportional to the magnitude of the input. For example, if in a linear system t input gets $2t$ output, then an input of $4t$ provide $8t$ output. But in real systems these kind of excellence does not exist. These types of oscillation systems are called as nonlinear vibration systems.

In the third chapter, a brief explanation for the finite element methods has been made to clarify the main solution method for this thesis. A mathematical model has to be developed to analyze an engineering problem with some assumptions depending on the solution method. Obtaining the results of these mathematical problems are mostly difficult. With the help of progresing of the computer science, it is much easier than before to solve such problems. There are lots of numerical solution techniques to obtain the results of these engineering problems. Specially, the finite element methods are the most commonly used techniques. Also in this chapter, a brief example of solving a finite element problem has been given. The first thing that has to be done is meshing the beam, which means that the beam has to be divided into small parts, to solve the problem. These small parts are called as "finite elements". Each element has at least one common point with the neighbouring element. These points are called as "nodes". Then, suitable shape functions have to be obtained based on the solution method. At the end of this chapter a brief explanation of both global and reduced stiffness and mass matrix have been obtained. The aim of this section is to give some basic information about the technique that has been used in this thesis

The fourth chapter consist of beam theories. Firstly, some of these theories have been mentioned and then the most commonly used ones explained in detail. These commonly used theories are Euler-Bernoulli and Timoshenko theories. Since the Euler-Bernoulli theory is the main solution method for this thesis, this theory has been represented precisely. After that the suitable shape functions have been acquired and the stiffness and mass matrix for every single element have been obtained. Then, these matrixes have been gathered together in a suitable way to get the global stiffness and mass matrixes. Afterwards, the boundary conditions of the cantilever beam have been applied to acquire the reduced mass and stiffness matrixes. These matrixes have been applied to the suitable formulas to obtain the results in dimensionless form to be able to compare with results of the literature.

After that to improve the MATLAB code results' reliability, beams have been modelled in Catia V5 and then meshed in Hypermesh. After these steps ABAQUS program has been used to get the results for different taper ratios.

The last part is about the effect of the length of the beam on natural frequency in addition to literature.

After comparing all outcomes, the deviation from the literature was unnoticeable.



1. GİRİŞ

1.1 Tezin Amacı

Kirişler günümüz mühendislik uygulamalarında sıkça karşımıza çıkan elemanlardır. Bu elemanlar farklı şekillerde sabit kesitli olarak kullanılabildiği gibi çeşitli amaçlar doğrultusunda daralan, genişleyen, ince cidarlı vb. şekillerde de kullanılabilmektedirler. Pratik olarak düşünüldüğünde değişen kesitlere sahip kirişler sabit kesitli kirişlere göre yer yer daha uygun ve/veya iyi kütle dağılımı ve mukavemet özelliklerine sahip olabilmektedirler.

Bu konu üzerine literatürde çok fazla kaynak bulunmaktadır. Bunlardan bazılarında daha eski metodlar kullanılabildiği gibi günümüzde artık paket programların da yardımıyla daha popüler olan Sonlu Eleman Metodu (SEM) kullanılanları da bulunmaktadır. Bu kirişler kullanım amaçlarına göre statik, dinamik veya her ikisine birden maruz kalabilmektedirler. Bundan dolayı dinamik ve statik analizlerinin yapılması ve uygunluğunun kanıtlanması gerekmektedir. Aksi taktirde can ve/veya mal kaybı ile sonuçlanan kazalara sebebiyet verebilmektedirler. Dinamik zorlanmalar bu tezin kapsama alanı dahilindedir. Dinamik zorlanmalar dışarıdan bir etki ile olabildiği gibi serbest titreşim sonucu da gerçekleşebilmektedir. Bu tezdeki çalışma serbest titreşimleri kapsamaktadır.

Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teoriler oldukça sık kullanılan yöntemlerdir. Euler-Bernoulli sonlu eleman kiriş teorisinde kayma etkileri göz önüne alınmazken, Timoshenko teorisinde kayma kaynaklı etkiler göz önüne alınmaktadır. Bu tez kapsamında titreşim genliklerinin çok fazla olmadığı ve bundan dolayı oluşan kayma etkilerinin göz ardı edilebileceği kabul edilmiştir.

Tez kapsamında dikdörtgen kesitli ve her kenarının uzunluğu sabit bir orana bağlı olarak kiriş eksen boyunca değiştiği kirişler göz önüne alınmıştır. Kiriş malzemesi ise homojen ve izotropik olarak kabul edilmiştir. Kiriş Euler Bernoulli kirişi olarak modellenmiş ve dinamik analizleri ise serbest titreşim düşünülerek sonlu eleman metodu ile gerçekleştirilmiştir. Sonlu eleman metodu ise MATLAB programında

yazılan kod ile gerçekleştirilmiştir. Kodun doğruluğunu kanıtlama açısından daha sonra hem ABAQUS paket programında analizleri yapılmıştır hem de literatürdeki makaleler ve tez çıktıları ile karşılaştırılmıştır. Literatürdeki kaynaklarda genellikle daralma oranının doğal frekans üzerine etkileri odak noktası olmuştur. Bu tezde hem bu konu üzerinde hem de değişken kesitli kirişin uzunluğunun doğal frekans üzerindeki etkilerine çalışılmıştır.

1.2 Literatür Araştırması

Bailey, çalışması ile değişken kesitlere sahip kirişlerin farklı sınır koşulları ile ve hem süreksizliğin olduğu hem de süreksizliğin olmadığı şartlar altında titreşim davranışlarını incelemiştir. Bu çalışmasını ise basit cebirsel matematik kullanarak gerçekleştirmiştir. Yaptığı çalışma sonuçları ile gerçek sonuçlar birbirine yakın çıkmaktadır [1].

Downs, yaptığı çalışma ile iki ekseninde simetrik kesite sahip izotropik ve ankastre kirişlerin serbest titreşim altında dinamik analizlerini yapmıştır. Bu çalışmada ise kirişleri Timoshenko ve Euler-Bernoulli metodlarına göre ayrı ayrı modellemiş ve elde ettiği sonuçları karşılaştırmıştır [2].

Lau, uniform kesite sahip olmayan bir kirişin ilk beş doğal frekansını hesaplamıştır. Bunu yaparken ise Euler-Bernoulli kiriş metodunu kullanmıştır. Bu çalışmada farklı sınır koşulları altında kiriş davranışları incelenmiştir. Bu sınır koşullarına örnek olarak ise, serbest uçta kütle, ankastre kiriş vb. verilebilir [3].

Chelirem ve Lakhdar, çalışması ile iki ekseninde konik olan, dönen ve eğilmeye maruz kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. Türetilen enerji denklemlerine Lagrange yaklaşımı uygulanmış ve korunum denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra bu denklemlere dönme hızı, daralma/genişleme oranları eklenmiştir ve SEM ile hareket denklemleri çözülmüştür [4].

Kwon ve Bang, çalışmasında sonlu eleman yönteminin giriş ve ileri seviyeleri ile alakalı önemli bilgiler vermişlerdir. Bunu yaparken kitabın odak noktası olan MATLAB programı üzerinden çeşitli örneklere de yer vermişlerdir. Buradan Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemine uygun olarak rijitlik ve kütle matrisleri elde edilmiştir [5].

Şahin, çalışmasında iki ekseninde daralan helikopter pallerinin serbest titreşim davranışlarını incelemiştir. Bunu yaparken helikopter pal kök çapını, iki farklı

eksendeki daralma oranlarını ve dönme hızını değiştirerek bu parametrelerin sonuca nasıl etkiğini araştırmıştır. Bunları yaparken de Euler-Bernoulli sonlu eleman yaklaşımını ve Timoshenko sonlu eleman yaklaşımlarını kullanmıştır. Bunların verdikleri sonuçları karşılaştırmıştır [6].

Gupta ve Rao, yaptıkları çalışma ile genişliği ve derinliği lineer olarak değişen burulmuş kirişlerin rijitlik matrislerini incelemişlerdir. Çalışmada burkulma açısının kiriş boyunca lineer olarak değiştiği kabul edilmektedir. Dönme eylemsizlik momenti ve kayma deformasyonları rijitlik ve kütle matrislerinin hesaplarında gözönüne alınmıştır. Çalışmada iki eksen de değişken kesit oranına sahip ankastre kirişin ilk 4 doğal frekans modu bulunmuştur [7].

Mabie ve Rogers, çalışmasında iki farklı düzlemde serbest titreşim halinde olan ve iki eksen de daralan kirişleri incelemiştir. Bu çalışmalarında Euler-Bernoulli denklemlerini kullanmışlardır. Bu çalışmada ilk 5 mod değeri elde edilmiştir. Çalışma ile farklı daralma oranlarının frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir. İkinci durumda ise, kirişin üzerine bir kütle konmuş ve bu kütle ile kirişin kütle oranları ile daralma oranlarından oluşan bir tablo oluşturulmuştur [8].

Raju ve arkadaşları yaptıkları çalışmada basit bir Sonlu Eleman Method formülasyonu kullanarak bir kirişin titreşim davranışlarını bulmuşlardır. Çalışmada kullanılan kiriş iki eksen de değişken kesitlere sahiptir. Çözümleri ise Ritz-Galerkin metodu kullanarak gerçekleştirmişlerdir [9].

Ece ve arkadaşları değişken kesit oranlarına sahip izotropik bir kirişin titreşim davranışlarını incelemişlerdir. Bu çalışmada yer denklemleri, adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir ve kirişin kesitleri ise eksponansiyel olarak değişmektedir. Analitik çözümleri yapılan kiriş için 3 farklı sınır koşulu seçilmiştir ve doğal frekanslar herbir sınır koşulu için ayrı ayrı bulunmuştur [10].

Attarnejad ve Shahba, çalışmalarında dönen ve değişken kesit oranlarına sahip kirişler için temel yerdeğiştirme fonksiyonlarını bulmuşlardır. Bu çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisi yaklaşımı uygulamışlardır [11].

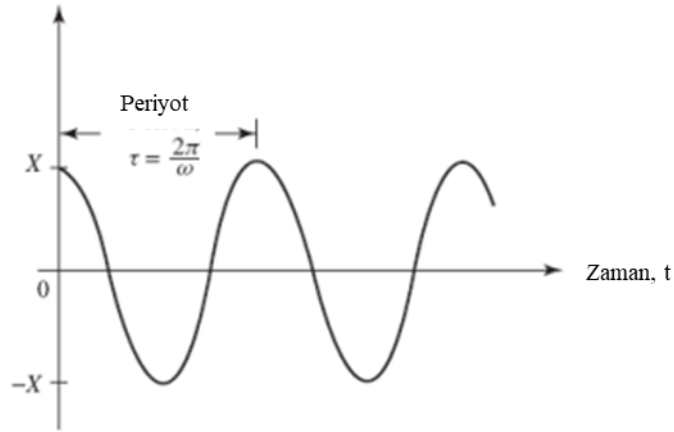


2. TİTREŞİM

Titreşim bir sistemin nominal bir konuma veya referans olarak kabul edilen bir eksene göre tekrarlanan hareketi anlamına gelmektedir. Titreşim günümüzde birçok alanda karşımıza çıkmakla birlikte yer yer istenen bir durum olabilirken yer yer de yıkıcı sonuçlara sebebiyet verebilmektedir. Örneğin; müzik aletlerinde gerekli ve istenen bir durum olarak ortaya çıkabilirken, uçaklar gibi yapılarda ise yorulmaya sebep olarak yapının zamanla zarar görmesine neden olabilmektedir. Mühendislik açısından ise bu durumların incelenmesi önemli bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Titreşimde cisimlerin salınım hareketleri incelenir. Bu hareketler kendiliğinden gerçekleşebileceği gibi dış bir zorlanma sonucu da meydana gelebilmektedir. Sabit zaman aralıklarında gerçekleşen titreşim hareketlerine periyodik titreşimler denilmektedir. Şekil 2.1’de periyodik bir titreşim hareketinin zamana göre yer değiştirme veya kuvvet grafiği görülmektedir.

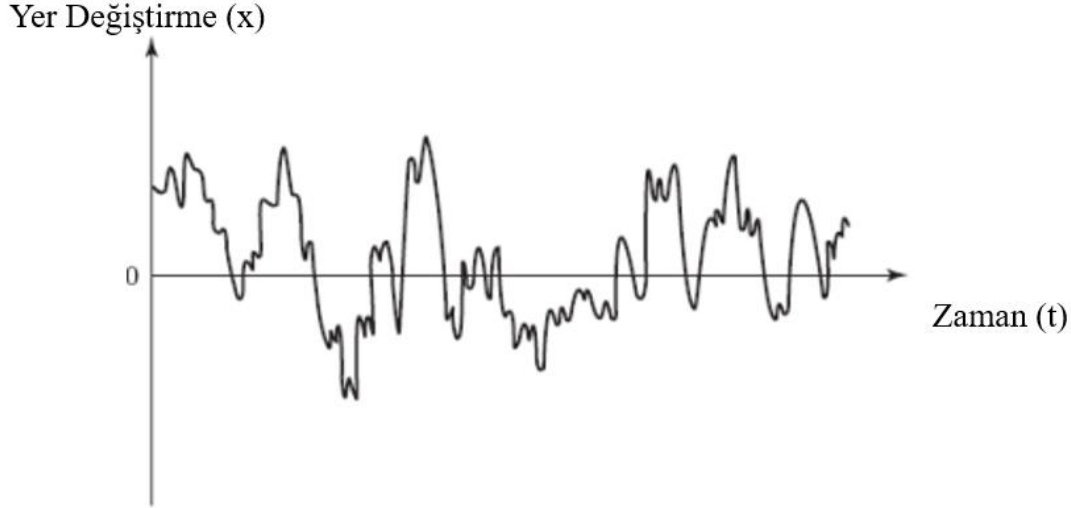
Yer Değiştirme (kuvvet) $x(t)$



Şekil 2.1 : Periyodik titreşim hareket grafiği.

Bu grafikte T periyodu, ω açısal frekansı, X hareket genliğini ve t zamanı göstermektedir. Her hareket periyodik olmak zorunda değildir. Periyodik olmayan hareketlerde

hareket sabit bir zaman aralığında tekrarlanmamakta, rastgele olarak gerçekleşmektedir. Şekil 2.2’de rastgele titreşim hareket grafiği için bir örnek bulunmaktadır.



Şekil 2.2 : Periyodik olmayan titreşim hareketi.

2.1 Titreşim Sınıfları

Titreşim problemleri aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir [16].

1. Serbest ve zorlanmış titreşimler
2. Sönümsüz ve sönümlü titreşimler
3. Lineer ve lineer olmayan titreşimler

2.1.1 Serbest ve zorlanmış titreşimler

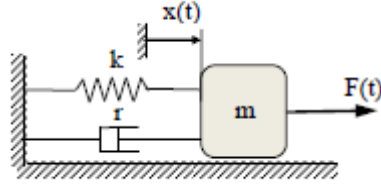
Sisteme dış herhangi bir müdahale olmadan titreşiyor ise böyle titreşimlere serbest titreşimler denilmektedir. Eğer sistem dış bir zorlanma sonucu titreşiyor ise böyle titreşimlere zorlanmış titreşimler denilmektedir. Bu zorlayıcı dış etkenler kuvvet, yük, dönme vb. sebepler ile oluşabilmektedir.

2.1.2 Sönümsüz ve sönümlü titreşimler

Sisteme sürtünme vb. dirençler ile enerjide kayıp yaratacak etkiler mevcut değilse sistem sönümsüz olarak kabul edilmektedir. Eğer bu tarz etkiler mevcut ise sistem sönümlü olarak kabul edilmektedir. Bu kuvvetlere ise viskoz sönüm kuvvetleri denilmektedir. Sönüm etkisi bazı mühendislik sistemlerine istenerek katılabilmektedir.

2.1.3 Lineer ve lineer olmayan titreşimler

Titreşim sisteminin elemanlarının hepsi doğrusal bir davranışa sahip ise böyle titreşimlere lineer titreşimler denilmektedir. Şekil 2.3'te bir lineer sistem örneği gösterilmektedir. Eğer sistem elemanlarından herhangi biri doğrusal olmayan bir davranışa sahip ise bu tarz sistemlere ise lineer olmayan sistemler denilmektedir.



Şekil 2.3 : Lineer titreşim hareketi yapan bir sistem.

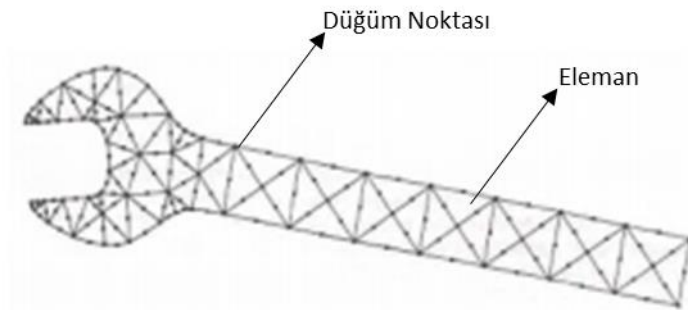


3. SONLU ELEMAN METODU

Bir mühendislik sistemini anlayabilmek için onun matematiksel bir modeli oluşturulmaktadır. Bu matematiksel model oluşturulurken ise bazı kabuller ve basitleştirmeler yapılabilmektedir. Bunların sonucunda diferansiyel ifadelerden oluşan matematiksel korunum denklemleri elde edilmektedir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri genellikle çok zor olmaktadır. Günümüz teknolojisi ile gelişen bilgisayar sistemleri bu denklemlerin çözülmesini kolaylaştırmaktadır. Bu teknolojilerin gelişmesi ile daha da önem kazanan Sonlu Eleman Metodu ile bu mühendislik problemleri çözülebilmektedir [5].

Sonlu eleman yöntemi ile çok kompleks şekillere ve yüklemelere sahip ve farklı mühendislik alanlarından problemlerin çözümü gerçekleştirilebilmektedir. Bunlara örnek olarak ise; akış problemleri, ısı problemleri, dinamik problemler vb. verilebilir. Sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçlar kesin sonuçlara oldukça yakın değerler vermektedir.

Sonlu eleman yönteminde sistem çok sayıda küçük parçalara ayrılır. Bu elemanların herbirine sonlu eleman denilmektedir. Bu şekilde mühendislik problemleri çok sayıda sonlu elemana bölünerek çözülür. Şekil 3.1’de sonlu eleman yöntemine uygun olarak elemanlarına ayrılmış bir anahtar örneği verilmiştir.



Şekil 3.1 : Sonlu eleman yöntemine göre elemanlarına ayrılmış bir anahtar.

Sonlu eleman yöntemi ile düğüm noktalarında istediğimiz değişkenlere (gerilme, sıcaklık vb.) ait değerleri elde edebilmekteyiz. Ancak düğüm noktaları arasındaki

bölgeler hakkında da fikir sahibi olabilmek için şekil fonksiyonları adı verilen ifadelerin elde edilmesi gerekmektedir. Bu işlem yapılırken ise bulmaya çalıştığımız değişkene uygun mertebeden şekil fonksiyonu polinomu bulunmalıdır. Bu tezin kapsamı iki ekseninde daralan kirişlerin dinamik analizleri olduğundan dolayı ilk olarak uygun şekil fonksiyonları bulunmuştur. Daha sonra bu şekil fonksiyonları ile probleme ait kütle ve rijitlik matrisi elde edilmiştir. Daha sonra bunlara sınır koşulları uygulanmıştır ve elemanın istediğimiz sayıda modu MATLAB’de yazılan kod tarafından bize verilmiştir.



4. KIRIŞ TEORİLERİ

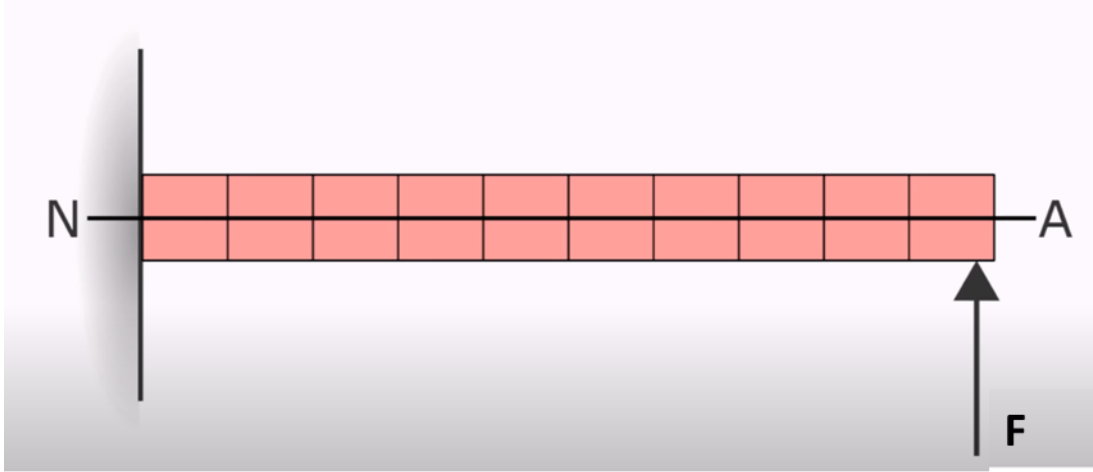
Kirişler, bir boyutu diğer boyutlarına göre oldukça büyük olan ve tek boyutta incelenen elemanlara denilmektedir. Bu teori günümüzdeki birçok mühendislik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Örneğin; köprülerde kullanılan boylamsal elemanlar, rüzgâr türbinlerinin palleri, helikopter palleri vb. bunlara örnek olarak verilebilir.

Simetrik kesite sahip ve izotropik kiriş durumunda iki düzlemdeki titreşim hareketleri birbirlerini etkilememektedir. Fakat sadece bir ekseninde simetriklik durumu ve/veya izotropik olmama durumu mevcut olan kirişlerde ise farklı düzlemlerdeki eğilme-eğilme, eğilme-burulma hareketleri birbirlerini etkilemektedirler [6].

Sıklıkla kullanılan kiriş teorilerine aşağıdakiler örnek olarak verilebilir [17].

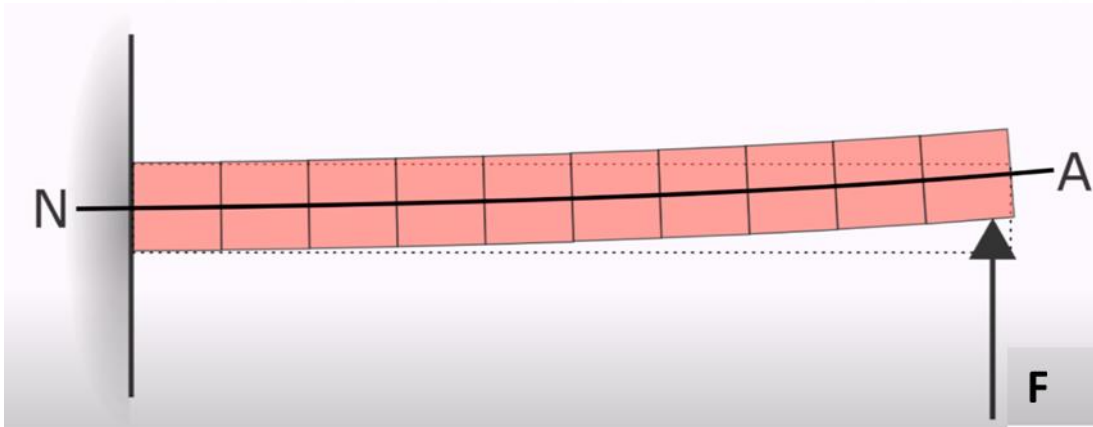
- Euler-Bernoulli kiriş teorisi
- Timoshenko kiriş teorisi
- İki boyutlu kiriş teorileri
- Üç boyutlu kiriş teorileri

Yukarıdaki teorilerden en çok kullanılanları Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve Timoshenko kiriş teorisidir. Bu teorilerden Euler-Bernoulli teorisinde kirişin tarafsız eksenini Şekil 4.1’de gösterildiği gibi elemanlarına ayrılmış kirişin ortasından dik olarak geçmektedir.



Şekil 4.1 : Elementlerine ayrılmış bir ankastre kiriş.

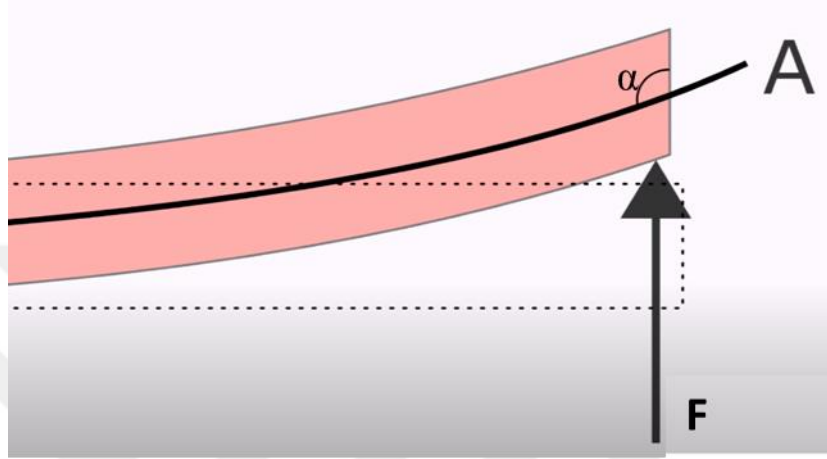
Daha sonra F yükünün etkisi ile kiriş Şekil 4.2’deki gibi eğilmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre F yükü uygulanmadan önce çubuk orta eksenine dik ve düzlemsel olan kesitler, F yükünün etkisi ile oluşan şekil değişimi sonrası da çubuk eksenine dik ve düzlemsel olarak kaldığı kabul edilmektedir. Bu da kiriş eksenine dik kuvvetlerin neden olacağı kayma etkilerinin ihmal edileceği anlamına gelmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi ince ve uzun çubuklarda daha doğru sonuçlar vermektedir.



Şekil 4.2 : F yükünün etkisi ile eğilmeye maruz kalmış ankastre Euler-Bernoulli kirişi.

Euler-Bernoulli kiriş teorisinin aksine Timoshenko kiriş teorisinde kayma gerilmeleri ihmal edilmemektedir. Bu teoride kayma gerilmeleri bir kayma faktörü ile hesaba katılmaktadır. Timoshenko teorisinde şekil değişimi öncesi durumda çubuk eksenine dik ve düzlemsel olan kesitler, F yükünün etkisi ile meydana gelen şekil değişimi sonrası düzlemsel kalmaktadır ancak kiriş eksenine dik olmadığı kabul edilmektedir.

Timoshenko teorisi kirişin narin olmadığı durumlarda kullanılmaktadır. Bu teoriye göre ise ince-uzun çubuk olması durumunda eğilme ve kayma değerleri arasında fark oluşmaktadır. Çubuk kısa ve kalın ise eğilme ve kayma değerleri birbirine neredeyse eşittir. Şekil 4.3'te yukarıdaki şekilde belirtilen kirişin Timoshenko kiriş teorisi durumundaki hali gösterilmiştir. Burada α açısı Euler-Bernoulli teorisinde 90° iken Timoshenko teorisinde 90° 'den daha büyük bir açıdır.



Şekil 4.3 : F yükünün etkisi ile eğilmeye maruz kalmış Timoshenko kirişi.

Euler-Bernoulli kiriş teorisi ince ve uzun çubuklarda oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Tezin kapsamında ele alınan çubuk da ince ve uzun olarak değerlendirilebileceğinden dolayı tezde Euler-Bernoulli kiriş teorisinden yararlanılarak sonuçlar elde edilmiştir.

4.1 Euler-Bernoulli Kirişi Sonlu Eleman Formülasyonu

Eğilmeye maruz bir kirişin Euler-Bernoulli eşitliği aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \quad (4.1)$$

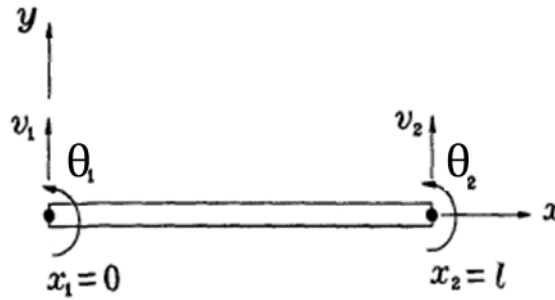
Bu denklemden $\vartheta(x, t)$ kirişte kayma sebebi ile oluşan yer değiştirmeyi, ρ yoğunluğu, EI kirişin rijitliğini, $q(x, t)$ ise dışarıdan kirişe uygulanan basınç kuvvetini, t zamanı, x ise kiriş eksenini boyunca uzunluğu göstermektedir. Daha sonra denkleme Galerkin Metodu veya Artık Gerilme metodlarından biri uygulanır ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$I = \int_0^L \left(\rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) - q \right) w dx = 0 \quad (4.2)$$

Denklem 4.2’de L kiriş uzunluğu anlamına gelmektedir. Daha sonra bu denklemin kısmi integralini alırız. Buna ek olarak kirişi çok sayıda sonlu elemana böldüğümüzde aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$I = \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega^e} \rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} w dx + \int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_{\Omega^e} q w dx \right] + \left[V w - M \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^l = 0 \quad (4.3)$$

Denklem 4.3’te V kayma kuvvetini, M ise eğilme momentini, n ise element sayısını temsil etmektedir. Bu işlemleri yaparken kabul edilen sistem 2 noktadan oluşan bir elemanlı kiriş sistemidir. Bu sistem Şekil 4.4’te gösterilmiştir.



Şekil 4.4 : İki noktadan oluşan kiriş sistemi.

Euler-Bernoulli sonlu eleman kiriş teorisinde ardışık iki elemanın ortak noktalarında aynı değerlere sahip yer değiştirme ve açı değişimleri oluşmaktadır. Herbir nokta v_i yer değiştirmesine ve θ_i eğim açısına sahiptir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde daha önce de bahsedildiği üzere tarafsız eksene dik ve düzlemsel olan kesitler şekil değişimi sonrası da dik konumdadır. Bundan dolayı $\theta = dv/dx$ olmaktadır. Yukarıdaki şekilde gösterilen kiriş 2 noktaya ve herbir nokta da 2 serbestlik derecesine sahip olduğundan toplamda 4 serbestlik derecesine sahiptir. Bundan dolayı yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.[19]

$$v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (4.4)$$

Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi kabulünden eğim açısı aşağıdaki gibidir:

$$\theta(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \quad (4.5)$$

Denklem 4.4 matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$Y(x)=[B] [c]$$

Bu denklemde:

$$[B] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]$$

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Başlangıç noktası koordinatı $x_1=0$, bitiş noktası koordinatı $x_2=l$ kabul edelim. Bu sınır koşullarını denklem 4.4 ve denklem 4.5'e uyguladığımızda aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$v_1 = c_0$$

$$\theta_1 = c_1$$

$$v_2 = c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3 \quad (4.8)$$

$$\theta_2 = c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2$$

Denklem 4.8'deki ifadeyi matris formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & l & 2l & 3l \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Denklem 4.9'daki ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [A][c] \\ \{c\} &= [A]^{-1} [\alpha] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Denklem 4.6 ve denklem 4.10 birleştirilirse aşağıdaki sonuç elde edilmektedir:

$$\begin{aligned} Y(x) &= [B][A]^{-1}[\alpha] \\ Y(x) &= [H][\alpha] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu denklemde:

$$\begin{aligned} [H] &= [B][A]^{-1} \\ [A]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Denklem 4.12'den $[H]$ matrisi bulunarak şekil fonksiyonları elde edilir. Hermitian şekil fonksiyonları olarak adlandırılan bu denklemler ise aşağıda verilmiştir.

$$[H] = [H_1(x) \quad H_2(x) \quad H_3(x) \quad H_4(x)]$$

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (4.13)$$

$$H_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

4.1.1 Rijitlik matris formülasyonu

Şekil fonksiyonlarının hesaplanmasından sonra sırada rijitlik matrisinin hesaplanması vardır. Denklem 4.3'e şekil fonksiyonlarının eklenmesi ve Galerkin'in metodunun uygulanması sonucunda aşağıdaki denklem elde edilmektedir. Bu denklemde K^e bir

sonlu elemanın rijitlik matrisini, EI kirişin rijitliğini, B ifadesi ise şekil fonksiyonlarının ikinci dereceden türevlerini belirtmektedir.

$$[K^e] = \int_0^l [B]^T EI [B] dx \quad (4.14)$$

$$[B] = \{H_1'' \quad H_2'' \quad H_3'' \quad H_4''\}$$

Denklem 4.14'deki "l" ifadesi bir sonlu elemanın boyunu ifade etmektedir.

4.1.2 Kütle matris formülasyonu

Kirişlerin dinamik analizleri için eylemsizlik kuvvetinin de hesaba katılması gerekmektedir. Titreşim problemlerinde kiriş eksenine dik yöndeki deplasman x ve t'nin fonksiyonlarıdır. Daha önce de belirtildiği gibi x kiriş eksen boyunca uzunluğu, t ise zamanı temsil etmektedir. Kiriş elemanındaki bu deplasman ise aşağıdaki formül ile hesaplanabilir [5].

$$v(x, t) = H_1(x)v_1(t) + H_2(x)\theta_1(t) + H_3(x)v_2(t) + H_4(x)\theta_2(t) \quad (4.14)$$

Denklem 4.14'ten de gözüleceği üzere noktasal değişkenler zamanın bir fonksiyonudur. Denklem 4.3'ün ilk ifadesi aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\int_0^l \rho [H]^T [H] dx \{\ddot{d}^e\} \quad (4.15)$$

Denklem 4.15'teki "H" ifadesi ise aşağıdaki gibidir:

$$[H] = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4] \quad (4.16)$$

Bu denklemlerden bir eleman için kütle matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[M^e] = \int_0^l \rho A [H]^T [H] dx \quad (4.17)$$

4.1.3 İndirgenmiş rijitlik-kütle matrislerinin bulunması ve frekans hesabı

Denklem 4.14 ve 4.17 eleman sayısına bağlı olarak ve sonlu eleman yöntemine uygun bir şekilde birleştirilerek global rijitlik ve global kütle matrisleri elde edilmektedir. Bu matrisler elde edilirken dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri daha önce de belirtildiği gibi komşu iki elementin ortak noktalarının açısal değişim ve deplasman miktarları birbirine eşit olmaktadır.

Daha sonra elde edilen bu matrislere bu tez kapsamında kabul edilen bir ucu serbest bir ucu ankastre kiriş sınır koşulları uygulanır ve indirgenmiş rijitlik ve kütle matrisleri elde edilir. Ankastre sınır koşulları aşağıda ifade edilmiştir:

$$x=0 \text{ için} \quad v(x) = \theta(x) = 0 \quad (4.18)$$

Denklem 4.18'den de görüleceği üzere ankastre uca ait açısal değişim ve deplasman değerleri sıfırdır.

Sistemin titreşim davranışını elde etmek için kullanılacak denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[M^S]\{\ddot{q}\} + [K^S]\{q\} = 0 \quad (4.19)$$

Denklem 4.19'da M^S indirgenmiş kütle matrisini, K^S ise indirgenmiş rijitlik matrisini belirtmektedir. $\ddot{q}$ ve q ise sırası ile ivme ve yer değiştirme ifadeleridir. Sistemin serbest titreşim davranışlarının hesaplanabilmesi için Denklem 4.19'un özdeğer denklemi bulunmalıdır. Bunun için ise aşağıdaki denklemin çözülmesi gerekmektedir:

$$\det[[K^S] - \omega^2[M^S]] = 0 \quad (4.20)$$

Yukarıdaki denklemden “ ω ” açısal hızı radyan cinsinden hesaplanmaktadır. Ancak literatürden elde edilen sonuçlar boyutsuz parametreler cinsinden olduğundan dolayı açısal hız ifadesi aşağıdaki formül yardımı ile boyutsuzlaştırılmalıdır.

$$\mu = \omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_{y0}}} \quad (4.21)$$

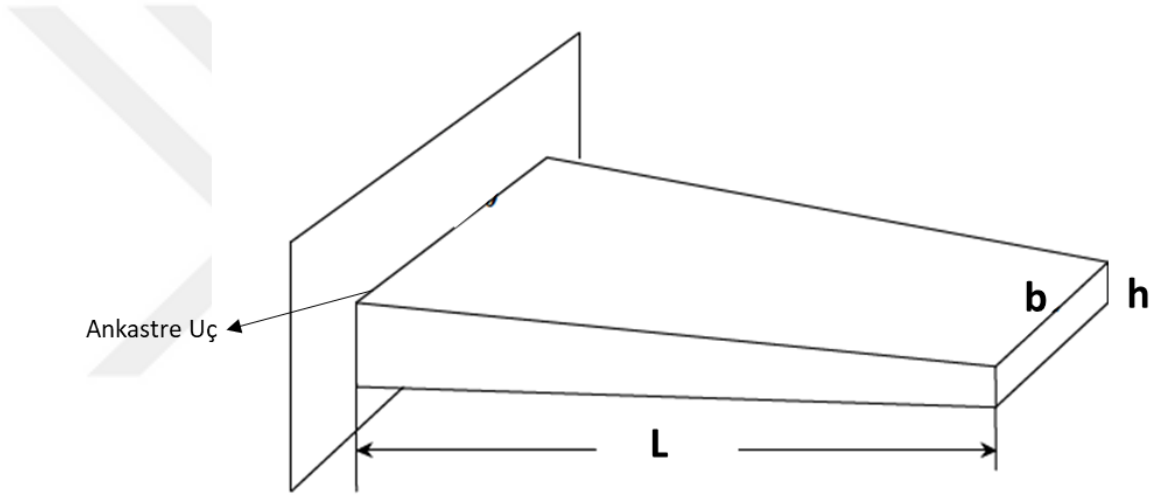
Bu denklemde “ μ ” ifadesi boyutsuz doğal frekans, L kiriş uzunluğu, E elastisite modülü, A_0 kirişin kök ucundaki kesit alanı, I_{y0} kirişin kök ucundaki alan atalet momenti, ρ ise malzemenin yoğunluğunu göstermektedir.





5. LİNEER ŞEKİLDE İKİ EKSENDE DARALAN KİRİŞİN MODELLENMESİ

Bu tez kapsamında ele alınan kiriş lineer bir şekilde ve iki eksende de daralmaktadır. Kiriş bir ucundan ankastre olarak yataklanmışken diğer ucu serbesttir. Şekil 5.1’de bu özelliklere sahip bir kirişin modellenmesi görülmektedir. Bu resimde “h” kirişin kalınlığını, “b” derinliğini, L ise uzunluğunu göstermektedir.



Şekil 5.1 : İki eksende lineer olarak daralan kiriş modeli.

$$\begin{aligned}c_b &= 1 - \frac{b}{b_0} \\c_h &= 1 - \frac{h}{h_0} \\b(x) &= b_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \\h(x) &= h_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^n \\A(x) &= A_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^n \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \\I_y(x) &= I_{y0} \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^{3n} \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m\end{aligned}\tag{5.1}$$

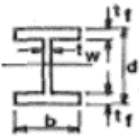
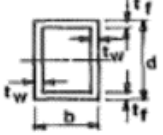
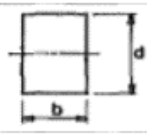
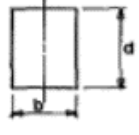
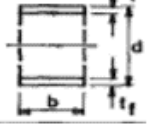
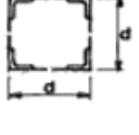
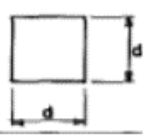
Yukarıdaki formülde “ I_{y0} ” ve “ A_0 ” sırası ile kirişin kökündeki alan atalet momenti ve kesit alanını vermektedir. “ c_b ” ve “ c_h ” değerleri ise sırası ile kirişin derinlik ve kalınlığındaki daralma oranlarını belirtmektedir. $A(x)$ ve $I(x)$ ise sırası ile kirişin bir x konumundaki Alan kesit alanını ve alan atalet momentini belirtmektedir.

“ m ” ve “ n ” değerleri ise kirişin daralma parametrelerini gösteren üstel katsayılardır. Genellikle lineer daralan kirişlerde $m=n=1$ kabul edilebilmektedir [6]. Bu değerler aynı zamanda aşağıdaki formüller yardımı ile de hesaplanabilmektedirler.

$$m = \frac{\ln \left[\frac{A_0}{A_1} \right]}{\ln \left[\frac{h_0}{h_1} \right]}$$

$$n = \frac{\ln \left[\frac{I_0}{I_1} \right]}{\ln \left[\frac{h_0}{h_1} \right]} \quad (5.2)$$

Bu denklemlerde “ A_1 ” ve “ I_1 ” sırası ile serbest uçtaki kesit alanı ve alan atalet momentini vermektedir. “ h_1 ” ise serbest uçtaki çubuğun kalınlığını belirtmektedir.

Şekiller ve Açıklamaları		Şekil Faktörleri	
	Geniş flanş ya da I kesit Sabit b ve t değerleri Yükseklik değişebilir (d)	2.1'den 2.6'ya	Değişken
	Kapalı kesit b ve t değerleri sabit Yükseklik değişebilir (d) Yatay eksen etrafında eğilme	2.1'den 2.6'ya	Değişken
	Katı, dikdörtgen kesit Sabit b değeri Yükseklik değişebilir (d) Yatay eksen etrafında eğilme	3	1
	Katı, dikdörtgen kesit Sabit b değeri Yükseklik değişebilir (d) Dikey eksen etrafında eğilme	1	1
	Açık kesit Sabit b ve t değerleri Yükseklik değişebilir (d) Yatay eksen etrafında eğilme	2	0
	Kule şeklinde kesit d değeri değişebilir	2	0
	Katı, dairesel kesit d çapı değişebilir	4	2
	Katı, kare kesit d değeri değişebilir	4	2

Şekil 5.2 : Farklı kesitlere sahip boylemsal elemanların “m” ve “n” şekil faktörleri.
[18]

Şekil 5.2’den de farklı kesitlere sahip boylemsal elemanlar için “m” ve “n” şekil faktörleri değerleri okunabilir. Tablodan da görüleceği üzere $m=n=1$ kabulü yapılabilmektedir.



6. SONLU ELEMAN YÖNTEMİ SONUÇLARI

Bu kısımda yukarıdaki formülasyonlardan yararlanılarak MATLAB programında yazılan koddan alınan sonuçlara yer verilecektir. Kod sayesinde herhangi bir daralma ve/veya genişleme oranına sahip kirişin istenen eleman sayısında serbest titreşim analiz sonuçlarının ilk dört modu alınabilmektedir. Aşağıdaki çizelgelerde farklı eleman sayıları kullanılarak koddan alınan sonuçların gerçeğe ne kadar yakın değerler verdiğini görebilmekteyiz. Çizelge 6.1’de analizleri yapılan kirişin boyut ve malzeme özellikleri yer almaktadır.

Çizelge 6.1 Analizleri yapılan kirişin özellikleri

Kirişin Özellikleri	
$h_0=0.01$ m	$E=206.8$ GPa
$b_0=0.1$ m	$\rho=7850$ kg/m ³
$L=2$ m	

Çizelge 6.2’de kiriş 50 elemana bölünmüştür ve MATLAB kodundan alınan ilk 4 mod değeri ile literatürdeki değerler karşılaştırılmıştır. Koddan elde edilen frekans değerleri daha önce de belirtildiği gibi literatüre uyumluluğu açısından denklem 4.21’deki formül kullanılarak boyutsuzlaştırılmıştır. Bu tablodan da görüleceği üzere daralma oranları arttıkça koddan elde edilen sonuç literatürden sapmaktadır. En çok sapma oranı ise $c_h=0,8$ ve $c_b=0,8$ değerlerinde %1,32 olarak ölçülmüştür. Bir diğer dikkat edilmesi gereken nokta ise en yüksek sapma oranları 4.modda ortaya çıkmaktadır. Aynı zamanda aşağıdaki çizelgeden, daralma oranının arttıkça doğal frekansın da arttığı görülmektedir.

Çizelge 6.2 50 elemana bölünmüş ve Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi ile çözülmüş ankastre kirişin farklı daralma oranları için ilk dört modu

cb	ch							
	0		0.3		0.6		0.8	
	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]
0	3,5160	3,5160	3,6769	3,6667	3,9525	3,9343	4,3088	4,2925
	22,0345	22,0345	19,9451	19,8806	17,6183	17,4879	15,9146	15,7427
	61,6972	61,6972	53,5032	53,3222	44,3954	44,0248	37,3978	36,8846
	120,9021	120,9020	103,6262	103,267	84,2852	83,5541	69,1488	68,1164
0.3	3,9144	3,916	4,0765	4,0669	4,355	4,3362	4,7165	4,6991
	22,7821	22,786	20,6186	20,555	18,2118	18,0803	16,4489	16,2744
	62,4303	62,4361	54,1926	54,0152	45,0277	44,6583	37,9773	37,4635
	121,6391	121,648	104,3237	103,975	84,9369	84,2101	69,7506	68,7209
0.6	4,5739	4,5853	4,739	4,7372	5,0218	5,009	5,3885	5,3761
	23,9974	24,0211	21,7183	21,6699	19,1869	19,0649	17,334	17,1657
	63,7192	63,7515	55,3791	55,2224	46,0928	45,7384	38,942	38,4392
	122,9823	123,025	105,5616	105,241	86,0487	85,3438	70,7553	69,7438
0.8	5,362	5,3976	5,5325	5,5529	5,8214	5,8288	6,1902	6,1964
	25,573	25,6558	23,156	23,1578	20,4762	20,3952	18,5184	18,3855
	65,6266	65,747	57,0982	57,0157	47,6	47,3051	40,2864	39,8336
	125,1063	125,264	107,455	107,231	87,6826	87,0561	72,1866	71,2418

Çizelge 6.3'te kiriş 100 elemana bölünmüştür ve ilk 4 mod değeri literatürdeki değerler ile karşılaştırılmıştır. Beklenildiği üzere eleman sayısının artması ile birlikte elde edilen sonuçlar literatürdeki değerlere yaklaşmaktadır. 50 elemana bölünmüş kirişte hesaplanan en yüksek sapma yüzdesi %1,32' idi. Ancak burada ölçülen sonuçta bu değer %0,7 olduğu görülmüştür.

Çizelge 6.3 100 elemana bölünmüş ve Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi ile çözülmüş ankastre kirişin farklı daralma oranları için ilk dört modu

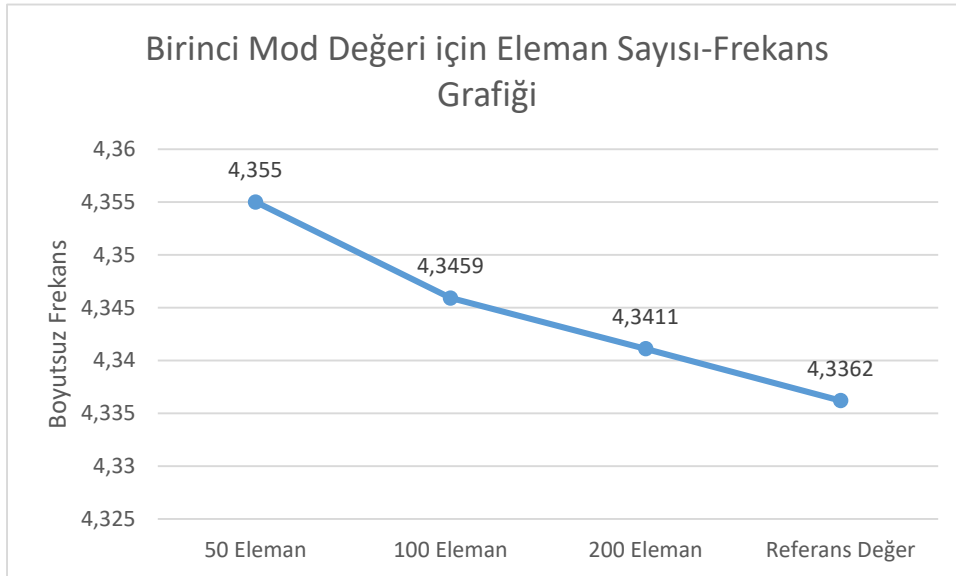
cb	ch							
	0		0.3		0.6		0.8	
	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]
0	3,5160	3,5160	3,6719	3,6667	3,9436	3,9343	4,3010	4,2925
	22,0345	22,0345	19,9133	19,8806	17,5543	17,4879	15,8312	15,7427
	61,6972	61,6972	53,414	53,3222	44,2134	44,0248	37,1484	36,8846
	120,9019	120,9020	103,4471	103,267	83,9261	83,5541	68,647	68,1164
0.3	3,9152	3,916	4,0719	4,0669	4,3459	4,3362	4,7083	4,6991
	22,7843	22,786	20,5878	20,555	18,1476	18,0803	16,3646	16,2744
	62,434	62,4361	54,106	54,0152	44,8472	44,6583	37,7286	37,4635
	121,6449	121,648	104,1535	103,975	84,5816	84,2101	69,2519	68,7209
0.6	4,5797	4,5853	4,7383	4,7372	5,0158	5,009	5,383	5,3761
	24,01	24,0211	21,6954	21,6699	19,1281	19,0649	17,2536	17,1657
	63,7376	63,7515	55,3044	55,2224	45,9215	45,7384	38,7008	38,4392
	123,0081	123,025	105,4084	105,241	85,7076	85,3438	70,2695	69,7438
0.8	5,3799	5,3976	5,543	5,5529	5,8257	5,8288	6,1941	6,1964
	25,6158	25,6558	23,159	23,1578	20,4388	20,3952	18,4569	18,3855
	65,6913	65,747	57,063	57,0157	47,4612	47,3051	40,0735	39,8336
	125,1945	125,264	107,3554	107,231	87,3864	87,0561	71,7406	71,2418

Çizelge 6.4'te ise kiriş 200 elemana bölünmüştür ve farklı daralma oranlarındaki ilk 4 mod değeri MATLAB kodu ile hesaplanıp literatür ile karşılaştırılmıştır. Buradaki en yüksek sapma değeri ise %0,4 olarak ölçülmüştür. Sapma yine en yüksek daralma oranlarının gözüktüğü $c_h=0,8$ ve $c_b=0,8$ değerlerinde gözükmiştir. Yukarıdaki çizelgelerde dikkat edilmesi gereken bir diğer konu ise c_b 'deki daralma oranının sapma değerleri üzerinde daha büyük bir etkisi olduğudur.

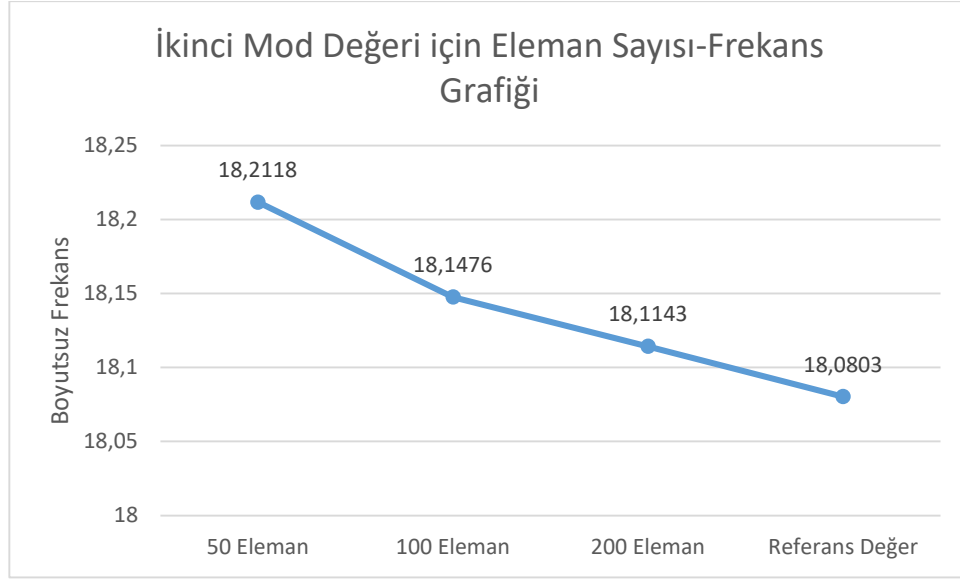
Çizelge 6.4 200 elemana bölünmüş ve Euler-Bernoulli sonlu eleman yöntemi ile çözülmüş ankastre kirişin farklı daralma oranları için ilk dört modu

		ch							
		0		0.3		0.6		0.8	
cb		MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]	MATLAB	Ref.[2]
0		3,5160	3,5160	3,6693	3,6667	3,9390	3,9343	4,2969	4,2925
		22,0345	22,0345	19,8971	19,8806	17,5214	17,4879	15,7876	15,7427
		61,6972	61,6972	53,3684	53,3222	44,12	44,0248	37,0183	36,8846
		120,9019	120,9020	103,3577	103,267	83,7417	83,5541	68,3854	68,1164
0.3		3,9156	3,916	4,0694	4,0669	4,3411	4,3362	4,7038	4,6991
		22,7852	22,786	20,5719	20,555	18,1143	18,0803	16,3203	16,2744
		62,4352	62,4361	54,0611	54,0152	44,7538	44,6583	37,5981	37,4635
		121,6468	121,648	104,0654	103,975	84,3979	84,2101	68,9905	68,7209
0.6		4,5825	4,5853	4,7378	4,7372	5,0125	5,009	5,3797	5,3761
		24,0158	24,0211	21,683	21,6699	19,0971	19,0649	17,2106	17,1657
		63,7451	63,7515	55,2644	55,2224	45,8314	45,7384	38,5726	38,4392
		123,0177	123,025	105,3265	105,241	85,5286	85,3438	70,0117	69,7438
0.8		5,3888	5,3976	5,5481	5,5529	5,8274	5,8288	6,1955	6,1964
		25,6362	25,6558	23,1589	23,1578	20,4178	20,3952	18,4224	18,3855
		65,7203	65,747	57,0409	57,0157	47,3854	47,3051	39,957	39,8336
		125,2316	125,264	107,2965	107,231	87,2256	87,0561	71,498	71,2418

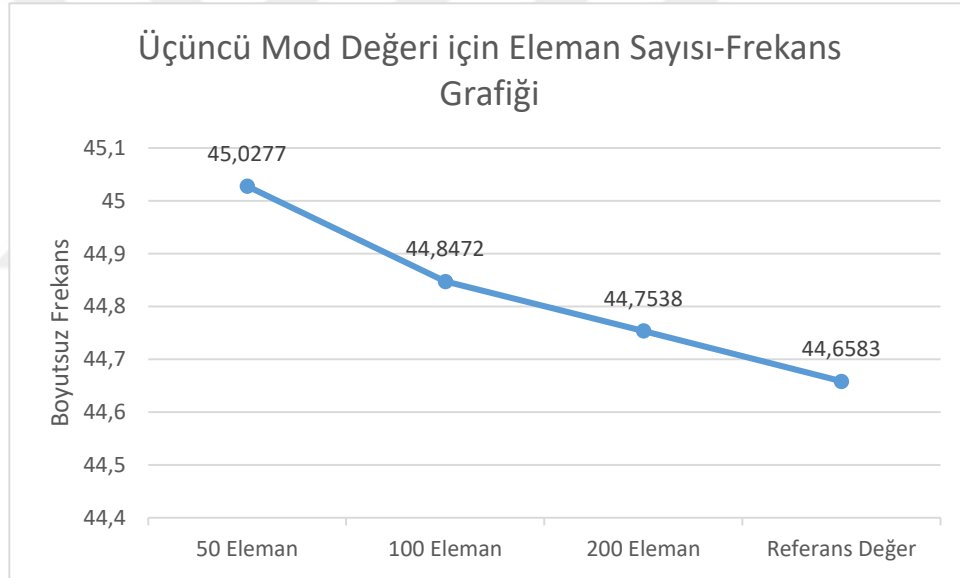
Şekil 6.1, Şekil 6.2, Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'te $c_b=0,3$, $c_h=0,6$ değerleri için farklı eleman sayılarında MATLAB'den okunan ilk 4 mod değerini referans değerlerle karşılaştıran grafiklere yer verilmiştir.



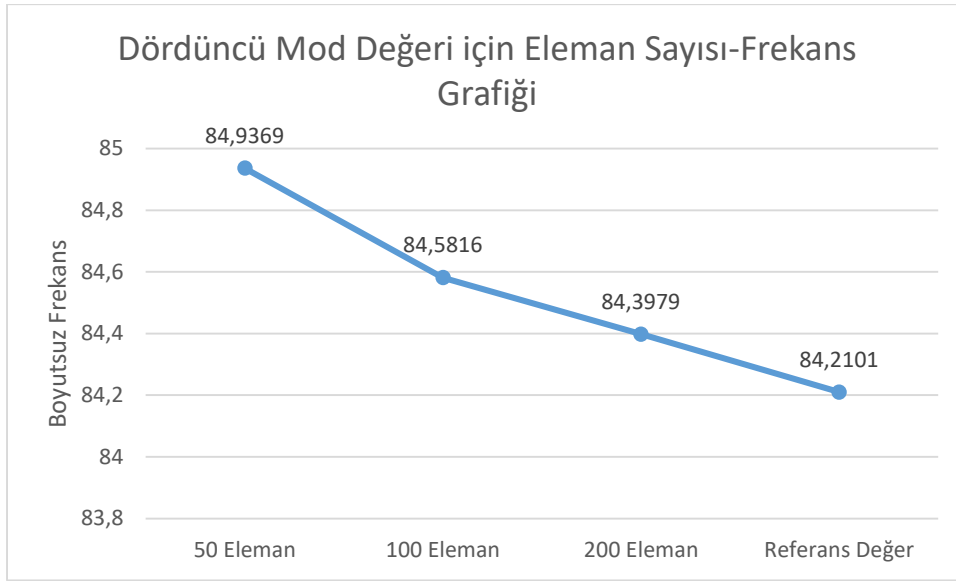
Şekil 6.1 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için birinci mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.



Şekil 6.2 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için ikinci mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.



Şekil 6.3 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için üçüncü mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.



Şekil 6.4 : $c_b=0,3$ ve $c_h=0,6$ değerleri için dördüncü mod değeri eleman sayısı-frekans grafiği.

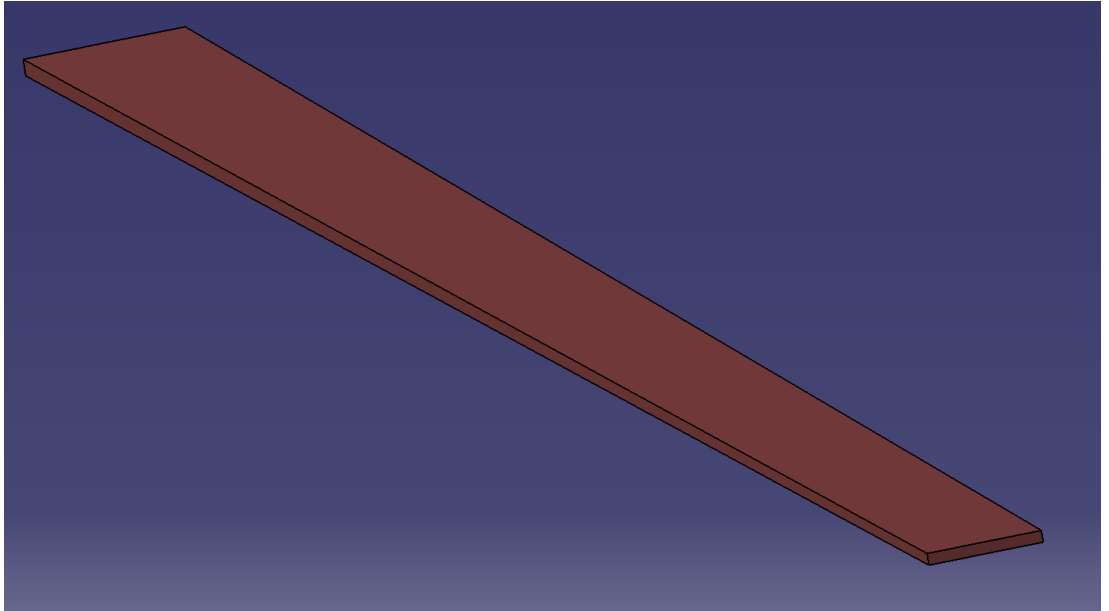
Bu grafiklere bakıldığında ise beklenildiği üzere eleman sayısı arttıkça sonuçların referans değere yaklaştığı görülmektedir.

7. PAKET PROGRAMDAN ALINAN SONUÇLAR

Bu bölümde ABAQUS paket programından alınan sonuçlara yer verilecektir. MATLAB’de yazılan kodun doğruluğunu kanıtlamak adına yukarıdaki çizelgelerde verilen farklı daralma oranlarındaki kirişler Catia v5 programında modellenmiştir. Ardından Hypermesh programında sonlu elemanlarına ayrılıp malzeme özellikleri tanımlanmıştır. Daha sonra ABAQUS programına aktarılarak analizleri gerçekleştirilmiştir.

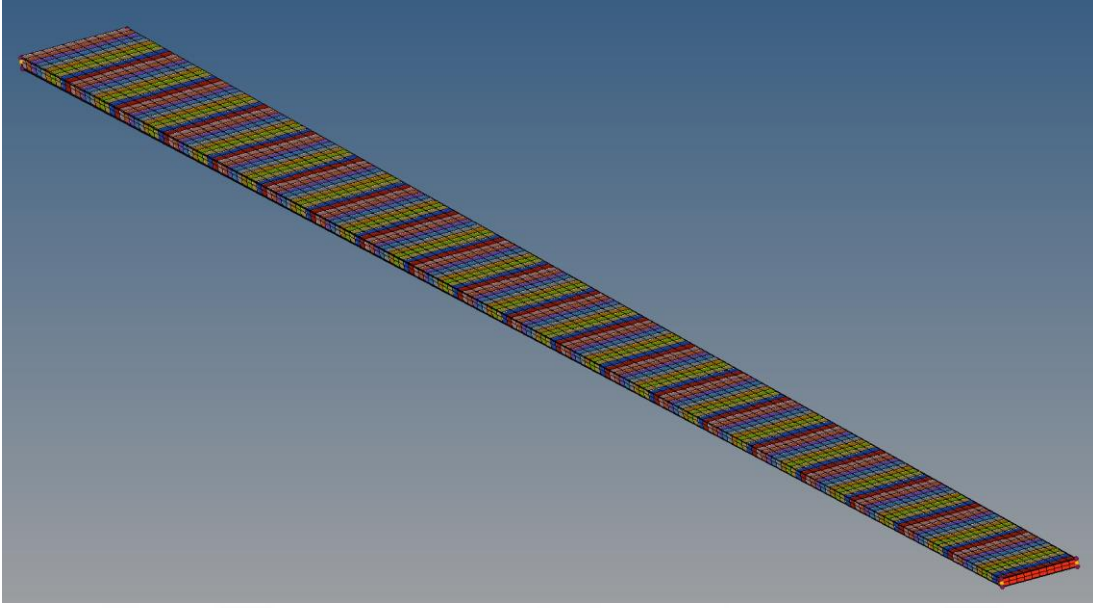
Aşağıda farklı daralma oranları için elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Burada yukarıdaki çizelgelerdeki bütün daralma oranları için değil kodun doğruluğunu kanıtlamak adına yeterli görüldüğünden bunlardan 3 adedi için yapılan analizlere yer verilmiştir.

Şekil 7.1’de $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen modele yer verilmiştir.



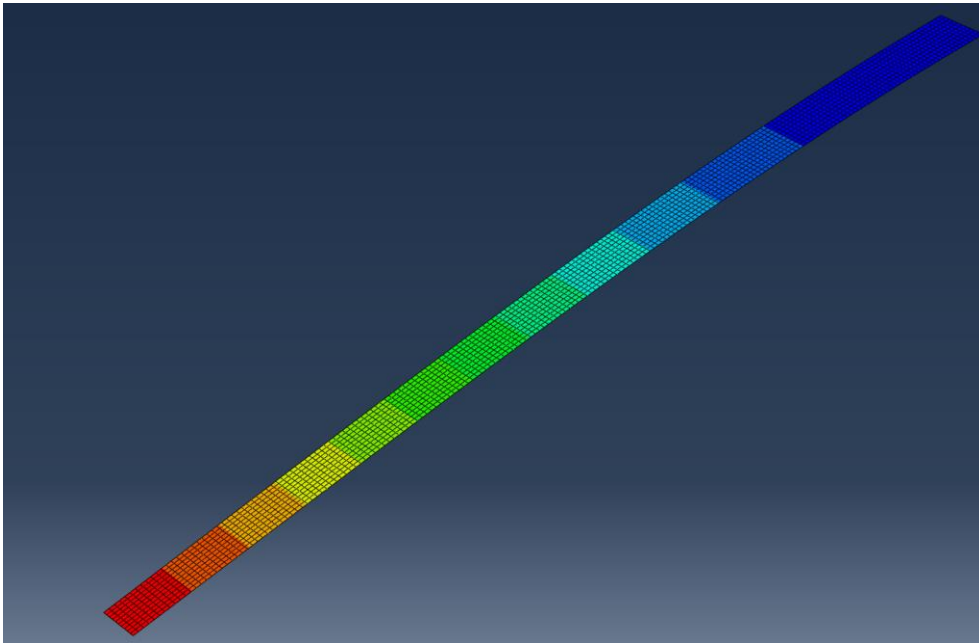
Şekil 7.1 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş.

Şekil 7.2’de ise $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş gözükmektedir. Yine aynı programda kirişin malzeme özellikleri atanmıştır.



Şekil 7.2 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş.

Şekil 7.3'te ise Hypermesh programından ABAQUS'a aktarılan modelin ilk moddaki hali gözükmemektedir. Mavi ile gösterilen bölgenin başlangıcı kirişin ankastre olarak bağlandığı yeri göstermektedir. Çizelge 7.1'de ise MATLAB ve ABAQUS'tan alınan değerler karşılaştırılmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ise ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden olduğundan dolayı MATLAB'deki boyutsuz frekans değerleri Hz birimine çevrilerek çizelgeye aktarılmıştır.



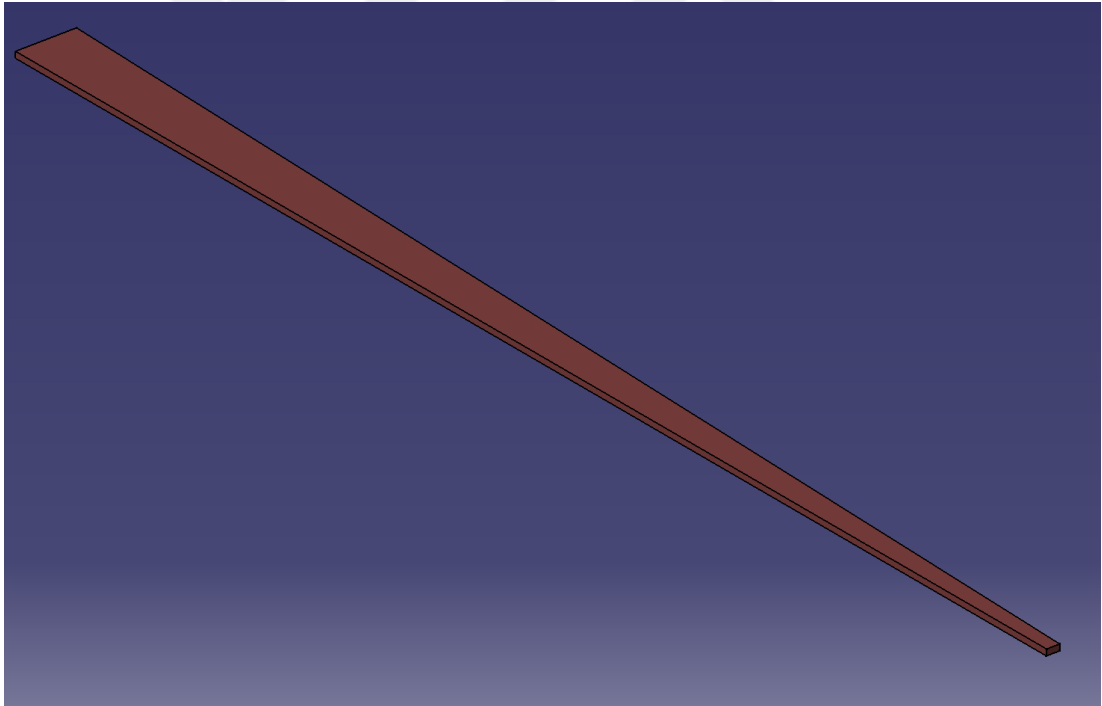
Şekil 7.3 : $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için ABAQUS'ta yapılan analiz sonucu kirişin ilk mod değerindeki hali gözükmemektedir.

Çizelge 7.1 $c_h=0$, $c_b=0.3$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden

ch		
0		
cb	MATLAB (Hz)	ABAQUS (Hz)
0.3	2,3077	2,3094
	13,4308	13,46
	36,8048	36,902
	71,7106	71,9200

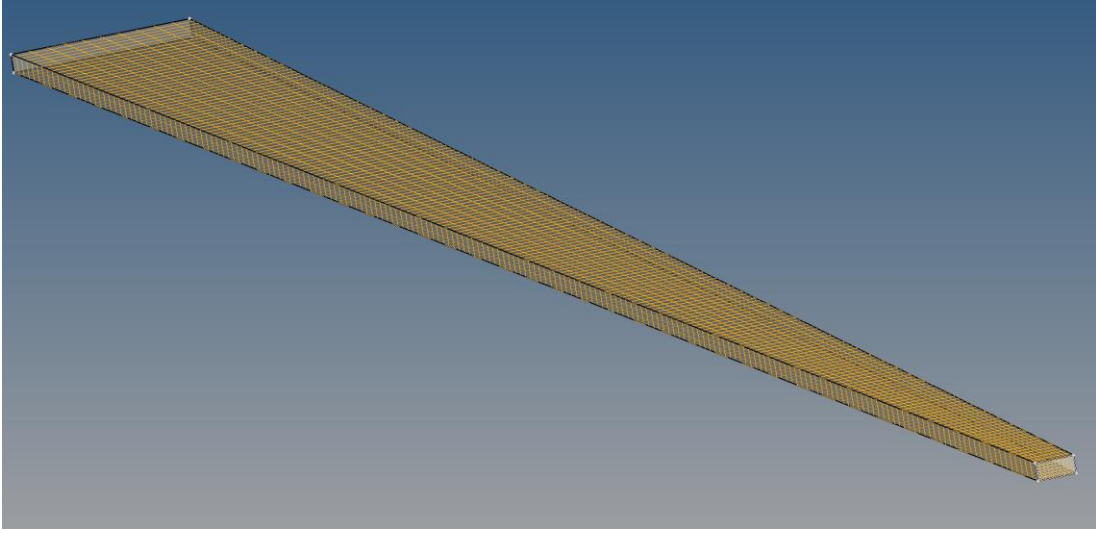
Çizelge 7.1'den de görüleceği üzere MATLAB'den elde edilen değerler literatürle uyumlu olduğu gibi ABAQUS'ta elde edilen değerlere de oldukça yakın sonuçlar vermektedir.

Şekil 7.4'te $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen modele yer verilmiştir.



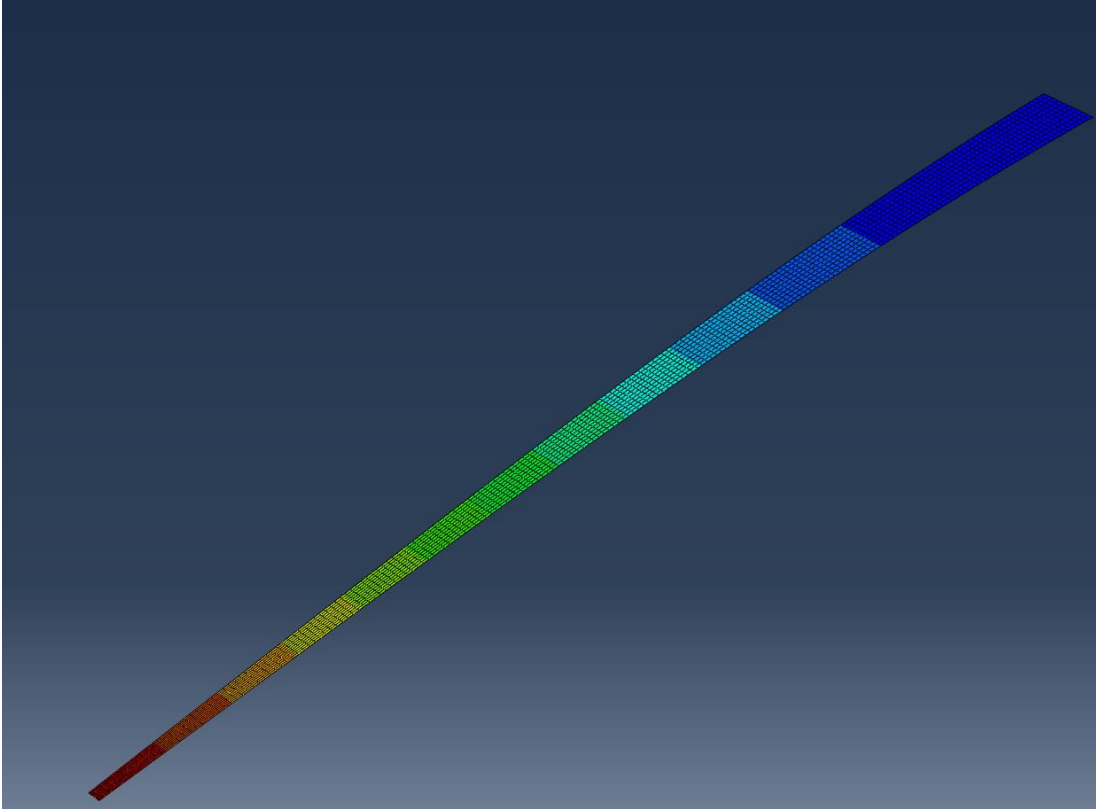
Şekil 7.4 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş.

Şekil 7.5'te ise aynı kirişin Hypermesh ortamında elemanlarına bölünmüş hali görülmektedir. Hypermesh'te girilen değerler mm cinsinden olduğundan dolayı malzeme özellikleri girilirken gerekli düzenlemeler yapılmalıdır.



Şekil 7.5 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş.

Şekil 7.6’da kirişin ABAQUS’taki analizleri sonrası ilk modunda aldığı şekil gözükmemektedir.



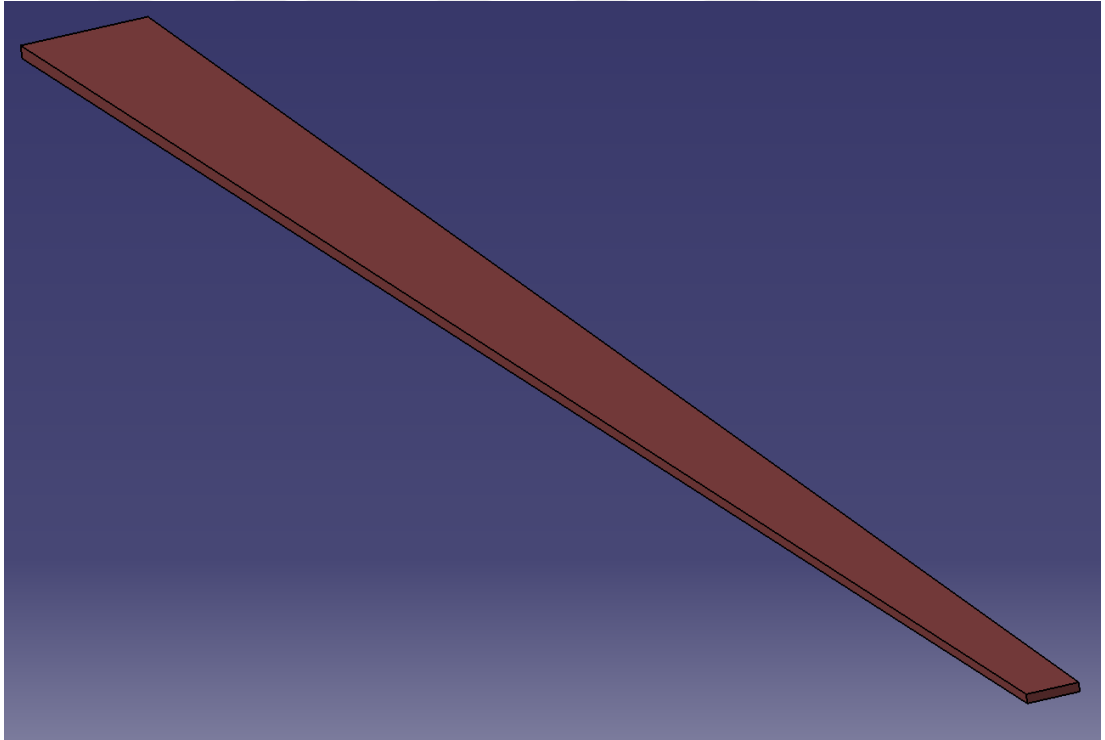
Şekil 7.6 : $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için ABAQUS’ta yapılan analiz sonucu kirişin ilk mod değerindeki hali gözükmemektedir.

Çizelge 7.2 $c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden

		ch
		0
cb		MATLAB (Hz) ABAQUS (Hz)
0.8		3,1611 3,1399
		15,0762 15,054
		38,6892 38,713
		73,7546 73,8630

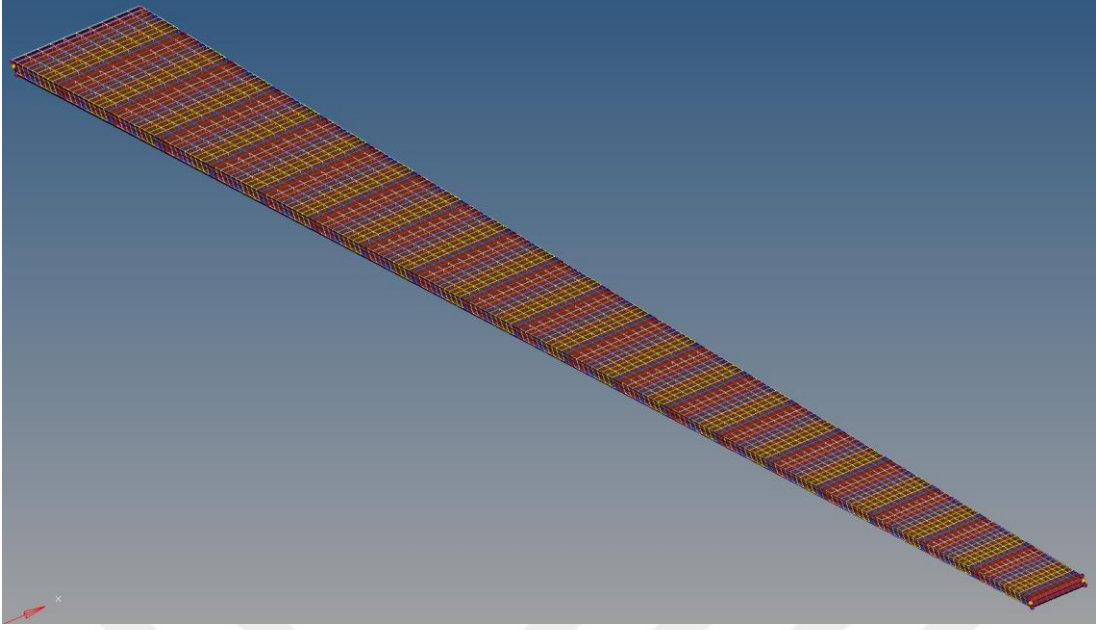
$c_h=0$, $c_b=0.8$ değerleri için hazırlanan yukarıdaki çizelgeye bakıldığında hata oranının oldukça düşük seviyelerde olduğu görülmektedir.

Şekil 7.7'de ise $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş modeline yer verilmiştir.



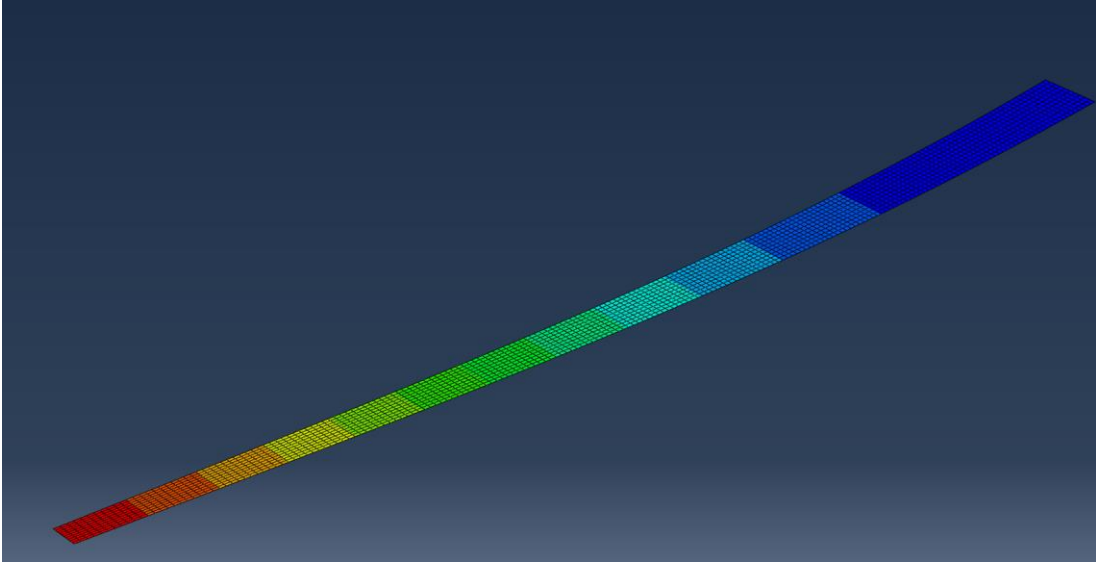
Şekil 7.7 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için Catia v5 ortamında çizilen kiriş.

Şekil 7.8'de ise bu kirişin Hypermesh programında elemanlarına bölünmüş hali gösterilmiştir.



Şekil 7.8 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için Hypermesh programında elemanlarına ayrılmış kiriş.

Şekil 7.9’da ise Hypermesh’ten ABAQUS programına aktarılan ankastre kirişin serbest titreşim analiz sonucunun ilk mod değerindeki hali gösterilmiştir.



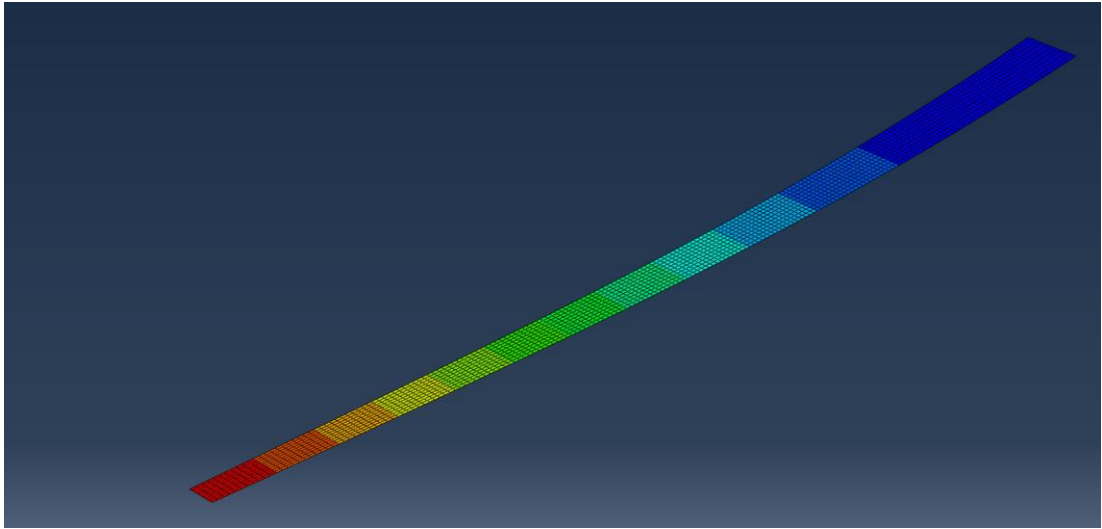
Şekil 7.9 : $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için ABAQUS’ta yapılan analiz sonucu kirişin ilk mod değerindeki hali gözükmemektedir.

Çizelge 7.3 $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden

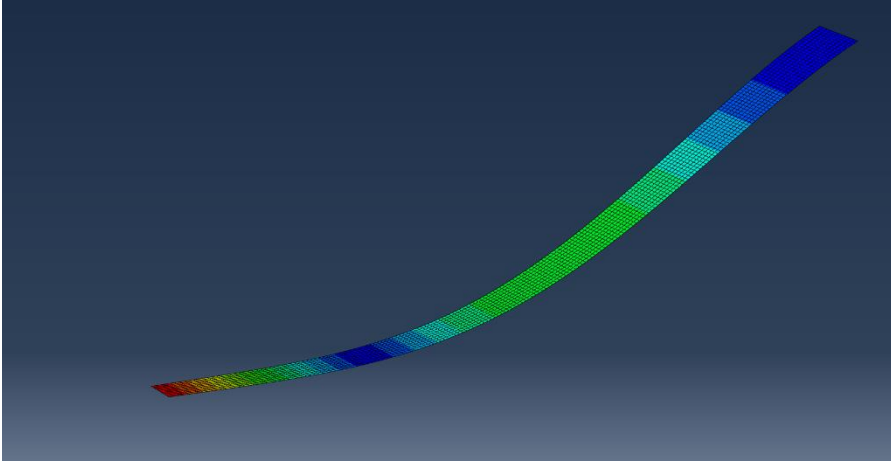
		ch	
		0.3	
cb		MATLAB (Hz)	ABAQUS (Hz)
0.6		2,7938	2,7740
		12,8037	12,819
		32,648	32,773
		62,2323	62,5320

Çizelge 7.3'te $c_h=0.3$, $c_b=0.6$ değerleri için MATLAB ve ABAQUS'tan okunan değerler Hz cinsinden verilmiştir. Buradan da görüldüğü üzere diğer 3 durumdaki gibi MATLAB'den okunan değerler ile paket programın verdiği sonuçlar arasında yüzdesel olarak çok ufak sapmalar meydana gelmiştir. Bu sapmalara neden olarak ise element sayısı, paket programların arka planda yaptıkları kabuller etkin rol oynamaktadır.

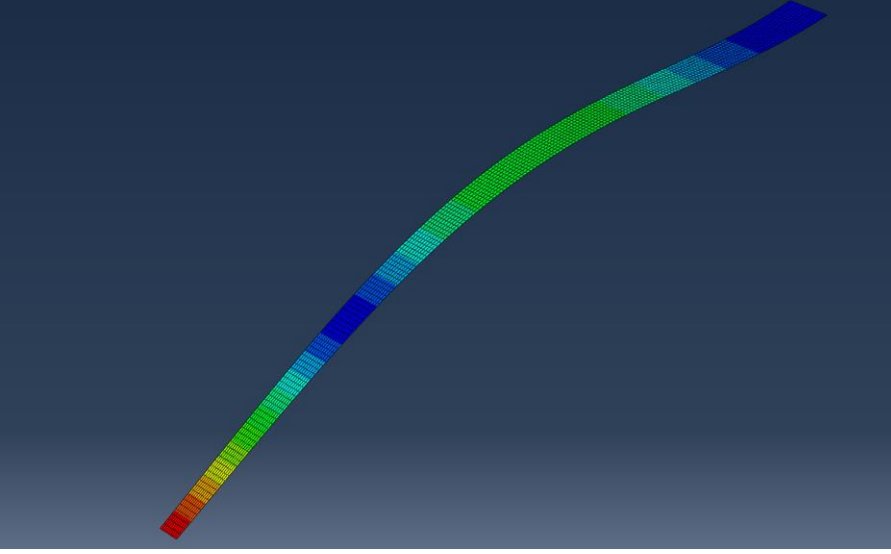
Kirişin ilk 4 moddaki şekil değişimleri ise sırası ile Şekil 7.10, Şekil 7.11, Şekil 7.12 ve Şekil 7.13'te gösterilmiştir. Bu şekillerdeki şekil değişimi ölçek değeri ise ortalama olarak 7'dir.



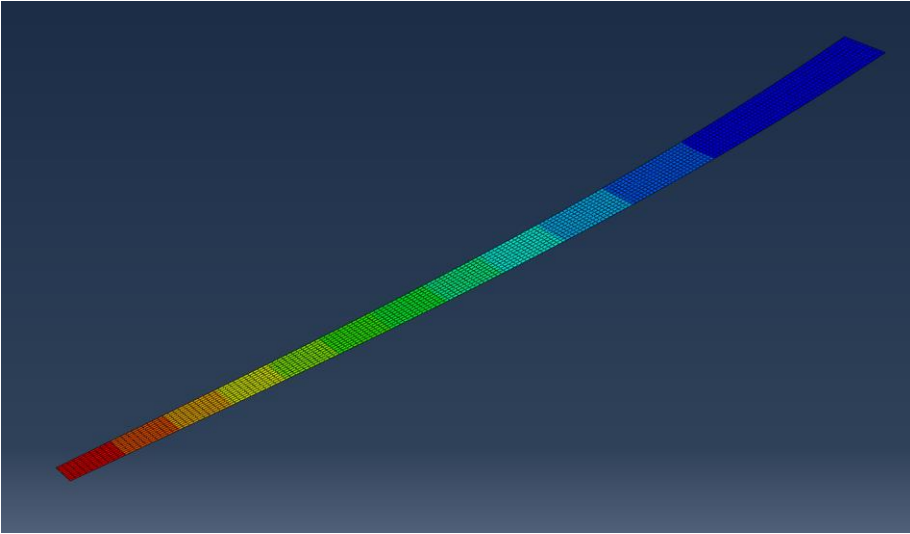
Şekil 7.10 : Kirişin 1. modda aldığı şekil.



Şekil 7.11 : Kirişin 2. modda aldığı şekil.



Şekil 7.12 : Kirişin 3. modda aldığı şekil.



Şekil 7.13 : Kirişin 4. modda aldığı şekil.

8. KİRİŞ UZUNLUĞUNUN DOĞAL FREKANS ETKİSİ

Literatürdeki diğer çalışmalara ek olarak tez kapsamında kirişin boyunun doğal frekans üzerindeki etkileri de incelenmiştir. Bu kısımda, farklı daralma oranlarında kirişin boyundaki değişimlerin ilk 4 modun frekansları üzerindeki etkilerine bakılmıştır.

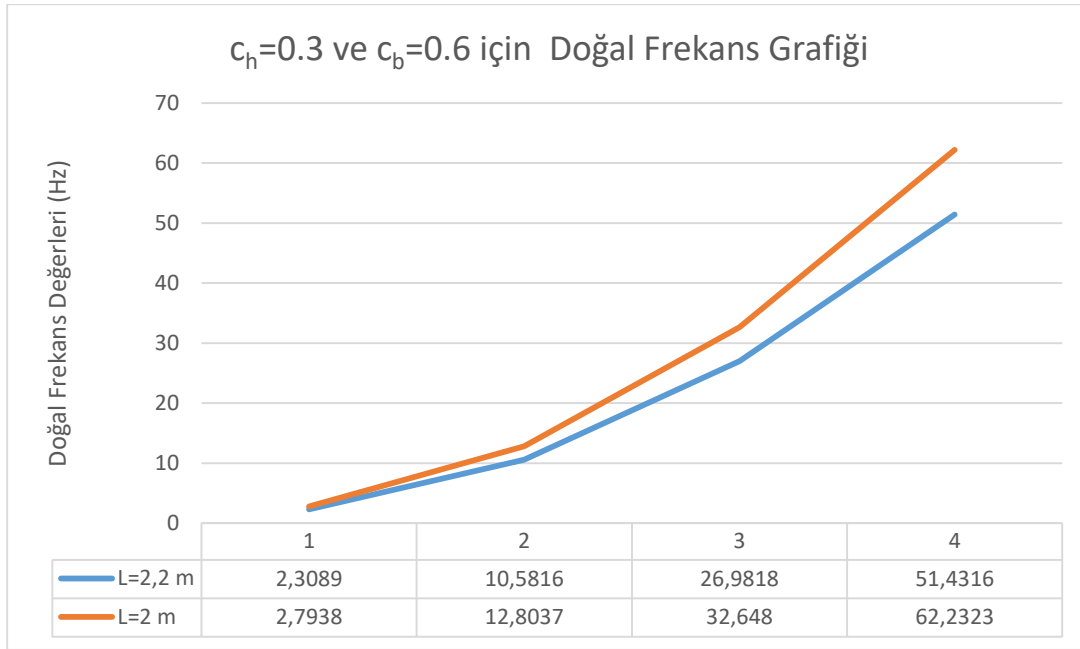
Önceki bölümlerde MATLAB’de yazılan kodun literatürden ve ABAQUS paket programından alınan değerler ile örtüştüğü gösterilmiştir. Bu da kodun doğru sonuçlar verdiğinin kanıtıdır. Burada yine aynı kod üzerinde kirişin boyu değiştirilerek okunan değerler aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

Aşağıdaki tablolarda farklı daralma oranlarındaki kirişlerin uzunluklarının doğal frekans üzerindeki etkilerini gösteren çizelgeler yer almaktadır.

Çizelge 8.1’de $c_h=0.3$ ve $c_b=0.6$ değerleri için kirişin $L=2.2m$ ve $L=2m$ uzunluğu için Hertz cinsinden doğal frekans değerlerine yer verilmiştir.

Çizelge 8.1 $c_h=0.3$ ve $c_b=0.6$ değerleri için kirişin $L=2.2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değeri (Hertz cinsinden)

cb	ch	
	0.3	
	L=2,2	L=2
0.6	2,3089	2,7938
	10,5816	12,8037
	26,9818	32,6480
	51,4316	62,2323



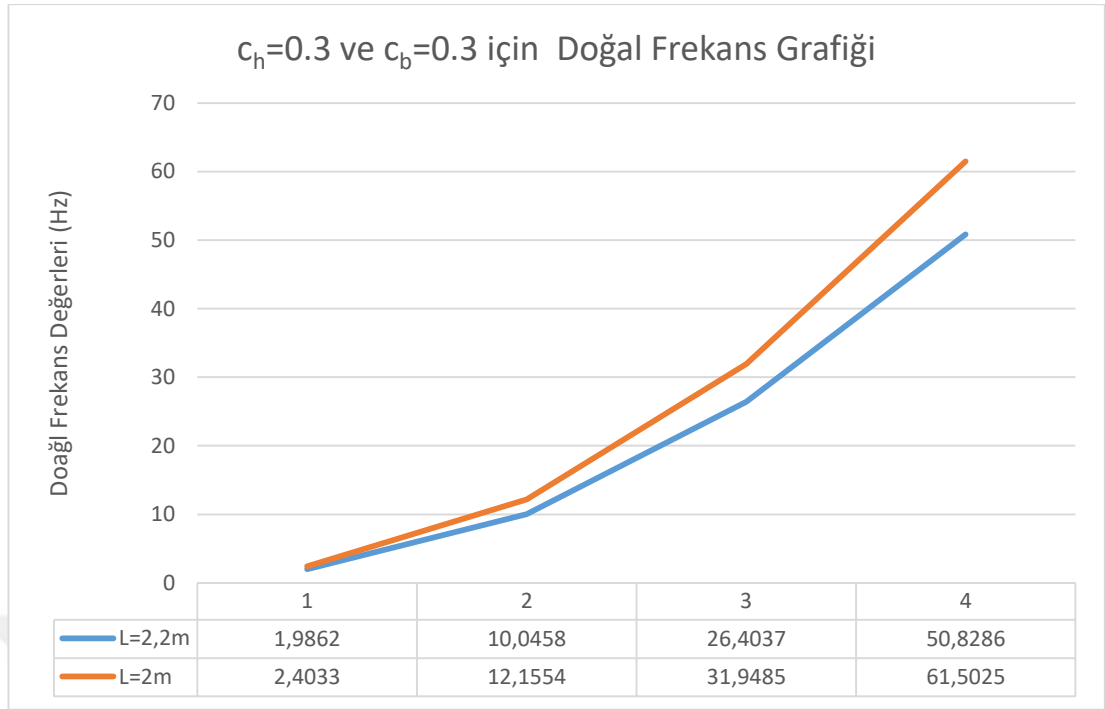
Şekil 8.1 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.6$ değerleri için kirişin $L=2,2$ m ve $L=2$ m değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösteren grafik.

Şekil 8.1’de x eksenini ilk 4 modu, y eksenini ise Hz cinsinden doğal frekans değerlerini temsil etmektedir. Buradan $L=2,2$ metre ve $L=2$ metre değerleri için doğal frekansın değişimleri görülmektedir. Tabloya bakıldığında kiriş uzunluğu arttıkça doğal frekans değerlerinin azaldığı gözlenmektedir. Bu iki farklı uzunluk değerinin doğal frekansları arasındaki fark ise yaklaşık olarak %21’dir.

Çizelge 8.2’de yine aynı $L=2.2$ m ve $L=2$ m değerleri için ancak $c_h=0.3$ ve $c_b=0.3$ daralma oranları için ilk 4 modun doğal frekans değerleri MATLAB’deki kod kullanılarak belirtilmiştir.

Çizelge 8.2 $c_h=0.3$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2$ m ve $L=2$ m değerlerindeki ilk dört doğal frekans değeri (Hertz cinsinden)

		ch	
		0.3	
cb		L=2,2	L=2
0.3		1,9862	2,4033
		10,0458	12,1554
		26,4037	31,9485
		50,8286	61,5025



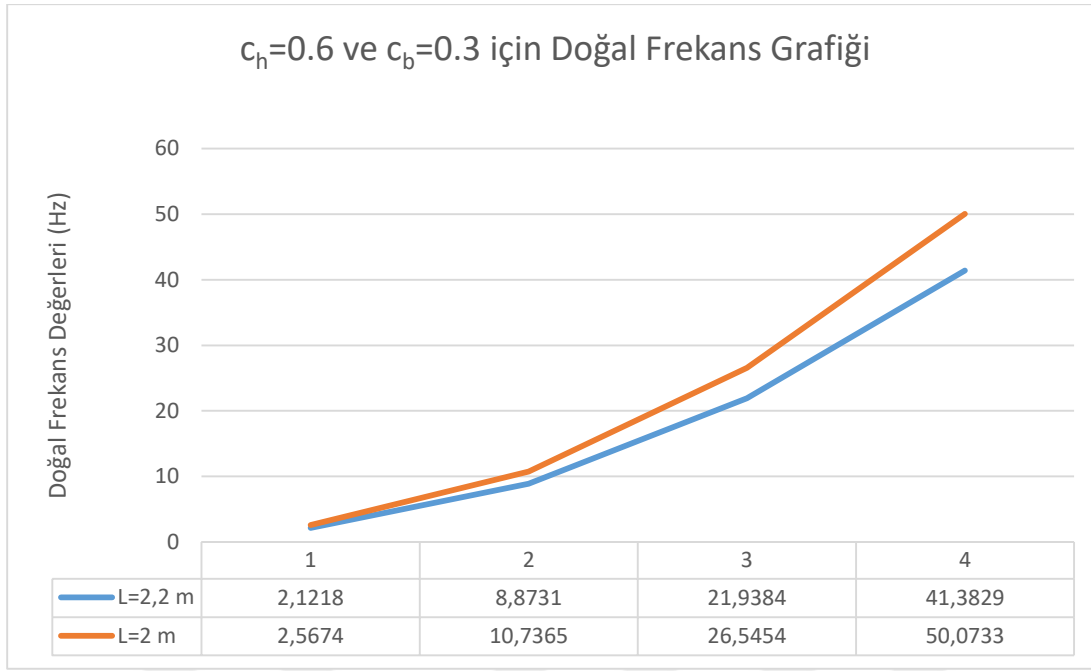
Şekil 8.2 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösteren grafik.

Şekil 8.2’de ise $L=2,2m$ ve $L=2m$ ve $c_h=0.3$ ve $c_b=0.3$ değerleri için ilk dört doğal frekans değeri Hz cinsinden grafik şeklinde gösterilmiştir. Bu grafikte x eksenini ilk 4 modu, y eksenini ise doğal frekans değerlerini Hz cinsinden göstermektedir. Bu grafikte de Şekil 8.1’deki grafikten görüldüğü üzere beklenildiği gibi uzunluğun artması ile doğal frekans değeri bütün mod değerleri için azalmıştır.

Çizelge 8.3’te ise $c_h=0.6$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösterilmiştir.

Çizelge 8.3 $c_h=0.6$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2m$ ve $L=2m$ değerlerindeki ilk dört doğal frekans değeri (Hertz cinsinden).

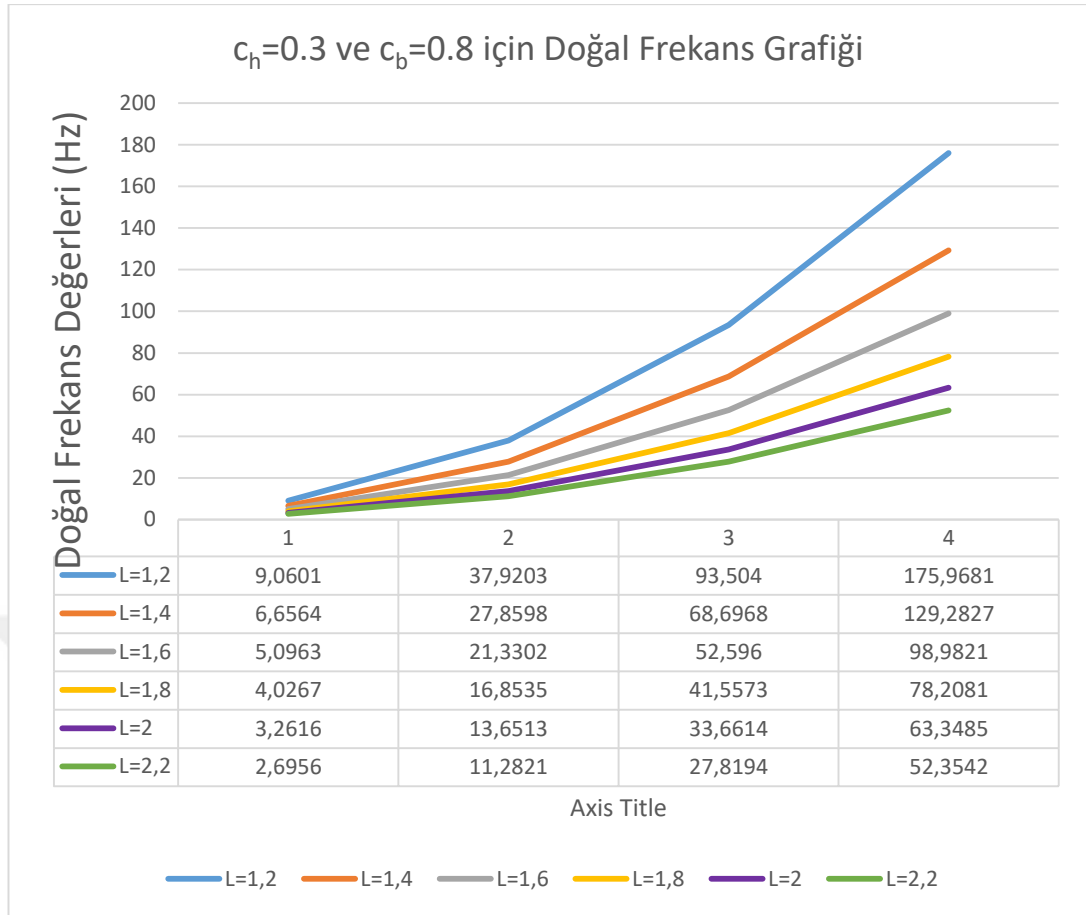
		ch	
		0.6	
cb		L=2,2	L=2
0.3	1	2,1218	2,5674
	2	8,8731	10,7365
	3	21,9384	26,5454
	4	41,3829	50,0733



Şekil 8.3 : $c_h=0.6$ ve $c_b=0.3$ değerleri için kirişin $L=2,2$ m ve $L=2$ m değerlerindeki ilk dört doğal frekans değerini Hertz cinsinden gösteren grafik.

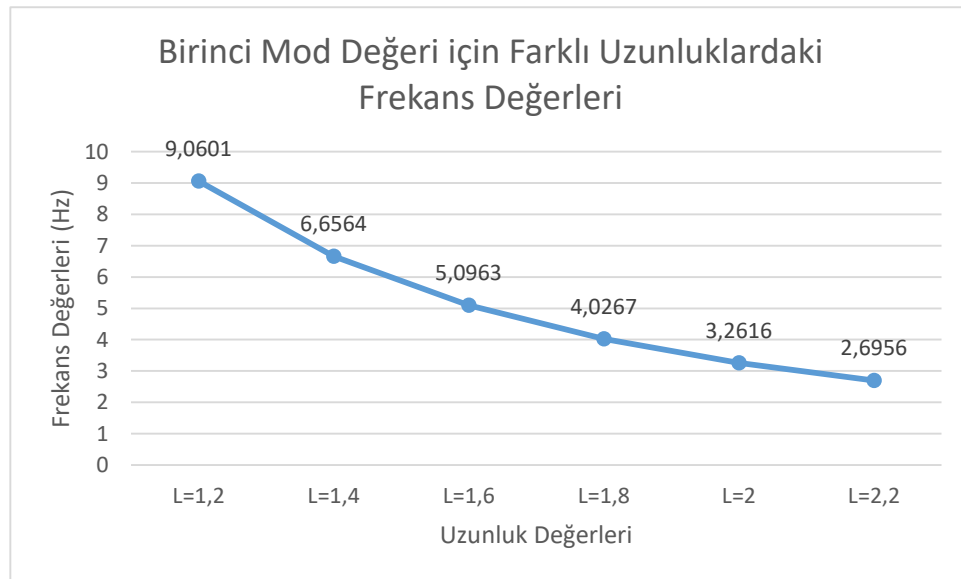
Şekil 8.3'teki grafikte, diğer grafiklerdeki sonuçlardan beklenildiği gibi kiriş uzunluğu arttıkça doğal frekans değerleri düşmektedir. Bir diğer dikkat edilmesi gereken nokta ise önceki kısımlarda da belirtildiği üzere c_b değerindeki değişimlerin doğal frekans üzerindeki etkisi c_h değerinin etkisinden daha fazladır.

Aşağıdaki şekilde ise $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için kirişin farklı uzunluk değerlerinde Hertz cinsinden doğal frekans değerlerine yer verilmiştir.

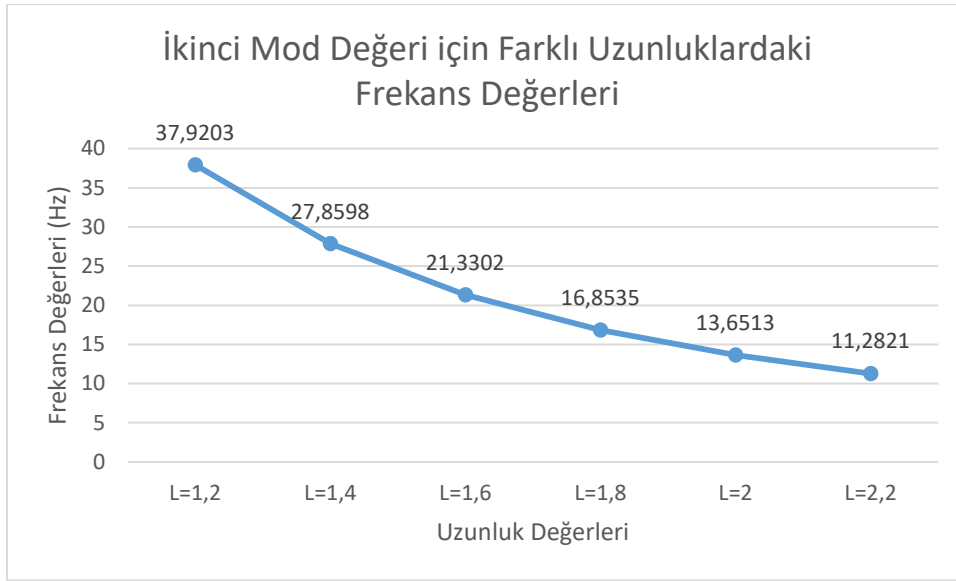


Şekil 8.4 : Farklı L değerlerinin $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için doğal frekans grafiği.

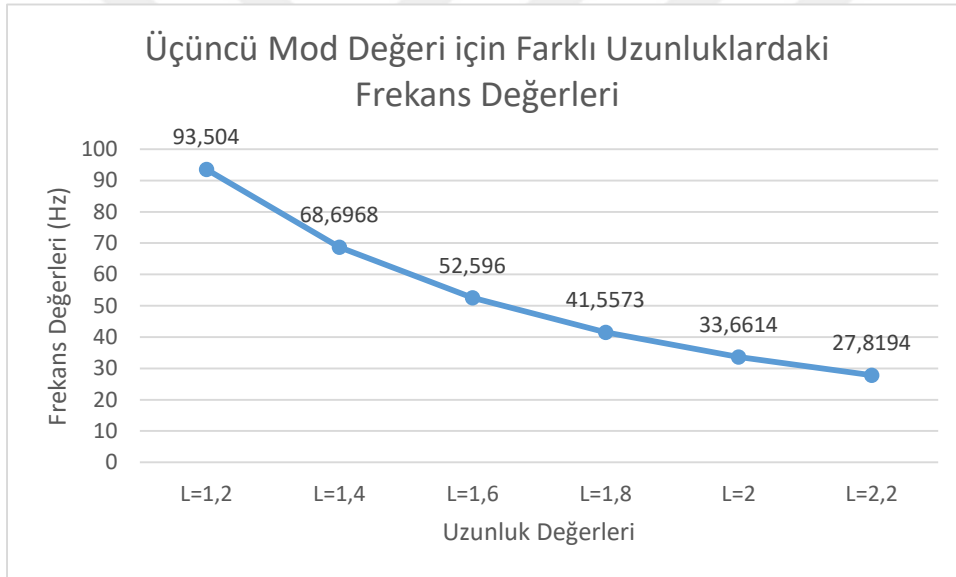
Şekil 8.5, 8.6, 8.7 ve 8.8’de $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki ilk dört doğal frekans değerlerini gösteren grafikler mevcuttur.



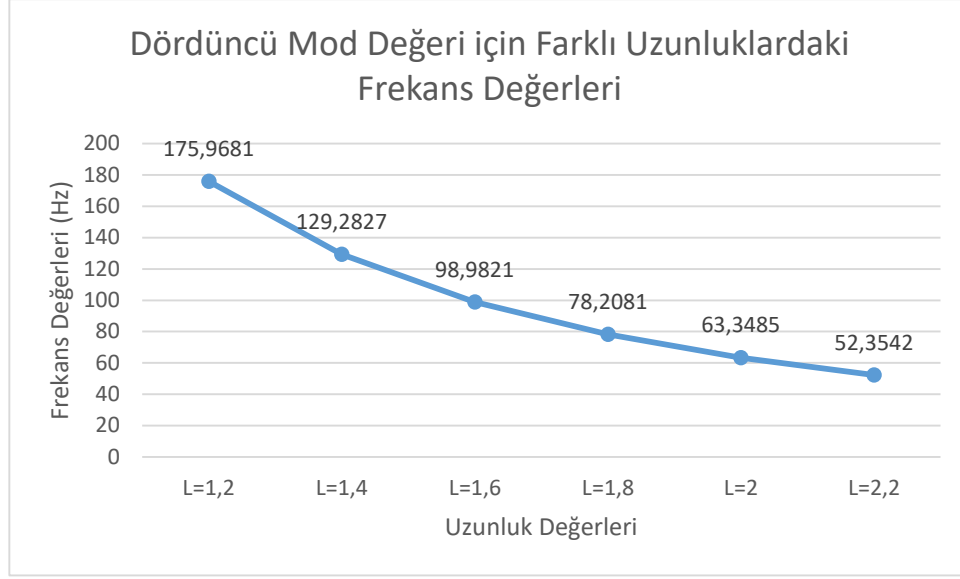
Şekil 8.5 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki birinci mod değeri.



Şekil 8.6 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki ikinci mod değeri.



Şekil 8.7 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki üçüncü mod değeri.



Şekil 8.8 : $c_h=0.3$ ve $c_b=0.8$ değerleri için farklı uzunluklardaki dördüncü mod değeri.

Yukarıdaki grafiklerden de net bir şekilde görüldüğü üzere kiriş uzunluğu arttıkça frekans değerleri azalmaktadır.



9. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu tez kapsamında yapının uzunluk eksenini boyunca iki eksenle lineer olarak değişen kalınlığa sahip kirişler incelenmiştir. Tezde ilk olarak bu konuda literatürde çokça kullanılan kiriş teorilerinden yüzeysel olarak bahsedilmiştir. Daha sonra ise tez kapsamında olan Euler-Bernoulli kiriş teorisi detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bu teori kullanılarak MATLAB programında kod yazılmış ve farklı daralma oranları için ilk 4 moda ait doğal frekans değerleri elde edilmiştir. Bu inceleme kapsamında kiriş farklı eleman sayılarına ayrılarak incelenmiştir. Analizlerde kullanılan kiriş izotropik ve homojen olarak kabul edilmiştir.

MATLAB kodundan elde edilen değerler literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar detaylı bir şekilde incelendiğinde ise 200 elemana bölündüğü durumda literatürdeki değerlerden oldukça az saptığı görülmüştür.

Ardından kodun doğruluğunu paket program sonuçları ile tekrar doğrulamak adına farklı daralma oranlarındaki kirişler Catia v5 programında çizilip, Hypermesh programında sonlu elemanlarına ayrılıp malzeme özellikleri tanımlanmıştır. Kiriş burada 2000 elemana bölünmüştür. Daha sonra Hypermesh'ten alınan model ABAQUS programına aktarılmıştır ve ankastre sınır koşulları verilerek titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde ise MATLAB kod sonuçları ile oldukça yakın değerler verdiği görülmüştür.

Literatürdeki çalışmalara ek olarak iki eksenle daralan kirişlerin daralma oranlarının doğal frekansları üzerindeki etkilerine ek olarak kiriş uzunluğunun da etkisi incelenmiştir.

Tez kapsamında yapılan çalışmanın sonuçları aşağıdaki gibidir.

- Yüksek mod sayısı değerlerinde MATLAB kodundan elde edilen değerlerin literatürden sapması artmaktadır.
- Daralma oranlarından c_b , c_h 'a göre doğal frekans değerleri üzerinde daha büyük etkiye sahiptir. Mod sayısının artması ile bu fark daha belirginleşmektedir.

- c_h değeri arttıkça ilk mod değeri doğal frekansı artmaktayken diğer 3 mod değerinin ise azalmaktadır.
- c_b değeri arttıkça bütün mod değerlerinde doğal frekans artmaktadır.
- Kiriş uzunluğu arttıkça ilk 4 mod değerinin doğal frekans değerleri azalmaktadır.



KAYNAKÇA

- [1] **Bailey, C. D.** (1978). Direct analytical solutions to non-uniform beam problems, *Journal of Sound and Vibration*, 56(4), 501-507, 1978.
- [2] **Downs, B.** (1977). Transverse vibrations of cantilever beams having unequal breadth and depth tapers. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4), 737-742.
- [3] **Lau, J. H.** (1984). Vibration frequencies of tapered bars with end mass, *Journal of Applied Mechanics*, 51, 179–181.
- [4] **Chelirem, T., & Lakhdar, B.** (2011). *Dynamic study of a turbine tapered blade*, Science Academy Transactions on Renewable Energy Systems Engineering and Technology (SATRESET), Vol. 1, No. 4, , ISSN: 2046-6404.
- [5] **Kwon, Y.W. & Bang, H.** (1997). *The Finite Element Method Using MATLAB*, New York,:CRC Press.
- [6] **Şahin, S.** (2019). *İki eksende daralan helikopter pallerinin sonlu elemanlar metodu ile titreşim analizi.* (Yüksek Lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [7] **Gupta, R. S. & Rao, S.S.** (1978) *Finite element eigen value analysis of tapered and twisted Timoshenko beams*, J. Sound Vibration, 56, 187-200.
- [8] **Mabie, H. H., & Rogers, C. B.** (1968). Transverse vibrations of tapered cantilever beams with end support. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 44(6), 1739-1741.
- [9] **Raju, K. K., Shastry, B. P., & Rao, G. V.** (1976). A finite element formulation for the large amplitude vibrations of tapered beams. *Journal of Sound Vibration*, 47, 595-598.
- [10] **Ece, M.C., Aydoğdu, M., & Taşkın, V.** (2007) Vibration of a variable cross section beam. *Mechanics Research Communications*, 34, 78–84.
- [11] **Attarnejad, R., Shahba, A.** (2011) Basic displacement functions for centrifugally stiffened tapered beams. *International Journal numerical Methods Biomedical Engineering*, 27:1385–1397.
- [12] **Shukla, R. K.** (2013). *Vibration Analysis of Tapered Beam.* (Master of Science Thesis). National Institute of Technology, Rourkela.
- [13] **Banerjee, J. R., Williams, F. W.** (1986). Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23, 1615-1628.
- [14] **Rao, S.S.** (2011). *Mechanical Vibrations*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

- [15] **Chaudhari, T.D., Maiti, S.K.** (1999). Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack, *Engineering Fracture Mechanics*, 63, 425-445.
- [16] **Turhan, Ö.** (2015). *Mekanik Titreşimler*. İstanbul,:Nobel Akademik Yayıncılık
- [17] **Nayfeh, A.H. & Pai, P.F.** (2004). *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. Wiley-Interscience, New Jersey.
- [18] **Coşkun, Y.E.** (2019). *Vibration analysis of a rotating double tapered Euler-Bernoulli beam featuring bending–bending-torsion coupled using finite element method*. (Yüksek Lisans Tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [19] **Özgümüş,Ö. Ö.**(2012). *Dynamic and aeroelastic analysis of a helicopter blade with and actively controlled trailing edge flap in forward flight*. (Doktora tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.



ÖZGEÇMİŞ



Ad-Soyad : Mehmet Aktaş
Doğum Tarihi ve Yeri : 14.02.1994 İstanbul
E-posta : aktas.m@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2017, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2017 yılından beri Türk Havacılık ve Uzay Sanayii A.Ş.'de tasarım mühendisi olarak çalışmakta.