

**T.C.  
DICLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VANISHING MORREY UZAYLARINDA KLASİK  
OPERATÖRLERİN VE KOMUTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI**

**Ayşegül ÇELİK ALABALIK**

**DOKTORA TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DIYARBAKIR**

**Ağustos - 2020**

T.C  
DİCLE UNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ  
DIYARBAKIR

Ayşegül Çelik ALABALIK tarafından yapılan “Vanishing Morrey Uzaylarında Klasik Operatörlerin ve Komütatörlerinin Sınırlılığı” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı                      Adı Soyadı

Başkan : Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU

Üye : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ

Üye : Prof. Dr. Bilal ŞEKER

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 10 / 07 / 2020

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

( MÜHÜR )

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın başlangıcından bitimine dek engin bilgilerinden faydalandığım, bilimsel çalışmaları ile örnek aldığım, beni en doğru şekilde yönlendiren, manevi desteğini esirgemeyen, hořęörü ve sabrından dolayı minnettar olduğum değerli hocam Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ'e, Aveiro Üniversitesi'nde beraber çalışma fırsatı bulduğum, tez çalışmama önemli katkılar sağlayan değerli bilim insanı Prof. Dr. Alexandre ALMEIDA'ya, sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ders ve tez aşamasında yardımlarını esirgemeyen, önerileriyle yolumu aydınlatan Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER'e çok teşekkür ederim.

Buğünlerimi borçlu olduğum annem, babam ve kardeşlerime, her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen sevgili eşime ve biricik kızlarıma sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	I
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	II
<b>ÖZET</b> .....	III
<b>ABSTRACT</b> .....	IV
<b>KISALTMA VE SİMGELER</b> .....	V
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. ÖN BİLGİLER</b> .....	7
2.1. Normlu Uzay.....	7
2.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar ve Lebesgue İntegrali.....	10
2.3. Lebesgue Uzayları.....	12
2.4. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları .....	16
2.5. Bazı Klasik Operatörler.....	17
2.6. Bazı Klasik Operatörlerin Komutatörleri .....	22
2.7. Morrey Uzayları.....	24
2.8. Ağırlıklı Morrey Uzayları.....	25
2.9. Genelleştirilmiş Morrey Uzayları.....	26
2.10. Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzayları .....	30
<b>3. MATERYAL VE METOT</b> .....	33
3.1. Morrey Uzaylarının yeni Alt Uzayları.....	33
3.2. Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarının yeni Alt Uzayları .....	37
3.3. Morrey Uzaylarında Konvolüsyon.....	41
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI</b> .....	45
4.1. Vanishing Morrey Uzayında Klasik Operatörlerin Sınırlılığı.....	45
4.2. Genelleştirilmiş Vanishing Morrey Uzayında Klasik Operatörlerin Sınırlılığı .....	51
4.3. Genelleştirilmiş Vanishing Morrey Uzayında Klasik Operatörlerin Komutatörlerinin Sınırlılığı.....	57
4.4. Genelleştirilmiş Ağırlıklı Vanishing Morrey Uzayında Klasik Operatörlerin ve Komutatörlerinin Sınırlılığı .....	65
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ</b> .....	75
<b>6. KAYNAKLAR</b> .....	77
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	83

## ÖZET

### VANISHING MORREY UZAYLARINDA KLASİK OPERATÖRLERİN VE KOMUTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

#### DOKTORA TEZİ

Ayşegül ÇELİK ALABALIK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2020

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanımlar ve önemli teoremler yer almakta ve çalıştığımız operatörler ile komütatörleri tanıtılmaktadır.

Üçüncü bölümde Morrey uzaylarının hem klasik hem de genelleştirilmiş alt uzayları yer almakta ve bu uzaylarda kullanılan bazı özel teorem ve kilit özelliklere yer verilmektedir.

Dördüncü bölüm dört alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda vanishing Morrey uzaylarında ele aldığımız klasik operatörlerin sınırlılıkları kanıtlanmıştır. İkinci kısımda, genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü kısımda, genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında maksimal ve fraksiyonel maksimal operatörlerinin komütatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır. Dördüncü kısımda ağırlıklı vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı tanıtılmış ve bu uzayda klasik operatörlerin ve komütatörlerinin sınırlılıkları ortaya konulmuştur.

Son olarak beşinci bölümde elde ettiğimiz sonuçların analizi yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Morrey uzayları, Vanishing Morrey uzayları, genelleştirilmiş Vanishing Morrey uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, fraksiyonel maksimal operatörü, Riesz potansiyel operatörleri, Hardy operatörü, Oscillatory integral operatörü, komütatörler

## ABSTRACT

### THE BOUNDEDNESS OF CLASSICAL OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS ON VANISHING MORREY SPACES

PhD THESIS

Ayşegül ÇELİK ALABALIK

UNIVERSITY OF DİCLE  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2020

This thesis consists of five main sections. The first section, is devoted to introduction. In the second section the basic definitions and important theorems are involved and the operators and the commutators which we have studied are defined.

In the third section both classical and the generalized Morrey subspaces are appeared and some special theorems and key features which are used on these spaces are detailed.

The fourth section consists of four subsections. In the first part the boundedness of the classical operators which we studied are proved on the Vanishing Morrey spaces. In the second part the results which we obtained in the Vanishing generalized Morrey spaces are involved. In the third part the boundedness of the commutators of the Maximal and the fractional maximal operators are proved on the Vanishing generalized Morrey spaces. In the fourth part weighted Vanishing generalized Morrey spaces are defined and the boundedness of the classical operators and their commutators are proved in these spaces.

Finally in the fifth section the results which we obtained are analyzed.

**Anahtar Kelimeler :** Morrey spaces, Vanishing Morrey spaces, generalized Vanishing Morrey spaces, Hardy-Littlewood maximal operator, fractional maksimal operator, Riesz potential operator, Hardy operator, Oscillatory integral operator, commutators

## KISALTMALAR VE SİMGELER

$\mathbb{R}^n$	: $n$ boyutlu öklid uzayı
$ E $	: $E$ bölgesinin Lebesgue ölçümü
$L^p$	: Lebesgue uzayı
$L^p_{loc}$	: $p$ . mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L^p_w$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$BMO$	: Sınırlı salımlı fonksiyonlar uzayı
$L^{p,\lambda}$	: Kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu
$C^\infty_0$	: Kompakt desteğe sahip sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^{p,\varphi}$	: Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$B(x, r)$	: $x$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar
$\chi_A$	: $A$ kümesinin karakteristik fonksiyonu
$f * g$	: $f$ ve $g$ fonksiyonlarının konvolüsyonu
$L^{p,\lambda}$	: Morrey uzayı
$\mathbb{L}^{p,\lambda}$	: Zorko uzayı
$V_0 L^{p,\lambda}$	: Orijinde vanishing Morrey uzayı
$V_\infty L^{p,\lambda}$	: Sonsuzda vanishing Morrey uzayı
$V_{(*)} L^{p,\lambda}$	: * Özelliğine sahip vanishing Morrey uzayı
$V_{0,\infty}^{(*)} L^{p,\lambda}$	: Vanishing Morrey uzaylarının ara kesiti
$L^{p,\kappa}_w$	: Ağırlıklı Morrey uzayı
$M$	: Maksimal operatör
$M^\sharp$	: Sharp maksimal operatör
$M_\alpha$	: Kesirli maksimal operatör
$I_\alpha$	: Riesz potansiyel operatör
$\mathbb{S}$	: Calderon Zygmund integral operator
$H$ ve $\mathcal{H}$	: Hardy operatörleri
$H^\alpha$ ve $\mathcal{H}^\alpha$	: Hardy tipli operatörler
$S$	: Oscillatory integral operatorü
$S_\alpha$	: Fraksiyonel oscillatory integral operatorü
$T_b$	: Bir $T$ operatörünün komutatörü

## 1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında yakın zamanda [7] ve [9] çalışmalarında tanımlanmış, Morrey uzaylarının alt uzayları olan Vanishing Morrey uzayları çalışılmış olup, bahsi geçen uzaylarda harmonik analizin bazı önemli operatörlerinin ve komutatörlerinin sınırlılıkları araştırılmaktadır.

$B(x, r)$  merkezi  $x$  ve yarıçapı  $r$  olan açık yuvarı belirtmek üzere  $1 \leq p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda \leq n$  olsun.  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey uzayları,

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p, B(x,r)} \leq C < \infty$$

şartını sağlayan  $f \in L_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$  fonksiyonların lineer uzayı olarak tanımlanır.  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ilk olarak, 1938 yılında Morrey [43] tarafından eliptik kısmi diferansiyel denklemler (PDE) ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkmıştır. Morrey uzaylarının diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının çalışılması ve lokal düzgünlüğünün tanımlanmasında Lebesgue uzaylarına oranla daha kullanışlı olduğu görülmüştür. Bu nedenle son zamanlarda Morrey uzayları üzerine bir çok çalışma yayınlanmıştır. Morrey' in fikirleri daha sonra Campanato [15] ve Peetre [49] tarafından geliştirilmiştir. Bu uzaylarla ilgili detaylı özellikler için [3], [27], [51], [69], [67] kaynaklarının okurlar tarafından incelenmesi yararlı olacaktır.

Morrey uzayları, Lebesgue uzaylarına göre daha iyi lokal davranışlar gösterdikleri halde, ayrılabilirlik ve iyi fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım gibi bazı önemli özelliklere sahip değildirler. Morrey uzayında birim fonksiyonla yaklaşım iyi davranış sergilememektedir çünkü bu uzaylarda tekilliğe sahip bazı fonksiyonlar vardır. Bu durum yeni uzayların tanımlanmasını gerektirmiştir. 1986 da [74] çalışmasında, Morrey normuyla öteleme operatörünün sürekli olduğu Morrey fonksiyonlarından oluşan  $\mathbb{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Zorko uzayı tanımlanmıştır. (Ayrıca bakınız [17],[36]).

Morrey normunda  $\varphi(r) = r^\lambda$  alınarak oluşturulan genelleştirilmiş Morrey uzayı,  $\mathbb{R}^n$  de

$$\|f\|_{p,\varphi} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left( \frac{1}{\varphi(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0$$

sonlu normuna sahip,  $p$ -integrallenebilen  $f$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır ve  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ile gösterilir. Bu uzay bazı gömülme durumları ile beraber, bilindiği kadarıyla ilk olarak [23] çalışmasında görülmüştür. [74] makalesinde bu uzaylar Campanato uzaylarının daha genel bir durumu gibi araştırılmıştır. Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında, harmonik analizin operatörlerinin sınırlılıkları [38, 42, 47, 60, 66] çalışmalarında ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş Morrey uzayına iyi özellikler kazandırabilmek amacıyla  $\varphi$  parametresine bir takım koşullar bırakılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bunun için bazı özel koşulları sağlayan bir  $\Phi$  sınıfı tanımlanmıştır. Bu  $\Phi$  sınıfı genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sıkça karşımıza çıkmaktadır. [48] çalışmasında gözlemlendiği gibi, eğer  $\varphi \in \Phi$  ise  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı non-trivial olur. Örneğin  $\varphi$  fonksiyonu için yapılan kabullerle, yuvar üzerindeki tüm karakteristik fonksiyonlar  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına ait olur.

Morrey uzaylarının ayrılabilir olmaması [55] ve bu durumdan kaynaklanan bir takım eksiklikler, öteleme operatörünün sürekli olduğu tüm Morrey fonksiyonlarını içeren Zorko uzayı ve vanishing özelliğine sahip  $V_{(0)}, V_{(\infty)}$  ve  $V_{(*)}$  gibi alt uzayların tanımlanmasını motive etmiştir.

Morrey uzayının bir alt uzayı olan Vanishing Morrey uzayı  $V_0 L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ , ilk olarak 1990 yılında Vitanza [71] tarafından  $0 \leq \lambda < n$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho < r} \frac{1}{\rho^{\frac{\lambda}{p}}} \int_{B(x,\rho)} |f(y)|^p dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı olarak tanımlanmıştır. Bu uzayların kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamalarıyla ilişkisi [17, 71, 70] makalelerinde ortaya konmuştur. Vanishing Morrey uzayının özellikleri ve bu uzaya ait uygulamalar için [52] çalışması faydalı olacaktır. Morrey uzayının bazı vanishing koşullarına sahip alt uzayları, A. Almeida ve S. Samko'nun [7] ve [9] çalışmalarında yer almıştır. [7] çalışmasında bu gibi vanishing özelliklerinin, integrallenebilir çekirdeğe sahip konvülsiyon operatörleri tarafından korunduğu ortaya konulmuştur. Orijinde vanishing koşulunu sağlayan  $V_0 L^{p,\lambda}$  alt uzayında [50, 52, 57, 58] çalışmaları önerilir. Bu uzayların yeni tanımlanmış olması itibarıyla  $V_{\infty} L^{p,\lambda}$  ve  $V_{(*)} L^{p,\lambda}$  uzaylarında harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıkları henüz çalışılmamıştır. Bu konudaki çalışmaların noksanlığı bu uzaylarda çalışmayı çekici hale getirmiştir.

[7] çalışmasında yazarlar vanishing tipli koşullar kullanarak  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının yeni bir kapalı alt uzayını tanımladılar. Bu uzay Zorko sınıfından kesinlikle daha küçüktür, uzayın tüm elemanları  $V_{0,\infty}^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ile sembolize edilir ve Morrey normuyla  $C_0^\infty$  fonksiyonları yardımıyla yaklaşılabilmektedir. Özel olarak [7] makalesinde,  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında kapamış aşık bir biçimde ortaya konmuştur. Morey uzayındaki bu kapalılık harmonik analizde, Calderón-Zygmund teorisinde önemli bir rol oynar çünkü duali, bir öndual oluşturur [3, 2, 56, 68]. Bu kapamışın benzer bir tasviri farklı bir şekilde [73] de verilmiştir. [32], [33] çalışmalarında yazarlar Morrey uzayında kompleks interpolasyonda  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının (ve kompakt desteğe sahip sınırlı fonksiyonlar kümesinin) kapamışını kullandılar ancak bu kapamışlara karakterizasyon sağlayamadılar.

Genelleştirilmiş Morrey uzayının vanishing versiyonu  $V L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı olarak gösterilir. Klasik durumun dışında  $\varphi(r) = r^\lambda$  olarak düzenlenen genelleştirilmiş Morrey

uzayının yeni alt uzayları yakın zamanda [9] çalışmasında tanıtılmıştır. Bu uzaylar orijinde vanishing özelliğine sahip  $V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı, sonsuzda vanishing özelliğine sahip  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı ve yıldız koşulu olarak tanımlanan özelliğe sahip  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı olarak adlandırılmıştır. Her üç uzay, Morrey normuyla  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında kapalıdır.  $V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  yani orijinde vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı [57, 9] makalelerinde çalışılmıştır. PDE uygulamalarında ise bu uzay [17, 71, 70] çalışmalarında görülmüştür.  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  alt uzayları Morrey uzaylarında iyi davranışlı fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım problemlerini çalışabilmek amacıyla, literatürde ilk defa [9] çalışmasında tanıtılmış ve çalışılmıştır. Sonsuzda vanishing özelliğini sağlayan  $V_\infty L^{p,\lambda}$  uzayı ve yıldız koşulu verilen bir özelliğe sahip diğer  $V_{(*)}L^{p,\lambda}$  uzayı da yine ilk defa [9] çalışmasında tanımlanmıştır. Bu çalışmada klasik Morrey uzayları için [7] da geliştirilen yaklaşım planı, genelleştirilmiş Morrey uzayına genişletilmiştir. Bu amaçla klasik Morrey uzayı normunda  $r^\lambda$  ifadesi daha genel ve monotonluk koşullarını sağlayan  $\varphi(r)$  pozitif fonksiyonuyla değiştirilmiştir. Bu uzaylar sobolev tipli kritik gömümlerin çalışılmasında oldukça faydalıdır [59], [72]. Vanishing özellikleriyle, genelleştirilmiş Morrey normunda, elemanları  $C_0^\infty$  fonksiyonları yardımıyla yaklaşımlanan  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayının kapalı bir alt uzayını tanımlamışlardır. Ayrıca bazı gömümleri ispatlayarak ve bir takım örneklerle, Zorko sınıfının genelleştirilmiş bir versiyonu da dahil Morrey alt uzaylarının birbirleri ile ilişkisini ortaya koymuşlardır. [9] çalışmasında son olarak bu gibi vanishing özelliklerinin, integrallenebilir çekirdeğe sahip konvolüsyon operatörleri tarafından korunurluğu ortaya konulmuştur.

Bu tez çalışmasında; A. Almeida ve S. Samko nun [7] ve [9] makalelerinde çalıştığı uzaylar esas alınmış olup bu uzaylarda  $p$ -admissible singular tipli integral operatörü  $T$ , C-Z singular integral operatörü  $\mathbb{S}$ , Hardy-Littlewood Maksimal operatörü  $M$ , Fraksiyonel Maksimal operatör  $M^\alpha$ , Riesz potansiyel operatörü  $I^\alpha$ , Hardy operatörleri  $H^\alpha$  ve  $\mathcal{H}^\alpha$  ele alınmıştır. Operatörlerin tanımları verilerek daha önceki çalışmalarda Morrey uzayındaki sınırlılık durumlarına ait teoremler verilmiş olup sınırlılık koşullarından bahsedilmiştir.

Literatürde  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayı ile ilgili çalışmalar yetersiz kalmakta,  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey alt uzaylarında ise klasik operatörlere ait çalışmalar neredeyse bulunmamaktadır. Bu alanda yalnızca iki adet çalışma [7], [9] bulunmuştur. Bu eserlerde, bahsi geçen uzaylarda yalnızca integrallenebilir çekirdekli konvolüsyon operatörlerinin sınırlılığı ortaya konulmuştur. Tez çalışmamızın esas amacı, ilk olarak  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarını belirleyen vanishing özelliklerinin, Harmonik Analizin önemli operatörlerinden maksimal, singular, potansiyel ve Hardy operatörlerinin davranışları altında korunduğunu göstermektir. Çalışmamızın ana sonuçlardan biri de  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının Hardy-Littlewood maksimal operatörü ile değişmezliğini göstermek olmuştur.

Tez çalışmamızda yer alan fraksiyonel maksimal operatör  $M_\alpha$  ve fraksiyonel integral operatörü  $I_\alpha$  harmonik analizinde önemli operatörlerindendir.  $I_\alpha$  fraksiyonel integral operatörünün sınırlılığı klasik Morrey uzayında Adams [1] tarafından ispatlanmıştır. [31] çalışmasında  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörlerinin genelleştirilmiş Morrey uzayından, bir başka genelleştirilmiş Morrey uzayına, sınırlılığını garantileyecek şekilde  $(\varphi_1, \varphi_2)$  üzerine koşullar bırakılmıştır. Ağırlıklı Morrey uzayında klasik operatörlerin sınırlılığı Komori and Shirai [37] tarafından gösterilmiştir.  $I_\alpha$  fraksiyonel integral operatörünün komutatörü olan  $I_{\alpha,b}$  nin sınırlılığı klasik Morrey uzayında Di Fazio ve Ragusa [22] tarafından, genelleştirilmiş Morrey uzayında Guliyev and Shukurov [31] tarafından, ağırlıklı Morrey uzayında ise Komori and Shirai [37] tarafından kanıtlanmıştır. Yakın zamanda  $L^{p,\varphi}(w)$  genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayında fraksiyonel integral operatörü  $I_\alpha$ , fraksiyonel maksimal operatör  $M_\alpha$  ve bunların komutatörlerinin sınırlılığı Guliyev tarafından ortaya konulmuştur [29].

Vanishing Morrey uzayında  $I_{\alpha,b}$  nin sınırlılığını ilk olarak Ragusa [53] elde etmiştir. Hardy operatörlerinin komutatörlerinin vanishing Morrey uzayında sınırlılıklarını ise Persson ve arkadaşları [50] kanıtlamışlardır. Daha sonra N. Samko [57]  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\Omega)$  vanishing Morrey uzayını tanımlamış ve bu uzayda  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörlerinin sınırlılıklarını ortaya koymuştur. [10] makalesinde  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında  $M_b$ ,  $M_{\alpha,b}$  ve  $I_{\alpha,b}$  kommutatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır.

Bu çalışmalardan ilham alarak, tez çalışmamızın bulgular kısmında  $L^{p,\varphi}(w)$  uzayının bir alt uzayı olan  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  ağırlıklı vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı tanımlanmış ve bu uzayda  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörlerinin sınırlılıkları ortaya konulmuştur. Ayrıca  $M_\alpha$  and  $I_\alpha$  operatörlerinin komutatörlerinin bu uzayda sınırlılıkları gösterilmiştir. Ortaya konulan sınırlılık koşulları;  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $r$  üzerine monotonluk şartı konulmaksızın,  $(\varphi, \psi)$  için Zygmund-tipli integral eşitsizlikleri elde edilerek verilmiştir.

Tez çalışmamızda ele aldığımız operatörlerden biri olan fraksiyonel oscillatory integral operatörünün sınırlılığı, ağırlıklı genelleştirilmiş Morrey uzayında Eroğlu [24] tarafından kanıtlanmıştır.  $L^{p,\kappa}(w)$  uzayında bu operatörlerin ve komutatörlerinin sınırlılık koşulları ise Shi, Fu ve Lu [63] tarafından ortaya konulmuştur. Rough çekirdekli alt lineer operatörün sınırlılığı, genelleştirilmiş Morrey uzayında Yang and Zhou tarafından [40],  $L^{p,\kappa}(w)$  uzayında ise Shi and Fu [62] tarafından kanıtlanmıştır. Ayrıca ağırlıklı genelleştirilmiş Morrey uzayında alt lineer operatörlerin sınırlılığını Mustafayev [46] ispatlamıştır.

Bu tez çalışmasında [63] den farklı olarak ağırlıklı vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarında oscillatory ve fraksiyonel oscillatory integral operatörleri ve komutatörlerinin sınırlılıkları ortaya konulmakta ve bu sınırlılık koşulları Zygmund tipli koşullar olarak sunulmaktadır.

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanımlar ve önemli teoremler yer almakta ve çalıştığımız operatörler ile komütatörleri tanıtılmaktadır. Üçüncü bölümde Morrey uzaylarının hem klasik hem de geliştirilmiş alt uzayları yer almakta ve bu uzaylarda kullanılan bazı özel teorem ve kilit özelliklere yer verilmektedir. Dördüncü bölüm dört alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda vanishing Morrey uzaylarında ele aldığımız klasik operatörlerin sınırlılıkları kanıtlanmıştır. İkinci kısımda, geliştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü kısımda, geliştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında maksimal, fraksiyonel maksimal ve Riesz operatörlerinin komütatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır. Dördüncü kısımda ağırlıklı vanishing geliştirilmiş Morrey uzayında fraksiyonel maksimal, Riesz, oscillatory ve fraksiyonel oscillatory integral operatörlerinin ve komütatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır.

Son olarak beşinci bölümde elde ettiğimiz sonuçların analizi yapılmıştır.



## 2. ÖN BİLGİLER

Tez çalışmamın bu bölümünde, tez içinde kullanılan temel tanım ve teoremlerden bahsedilecek ve ardından ele alınan operatörler tanımlanacaktır.

### 2.1. Normlu Uzay

**Tanım 2.1.1.**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $\mathbb{F}$ , (reel ya da karmaşık) sayı cismi olmak üzere;

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X, & (x, y) &\rightarrow x + y \\ \cdot : \mathbb{F} \times X &\rightarrow X, & (\alpha, x) &\rightarrow \alpha x \end{aligned}$$

dönüşümleri ile yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile eğer;

A)  $X$ ,  $+$  işlemine göre değişmeli bir grup,

A<sub>1</sub>) Her  $x, y \in X$  için  $x + y \in X$

A<sub>2</sub>) Her  $x, y, z \in X$  için  $x + (y + z) = (x + y) + z$

A<sub>3</sub>) Her  $x \in X$  için  $x + \theta = \theta + x = x$  olacak şekilde  $\theta \in X$  vardır

A<sub>4</sub>) Her  $x \in X$  için  $x + (-x) = (-x) + x = \theta$  olacak şekilde  $-x \in X$  vardır

A<sub>5</sub>) Her  $x, y \in X$  için  $x + y = y + x$

B) Her  $x, y \in X$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  olmak üzere

B<sub>1</sub>)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

B<sub>2</sub>)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

B<sub>3</sub>)  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

B<sub>4</sub>)  $1x = x$

koşulları sağlanıyorsa  $X$  kümesine yukarıda tanımlanan işlemler ile birlikte  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı (veya lineer uzayı) denir.  $(X, \mathbb{F})$  sıralı çifti bir doğrusal uzay olur.

**Tanım 2.1.2.**  $X$ ,  $\mathbb{F}$  sayı cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, her  $x, y \in X$  ve her  $\alpha \in \mathbb{F}$  için  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

N<sub>1</sub>)  $\|x\| \geq 0$

N<sub>2</sub>)  $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

N<sub>3</sub>)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N<sub>4</sub>)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlıyorsa,  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir **norm** ve  $(X, \|\cdot\|)$  çiftine ise **normlu uzay** denir.

Eğer  $N_2$  koşulu,  $x = 0$  için  $\|x\| = 0$  koşulu ile değiştirilirse,  $\|\cdot\|$  fonksiyonu yarı norm olur.

**Tanım 2.1.3.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay,  $x \in X$  ve  $r \in \mathbb{R}$  pozitif olmak üzere;  $B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$  ifadesi,  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı bir **açık yuvarı** belirtir.

$A \subset X$  olsun. Her  $x \in A$  için  $B(x, r) \subset A$  olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $A$ 'ya **açık küme** denir.

$K \subset X$  olsun. Eğer  $X \setminus K = K'$  açık küme ise  $K$  kümesine **kapalı küme** denir.

**Tanım 2.1.4.**  $(X, \|\cdot\|)$  herhangi bir normlu uzayı  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi ve  $x_0 \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq n_\varepsilon$  iken  $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$  olacak şekilde  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  varsa  $(x_n)$  dizisine,  $x_0$  noktasına **yakınsıyor** denir. Yani,

$$n \longrightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \quad \text{oluyorsa}$$

$(x_n)$  dizisi  $x_0$  **noktasına yakınsar**.

**Tanım 2.1.5.**  $(X, \|\cdot\|)$  herhangi bir normlu uzayı  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $n, m \geq n_\varepsilon$  iken  $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$  olacak şekilde  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  varsa,  $(x_n)$  bir **Cauchy dizisidir** denir.

**Tanım 2.1.6.** Bir  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayından alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **Banach uzayı** adı verilir.

**Tanım 2.1.7.**  $(X, \|\cdot\|_1)$  ve  $(Y, \|\cdot\|_2)$  normlu uzaylar,  $f : X \longrightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olmak üzere, verilen her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $\|x - x_0\|_1 < \delta$  olduğunda  $\|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta > 0$  bulunabiliyorsa  $f$  fonksiyonu için  $x_0$  noktasında **süreklidir** denir. Bu şekilde tanımlanan  $f$  fonksiyonu sürekli ise  $f$  düzgün süreklidir denir.

**Tanım 2.1.8.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında  $X$  in bir  $D$  altkümesi verilsin. Eğer, her  $x \in X$ ,  $D$  deki elemanlardan oluşan bir  $(x_n)$  dizisinin limiti ise  $D$  kümesi  $X$  uzayında **yoğundur** denir.

**Tanım 2.1.9.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayının, sayılabilir yoğun bir altkümesi varsa  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

**Tanım 2.1.10.**  $\|\cdot\|_1$  ve  $\|\cdot\|_2$ ,  $X$  vektör uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm olsun. Her  $x \in X$  için

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

olacak şekilde  $C_1 > 0$  ve  $C_2 > 0$  sabitleri varsa bu iki norma **denk normlar** denir.

**Tanım 2.1.11.**  $X$  ve  $Y$  aynı  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde iki vektör uzayı ve  $D(T)$ ,  $X$  in bir altkümesi olsun.  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  dönüşümü  $D(T)$  nin her bir elemanını  $Y$  nin yalnız bir elemanına götürüyorsa,  $T$  ye  $D(T)$  den  $Y$  ye bir **operatör** adı verilir. Burada  $D(T)$  ye  $T$  operatörünün **tanım kümesi** denir.

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx, x \in D(T)\}$$

kümesine ise  $T$  operatörünün **değer (görüntü) kümesi** adı verilir.

**Tanım 2.1.12.**  $X$  ve  $Y$  aynı  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde iki vektör uzayı ve  $D(T) \subset X$ ,  $X$  in bir alt uzayı olmak üzere  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  bir operatör olsun. Her  $x, y \in D(T)$  ve her  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulu sağlanıyorsa  $T$  operatörüne, **lineer operatör** denir.

**Tanım 2.1.13.**  $(X, \|\cdot\|_1)$  ve  $(Y, \|\cdot\|_2)$  iki normlu uzay olmak üzere;  $T : X \rightarrow Y$  bir operatör,  $(x_n)$ ,  $X$  de bir dizi ve  $x \in X$  verilsin.  $n \rightarrow \infty$  için

$$\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \text{ iken } \|Tx_n - Tx\|_2 \rightarrow 0$$

sağlanıyorsa  $T$  operatörü için  $x$  noktasında **süreklidir** denir. Eğer  $T$  operatörü,  $X$ 'deki her noktada sürekli ise  $T$ 'ye **sürekli operatör** denir.

**Tanım 2.1.14.**  $(X, \|\cdot\|_1)$  ve  $(Y, \|\cdot\|_2)$  iki normlu uzay,  $T : X \rightarrow Y$  lineer bir operatör olmak üzere her  $x \in X$  için

$$\|Tx\|_2 \leq c \|x\|_1 \tag{2.1}$$

olacak şekilde, pozitif bir  $c$  reel sayısı varsa  $T$ 'ye **sınırlı lineer operatör** denir. (2.1) eşitsizliğini sağlayan  $c$  değerlerinin infimumuna  $T$  operatörünün **normu** denir ve bu norm

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Tx\|_2$$

şeklinde tanımlanır.

Bir  $T$  operatörünün **sürekli** olması için gerek ve yeter koşul  $T$  nin **sınırlı** olmasıdır.

**Tanım 2.1.15.**  $(X, \|\cdot\|_1)$  ve  $(Y, \|\cdot\|_2)$  iki normlu uzay olmak üzere  $X \subset Y$  ve her  $x \in X$  için  $X$  den  $Y$  ye tanımlanan  $Ix = x$  (birim operatörü) sürekli ise  $X$  normlu uzayı için  $Y$  normlu uzayına **gömülür** denir ve  $X \hookrightarrow Y$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.16.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında tanımlı tüm lineer ve sürekli fonksiyonlardan oluşan uzaya  $X$  in **dual uzayı** denir ve  $X'$  ile gösterilir. Bu uzay  $f, g \in X', x \in X$  ve  $c \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (cf)(x) = cf(x)$$

ile tanımlanan işlemler ile bir vektör uzayıdır.

**Tanım 2.1.17.** Bir  $X$  vektör uzayının  $X'$  duali de yukarıda belirtildiği üzere yine bir normlu vektör uzayı olduğundan, bu uzayın da duali tanımlanabilir.  $X$  in dualinin duali  $(X')' = X''$  lineer vektör uzayına  $X$  in **ikinci duali** denir.

Dualinin duali kendisine eşit olan uzaya, **yansımali uzay** adı verilir.

**Teorem 2.1.18.**  $(X, \|\cdot\|)$  uzayı yansımali bir Banach uzayı ise  $X$  in her alt uzayı da yansımali dır.

**Teorem 2.1.19.** Bir  $(X, \|\cdot\|)$  normlu zayının yansımali olması için gerek ve yeter koşul  $X'$  uzayının yansımali olmasıdır. Eğer  $X$  ayrılabilir bir uzay ise,  $X'$  uzayı da ayrılabilir dır.  $X$  ayrılabilir ve yansımali bir uzay ise  $X'$  de ayrılabilir ve yansımali bir uzay olur.

## 2.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar ve Lebesgue İntegrali

**Tanım 2.2.1.**  $\mathbb{R}^n$  in altkümelerinin bir  $\Sigma$  sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa

- i)  $\mathbb{R}^n \in \Sigma$ ,
- ii)  $A \in \Sigma$  iken  $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\} \in \Sigma$
- iii)  $j = 1, 2, \dots$ , olmak üzere  $A_j \in \Sigma$  iken  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$

$\Sigma$  sınıfına bir  **$\sigma$ -cebiri** denir.

**Tanım 2.2.2.**  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  fonksiyonu tanımlı olsun.  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\Sigma$  sınıfındaki ayrık kümelerin bir topluluğu olmak üzere, bu topluluğun sayılabilir her birleşimi için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa,

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \forall A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k$$

$\mu$  fonksiyonu  $\Sigma$  sınıfı üzerinde bir **ölçümdür** denir.

**Tanım 2.2.3.**  $\mathbb{R}^n$ 'nin altkümelerinde bir  $\sigma$ -cebiri  $\Sigma$  ve bu sınıf üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip pozitif bir  $\mu$  ölçümünün varlığı söylenebilir.

- i)  $\mathbb{R}^n$  de bulunan tüm açık kümeler  $\Sigma$ 'ya aittir,
- ii)  $A \subset B$ ,  $B \in \Sigma$  ve  $\mu(B) = 0$  iken,  $A \in \Sigma$  ve  $\mu(A) = 0$  dir,
- iii)  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  iken  $A \in \Sigma$  ve  $\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$
- iv)  $\mu$  ölçümü ötelemeye göre invarianttır. Yani  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $A \in \Sigma$  olmak üzere

$$x + A = \{x + y : y \in A \in \Sigma\} \quad \text{ve} \quad \mu(x + A) = \mu(A)$$

sağlanır.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan bir  $\Sigma$  sınıfının elemanlarına,  $\mathbb{R}^n$ 'nin (*Lebesgue*) ölçülebilir altkümeleri ve  $\mu$  ölçüm fonksiyonuna da  $\mathbb{R}^n$ 'de **Lebesgue ölçümü** denir.

$A \in \Sigma$  olmak üzere  $\mu(A)$  için  $A$  kümesinin **ölçümü** denir ve  $|A|$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.4.**  $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$  ve  $|B| = 0$  iken,  $A - B$  kümesinin her noktasında sağlanmakta olan bir özellik için,  $A$  kümesinde **hemen hemen her yerde** (hhhy) geçerli bir özellik denir.

**Tanım 2.2.5.**  $A$  ölçülebilir bir küme ve bu küme üzerinde,  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer  $\forall a \in \mathbb{R}$  için

$$\{x \in A : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir oluyorsa,  $f$  fonksiyonuna **ölçülebilir bir fonksiyon** denir.

**Tanım 2.2.6.**  $A \subset \mathbb{R}^n$  olmak üzere,  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \in A \\ 0, & \text{eğer } x \notin A \end{cases}$$

**Tanım 2.2.7.**  $f$  fonksiyonu  $A \subset \mathbb{R}^n$  de ölçülebilir ve reel değerli bir fonksiyon olsun.  $A_j \subset A$  ölçülebilir olmak üzere bir  $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$  basit fonksiyonu için

$$\int_A s(x) dx = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j)$$

ifadesi tanımlıdır.  $f$  negatif olmayan değerli ve ölçülebilir olmak üzere

$$\int_A f(x) dx = \sup \int_A s(x) dx$$

olarak tanımlanır. Buradaki supremum,  $A$  kümesinin dışında vanishing olan ve  $A$  da  $0 \leq s(x) \leq f(x)$  şartını sağlayan ölçülebilir basit  $s$  fonksiyonları üzerinden alınmaktadır.  $f^+ = \max(f, 0)$  ve  $f^- = -\min(f, 0)$  fonksiyonlarının her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere,  $f$  fonksiyonunu  $f = f^+ - f^-$  şeklinde yazalım. Aşağıdaki ifade

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx$$

sağ taraftaki integrallerden en az biri sonlu olacak şekilde tanımlıdır. Eğer her iki integral de sonlu ise,  $f$  fonksiyonuna  $A$  üzerinde **Lebesgue integrallenebilir** denir ve  $A$  bölgesinde integrallenebilir tüm fonksiyonların sınıfı  $L^1(\Omega)$  ile ifade edilir.

### 2.3. Lebesgue Uzayları

Fonksiyonel analizin önemli bir bölümünü Lebesgue uzayları oluşturur. Bu uzaylar sonlu boyutlu vektör uzayının genelleşmesi olan bir fonksiyon uzayıdır. İlk olarak 1910 yılında F.Riesz tarafından tanıtılmış ancak ismini 1958 yılında Fransız matematikçi H. Lebesgue' den almıştır [11]. Bu uzayın uygulamaları, istatistik, fizik, finans ve mühendislik gibi alanlarda görülmektedir. Lebesgue uzayının özelliklerinden bahsedebilmek için sürekli fonksiyonlar uzayından bahsetmek önemlidir.

**Tanım 2.3.1. (Sürekli Fonksiyonlar Uzayı)**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de bir bölge ve  $m$  negatif olmayan bir tamsayı olsun. Sürekli her  $\phi$  fonksiyonunun  $|\alpha| \leq m$  mertebeden kısmi türevlerinin de sürekli olduğu vektör uzayına  $C^m(\Omega)$  uzayı denir.  $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$  olarak sembolize edilir. Özel olarak;

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

olacak şekilde tanımlanır.  $C_0(\Omega)$  ve  $C_0^\infty(\Omega)$  uzayları sırasıyla  $C(\Omega)$  ve  $C^\infty(\Omega)$  uzaylarında,  $\Omega$  üzerinde kompakt desteğe sahip fonksiyonların uzayı olarak adlandırılır

**Tanım 2.3.2. (Öteleme Operatörü)**  $y \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $\tau_y f = f(x + y)$  ile tanımlanan  $x$  noktasını  $x + y$  noktasına öteleyen operatöre, öteleme operatörü denir.

**Tanım 2.3.3.**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de ölçülebilir bir bölge ve  $p$  pozitif bir reel bir sayı olmak üzere,  $\Omega$  bölgesinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \quad (2.2)$$

şartını sağlayan tüm  $f$  fonksiyonlarının uzayına  $L^p(\Omega)$  **Lebesgue uzayı** denir.  $L^p(\Omega)$  uzayının elemanları, (2.2) koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır.

Eğer  $f$  fonksiyonu (2.2) özelliğini sağlıyorsa  $f \in L^p(\Omega)$  olur.  $\Omega$  üzerinde hhh yerde  $f(x) = 0$  ise  $L^p(\Omega)$  uzayında  $f = 0$  olur.

Açıkça görülür ki eğer  $f \in L^p(\Omega)$  ve  $c \in \mathbb{C}$  ise  $cf \in L^p(\Omega)$  olur. Ayrıca  $f, g \in L^p(\Omega)$  iken

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

ve  $f + g \in L^p(\Omega)$  olduğundan dolayı  $L^p(\Omega)$  bir vektör uzayı olur.

$1 \leq p < \infty$  için,  $L^p(\Omega)$  uzayı

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

$C_0(\Omega)$  ve  $C_0^\infty(\Omega)$  uzayları Lebesgue uzayında yoğunlardır. Böylelikle Lebesgue uzayı ayrılabilir [4].

Lebesgue uzayı ayrılabilir olmasının yanında düzgün konveks ve yansılmalıdır [4].

Öteleme operatörü, Lebesgue uzayında süreklidir [4].

**Tanım 2.3.4.**  $\Omega$  bölgesinde ölçülebilir bir  $f$  fonksiyonu için hhh yerde  $|f(x)| \leq K$  olacak şekilde bir  $K$  sabiti varsa  $f$  fonksiyonu için **hemen hemen sınırlıdır** denir.  $K$  sabitlerinin en büyük alt sınırına  $|f|$  in  $\Omega$  bölgesindeki **esas supremumu** denir ve  $ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$  ile gösterilir.

Bu şekilde tanımlı  $f$  fonksiyonlarının uzayı  $L^\infty(\Omega)$  ile gösterilir ve aşağıdaki norm ile tanımlıdır.

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

$L^\infty(\Omega)$  uzayı  $\|\cdot\|_\infty$  normu ile bir Banach uzayıdır.

$C(\Omega)$  uzayı  $L^\infty(\Omega)$  uzayının kapalı bir öz alt uzayı olduğu halde bu uzayda yoğun değildir.

$L^\infty(\Omega)$  uzayı ayrılabilir değildir.

**Tanım 2.3.5.**  $C_0^\infty(\Omega)$  uzayının reel değerli, non negatif bir  $J$  fonksiyonu için  $\varepsilon > 0$  iken  $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$  non negatif ve

(i)  $|x| \geq \varepsilon$  ise  $J_\varepsilon(x) = 0$

(ii)  $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x) dx = 1$

özelliklerini sağlıyorsa  $J_\varepsilon$  bir molifier olarak adlandırılır.

**Tanım 2.3.6.**  $1 < p < \infty$  için  $1 < p' < \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  olmak üzere  $p' = \frac{p}{p-1}$  sayısına  $p$  nin eşleniği adı verilir.

**Tanım 2.3.7.** Ölçülebilir bir  $f$  fonksiyonu ve kompakt (kapalı ve sınırlı) bir  $K$  kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

oluyorsa  $f$  fonksiyonu **lokal integrallenebilirdir** denir.  $L^1_{loc}(\Omega)$  ve  $L^p_{loc}(\Omega)$  uzayları

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \int_K |f| d\mu < \infty; K \subset \Omega \right\}$$

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \int_K |f|^p d\mu < \infty; K \subset \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Teorem 2.3.8. (Hölder Eşitsizliği)**

$1 < p < \infty$  ve  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^{p'}(\Omega)$  iken  $fg \in L^1(\Omega)$  olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

**Teorem 2.3.9. (Minkowski Eşitsizliği)**

$\Omega$  ölçülebilir bir uzay.  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $f, g \in L^p(\Omega)$  olmak üzere  $(f + g) \in L^p(\Omega)$  olur. Yani  $1 < p < \infty$  için

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Minkowski integral eşitsizliği ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$f$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  de ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, hemen hemen her  $y \in \mathbb{R}^n$  için  $f(x, y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$  ve  $y \rightarrow \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m}$  fonksiyonu  $L^1(\mathbb{R}^n)$  uzayına

ait olsun. Bu durumda  $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ ,  $L^p(\mathbb{R}^m)$  uzayına ait olur ve

$$\left( \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

yani

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m} dy$$

eşitsizliği sağlar.

**Teorem 2.3.10. (Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi)**

$f_n : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$  ölçülebilir fonksiyonları için  $\lim f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  limiti var ve  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her  $x \in \mathbb{R}$  için  $|f_n(x)| \leq g(x)$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Teorem 2.3.11. (Fubini Teoremi)**

$f$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^{n+m}$  de ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x, y)| dx dy, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dy \right) dx, \end{aligned}$$

integrallerinden en az biri var ve sonlu ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir;

- Hemen hemen her  $y \in \mathbb{R}^m$  için  $f(\cdot, y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ,
- Hemen hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $f(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ,
- $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ,
- $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , ve
- $I_1 = I_2 = I_3$ .

## 2.4. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

**Tanım 2.4.1.**  $A_p$  ağırlık fonksiyonları, B. Muckenhoupt [44] tarafından tanımlanmıştır.

$1 \leq p < \infty$  ve her  $B \subset \mathbb{R}^n$  yuvarı için

$$\left( \int_B w(x) dx \right) \left( \int_B w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq c_p |B|^p$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir  $c_p$  sabiti var ise  $w$  fonksiyonu  $A_p$  ağırlık sınıfına aittir denir.

$1 < p < \infty$  ve  $p = 1$  için  $x \in B$  hemen hemen her yerde

$$\int_B w(y) dy \leq c_1 w(x) |B|$$

ifadesini sağlar. Burada en küçük  $c_p$  sabiti  $[w]_{A_p}$  ile gösterilir.  $A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p$  olarak tanımlanır.

$1 < p < q < \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  olsun

$$\left( \int_B w(x)^q dx \right)^{1/q} \left( \int_B w(x)^{-p'} dx \right)^{1/p'} \leq C |B|^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğini sağlayan  $C > 1$  bulunabiliyorsa  $w$  ağırlık fonksiyonu  $A_{p,q}$  sınıfındandır denir. Ayrıca aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|w\|_{L^q(B)} \|w^{-1}\|_{L^{p'}(B)} \leq C |B|^{1-\frac{\alpha}{n}} \quad (2.3)$$

$A_{p,q}$  sınıfı Muckenhoupt and R. Wheeden [45] tarafından fraksiyonel integral operatörlerinin ağırlıklı norm eşitsizliklerinin elde edilmesinde kullanılmıştır.

**Tanım 2.4.2.**  $w$ , hemen hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $w(x) > 0$  olacak şekilde bir ağırlık fonksiyonu ve  $E$  kümesi Lebesgue ölçümü  $|E|$  ile gösterilen ölçülebilir bir küme olmak üzere  $w(E) = \int_E w(x) dx$  olarak tanımlanır.

$1 \leq p < \infty$  ve  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  için ağırlıklı Lebesgue uzayı  $L^{p,w}(\Omega)$

$$\|f\|_{L^{p,w}(\Omega)} = \left( \int_\Omega |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty$$

normu ile tanımlıdır.

**Lemma 2.4.3.**  $1 < p < q$  olmak üzere  $w^q \in A_{1+\frac{q}{p}}$  ise  $w \in A_{p,q}$  elde edilir [39].

## 2.5. Bazı Klasik Operatörler

Bu tez çalışmasında ele alınan operatörler aşağıda tanımlanmaktadır. Bu operatörler aynı zamanda [57] çalışmasında da yer almıştır.

### Tanım 2.5.1 (Alt lineer Operatör)

$f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ve  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere bir  $T$  operatörü için

$$T(af + bg) \leq |a|Tf + |b|Tg$$

koşulu sağlanıyorsa  $T$  ye alt lineer operatördür denir.

**Tanım 2.5.2**  $1 < p < \infty$  olmak üzere bir  $T$  alt lineer operatörü,  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlı ve her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için aşağıdaki koşulu sağlıyorsa

$$\chi_{B(x,r)}(z) |T(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2r)})(z)| \lesssim \chi_{B(x,r)}(z) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2r)} \frac{|f(y)|}{|y-z|^n} dy$$

$T$  operatörüne  $p$ -admissible singular tipli operatör denir.  $p$ -admissible singular tipli operatörler sınıfı aşağıdaki operatörleri de kapsar.

### Tanım 2.5.3 (Calderon-Zygmund Operatörü)

Bu operatörlerin  $L^p(\mathbb{R}^n)$  Lebesgue uzayında sınırlılığınadır esas teorem 1938 yılında yılında S.G. Mihlin tarafından yayınlanmıştır [41]. 1952 yılında bu operatörler, A.P. Calderón ve A. Zygmund [14] tarafınfan analiz edilmiş ve 1960 larda Mihlin–Calderón–Zygmund operatörleri olarak sıkça anılmıştır. Ancak günümüzde Calderón–Zygmund operatörleri kavramı, G. David ve J.L. Journé [19] tarafından 1983 yılında tanımlanmış olan operatörler sınıfı için kullanılmaktadır.

Çekirdek fonksiyonu  $K(x, y)$

$$\text{Her } x \neq y \text{ için } |K(x, y)| \lesssim |x - y|^{-n} \quad (2.4)$$

olmak üzere,

Calderon Zygmund operatörü  $\mathbb{S}$ ,

$$\mathbb{S}f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y) dy := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y)f(y) dy$$

olacak şekilde tanımlanır ve  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır [41].

**Tanım 2.5.6. (Hardy Littlewood Maksimal operatörü)**

$f$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n$  de lokal integrallenebilir olsun.  $f$  in bir  $B(x, r)$  yuvarı üzerinde ortalama değeri

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

olmak üzere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  fonksiyonunun Hardy Littlewood maksimal fonksiyonu,  $Mf : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \\ &= \sup_{r>0} f_{B(x,r)} \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.  $M$  maksimal operatör alt lineerdir, dolayısıyla  $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ve  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$M(af + bg) \leq |a| Mf + |b| Mg$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Tanım 2.5.7. (Fraksiyonel Maksimal operatör)**

$0 \leq \alpha < n$  olmak üzere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  lokal integrallenebilir fonksiyonu için fraksiyonel maksimal fonksiyon

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır. Fraksiyonel maksimal fonksiyonun kısmi diferansiyel denklemlerde birçok uygulamaları vardır.  $\alpha = 0$  alınırsa Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonuna karşılık gelir.

Maksimal operatör harmonik analizde genellikle diğer operatörleri kontrol etmek için kullanılır.

Sharp Maksimal fonksiyonu ise

$$M^\sharp f(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(y) - f_{B(x,t)}| dy$$

olarak tanımlanır. Maksimal fonksiyon ile mukayese edersek,

$$(M^\sharp f)(x) \leq 2(Mf)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 2.5.8.**  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p \leq \infty$  olmak üzere Hardy-Littlewood maksimal operatörü klasik Lebesgue uzayında sınırlıdır [65]

**Tanım 2.5.9. (Riesz potansiyel Operatörü)**

Her iki çarpan fonksiyondan lokal olarak daha iyi davranan bir fonksiyon üretmek için, her birinin düzensizliğini kaldıran iki fonksiyonun noktasal olmayan çarpımını oluşturmak kullanışlıdır.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \quad (2.6)$$

integrali var olmak üzere (2.6) ile tanımlanan  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $f * g$  **konvolüsyonudur**.  $f$  fonksiyonun bir  $K$  çekirdeği ile konvolüsyonu ise

$$f * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy$$

şeklinindedir. Konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği varsa **singüler integral**, zayıf (integrallenebilen) tekilliği varsa **potansiyel** adı verilir.

$0 < \alpha < n$  olmak üzere  $|x|^{\alpha-n}$  çekirdeğine **Riesz çekirdek fonksiyonu** denir. Bu fonksiyonun orijinde zayıf tekilliği vardır. Bir fonksiyonun **Riesz potansiyeli**

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 2.5.10.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 \leq p < q < \infty$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $p > 1$  olmak üzere Riesz potansiyel operatörü klasik Lebesgue uzayında sınırlıdır [65].

**Tanım 2.5.11. (Hardy Operatörleri)** Çok boyutlu Hardy operatörleri  $H$  ve  $\mathcal{H}$ ,

$$Hf(x) := \frac{1}{|x|^n} \int_{|y| < |x|} f(y) dy \quad \text{ve} \quad \mathcal{H}f(x) := \int_{|y| > |x|} \frac{f(y)}{|y|^n} dy$$

olarak tanımlanır.  $|x-y| < 2|x|$  koşulu  $H$  nin integral tanımında kullanılırsa aşağıdaki noktasal eşitsizlik elde edilir:

$$H|f(x)| \leq 2^n v_n Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

$0 \leq \alpha < n$  olmak üzere uygun  $f$  fonksiyonları alınarak daha genel olarak,  $H^\alpha$  and  $\mathcal{H}^\alpha$  Hardy tipli operatörler

$$H^\alpha f(x) := |x|^{\alpha-n} \int_{|y|<|x|} f(y) dy \quad \text{ve} \quad \mathcal{H}^\alpha f(x) := |x|^\alpha \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^n} dy$$

olarak tanımlanır.

Kolayca görülür ki  $H^\alpha$  operatörü ile fraksiyonel Maksimal operatör ve Riesz operatörü arasında noktasal eşitsizlik yazılabilir.  $0 < \alpha < n$  için

$$M^\alpha f(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ve

$$I^\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere

$$|\mathcal{H}^\alpha f(x)| \leq v_n 2^{n-\alpha} (M^\alpha f)(x) \leq 2^{n-\alpha} I^\alpha(|f|)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

noktasal eşitsizliği kolayca elde edilebilir. Bu noktasal eşitsizlikte Hardy operatörü  $\mathcal{H}^\alpha$ , Riesz potansiyel operatörü tarafından sınırlandırılmıştır. Bu noktasal eşitsizlik bilinmektedir ancak bu eşitsizliğe referans bulunamadığından aşağıda basitçe ispatı verilmiştir.

**Lemma 2.5.12.**  $0 < \alpha < n$  olmak üzere,

$$|\mathcal{H}^\alpha f(x)| \leq 2^{n-\alpha} I^\alpha(|f|)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** Yukarıdaki eşitsizlik

$$|y| > |x| \quad \text{için} \quad \frac{|x|^\alpha}{|y|^n} \leq \frac{2^{n-\alpha}}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

ifadesinde  $t = \frac{|x|}{|y|}$  ve  $x' = \frac{x}{|x|}$ ,  $y' = \frac{y}{|y|}$ , kabulleri alınarak elde edilir. Aynı zamanda bu ifadeye denk olan

$$t^\alpha \leq 2^{n-\alpha} \left( \frac{|y|}{|x-y|} \right)^{n-\alpha} \quad \text{veya} \quad t^\alpha \leq \frac{2^{n-\alpha}}{|tx' - y'|^{n-\alpha}}$$

eşitsizliği  $t < 1$  ve  $|tx' - y'| \leq 2$  alınarak elde edilir.

**Tanım 2.5.13. (Oscillatory integral operatörleri)**

Bu operatörler matematik ve fizik alanlarında kullanılmaktadır. Harmonik analiz için önemli operatörler olarak kabul edilmektedir çünkü harmonik analizde kullanılan bir çok operatör oscillatory integrallerinin bir versiyonudur. Bunlardan bazıları Fourier transformu, Bocher-Riesz ortalaşmışları ve Radon transformudur. Oscillatory integrallerinin özellikleri E. Stein tarafından çalışılmıştır [65].

Bir  $K$  dağılım çekirdeği aşağıdaki koşulları sağlıyor ise

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n}, \quad x \neq y$$

$$|\nabla_x K(x, y)| + |\nabla_y K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}}, \quad x \neq y$$

standart Calderón-Zygmund (kısaltma olarak C-Z) çekirdeği olarak adlandırılır.  $P(x, y)$  polinomu  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de reel değerli bir polinom olmak üzere C-Z integral operatörü  $T$ ,

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

ve oscillatory integral operatörü  $S$ ,

$$Sf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)} K(x, y) f(y) dy$$

olarak tanımlanır. Lu ve Zhang  $1 < p < \infty$  iken  $S$  operatörünün  $L^p$  sınırlılığını elde etmek için  $T$  operatörünün  $L^2$  sınırlılığını kullanmışlardır [39].

Ricci and Stein  $K_\alpha$  standart fraksiyonel C-Z çekirdeğini,  $0 < \alpha < n$  olmak üzere

$$|K_\alpha(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n-\alpha}}$$

$$|\nabla_x K_\alpha(x, y)| + |\nabla_y K_\alpha(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1-\alpha}}, \quad x \neq y$$

şeklinde tanımlamışlardır [54].  $P(x, y)$  polinomu  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de reel değerli bir polinom ve  $K_\alpha$  standart fraksiyonel C-Z çekirdeği olmak üzere, fraksiyonel oscillatory integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [21].

$$S_\alpha f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)} K_\alpha(x, y) f(y) dy$$

$\alpha = 0$  iken  $S_\alpha = S$  ve  $K_\alpha = K$  elde edilir.

**Lemma 2.5.14.**  $K$  bir standart C-Z çekirdeği ve C-Z singular integral operatörü  $T$ ,  $(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$  tipli olsun.  $P(x, y)$  reel değerli bir polinom ve  $w \in A_p$  ( $1 < p < \infty$ ) olmak üzere  $S$  operatörü  $L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır [63].

**Lemma 2.5.15.**  $w \in A_p$  ( $1 < p < \infty$ ),  $K$  bir C-Z çekirdeği,  $P(x, y)$  reel değerli bir polinom ve  $T$  operatörü  $(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$  tipli olsun. Bu durumda  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  olmak üzere

$$\|S_b f\|_{L^{p,w}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_* \|f\|_{L^{p,w}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliğini sağlayan  $P$  den bağımsız bir  $C > 0$  sabiti vardır [61].

## 2.6. Bazı Klasik Operatörlerin Kommutatörleri

BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayı, John ve Nirenberg [34] tarafından 1961 yılında tanımlanmıştır. BMO uzayı,  $L^\infty$  uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıkça  $L^\infty$  yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörleri  $L^\infty$  uzayından  $L^\infty$  uzayına sınırlı olmamasına rağmen,  $L^\infty$  uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Fefferman, 1971 yılında BMO uzayının,  $H_1$  Hardy uzayının duali olduğunu göstermiştir.

**Lemma 2.6.1.** Bir  $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonu

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}| dy < \infty \quad (2.10)$$

şartını sağlıyor ise  $f$  fonksiyonuna sınırlı salınımlı fonksiyon denir.  $BMO(\mathbb{R}^n)$  uzayı,  $\|f\|_{BMO} < \infty$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^n$  deki tüm  $f$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{BMO} < \infty\}$$

(i) Her  $1 < p < \infty$  için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left( \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \approx \|f\|_{BMO} \quad (2.11)$$

olur.

(ii)  $B_1 \subset B_2$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^n$  deki her  $B_1, B_2$  yuvarları için

$$|f_{B_1} - f_{B_2}| \lesssim \frac{B_2}{B_1} \|f\|_{BMO} \quad (2.12)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(iii) Her  $\delta > 1$  için

$$|f_{B(x,\delta r)} - f_{B(x,r)}| \leq C \ln(\delta + 1) \|f\|_{BMO} \quad (2.13)$$

eşitsizliği  $f, x, r$  ve  $\delta$  dan bağımsız bir  $C$  keyfi sabiti ile elde edilir.

Lokal integrallenebilir bir  $b$  fonksiyonu için  $T$  operatörü ve  $b$  fonksiyonundan elde edilen kommutatör aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[b, T] f := bT(f) - T(bf)$$

Özel olarak, Maksimal operatörün komutatörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$M_b f(x) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

Eğer  $b$  negatif değil ise her  $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$  için

$$|[b, M] f(x)| \leq M_b f(x) \quad (2.14)$$

olur.

**Lemma 2.6.2.**  $1 < p < \infty$  ve  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  olmak üzere her  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  ve herhangi bir  $B(x_0, r)$  yuvarı için

$$\|M_b f\|_{L^p(B(x_0, r))} \lesssim \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{p}} \sup_{t > r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x_0, t))} \quad (2.15)$$

dir [31].

**Tanım 2.6.3.** Lokal integrallenebilen  $b$  fonksiyonundan elde edilen fraksiyonel Maksimal operatörün komutatörü  $M_{\alpha, b}$  ve fraksiyonel integral (Riesz) operatörünün komutatörü  $I_{\alpha, b}$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$M_{\alpha, b} f(x) = b(x) M_{\alpha} f(x) - M_{\alpha}(bf)(x)$$

$$I_{\alpha, b} f(x) = b(x) I_{\alpha} f(x) - I_{\alpha}(bf)(x)$$

Aynı şekilde yine lokal integrallenebilen  $b$  fonksiyonundan elde edilen oscillatory integral operatörünün komutatörü  $S_b$  ve fraksiyonel oscillatory integral operatörünün komutatörü  $S_{\alpha, b}$  sırasıyla

$$S_b f(x) = S f(x) b(x) - S(bf)(x)$$

ve

$$S_{\alpha,b}f(x) = S_{\alpha}f(x)b(x) - S_{\alpha}(bf)(x)$$

olarak tanımlanır.

## 2.7. $L^{p,\lambda}$ Morrey Uzayları

Morrey Uzayları  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ , 1938 yılında C.B. Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisinde yer alan problemlerle uğraşırken ortaya çıkarılmıştır. Ardından Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemler ile ilgili uygulamalarda gündeme gelmiştir. Morrey uzayları  $L^p$  Lebesgue uzaylarının iyileştirilmiş halidir ve Hölder ile BMO uzaylarını ihtiva eden Morrey-Campanato uzaylarının bir parçasıdır.

Tez içerisinde  $\tilde{B}(x,r) = B(x,r) \cap \Omega$  olarak kabul edilmektedir.

**Tanım 2.7.1. (Klasik Morrey Uzayı)**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  in sınırlı açık bir alt bölgesi,  $0 \leq \lambda$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  Morrey uzayı

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p, \tilde{B}(x,r)} \leq C < \infty \quad (2.16)$$

koşulunu sağlayan  $f \in L^p(\Omega)$  fonksiyonların lineer uzayı olarak tanımlanır. Yukarıdaki  $C$  sabiti sadece  $f$  ye bağlıdır.  $\|f\|_{p,\lambda}$  normu,  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  uzayında bir yarı normdur.

$L^{p,\lambda}(\Omega)$  Morrey uzayı  $\|f\|_{p,\lambda}$  normu ile bir Banach uzayıdır.

**Teorem 2.7.2.**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de sınırlı açık bir alt bölge ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere;

- 1)  $\lambda = 0$  ise  $L^{p,0}(\Omega) \cong L^p(\Omega)$ ,
- 2)  $\lambda = n$  ise  $L^{p,n}(\Omega) \cong L^{\infty}(\Omega)$ ,
- 3)  $\lambda > n$  ise  $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$ .
- 4)  $0 < \lambda \leq n$  ise  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  uzayı ayrılabilir değildir.

**Teorem 2.7.3.**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de sınırlı açık bir alt bölge,  $0 \leq \lambda \leq n$  ve  $0 \leq \mu \leq n$  olmak üzere  $p \leq q$  ve  $\frac{n-\lambda}{p} \geq \frac{n-\mu}{q}$  koşulları altında

$$L^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir.  $\Omega$  bölgesi sınırsız iken yukarıdaki gömme geçersizdir.

**Teorem 2.7.4.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 < \lambda < n$  olmak üzere Hardy-littlewood maksimal operatörü  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  klasik Morrey uzayında sınırlıdır [16].

**Teorem 2.7.5.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $0 < \lambda < n - \alpha p$  ve  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$  olmak üzere  $I_\alpha$  Riesz potansiyel operatörü  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  klasik Morrey uzayında sınırlıdır [1].

## 2.8. $L^{p,\kappa}(w)$ Ağırlıklı Morrey Uzayları

Komori and Shirai, 2019 yılında yayınlanan [37] çalışmalarında  $L^{p,\kappa}(w)$  ağırlıklı Morrey uzaylarını tanımlamışlardır. Harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıkları bu uzaylarda araştırılmıştır.

**Tanım 2.8.1. (Doubling koşulu)**  $B = B(x_0, r)$  olmak üzere verilen bir  $w$  ağırlık fonksiyonu için  $w(2B) \leq Dw(B)$  şartını sağlayan bir  $D$  var ise  $w$ , doubling koşulunu sağlıyor denir ve  $w \in \Delta_2$  ile gösterilir.

**Tanım 2.8.2. (Ağırlıklı Morrey Uzayı)**  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 < \kappa < 1$  ve  $w$  bir ağırlık fonksiyonu olsun. Ağırlıklı Morrey uzayı,

$$\|f\|_{L^{p,\kappa}(w)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left( \frac{1}{w(B(x, r))^\kappa} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

normu ile

$$L^{p,\kappa}(w) := \left\{ f \in L^p_{loc}(w) : \|f\|_{L^{p,\kappa}(w)} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır [37].

### Uyarı 2.8.3.

1.  $0 < \lambda < n$  iken  $\kappa = \lambda/n$  ve  $w \equiv 1$  ise  $L^{\kappa,w}(w) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  klasik Morrey uzayı elde edilir.
2.  $w \in \Delta_2$  olsun.  $\kappa = 0$  iken  $L^{p,0}(w) = L^{\kappa,w}(w)$ ,  $\kappa = 1$  iken  $L^{p,1}(w) = L^\infty(w)$  olur.
3. Bir boyutlu durumda  $-1/2 < \alpha < 0$  için bir ağırlık fonksiyonu  $w(x) = |x|^\alpha$  ve  $f(x) = \chi_{(0,1)}(x) |x|^{-1/2}$  olmak üzere,  $f \in L^{1, \frac{\alpha+1/2}{\alpha+1}}(w) \setminus L^{2(\alpha+1)}(w)$  elde edilir [37].

**Teorem 2.8.4.**  $w \in A_p$ ,  $1 < p < \infty$  olmak üzere  $M$  Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu  $L^{p,\kappa}(w)$  ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır [44].

**Teorem 2.8.5.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \kappa < 1$  ve  $w \in A_p$  olmak üzere  $\mathbb{S}$  Calderon-Zygmund operatörü  $L^{p,\kappa}(w)$  ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır [37].

**Teorem 2.8.6.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$ ,  $0 < \kappa < p/q$  ve  $w \in A_{p,q}$  olmak üzere  $M_\alpha$  fraksiyonel Maksimal operatörü ve  $I_\alpha$  fraksiyonel integral operatörü  $L^{p,\kappa}(w^p, w^q)$  uzayından  $L^{q,\kappa q/p}(w^q)$  uzayına sınırlıdır [37].

**Teorem 2.8.7.**  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ve  $I_\alpha$  fraksiyonel integral operatörü olsun.  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$ ,  $0 < \kappa < p/q$  ve  $w \in A_{p,q}$  olmak üzere  $[b, I_\alpha]$  komutatörü  $L^{p,\kappa}(w^p, w^q)$  uzayından  $L^{q,\kappa q/p}(w^q)$  uzayına sınırlıdır [37].

**Teorem 2.8.8.**  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ve  $\mathbb{S}$  bir Calderon–Zygmund operatörü olsun.  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \kappa < 1$  ve  $w \in A_p$  olmak üzere  $[b, \mathbb{S}]$  komutatörü  $L^{p,\kappa}(w)$  uzayında sınırlıdır [37].

## 2.9. Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Genelleştirilmiş Morrey uzayı  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $r^\lambda$  nın negatif olmayan bir  $\varphi(x, r)$  fonksiyonu ile değiştirilmesiyle oluşturulmuştur. Bu uzay bazı gömülme durumları ile beraber, ilk olarak [23] çalışmasında görülmüştür. [74] makalesinde bu uzaylar Campanato uzaylarının daha genel bir durumu gibi araştırılmıştır. Bu uzaylar sobolev tipli kritik gömülmelerin çalışılmasında oldukça faydalıdır [59], [72]. Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında, harmonik analizin operatörlerinin sınırlılıkları [38, 42, 47, 60, 66] çalışmalarında ele alınmıştır. Genelleştirilmiş Morrey uzayında Maksimal operatör, Riesz potansiyel operatör, fraksiyonel maksimal operatör ve singular integral operatörünün sınırlılığı [28] çalışmasında ele alınmıştır.

Bu bölümde, [42], [29] çalışmaları ve bu tez çalışmasında ele alınan üç farklı genelleştirilmiş Morrey uzayı tanımı verilmektedir.

### Tanım 2.9.1. ( $\mathcal{M}^{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı)

$1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi(x, r)$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} \|f\|_{L^p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip tüm  $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanmıştır [42].

### Tanım 2.9.2. ( $M^{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı)

$1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi(x, r)$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  genelleştirilmiş Morrey uzayı,

$$\|f\|_{M^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} |B(x, r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))}$$

normunu sonlu yapan tüm  $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanmıştır. Eğer  $\varphi(r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$  alınrsa bu uzay klasik Morrey uzayıyla çakışır [29].

**Teorem 2.9.3.**  $1 \leq p < \infty$  ve ölçülebilir  $\varphi_1, \varphi_2$  fonksiyonları için

$$\int_t^\infty \varphi_1(x, r) \frac{dr}{r} \leq C\varphi_2(x, t)$$

eşitsizliği  $x$  ve  $t$  den bağımsız bir  $C$  sabiti için sağlanıyorsa,  $p > 1$  için  $M$  maksimal operatörü  $M^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [28].

**Teorem 2.9.4.**  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 < \alpha < n/p$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$  ve ölçülebilir  $\varphi_1, \varphi_2$  fonksiyonları için

$$\int_t^\infty t^\alpha \varphi_1(x, t) \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti için sağlanıyorsa  $p > 1$  için  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörleri  $M^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M^{q, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [28].

**Lemma 2.9.5.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $b \in BMO$  olsun. Bu durumda

$$\|M_{b, \alpha}\|_{L^q(B(x_0, r))} \leq \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{q}} \sup_{t > 2r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p(B(x_0, t))} \quad (2.17)$$

eşitsizliği herhangi bir  $B(x_0, r)$  yuvarı ve tüm  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için sağlanır[31].

**Teorem 2.9.6.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $b \in BMO$  olsun.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  için

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi_1(x, t) \leq C\varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun. Bu durumda  $M_{b, \alpha}$  operatörü  $M^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M^{q, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır[31].

**Lemma 2.9.7.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $q > p$  ve  $b \in BMO$  olsun.  $\varphi(x, t)$  fonksiyonu için

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi(x, t) \leq Cr^{-\frac{\alpha p}{q-p}}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun. Bu durumda  $r > 0$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$|M_{\alpha, b}f(x)| \leq C \|b\|_{BMO} (M_b f(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M^{p, \varphi}^{\frac{1}{p}}}^{1-\frac{p}{q}} \quad (2.18)$$

noktasal eşitsizliği geçerlidir[31].

**Teorem 2.9.8.**  $1 < p < q < \infty$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$  ve  $b \in BMO$  olsun.  $\varphi$  fonksiyonu için

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right)^p \varphi(x, t) \leq C\varphi(x, r)$$

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi(x, t) \leq Cr^{-\frac{\alpha p}{q-p}}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız  $C$  sabitleri var olsun. Bu durumda  $M_{b,\alpha}$  komutatörü  $M^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M^{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır[31].

**Lemma 2.9.9.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $b \in BMO$  olsun. Bu durumda

$$\|[b, I_\alpha]\|_{L^q(B(x_0,r))} \preceq \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{\frac{-n}{q}-1} \|f\|_{L^p(B(x_0,t))} dt \quad (2.19)$$

eşitsizliği herhangi bir  $B(x_0, r)$  yuvarı ve tüm  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için sağlar[31].

**Teorem 2.9.10.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $b \in BMO$  olsun.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  için

$$\int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi_1(x, t) dt \leq C\varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun. Bu durumda  $[b, I_\alpha]$  operatörü  $M^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır[31].

**Lemma 2.9.11.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $q > p$  ve  $b \in BMO$  olsun.  $\varphi(x, t)$  fonksiyonu için

$$\int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi(x, t) \frac{dt}{t} \leq Cr^{-\frac{\alpha p}{q-p}}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun. Bu durumda  $r > 0$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$|[b, I_\alpha] f(x)| \leq C \|b\|_{BMO} (M_b f(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M^{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \quad (2.20)$$

noktasal eşitsizliği geçerlidir[31].

**Teorem 2.9.12.**  $1 < p < q < \infty$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$  ve  $b \in BMO$  olsun.  $\varphi$  fonksiyonu için

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right)^p \varphi(x, t) \leq C\varphi(x, r)$$

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi(x, t) \frac{dt}{t} \leq Cr^{-\frac{\alpha p}{q-p}}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız  $C$  sabitleri var olsun. Bu durumda  $[b, I_\alpha]$  komutatörü  $M^{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M^{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır[31].

Bu tez çalışmamın bir çok bölümünde sonuçlar Mizuhara'nın tanımladığı normda,  $\varphi(x, r)$  yerine  $\varphi(r)$  alınarak elde edilmiştir. Bunun için aşağıdaki  $\Phi$  sınıfı tanımlanmıştır. Bu  $\Phi$  sınıfı genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sıkça karşımıza çıkmaktadır.

**Tanım 2.9.13.**  $L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$  Genelleştirilmiş Morrey uzayına iyi özellikler kazandırmak amacıyla  $\varphi$  parametresine bir takım koşullar bırakılmasına ihtiyaç duyulmuştur.

Aşağıdaki şartları sağlayan tüm ölçülebilir  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonlarının sınıfı  $\Phi$  ile temsil edilir.

1.  $\varphi$  hemen hemen artan
2.  $\varphi(t)/t^n$  hemen hemen azalan
3. Her  $\delta > 0$  için  $\inf_{t > \delta} \varphi(t) > 0$ .

Aşağıdaki tanımda genelleştirilmiş Morrey uzayı, modular fonksiyonu ile tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.9.14.**  $1 \leq p < \infty$ ,  $\varphi \in \Phi$  ve modular

$$\mathfrak{M}_{p, \varphi}(f; x, r) := \frac{1}{\varphi(r)} \int_{B(x, r)} |f(y)|^p dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0 \quad (2.21)$$

olmak üzere,

$$\|f\|_{L^{p, \varphi}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \mathfrak{M}_{p, \varphi}(f; x, r)^{1/p}$$

normunu sonlu yapan  $\mathbb{R}^n$  de lokal integrallenebilir tüm fonksiyonlardan oluşan uzaya genelleştirilmiş Morrey uzayı denir ve  $L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$  ile gösterilir. Eğer  $0 \leq \lambda \leq n$  iken  $\varphi(r) = r^\lambda$  alınırsa  $L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n) = L^{p, \lambda}$  klasik Morrey uzayıyla çakışır.

Eğer  $\varphi \in \Phi$  ise  $L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı non-trivial olur [48].  $\varphi$  fonksiyonu için belirlenen bu koşullar ile yuvar üzerindeki tüm karakteristik fonksiyonlar  $L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına ait olur. Ayrıca  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ve  $r_0 > 0$  için

$$\|\chi_{B(x_0, r_0)}\|_{p, \varphi}^p \approx \frac{r_0^n}{\varphi(r_0)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad r_0 > 0 \quad (2.22)$$

elde edilir [26]. Ayrıca  $\varphi, \psi \in \Phi$  olmak üzere  $\varphi \lesssim \psi$  iken (2.22) yardımıyla  $L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p, \psi}(\mathbb{R}^n)$  gömülmesi gerçekleşir.

### 2.10. Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzayları

**Tanım 2.10.1.** ( $M^{p,\varphi}(w)$  Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzayı)  $1 \leq p < \infty$ ,  $\varphi(x, r)$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve  $w$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n$  de bir ağırlık fonksiyonu olsun. Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı  $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w) \equiv M_w^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ , aşağıdaki yarı normu sonlu yapan

$$\|f\|_{M_w^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} w(B(x, r))^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{L^{p,w}(B(x, r))}$$

tüm  $f \in L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

$0 \leq \alpha < n$  olmak üzere  $T_\alpha$  lineer veya alt lineer operatörü herhangi bir kompakt desteğe sahip ve  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  için  $C > 0$  sabiti  $f$  ve  $x$  den bağımsız olmak üzere

$$|T_\alpha f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad x \notin \text{supp } f \quad (2.23)$$

eşitsizliği sağlayan operatörü temsil etsin.

$\alpha = 0$  için (2.23) koşulu ilk olarak Soria ve Weiss (1994) tarafından tanımlanmıştır. (2.23) koşulu Calderon-Zygmund operatörü, Hardy Littlewood Maksimal operatörü, Riesz potansiyel operatörü ve fraksiyonel maksimal operatörü gibi harmonik analizin pek çok operatörü için sağlanır.

**Lemma 2.10.2.**  $1 < p < \infty$ ,  $w \in A_p$ ,  $T_0$  operatörü (2.23) koşulunu sağlayan bir alt lineer operatör ve  $p > 1$  için  $L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda  $1 < p < \infty$  için

$$\|T_0 f\|_{L^{p,w}(B(x_0, r))} \leq c \|w\|_{L_1(B(x_0, t))}^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p,w}(B(x_0, t))} \|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \quad (2.24)$$

eşitsizliği herhangi bir  $B(x_0, r)$  yuvarı ve tüm  $f \in L_{loc}^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için sağlanır [35].

**Teorem 2.10.3.**  $1 < p < \infty$  ve  $w \in A_p$  olsun.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  için

$$\int_r^{\infty} \frac{\text{essinf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) s^n}{t^{n+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun.  $T_0$  operatörü (2.23) koşulunu sağlayan bir alt lineer operatör ve  $p > 1$  için  $L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda  $T_0$  operatörü  $M_w^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M_w^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [35].

**Lemma 2.10.4.**  $1 < p < q < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $w \in A_{p,q}$ ,  $T_\alpha$  operatörü

(2.23) koşulunu sağlayan bir alt lineer opetatör ve  $p > 1$  için  $L^{p,w^p}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^{q,w^q}(\mathbb{R}^n)$  sınırlı olsun. Bu durumda  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$  için

$$\|T_\alpha f\|_{L^{q,w^q}(B)} \preceq (w^q(B))^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p,w^p}(B(x_0,t))} (w^q(B(x_0,t)))^{\frac{-1}{q}} \frac{dt}{t} \quad (2.25)$$

eşitsizliği herhangi bir  $B = B(x_0, r)$  yuvarı ve tüm  $f \in L_{loc}^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için sağlanır [29].

**Teorem 2.10.5.**  $1 < p < q < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $w \in A_{p,q}$ ,  $T_\alpha$  operatörü (2.23) koşulunu sağlayan bir alt lineer opetatör ve  $p > 1$  için  $L^{p,w^p}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^{q,w^q}(\mathbb{R}^n)$  sınırlı olsun.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  için

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) (w^p(B(x, s)))^{\frac{1}{p}}}{(w^q(B(x, t)))^{\frac{1}{q}}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun.  $T_\alpha$  operatörü (2.23) koşulunu sağlayan bir alt lineer opetatör ve  $p > 1$  için  $L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda  $T_\alpha$  operatörü  $M_w^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M_w^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [29].

Bir  $b$  fonksiyonu için  $0 \leq \alpha < n$  olmak üzere  $T_{\alpha,b}$  komütatörü herhangi bir kompakt desteğe sahip ve  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  için  $C > 0$  sabiti  $f$  ve  $x$  den bağımsız olmak üzere

$$|T_{\alpha,b} f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)| \frac{|f(y)|}{|x - y|^{n-\alpha}} dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f \quad (2.26)$$

eşitsizliği sağlayan operatörü temsil etsin.

**Lemma 2.10.6.**  $1 < p < \infty$ ,  $w \in A_p$ ,  $b \in BMO$  ve  $T_{0,b}$  (2.26) koşulunu sağlayan bir alt lineer opetatör olsun ve

$$\|T_{0,b} f\|_{L^{p,w}(\mathbb{R}^n)} \preceq \|b\|_{BMO} \|f\|_{L^{p,w}(\mathbb{R}^n)} \quad (2.27)$$

sağlansın. Bu durumda

$$\|T_{0,b} f\|_{L^{p,w}(B)} \preceq \|b\|_{BMO} w(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L^{p,w}(B(x_0,t))} \|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \quad (2.28)$$

eşitsizliği herhangi bir  $B = B(x_0, r)$  yuvarı ve tüm  $f \in L_{loc}^{p,w}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için sağlanır [30].

**Teorem 2.10.7.**  $1 < p < \infty$ ,  $w \in A_p$ ,  $b \in BMO$  ve  $(\varphi_1, \varphi_2)$  için

$$\int_r^\infty \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) s^n}{t^{n+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun.  $T_{0,b}$  operatörü (2.26) ve (2.27) koşullarını sağlayan bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda  $T_{0,b}$  operatörü  $M_w^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M_w^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [30].

**Lemma 2.10.8.**  $1 < p < q < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n}{\alpha}$ ,  $w \in A_{p,q}$ ,  $b \in BMO$  ve  $T_{\alpha,b}$  (2.26) koşulunu sağlayan bir alt lineer operatör olsun ve

$$\|T_{\alpha,b} f\|_{L^{q,w^q}(\mathbb{R}^n)} \preceq \|b\|_{BMO} \|f\|_{L^{p,w^p}(\mathbb{R}^n)} \quad (2.29)$$

sağlansın. Bu durumda

$$\|T_{\alpha,b} f\|_{L^{q,w^q}(B)} \preceq \|b\|_{BMO} (w^q(B))^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^\infty \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L^{p,w^p}(B(x_0,t))} (w^q(B(x_0,t)))^{\frac{-1}{q}} \frac{dt}{t} \quad (2.30)$$

eşitsizliği herhangi bir  $B = B(x_0, r)$  yuvarı ve tüm  $f \in L_{loc}^{p,w^p}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için sağlanır [29].

**Teorem 2.10.9.**  $1 < p < q < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n}{\alpha}$ ,  $w \in A_{p,q}$ ,  $b \in BMO$  ve  $(\varphi_1, \varphi_2)$  için

$$\int_r^\infty \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) (w^p(B(x, s)))^{\frac{1}{p}}}{(w^q(B(x, s)))^{\frac{1}{q}}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti var olsun.  $T_{\alpha,b}$  operatörü (2.26) ve (2.29) koşullarını sağlayan bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda  $T_{\alpha,b}$  operatörü  $M_w^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $M_w^{q, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [29].

### 3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde tez çalışmamızda yararlandığımız temel tanım ve teoremlerden bahsedilmekte ve yeni tanımlanan Morrey alt uzayları; klasik, genelleştirilmiş ve ağırlıklı versiyonları ile tanıtılmaktadır.. Ayrıca bu uzaylarda kullanılan bazı özel lemma ve teoremlere yine bu bölümde yer verilmektedir.

#### 3.1. Morrey Uzaylarının Yeni Alt Uzayları

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey uzayları heat eşitsizlikleri ve Navier-Stokes eşitsizlikleri içeren kısmi diferansiyel denklemlerin (PDE) çözümlerine ait düzgünlük özellikleri ve lokal davranışlarını çalışırken önemli bir rol oynamaktadır. Bu konuda kapsamlı çalışmalar için [36, 64, 67, 68] ve bu çalışmalardaki referanslar incelenebilir. Morrey uzayları, Lebesgue uzaylarına göre daha iyi lokal davranışlar gösterdikleri halde, ayrılabilirlik ve iyi fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım gibi bazı önemli özelliklere sahip değildirler. Morrey uzaylarının ayrılabilir olmaması [56] ve hatta bazı Morrey fonksiyonlarına, sürekli fonksiyonlar yardımıyla bile yaklaşımın mümkün olmamasından kaynaklanan bir takım eksiklikler, öteleme operatörünün sürekli olduğu tüm Morrey fonksiyonlarını içeren Zorko uzayında olduğu gibi vanishing özelliğine sahip  $V_0, V_\infty$  ve  $V_*$  gibi alt uzayların tanımlanmasını motive etmiştir.

Morrey uzayının bir alt uzayı olan Vanishing Morrey uzayı  $V_0 L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ , ilk olarak 1990 yılında Vitanza [71] tarafından  $0 \leq \lambda < n$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho < r} \frac{1}{\rho^{\frac{\lambda}{p}}} \int_{B(x,\rho)} |f(y)|^p dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı olarak tanımlanmıştır. Bu uzayların kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamalarıyla ilişkisi [17, 71, 70] makalelerinde ortaya konmuştur. Vanishing Morrey uzayının özellikleri ve bu uzaya ait uygulamalar için [52] çalışması faydalı olacaktır. Morrey uzayının bazı vanishing koşullarına sahip alt uzayları, A. Almeida ve S. Samko'nun [7] ve [9] çalışmalarında yer almıştır.[7] çalışmasında bu gibi vanishing özelliklerinin, integrallenebilir çekirdeğe sahip konvolüsyon operatörleri tarafından korunurluğu ortaya konulmuştur. Orijinde vanishing koşulunu sağlayan  $V_0 L^{p,\lambda}$  alt uzayında [50, 52, 57, 58] çalışmaları önerilir. Bu uzayların yeni tanımlanmış olması itibariyle  $V_\infty L^{p,\lambda}$  ve  $V_{(*)} L^{p,\lambda}$  uzaylarında harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıkları henüz çalışılmamıştır. Bu konudaki çalışmaların noksanlığı bu uzaylarda çalışmayı çekici hale getirmiştir.

[7] çalışmasında yazarlar vanishing tipli koşullar kullanarak  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının yeni bir kapalı alt uzayını tanımladılar. Bu uzay Zorko sınıfından kesinlikle daha küçüktür, uzayın tüm elemanları  $V_{0,\infty}^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ile sembolize edilir ve Morrey nor-

muyla  $C_0^\infty$  fonksiyonları tarafından yaklaşım, bu uzayda mümkündür. Özel olarak [7] makalesinde,  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında kapanışı ortaya konulmuştur. Morrey uzayındaki bu kapalılık harmonik analizde, Calderón-Zygmund teorisinde önemli bir rol oynamaktadır çünkü duali bir öndual oluşturur. Bu kapanışın bir benzeri farklı bir şekilde [73] çalışmasında verilmiştir. [32], [33] çalışmalarında yazarlar Morrey uzayında kompleks interpolasyonda  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının (ve kompakt desteğe sahip sınırlı fonksiyonlar kümesinin kapanışını) kullandılar ancak bu kapanışlara karakterizasyon sağlayamadılar.  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarının  $\lambda > 0$  için ayrılabilir olmadığını biliyoruz [56]. Klasik Morrey uzayının vanishing özelliğine sahip diğer alt uzayları, Almeida ve Samko tarafından [7] çalışmasında tanımlanmıştır.

$1 \leq p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda \leq n$  olsun, klasik  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey uzayının modülü

$$\mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, r) := \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0$$

olmak üzere Morrey normu

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, r)^{1/p}$$

olarak alınmaktadır.

### Tanım 3.1.1. $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Alt Uzayı

Morrey uzayları tekilliğe sahip fonksiyonlar içerebilmektedir. Bu yüzden Morrey uzayında birim fonksiyon ile yaklaşım iyi davranışlar göstermemektedir. Bu durum Morrey uzaylarının daha iyi özelliklere sahip alt uzaylarının tanımlanmasını gerekli kılmıştır.

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ile gösterdiğimiziz, orijinde vanishing özelliğine sahip Morrey alt uzayı

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, r) = 0 \quad (V_0)$$

koşulunu sağlayan tüm  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarından oluşur. Ayrıca bu uzayda tüm  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, r) = 0 \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ t \in ]0,r]}} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, t) = 0$$

yazılabilir.

$V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayı  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının kapalı bir alt uzayıdır ve Chiarenza and Franciosi [17] tarafından iraksak olmayan formdaki elliptik denklemler ile ilgilenirken tanımlanmıştır ayrıca bu alt uzaylar için, eliptik denklemlerin düzgünlük sonuçları Vitanza [71, 70] tarafından ortaya konulmuştur.  $L^p$  uzayındaki tüm fonksiyonlar bu özelliğe sahip olduğundan  $V_0L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ . Eğer  $\lambda > 0$  ise bu durumda

$V_0L^{p,0}(\mathbb{R}^n)$  uzayı  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının bir öz alt kümesi olur.  $V_0L^{p,0}(\mathbb{R}^n)$  uzayının bir başka ilginç özelliği de sınırlı bölgelerde sınırlı fonksiyonlar ile yaklaşımın bu uzayda mümkün olmasıdır [17].

**Tanım 3.1.2. (Zorko Uzayı)**  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının bir başka alt uzayı olan Zorko uzayı, öteleme operatörünün sürekli olduğu tüm  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarından oluşur. Yani  $1 \leq p < \infty$  ve  $\xi \in \mathbb{R}^n$  ve  $\tau_\xi f := f(\cdot - \xi)$  olmak üzere

$$\mathbb{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) : \xi \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad \|\tau_\xi f - f\|_{p,\varphi} \rightarrow 0\}$$

olarak tanımlıdır. Bu uzay Morrey uzayının kapalı bir alt uzayıdır ve molifier yardımıyla yaklaşım bu uzayda mümkündür [74].

Aşağıda verilen vanishing tipli  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  alt uzayları, Morrey uzaylarında iyi davranışlı fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım problemlerini incelemek amacıyla Almeida ve Samko'nun [7, 9] çalışmalarında tanımlanmıştır.

**Tanım 3.1.3.  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey Alt Uzayı**

Sonsuzda vanishing özelliğine sahip  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey alt uzayı,  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayı gibi tanımlanmaktadır ancak bu uzay için vanishing koşulu sonsuzda gerçekleşmektedir.

$0 \leq \lambda < n$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, r) = 0 \quad (V_\infty)$$

ifadesini sağlayan tüm  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarından oluşan uzaya sonsuzda vanishing özelliğine sahip  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey alt uzayı denir. Bu uzay Morrey normuna göre  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında kapalıdır.  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayı ayrıca, interpolasyon problemlerinde de ele alınmıştır [73].

**Tanım 3.1.4.  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey Alt Uzayı**

Bir başka vanishing özelliğine sahip  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Morrey alt uzayı;

$$\chi_N := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)}, \quad N \in \mathbb{N}$$

ve

$$\mathcal{A}_{N,p}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B(x,1)} |f(y)|^p \chi_N(y) dy$$

olmak üzere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(f) = 0 \quad (V^{(*)})$$

koşulunu sağlayan tüm  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır. Lebesgue baskın yakınsama teoremi ile tüm  $f$  fonksiyonlarının  $V^{(*)}$  özelliğine sahip olduğu

görülür. Böylece  $V^{(*)}L^{p,0} = L^p$  yazılır. Bir açıdan  $V^{(*)}$  özelliği, fonksiyonlar  $L^p$  uzayına ait olmadığı durumlarda karşılaşılan zorlukların üstesinden gelmeyi sağlamaktadır.  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  alt uzayı, Morrey uzaylarında iyi davranışlı fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım problemlerini incelemek amacıyla [7] çalışmasında tanıtılmıştır.

**Lemma 3.1.5.** Bir  $f \in L^{p,\lambda}$  fonksiyonunun  $V^{(*)}$  özelliğini sağlaması için ancak ve ancak  $R_0 > 0$  için  $r \in ]0, R_0]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \chi_N(y) dy = 0$$

olmalıdır [7].

**Tanım 3.1.6.**  $0 \leq \lambda < n$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayı,

$$V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda} = V_0L^{p,\lambda} \cap V_\infty L^{p,\lambda} \cap V^*L^{p,\lambda}$$

olacak şekilde  $L^{p,\lambda}$  Morrey uzayının bir alt uzayıdır. Bu uzay  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının, Morrey normuyla kapanışına karşılık gelir [7]. Diğer alt uzaylar gibi  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}$  uzayı da  $L^{p,\lambda}$  uzayında kapalıdır.

Aşağıdaki lemmalar, [57] çalışmasında yer almaktadır.

**Lemma 3.1.7.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 \leq \lambda < n$  ve  $T$  operatörü,  $p$ -admissible altliner singular tipli operatör olmak üzere,

$$\mathfrak{M}_{p,\lambda}(Tf; x, r) \leq Cr^{n-\lambda} \left( \int_r^\infty t^{\frac{\lambda-n}{p}-1} (\mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} dt \right)^p$$

eşitsizliği,  $C$  sabiti  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  ve  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonundan bağımsız olarak elde edilir.

**Uyarı 3.1.8.** Lemma 3.1.7. de verilen koşullar  $p$ -admissible altliner singular tipli operatörlerin  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  için  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlılığını sağlar. Ayrıca [57] de aynı koşullar kullanılarak bu operatörlerin  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlılıkları gösterilmiştir.

**Lemma 3.1.9.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$  ve  $0 \leq \lambda, \mu < n$  olsun. Bu durumda aşağıda verilen eşitsizlik

$$\mathfrak{M}_{q,\mu}(I^\alpha f; x, r) \leq Cr^{n-\mu} \left( \int_r^\infty t^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}-1} (\mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} dt \right)^q$$

sağ taraftaki  $C$  sabiti  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  ve  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  ifadelerinden bağımsız olarak elde edilir.

**Uyarı 3.1.10.** Lemma 3.1.9. da verilen koşullar altında  $I^\alpha$  Riesz potansiyel operatörünün  $L^{p,\lambda} \rightarrow L^{q,\mu}$  sınırlılığı için  $0 \leq \lambda < n - \alpha p$  ve  $\lambda/p = \mu/q$  ek kabülleri altında bir Sobolev-Spanne tipli bir sonuç elde edilir. Ayrıca [57] çalışmasında aynı koşullar altında, Riesz potansiyel operatörü  $I^\alpha$  ve fraksiyonel maksimal operatör  $M^\alpha$  nın  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_0L^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlılıkları ortaya konulmuştur.

### 3.2. Genelleştirilmiş Morrey Uzayının Yeni Alt Uzayları

Genelleştirilmiş Morrey Uzayının yeni bir alt uzayı olan Vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı  $V_0L^{p,\varphi}$  daha önce [57, 58, 13, 52, 50] çalışmalarında görülmüştür. Natasha Samko orijinde vanishing koşulunu sağlayan  $V_0L^{p,\varphi}$  alt uzayını tanımladığı [57] çalışmasında, Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve standart çekirdekli Calderon-Zygmund singüler operatorlerinin de aralarında bulunduğu bir alt lineer singüler operatör sınıfının sınırlılığını ispatlamıştır. Ayrıca aynı makalede  $I_\alpha$  potansiyel operatörü için Sobolev-Spanne tipli bir teoremin ispatı verilmiştir. Sınırlılık koşulları  $\varphi(x, r)$  üzerine monotonluk koşulu bırakılmadan Zygmund-tipli integral eşitsizlikleri ile elde edilmiştir.

Morrey uzayının bazı vanishing koşullarına sahip diğer alt uzayları  $V_\infty L^{p,\varphi}$  ve  $V_{(*)}L^{p,\varphi}$ , ilk olarak A. Almeida ve S. Samko'nun [9] çalışmasında tanıtılmıştır. Bu makalede klasik Morrey uzayları için geliştirilen yaklaşım planı genelleştirilmiş Morrey uzayına genişletilmiştir. Bu amaçla vanishing Morrey uzayı normunda  $r^\lambda$  ifadesi daha genel ve monotonluk koşullarını sağlayan  $\varphi(x, r)$  yerine  $\varphi(r)$  pozitif fonksiyonuyla değiştirilmiştir. Uygun vanishing özellikleriyle, genelleştirilmiş Morrey normuyla elemanları  $C_0^\infty$  fonksiyonları yardımıyla yaklaşımın, mümkün olduğu  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayının kapalı bir alt uzayını tanımlamışlardır. [9] çalışmasında bazı gömülmeler ispatlanarak ve bir takım örneklerle, Zorko sınıfının genelleştirilmiş bir versiyonu ve Morrey alt uzaylarının birbirleri ile ilişkisini ortaya konulmuştur, ayrıca bu gibi vanishing özelliklerinin, integrallenebilir çekirdeğe sahip konvolüsyon operatörleri tarafından korunurluğu gösterilmiştir.

Bu uzayların yeni tanımlanmış olması itibariyle harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıkları henüz  $V_\infty L^{p,\varphi}$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}$  uzaylarında çalışılmamıştır. Bu konudaki çalışmaların noksanlığı bu uzaylarda çalışmayı çekici hale getirmiştir.

Tez çalışmasının bu kısmında genelleştirilmiş Morrey uzayının [57] ve [9] makalelerinde yer alan yeni alt uzayları tanıtılmakta ve gerekli temel tanım ve teroemlere yer verilmektedir.

Natasha Samko  $V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayını aşağıdaki gibi tanımlamaktadır.

**Tanım 3.2.1.**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de açık bir bölge ve  $\Pi, \Omega$  nın keyfi bir alt kümesi olsun.  $\varphi(x, r)$  non-negatif fonksiyonu  $\Pi \times [0, l)$  ( $l$  çap) üzerinde tanımlı ve her  $(x, t) \in \Pi \times (0, l)$  için pozitif olsun.  $\widetilde{B}(x, r) = B(x, r) \cap \Omega$  ve  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere  $V L_{\Pi}^{p, \varphi}(\Omega)$  ile gösterilen vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı

$$\|f\|_{V L_{\Pi}^{p, \varphi}(\Omega)} = \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p, \varphi}(\widetilde{B}(x, r))}$$

yarı normunu sonlu yapan ve

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p, \varphi}(\widetilde{B}(x, r))} = 0 \quad (3.1)$$

koşulunu sağlayan  $f \in L_p^{loc}(\Omega)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Uzayın non trivial olması için  $\varphi(x, r)$  üzerine

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{r^n}{\varphi(x, r)} = 0 \quad (3.2)$$

$$\inf_{r > 1} \sup_{x \in \Pi} \varphi(x, r) > 0$$

koşulları bırakılmıştır.

$\varphi(x, r), \Pi \times [0, l)$  üzerinde non-negatif ölçülebilir ve her  $(x, t) \in \Pi \times (0, l)$  için, pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer  $\varphi$  fonksiyonu (3.2) koşullarını sağlıyor ise  $\varphi \in \mathfrak{B}$  olarak kabul edilir.

Almeida ve Samko [9] çalışmasında Vanishing Morrey uzaylarını modüler yardımı ile aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

**Tanım 3.2.2.** Orijinde vanishing özelliğine sahip vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı  $V_0 L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p, \varphi}(f; x, r) = 0. \quad (V_0)$$

koşulunu sağlayan tüm  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanmaktadır.  $V_0 L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayının non-trivial olması için  $\varphi \in \Phi$  ve

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^n}{\varphi(r)} = 0 \quad (3.3)$$

koşulu gereklidir. Böylece uzay, kompakt desteğe sahip sınırlı fonksiyonları kapsar.

Ayrıca (3.3) koşuluyla sınırlı Morrey fonksiyonları daima  $(V_0)$  vanishing özelliğini sağlar.  $V_0 L^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı  $L^{p, \varphi}$  normu ile bir Banach uzayıdır.

**Lemma 3.2.3.**  $1 \leq p < \infty, \varphi \in \Phi$  fonksiyonu (3.3) koşulunu sağlamak üzere

$$L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset V_0 L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\varphi(r) \approx 1 \quad \text{iken} \quad V_0 L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$$

olduğu görülmüştür.

**Tanım 3.2.4.** Sonsuzda vanishing özelliğine sahip vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, r) = 0$$

koşulunu sağlayan  $f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarından oluşur.

$V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında, bazı  $\varepsilon > 0$  için  $\frac{\varphi(r)}{r^\varepsilon}$  hemen hemen artan ve her  $\delta > 0$  için  $\inf_{r > \delta} \varphi(r) > 0$  olmak üzere uzayın non-trivial olması gerçekleşir.  $\varphi$  üzerine bırakılan bu kabullerle kompakt desteğe sahip sınırlı fonksiyonlar  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına ait olur.

Bundan sonra kısaca  $V_0 L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  and  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarına sırasıyla orijinde ve sonsuzda vanishing Morrey uzayları adını vereceğiz. Bu uzaylar  $\varphi(r) = r^\lambda$  alındığında klasik durumda,  $V_0 L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarına karşılık gelir.

Aşağıda verilen uzayın klasik versiyonu [7] çalışmasında ele alınmıştır. [9] çalışmasında yazarlar, büyük yuvarlarda kesme işlemi yaparak başka bir vanishing koşulunu ortaya koymuşlardır. Bunun için aşağıdaki notasyon kullanılmıştır.

**Tanım 3.2.5.**  $N \in \mathbb{N}$  için  $\chi_N := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)}$ , olsun.

$$\mathcal{A}_{N,p}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B(x,1)} |f(y)|^p \chi_N(y) dy$$

olacak şekilde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(f) = 0$$

özelliğine sahip  $f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının uzayı  $V^{(*)} L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ile gösterilir.

Bir  $f$  Morrey fonksiyonunun  $(V^*)$  koşulunu sağlaması için  $R_0 > 0$  sabit ve  $r \in ]0, R_0]$  olmak üzere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \chi_N(y) dy = 0$$

olması gereklidir.

Lebesgue baskın yakınsama teoremi yardımıyla tüm  $L^p$ -fonksiyonlarının  $(V^*)$  özelliğine sahip olduğu görülmüştür ve böylelikle

$$\varphi(r) \approx 1 \quad \text{iken} \quad V^{(*)} L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$$

olur.

$V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  alt uzayları Lebesgue uzaylarının dışında kalan Morrey uzayları ile ilgilenirken önem arz eder. Çünkü tüm  $L^p$ -fonksiyonları ( $V_0$ ) ve ( $V^*$ ) vanishing özelliğine sahiptirler. Ayrıca öteleme operatörü  $L^p$  normuna göre süreklidir. Bundan dolayı  $p \in [1, \infty)$  ve  $\varphi(r) \approx 1$  için

$$\mathbb{L}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir.

Orijinde genelleştirilmiş vanishing Morrey uzayı  $V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ , birçok çalışmada [13], [50], [52], [57] yer almış ancak  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayları literatürde ilk defa [9] çalışmasında Morrey uzaylarında iyi davranışlı fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım problemlerini çalışabilmek amacıyla tanıtılmıştır.

Bilindiği üzere birim fonksiyona yaklaşım, Morrey uzayı içinde iyi davranış göstermez çünkü bu uzayda tekilliğe sahip fonksiyonlar vardır. Bu özelliğin eksikliği kuvvet fonksiyonunun  $\varphi(r) = r^\lambda$  olduğu daha uygun Morrey uzaylarının araştırılmasını motive etmiştir. Örneğin 1986 da [74] çalışmasında, Morrey normuyla öteleme operatörünün sürekli olduğu Morrey fonksiyonlarından oluşan  $\mathbb{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  Zorko uzayı tanımlanmıştır. Aşağıda genelleştirilmiş Zorko uzayının tanımı verilmektedir.

**Tanım 3.2.6.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olmak üzere  $\xi \in \mathbb{R}^n$  öyle ki  $\xi \rightarrow 0$  ve  $\tau_\xi f := f(\cdot - \xi)$  iken

$$\mathbb{L}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \|\tau_\xi f - f\|_{p,\varphi} \rightarrow 0\}$$

uzayına genelleştirilmiş **Zorko uzayı** adı verilir.

**Tanım 3.2.7.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olmak üzere

$$V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) := V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir. Yukarıda tanımı verilen küçük Morrey sınıfı, ilerleyen bölümlerde önemli bir rol oynamaktadır.

**Uyarı 3.2.8.** Morrey uzayının alt uzayları olan  $\mathbb{L}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayları,  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  genelleştirilmiş Morrey uzayında kapalıdır [9].

**Lemma 3.2.9.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $T$  bir  $p$ -admissible sublinear singular tipli operatör olmak üzere

$$\mathfrak{M}_{p,\varphi}(Tf; x, r) \leq C \frac{r^n}{\varphi(r)} \left( \int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1+\frac{n}{p}}} (\mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} dt \right)^p$$

eşitsizliği,  $C$  sabiti  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  ve  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  den bağımsız olarak elde edilir [57].

Her ne kadar bu lemma  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için geçerli olsa da, eşitsizliğin sağ tarafının sonlu olması  $f$  fonksiyonunun hali hazırda sonsuzda bir takım saptanmış davranışlara sahip olmasını zorunlu kılar ve  $T$  operatörünün iyi davranışlı olmasını garantiler.

**Teorem 3.2.10.**  $1 < p < \infty$  olsun.  $\varphi \in \mathfrak{B}$  olmak üzere her  $\delta > 0$  için

$$\int_{\delta}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t) dt}{t^{1+\frac{n}{p}}} < \infty$$

oluyor ve

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t) dt}{t^{1+\frac{n}{p}}} \leq C \frac{\varphi^{\frac{1}{q}}(x, r)}{r^{\frac{n}{p}}}$$

eşitsizliğini sağlayan  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  den bağımsız bir  $C > 0$  sabiti varsa  $p$ -admissible singüler integral operatörü  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır [57].

**Lemma 3.2.11.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{M}_{q,\varphi}(I^{\alpha} f; x, r) \leq C \frac{r^n}{\varphi(r)} \left( \int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1+\frac{n}{q}}} (\mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} dt \right)^q$$

eşitsizliği,  $C$  sabiti  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  ve  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  den bağımsız olarak elde edilir [57].

### 3.3. Morrey Uzaylarında Konvolüsyon

Çekirdeği  $L^1(\mathbb{R}^n)$  uzayının elamanı olan konvolüsyonlar için Young eşitsizliği kullanılmaktadır. Bu eşitsizlik aynı zamanda  $L^p$  ve Morrey uzaylarında da geçerlidir. Young eşitsizliğinin Morrey uzayında kullanımı ile ilgili [12] çalışması faydalı olacaktır. Tez çalışmamızda konvolüsyon operatörlerince  $(V_0)$ ,  $(V_{\infty})$  ve  $(V^*)$  vanishing özelliklerinin korunmasını ele alacağız.

Aşağıdaki iki lemma [9] çalışmasından alınmıştır.

**Lemma 3.3.1.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olmak üzere, eğer  $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ve  $f$ ,  $\mathbb{R}^n$  de lokal olarak  $p$ -integrallenebilir ise her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için

$$\mathfrak{M}_{p,\varphi}(\mathcal{K} * f; x, r) \leq \|\mathcal{K}\|_1^p \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; z, r) \quad (3.4)$$

ve dolayısıyla,

$$\|\mathcal{K} * f\|_{p,\varphi} \leq \|\mathcal{K}\|_1 \|f\|_{p,\varphi}$$

olur.

**Lemma 3.3.2.**  $1 \leq p < \infty$  olsun. Eğer  $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ve  $f, \mathbb{R}^n$  de lokal integrallenebilir ise  $N \in \mathbb{N}$  için

$$(\mathcal{A}_{N,p}(\mathcal{K} * f))^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{K}(z)| (\mathcal{A}_{N-|z|,p}(f))^{1/p} dz \quad (3.5)$$

elde edilir.

(3.4) eşitsizliğinden, hem orijinde hem de sonsuzdaki vanishing özelliklerinin, integrallenebilir çekirdekli konvolüsyon operatörlerince korunduğu görülür. Ayrıca aynı durum ( $V^*$ ) için de geçerlidir. Gerçekten (3.5) eşitsizliği ve Lebesgue baskın yakınsama teoremi ile

$$N \rightarrow \infty \text{ iken } \mathcal{A}_{N,p}(\mathcal{K} * f) \rightarrow 0$$

elde edilir.

**Sonuç 3.3.3.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olmak üzere  $V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  Morrey altuzaylarının tümü,  $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  çekirdekli konvolüsyon operatörlerince değişmezdir.

$$f \in V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \implies \mathcal{K} * f \in V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad f \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \implies \mathcal{K} * f \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{ve} \quad f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \implies \mathcal{K} * f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

Lemma 3.4.1. in varlığıyla integrallenebilir çekirdekli konvolüsyon operatörlerinin  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlılığını bilinmektedir. Böylece çekirdeğe ekstra iyi özellikler bırakılarak bir morrey fonksiyonunun sınırlılığını elde edilebilir [9].

**Teorem 3.3.4.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\tilde{k}, [0, \infty)$  da non-negatif bir  $C^1$  fonksiyonu olmak üzere  $\mathcal{K}(x) = \tilde{k}(|x|)$  çekirdeği  $\mathbb{R}^n$  de integrallenebilir ve

$$r \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \tilde{k}(r) r^{\frac{n}{p'}} \varphi(r)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \text{ yakınsar.} \quad (3.6)$$

Ayrıca

$$C(\mathcal{K}, \varphi, p) := \int_0^\infty |\tilde{k}'(r)| r^{\frac{n}{p'}} \varphi(r)^{\frac{1}{p}} dr < \infty \quad (3.7)$$

olmak üzere  $\mathcal{K}$  çekirdekli konvolüsyon operatörü  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır ve her  $f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  için

$$\|\mathcal{K} * f\|_\infty \leq \omega_n^{\frac{1}{p'}} C(\mathcal{K}, \varphi, p) \|f\|_{p,\varphi}$$

elde edilir [9].

**Uyarı 3.3.5.** Teorem 3.3.4. ün koşullarını aşağıda verilen heat çekirdeği sağlamaktadır :

$$\mathcal{K}_t(x) = c_n t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0 \quad (3.8)$$

Burada  $c_n > 0$  sabiti  $n$ 'e bağlıdır. Bu özel durum [36] çalışmasında klasik Morrey uzayı için ele alınmıştır.

Standart molifier yardımıyla Zorko özellikli Morrey fonksiyonlarına yaklaşım için aşağıdaki bilgiler faydalı olacaktır.

$\mathcal{K}$ ,  $\mathbb{R}^n$  de  $\|\mathcal{K}\|_1 = 1$  olacak şekilde  $t > 0$  için  $\mathcal{K}_t(x) = t^{-n}\mathcal{K}(x/t)$  genişlemesine sahip integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Minkowski eşitsizliği ile

$$\|f * \mathcal{K}_t - f\|_{p,\varphi} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz}f - f\|_{p,\varphi} |\mathcal{K}(z)| dz$$

elde edilir. Eğer  $f \in \mathbb{L}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ise  $t \rightarrow 0$  iken  $\|\tau_{tz}f - f\|_{p,\varphi} \rightarrow 0$  dir.

$\|\tau_{tz}f - f\|_{p,\varphi} \leq 2\|f\|_{p,\varphi}$  olduğundan dolayı herhangi bir  $t > 0$  ve  $z \in \mathbb{R}^n$  için Lebesgue baskın yakınsama teoremi yardımıyla

$$t \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad \|f * \mathcal{K}_t - f\|_{p,\varphi} \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

olduğu görülür [9].



#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tez çalışmasının bu bölümünde klasik operatörlerin ve komutatörlerinin, vanishing Morrey tipli uzaylarda sınırlılıklarına dair elde edilen bulgular dört farklı kısımda sunulmaktadır. Birinci kısımda  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında ele aldığımız operatörlerin sınırlılıkları ispatlanmıştır. İkinci kısımda  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve bu alt uzayların klasik operatörlerin davranışlarına göre değişmez olduğu gösterilmiştir. Üçüncü kısımda,  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında maksimal, fraksiyonel maksimal ve Riesz operatörlerinin komutatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır. Dördüncü kısımda ise ağırlıklı genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında,  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörleri ile  $S$  oscillatory ve  $S_\alpha$  fraksiyonel oscillatory integral operatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmış ve ardından  $M_{\alpha,b}$  ve  $I_{\alpha,b}$  komutatörleri ile  $S_b$  ve  $S_{\alpha,b}$  komutatörlerinin  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  uzayından,  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(\mathbb{R}^n; w^q)$  uzayına sınırlılıkları gösterilmiştir.

##### 4.1. Vanishing Morrey uzayında Klasik Operatörlerin Sınırlılığı

Bu bölümde  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  alt-uzaylarında klasik operatörlerin sınırlılığı ispatlanmaktadır. Klasik operatörlerin Morrey uzaylarında sınırlılıkları bilindiği için ele aldığımız operatörler tarafından vanishing özelliklerinin korunduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu operatörler için sırasıyla  $(V^\infty)$  ve  $(V^{(*)})$  özelliklerinin korunduğu gösterilmektedir. Bu kesimde elde ettiğimiz sonuçlar [5] makalesinde yayınlanmıştır.

**Teorem 4.1.1.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $p$ -admissible alt lineer singular tipli  $T$  operatörü  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:**  $f \in V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olsun. Her  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq R$  ve herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için  $\mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, t) < \varepsilon$  olacak şekilde  $R = R(\varepsilon) > 0$  vardır. Bu durumda  $r \geq R$  için ve Lemma 3.1.7 den

$$\mathfrak{M}_{p,\lambda}(Tf; x, r) \leq C_\varepsilon r^{n-\lambda} \left( \int_r^\infty t^{\frac{\lambda-n}{p}-1} dt \right)^p \leq C_\varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade  $x$  ve  $r$  den bağımsız olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(Tf; x, r) = 0$$

elde edilir ki bu  $Tf \in V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.1.2.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $M$ ,  $H$ ,  $\mathcal{H}$  ve  $\mathbb{S}$  operatörleri  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

Bu kısım ve devamında  $0 < \alpha < n$  olmak üzere  $I^\alpha$ ,  $M^\alpha$ ,  $H^\alpha$  ve  $\mathcal{H}^\alpha$  operatörlerinden herhangi biri için  $T^\alpha$  sembolünü kullanacağız.

**Teorem 4.1.3.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $0 \leq \lambda < n - \alpha p$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$  ve  $\lambda/p = \mu/q$  olmak üzere  $T^\alpha$  operatörü  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_\infty L^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:**  $I^\alpha$  operatörü teoremin koşulları altında  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır [49]. Böylelikle  $M^\alpha$ ,  $H^\alpha$  and  $\mathcal{H}^\alpha$  operatörleri için de benzer norm eşitsizlikleri sağlanır. Riesz potansiyel operatörü  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında, vanishing özelliğini koruduğundan dolayı Maksimal ve Hardy operatörlerinin de benzer yaklaşımla bu uzayda  $V_\infty$  özelliğini koruduğu söylenebilir. Bu yüzden  $r \rightarrow \infty$  iken

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, r) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{q,\mu}(I^\alpha f; x, r) \rightarrow 0$$

önermesini ispatlamak yeterlidir. Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi, Lemma 3.1.9 daki modular yaklaşım kullanılarak da istenen sonuç elde edilebilir. Ancak Lebesgue baskın yakınsama teoremi uygulayarak, farklı bir şekilde ispatı vereceğiz.  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{q,\mu}(I^\alpha f; x, r) &\lesssim r^{n-\mu} \left( \int_r^\infty t^{\frac{\lambda}{p} - \frac{n}{q} - 1} (\mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} dt \right)^q \\ &= \left( \int_1^\infty s^{\frac{\lambda}{p} - \frac{n}{q} - 1} (\mathfrak{M}_{p,\lambda}(f; x, rs))^{\frac{1}{p}} ds \right)^q \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafında elde edilen sabit  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  dan bağımsız olduğundan,  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $\lambda/p < n/q$  olduğunu göz önüne alarak (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafının  $r \rightarrow \infty$  iken her  $x \in \mathbb{R}^n$  için sifira düzgün yakınsadığı sonucu elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

**Teorem 4.1.4.**  $0 < \alpha < n$ ,  $0 \leq \lambda < n$ ,  $1 < p < (n - \lambda)/\alpha$  ve  $1/q = 1/p - \alpha/(n - \lambda)$  olmak üzere  $T^\alpha$  operatörü  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_\infty L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 4.1.3. de olduğu gibi yalnızca Riesz potansiyel operatörü için sınırlılığı göstermemiz yeterlidir.  $I^\alpha$  operatörünün teoremin koşulları altında  $L^{p,\lambda} \rightarrow L^{q,\lambda}$  sınırlılığını biliyoruz [1]. Sonsuzda vanishing özelliğinin korunduğunu göstermek için aşağıdaki noktasal eşitsizliği kullanacağız.  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$|I^\alpha f(x)| \leq c (Mf(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{1 - \frac{p}{q}} \quad (4.2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $c > 0$  sayısı vardır [13, 3]. (4.2) eşitsizliğinde  $r > 0$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$\mathfrak{M}_{q,\lambda}(I^\alpha f; x, r) \leq C \|f\|_{p,\lambda}^{q-p} \mathfrak{M}_{p,\lambda}(Mf; x, r)$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç 4.1.2. gereği  $f \in V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  iken  $Mf \in V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan yukarıdaki noktasal eşitsizlikten  $f \in V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  iken  $I^\alpha f \in V_\infty L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

Aşağıdaki teoremlerde, klasik operatörlerin davranışları altında  $V^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının invaryant olduğu gösterilmiştir.

**Teorem 4.1.5.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $M$  maksimal operatörü  $V^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:**  $M$  operatörü  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlı olduğundan [16], yalnızca  $(V^*)$  vanishing özelliğinin korunduğunu yani

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(Mf) = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $N \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\Omega_{x,N} := B(x, 2) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, N))$$

notasyonunu kullanarak

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{ve} \quad f_1 := f \chi_{\Omega_{x,N/2}}, \quad f_2 = f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}}$$

$f$  fonksiyonunu yukarıdaki gibi iki parça olarak kabul edelim.

$M$  operatörünün alt lineerliğinden

$$\mathcal{A}_{N,p}(Mf) \lesssim \mathcal{A}_{N,p}(Mf_1) + \mathcal{A}_{N,p}(Mf_2). \quad (4.3)$$

yazılabilir. Ardından eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki niceliğin  $N \rightarrow \infty$  için sifıra gittiğini göstermemiz gerekiyor.  $M$  operatörünün  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayındaki sınırlılığı sayesinde

$$\int_{B(x,1)} (M(f_1)(y))^p \chi_N(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} (M(f_1)(y))^p dy \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|^p dy = \int_{\Omega_{x,N/2}} |f(y)|^p dy$$

eşitsizliği  $x$ ,  $N$  ve  $f$  den bağımsız olarak elde edilir.  $f \in V^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafı  $N \rightarrow \infty$  iken her  $x \in \mathbb{R}^n$  için sifıra düzgün yakınsar.  $(V^*)$  özelliği  $x$  merkezli yuvarlarda yarıçapının özel seçimine bağlı olmadığından [7],  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(Mf_1) = 0$  olur.

(4.3) eşitsizliğinin ikinci terimini hesaplayalım,  $\varepsilon > 0$  keyfi olmak üzere her  $t \geq t_1$  için  $t^{\lambda-n} < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $t_1 > 1$  vardır. Sabitlenmiş bir  $t_1$  için

$$I_1(x, N) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \sup_{0 < t < t_1} \left[ \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x, N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

ve

$$I_2(x, N) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \sup_{t \geq t_1} \left[ \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x, N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

olmak üzere

$$\int_{B(x,1)} (M(f_2)(y))^p \chi_N(y) dy \lesssim I_1(x, N) + I_2(x, N)$$

şeklinde iki parçaya ayıralım. İlk önce  $I_2(x, N)$  ifadesini hesaplayalım. Hölder eşitsizliğinden

$$\frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)| dz \leq \frac{1}{|B(y, t)|^{1/p}} \|f\|_{L^p(B(y,t))}$$

elde ederiz. Böylece

$$I_2(x, N) \leq \int_{B(x,1)} \sup_{t \geq t_1} \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)|^p dz \leq C \int_{B(x,1)} \sup_{t \geq t_1} \frac{1}{t^{n-\lambda}} \|f\|_{p,\lambda}^p \leq \varepsilon \|f\|_{p,\lambda}^p$$

hesabına ulaşılır.  $I_1(x, N)$  ifadesi için  $z \in B(y, t)$  ve  $z \notin \Omega_{x, N/2}$  olacak şekilde iki durumu analiz etmemiz gerekmektedir. Eğer  $z \in B(0, N/2)$  alırsak  $t > |z - y| > |z| - |y| > N/2$  olur. Bu durumda  $N \geq 2t_1$  için  $t \in (0, t_1)$  üzerinde supremum alınırken bir etkisi yoktur. Eğer  $z \notin B(x, 2)$  alınırsa  $t > |z - y| \geq |z - x| - |y - x| \geq 1$  olur ve geriye  $t \in (1, t_1)$  üzerinden supremum alınırken  $I_1(x, N)$  ifadesini hesaplamak kalır.  $t$  nin bu değerleri için

$$t^{-n} \int_{B(y,t)} |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x, N/2}}(z) dz \leq \int_{B(y,t_1)} |f(z)| dz = \int_{B(0,t_1)} |f(y - z)| dz$$

yazılabilir. Minkowski eşitsizliği ve değişken değiştirme yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned} I_1(x, N) &\leq \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,t_1)}(z) |f(y - z)| dz \right]^p dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,t_1)}(z) \left[ \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \int_{B(v,1)} |f(u)|^p \chi_{N-|z|}(u) du \right]^{1/p} dz \right)^p \\ &=: \left( \int_{\mathbb{R}^n} g_N(z) dz \right)^p \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$a \leq 0 \text{ ise } \chi_a := 1 \quad \text{ve} \quad a > 0 \text{ ise } \chi_a := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,a)}$$

alınırsa,  $I_1(x, N)$  için düzgün sınırlılık elde edilir.  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $g_N(z)$ ,  $t_1$ 'e bağlı bir üst sınıra sahip olacak şekilde integrallenebildiğinden, Lebesgue yakınsama teoremi kullanılarak  $N \rightarrow \infty$  iken  $\int_{\mathbb{R}^n} g_N(z) dz \rightarrow 0$  elde edilir. Bu  $N \rightarrow \infty$  iken  $I_1(x, N) \rightarrow 0$  yakınsamasının düzgün olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.1.6.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $M^\#$  operatörü ile  $H$  ve  $\mathcal{H}$  Hardy operatorleri  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:**  $M^*$  ve  $H$  operatörünün  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayındaki sınırlılığı Teorem 4.1.5 ve (2.7) eşitsizliğinin bir sonucudur. Ancak  $\mathcal{H}$  operatörünü, maksimal operatör ile mukayese edemediğimiz için farklı bir yaklaşıma ihtiyaç vardır.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \mathcal{H}f(z) = 0$$

olursa  $\varepsilon > 0$  için tüm  $|y| \geq N_\varepsilon$  için  $|\mathcal{H}f(y)| \leq (\varepsilon/v_n)^{1/p}$  olacak şekilde  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  vardır. Bu sayede her  $N \geq N_\varepsilon$  için

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}f(y))^p \chi_{B(x,1) \cap \{y:|y|>N\}}(y) dy \leq \varepsilon/v_n \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x,1) \cap \{y:|y|>N\}}(y) dy \leq \varepsilon$$

ifadesi her  $x \in \mathbb{R}^n$  için sıfıra düzgün yakınsar. Buradan  $N \rightarrow \infty$  iken  $\mathcal{A}_{N,p}(\mathcal{H}f) \rightarrow 0$  elde edilir.

$\mathcal{H}$  Hardy operatörünün davranışına bağlı olarak  $(V^*)$  özelliğinin korunumu ile ilgili daha güçlü bir sonuç elde edilebilir. Gerçekten yukarıdaki ispatta da görüleceği gibi  $\mathcal{H}$  Hardy operatörü  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayının tamamından  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**Teorem 4.1.7.**  $0 < \alpha < n$ ,  $0 \leq \lambda < n$ ,  $1 < p < (n-\lambda)/\alpha$  ve  $1/q = 1/p - \alpha/(n-\lambda)$  olmak üzere  $T^\alpha$  operatörü  $V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V^{(*)}L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** (4.2) eşitsizliği yardımıyla

$$\mathcal{A}_{N,q}(I^\alpha f) \leq C \|f\|_{p,\lambda}^{q-p} \mathcal{A}_{N,p}(Mf)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte sağ tarafta elde edilen sabit  $N \in \mathbb{N}$  ve  $f$  fonksiyonundan bağımsızdır. Teorem 4.1.5. gereği  $f \in V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ise  $Mf \in V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten aynı zamanda  $I^\alpha f \in V^{(*)}L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  sonucu elde edilir.

### $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ Uzayının Kapamışının Değişmezliği

Literatürde, [7] çalışmasında ortaya konulduğu üzere

$$V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

alt uzayı,  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının Morrey normuna göre kapanışı ile çakışır. Bu kapanış harmonik analizde Morrey uzayları için önemli bir rol oynamaktadır çünkü duali Morrey uzayları için bir predual oluşturur [3, 2, 56, 68]. Ayrıca aşağıdaki gömülmenin varlığı bilinmektedir [7].

$$V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subsetneq V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subsetneq V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

Bu bilgiler ışığında ve  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayındaki bilinen sınırlılıklar yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

**Sonuç. 4.1.8.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $M$ ,  $H$  ve  $\mathcal{H}$  operatörleri  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**Sonuç. 4.1.9.**  $0 < \alpha < n$ ,  $0 \leq \lambda < n$ ,  $1 < p < (n - \lambda)/\alpha$  ve  $1/q = 1/p - \alpha/(n - \lambda)$  olmak üzere  $T^\alpha$  operatörü  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

Şimdi de çekirdeği (2.4) koşulunu sağlayan singular integral operatörü için bir sonuç verelim.  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $\mathbb{S}$  operatörü  $V_0L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır [57]. Ayrıca  $\mathbb{S}$  operatörünün  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlı olduğunu da biliyoruz (Sonuç 4.1.2.). Ancak ne yazık ki  $\mathbb{S}$  operatörünün  $(V^*)$  koşulunu sağlayıp sağlamadığını bilmiyoruz. Bu nedenle aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

**Teorem 4.1.10.**  $1 < p < \infty$  ve  $0 \leq \lambda < n$  olmak üzere  $\mathbb{S}$  operatörü  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

### İspat:

Kompakt desteğe sahip sınırlı  $f$  fonksiyonları, yeterince büyük  $|y|$  ler için  $c > 0$  sabiti  $y$  den bağımsız olacak şekilde

$$|\mathbb{S}f(y)| \leq \frac{c}{|y|^n} \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten  $\text{supp } f \subset B(0, M)$  alırsak

$$|z| \leq M \quad \text{ve} \quad |y| \geq 2M \quad \text{için} \quad |y - z| \geq |y| - M \geq \frac{|y|}{2}$$

elde edilir. Buradan (4.4) eşitsizliği, size koşulu (2.4) yardımıyla elde edilir.

$f \in V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olsun. Bu durumda  $k \rightarrow \infty$  iken  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında  $f_k \rightarrow f$  olacak şekilde bir  $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dizisi vardır.  $\mathbb{S}$  operatörünün sürekliliğinden

$$\mathbb{S}f = \mathbb{S}(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbb{S}f_k)$$

yazılabilir.  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  alt uzayı  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  da kapalı olduğundan  $\mathbb{S}f \in V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  sonucu elde edilir.

## 4.2. Genelleştirilmiş Vanishing Morrey Uzayında Klasik Operatörlerin Sınırlılığı

Bu bölümde klasik operatörlerin,  $V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında sınırlılıkları ispatlanmıştır. Bu operatörlerin Morrey uzayında sınırlı olduğu bilindiğinden, operatörlerin  $(V_{\infty})$  ve  $(V^{(*)})$  vanishing özelliklerini korunduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu kesimde elde edilen sonuçlar [6] makalesinde yayımlanmıştır.

**Teorem 4.2.1.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \bar{\Phi}$  olmak üzere

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1+\frac{n}{p}}} dt \leq C \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(r)}{r^{\frac{n}{p}}} \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $r > 0$  dan bağımsız bir  $C > 0$  sabiti var olsun. Bu durumda  $p$ -admissible alt-linear singular tipli  $T$  operatörü  $V_{\infty}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 3.2.10 dan  $p$ -admissible alt-linear singular tipli  $T$  operatörünün sınırlılığı bilindiğinden  $f \in V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  iken  $Tf \in V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $f \in V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olsun. Bu durumda herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için her  $t \geq R$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  iken  $\mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, t) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $R = R(\varepsilon) > 0$  vardır. Buradan  $r \geq R$  için ve Lemma 3.2.9. dan

$$\mathfrak{M}_{p,\varphi}(Tf; x, r) \leq C\varepsilon \frac{r^n}{\varphi(r)} \left( \int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1+\frac{n}{p}}} dt \right)^p \lesssim \varepsilon$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafında elde edilen sabit,  $x$  ve  $r$  den bağımsız olduğundan

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(Tf; x, r) = 0$$

yazılabilir ve buradan  $Tf \in V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğu sonucu elde edilir.

**Sonuç 4.2.2.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \bar{\Phi}$  olsun. Eğer  $\varphi$  fonksiyonu (4.5) integral koşulunu sağlıyorsa  $M$ ,  $H$ ,  $\mathcal{H}$  ve  $\mathbb{S}$  operatörleri  $V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**Teorem 4.2.3.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$  ve  $\varphi, \psi \in \Phi$  olmak üzere, eğer

$$\int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1+\frac{n}{q}}} dt \leq C \frac{\psi^{\frac{1}{q}}(r)}{r^{\frac{n}{q}}} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $r > 0$  dan bağımsız bir  $C > 0$  sabiti var ise bu durumda  $T^\alpha$  operatörü  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_\infty L^{q,\psi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:**  $I^\alpha$  operatörünün  $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olduğundan dolayı [47], benzer norm eşitsizlikleri  $M^\alpha$ ,  $H^\alpha$  ve  $\mathcal{H}^\alpha$  operatörleri için de sağlanır. Bu nedenle yalnızca Riesz potansiyel operatörünün davranışını incelemek yeterlidir. Yani

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, r) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{q,\psi}(I^\alpha f; x, r) \rightarrow 0$$

ifadesini kanıtlamamız gerekiyor. Lemma 3.2.11 de verilen

$$\mathfrak{M}_{q,\psi}(I^\alpha f; x, r) \leq C \frac{r^n}{\psi(r)} \left( \int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1+\frac{n}{q}}} (\mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} dt \right)^q$$

eşitsizlik yardımıyla Teorem 4.2.1. deki yol izlenerek istenen sonuç elde edilir.

**Teorem 4.2.4.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$  ve  $q > p$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonunu (4.5) koşulunu sağlasın. Eğer

$$\int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(t)}{t^{1-\alpha+\frac{n}{q}}} dt \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (4.7)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $r > 0$  dan bağımsız bir  $C > 0$  sabiti var ise bu durumda  $T^\alpha$  operatörü  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_\infty L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 4.2.3 de olduğu gibi ispatı sadece Riesz operatörü için yapmak yeterlidir. (4.5) koşulunu altında  $I^\alpha$  operatörünün  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olduğu (Guliyev) çalışmasından bilindiğinden sonsuzda vanishing özelliğini göstermek yeterlidir. (4.7) koşulu altında  $r > 0$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$\mathfrak{M}_{q,\varphi}(I^\alpha f; x, r) \leq C \|f\|_{p,\varphi}^{q-p} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(Mf; x, r)$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç 4.2.2 gereği  $f \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ise  $Mf \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten  $I^\alpha f \in V_\infty L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  sonucu elde edilir.

**Teorem 4.2.5.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun. Eğer  $\varphi$  fonksiyonu (4.5) koşulunu sağlıyor ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t^n} = 0 \quad (4.8)$$

ise bu durumda  $M$  maksimal operatörü  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:**  $\varphi$  fonksiyonu (4.5) koşulunu sağladığında  $M$  operatörü  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlı olduğundan [16], yalnızca  $(V^*)$  vanishing özelliğinin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Yani

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(Mf) = 0$$

önermesini ispatlamamız gerekir. Verilen  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $N \in \mathbb{N}$  için

$$\Omega_{x,N} := B(x, 2) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, N))$$

olmak üzere  $f$  fonksiyonunu

$$f_1 := f \chi_{\Omega_{x,N/2}} \quad \text{ve} \quad f_2 = f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}}$$

olmak üzere  $f = f_1 + f_2$  şeklinde yazalım.

$M$  operatörünün alt linerliğinden

$$\mathcal{A}_{N,p}(Mf) \lesssim \mathcal{A}_{N,p}(Mf_1) + \mathcal{A}_{N,p}(Mf_2) \quad (4.9)$$

yazılabilir. Şimdi  $N \rightarrow \infty$  iken eşitsizliğin sağ tarafındaki iki terimin de sifıra gittiğini göstermeliyiz.

$M$  operatörünün  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzayındaki sınırlılığı ile aşağıdaki eşitsizlik,

$$\begin{aligned} \int_{B(x,1)} (M(f_1)(y))^p \chi_N(y) dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (M(f_1)(y))^p dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|^p dy \\ &= C \int_{\Omega_{x,N/2}} |f(y)|^p dy \end{aligned}$$

$x$ ,  $N$  ve  $f$  den bağımsız bir  $C$  sabitiyle elde edilir.  $f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafı  $N \rightarrow \infty$  iken sifıra düzgün yakınsar.  $(V^*)$  özelliği yuvarın merkez noktasından ve yarıçapından bağımsız olduğundan [7],  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(Mf_1) = 0$  olur.

Şimdi (4.9) eşitsizliğindeki toplamın ikinci terimiyle ilgilenelim.  $\varepsilon > 0$  keyfi olacak şekilde her  $t \geq t_1$  için  $t^{-n}\varphi(t) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $t_1 > 1$  vardır. Sabitlenmiş bu  $t_1$  için

$$\int_{B(x,1)} (M(f_2)(y))^p \chi_N(y) dy \leq CI_1(x, N) + I_2(x, N)$$

eşitsizliğini

$$I_1(x, N) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \sup_{0 < t < t_1} \left[ \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x, N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

ve

$$I_2(x, N) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \sup_{t \geq t_1} \left[ \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x, N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

olacak şekilde iki terimli olarak ele alalım. Öncelikle  $I_2(x, N)$  ifadesini hesaplayalım. Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)| dz \leq \frac{1}{|B(y, t)|^{1/p}} \|f\|_{L^p(B(y,t))}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} I_2(x, N) &\leq \int_{B(x,1)} \sup_{t \geq t_1} \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)|^p dz \\ &\leq C \int_{B(x,1)} \sup_{t \geq t_1} \frac{\varphi(t)}{t^n} \|f\|_{p,\varphi}^p \\ &\leq \varepsilon \|f\|_{p,\varphi}^p \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.  $I_1(x, N)$  ifadesini hesaplayabilmek için iki ayrı durumu incelemek gerekir.  $z \in B(y, t)$  ve  $z \notin \Omega_{x, N/2}$  olacak şekilde iki durumda analiz etmemiz gerekmektedir. Eğer  $z \in B(0, N/2)$  alırsak  $t > |z - y| > |z| - |y| > N/2$  olur. Böylece  $N \geq 2t_1$  için  $t \in (0, t_1)$  üzerinden alınan supremumun sonuca bir etkisi yoktur. Ancak  $z \notin B(x, 2)$  alınırsa  $t > |z - y| \geq |z - x| - |y - x| \geq 1$  olur ki geriye  $t \in (1, t_1)$  üzerinden supremum alınırken  $I_1(x, N)$  ifadesini hesaplamak kalır.  $t$  nin bu değerleri için

$$t^{-n} \int_{B(y,t)} |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x, N/2}}(z) dz \leq \int_{B(y,t_1)} |f(z)| dz = \int_{B(0,t_1)} |f(y - z)| dz$$

elde edilir. Minkowski eşitsizliği ve değişken değiştirme yöntemiyle

$$\begin{aligned} I_1(x, N) &\leq \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,t_1)}(z) |f(y - z)| dz \right]^p dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,t_1)}(z) \left[ \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \int_{B(v,1)} |f(u)|^p \chi_{N-|z|}(u) du \right]^{1/p} dz \right)^p \\ &= : \left( \int_{\mathbb{R}^n} g_N(z) dz \right)^p \end{aligned}$$

elde edilir.

$$a \leq 0 \text{ ise } \chi_a := 1 \quad \text{ve} \quad a > 0 \text{ ise } \chi_a := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,a)}$$

alınırsa,  $I_1(x, N)$  için düzgün sınırlılık elde edilir.  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $g_N(z)$ ,  $t_1$ 'e bağlı bir üst sınıra sahip olacak şekilde integrallenebildiğinden, Lebesgue yakınsama teoremi kullanılarak  $N \rightarrow \infty$  iken  $\int_{\mathbb{R}^n} g_N(z) dz \rightarrow 0$  elde edilir. Bu  $N \rightarrow \infty$  iken  $I_1(x, N) \rightarrow 0$  yakınsamasının düzgün olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.2.6.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi$  fonksiyonu (4.5) ve (4.8) koşullarını sağlıyor ise bu durumda  $M^\#$  operatörü ve  $H$  Hardy operatörü  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:** (2.5) ve (2.7) eşitsizlikleri kullanılarak Teorem 4.2.5. den istenen sonuç elde edilir.

**Uyarı:**  $\mathcal{H}$  Hardy operatörünün davranışına bağlı olarak  $(V^*)$  özelliğinin korunumu ile yukarıdaki ispatta da görüleceği gibi  $\mathcal{H}$  Hardy operatörü,  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayının tamamından  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**Teorem 4.2.7.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$  ve  $q > p$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu (4.5), (4.7) ve (4.8) koşullarını sağlıyor ise bu durumda  $T^\alpha$  operatörü  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V^{(*)}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:**  $f$  fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2r)}, \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)}$$

olacak şekilde iki parça olarak alırsak;

$$I^\alpha f(y) = I^\alpha f_1(y) + I^\alpha f_2(y)$$

elde ederiz.  $I^\alpha f_1(y)$  için

$$|I^\alpha f_1(y)| \lesssim r^\alpha Mf(y)$$

yazılabilir.  $I^\alpha f_2(y)$  için ise

$$|I^\alpha f_2(y)| \leq C \int_r^\infty \|f\|_{L^p(B(y,t))} t^{\alpha - \frac{n}{p} - 1} dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece Teoremde kabul edilen koşullar yardımıyla her  $f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $r > 0$  için

$$|I^\alpha f(y)| \leq Cr^\alpha Mf(y) + r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \|f\|_{p,\varphi}$$

yazılabilir. Böylelikle

$$\mathcal{A}_{N,q}(I^\alpha f) \leq C \|f\|_{p,\lambda}^{q-p} \mathcal{A}_{N,p}(Mf)$$

eşitsizliği,  $C$  sabiti  $N \in \mathbb{N}$  ve  $f$  den bağımsız olacak şekilde elde edilir. Böylece Teorem 4.2.5. gereği  $f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}$  iken  $Mf \in V^{(*)}L^{p,\varphi}$  olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten  $I^\alpha f \in V^{(*)}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

### $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ Uzayının Kapanışının Değişmezliği

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının  $\|\cdot\|_{p,\varphi}$  Morrey normuna göre kapanışını  $L_0^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ile göstere-  
lim.  $\varphi$  fonksiyonu (3.3) ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log^p t}{\varphi(t)} = 0 \quad (4.10)$$

koşulunu sağlıyor ise

$$L_0^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) =: V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

şeklinde vanishing özelliğine sahip üç alt uzay yardımı ile açıkça ifade edilebilir [9]. Bu kapanış harmonik analizde Morrey uzayları için, önemli bir rol oynamaktadır çünkü duali Morrey uzayları için bir predual oluşturur [3, 2, 56, 68]. Ayrıca [9] çalışmasında

$$V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subsetneq V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subsetneq V_0L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

şeklindeki gömülmelerin geçerli olduğu ispatlanmıştır.

**Sonuç 4.2.8.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun. Eğer  $\varphi$  fonksiyonu (4.5) Zygmund tipli integral koşulunu ve (3.3), (4.8) ve (4.10) limit koşullarını sağlıyor ise  $M$ ,  $M^\#$ ,  $H$  ve  $\mathcal{H}$  operatörleri  $L_0^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**Sonuç 4.2.9.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$  ve  $q > p$  olsun. Eğer  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu (4.5) Zygmund tipli integral koşulunu ve (3.3), (4.8) ve (4.10) limit koşullarını sağlıyor ise bu durumda  $M$ ,  $M^\#$ ,  $H$  ve  $\mathcal{H}$  operatörleri  $L_0^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**Teorem 4.2.10.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olmak üzere, eğer  $\varphi$  fonksiyonu (4.5) Zygmund tipli integral koşulunu ve (3.3) ve (4.10) limit koşullarını sağlıyor ise bu durumda  $\mathbb{S}$  operatörü  $L_0^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:** Sınırlı kompakt desteğe sahip  $f$  fonksiyonları, yeterince büyük  $|y|$  ler için

$c > 0$ ,  $y$  den bağımsız olacak şekilde

$$|\mathbb{S}f(y)| \leq \frac{c}{|y|^n} \quad (4.11)$$

eşitsizliğini sağlar. Gerçekten  $\text{supp } f \subset B(0, M)$  alırsak

$$|z| \leq M \quad \text{ve} \quad |y| \geq 2M \quad \text{için} \quad |y - z| \geq |y| - M \geq \frac{|y|}{2}$$

elde edilir ve böylece (2.4) eşitsizliği yardımıyla (4.11) sağlanır.

$f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olarak kabul edersek  $k \rightarrow \infty$  iken  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında  $f_k \rightarrow f$  olacak şekilde bir  $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dizisi vardır.  $\mathbb{S}$  operatörünün  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayındaki sürekliliğinden

$$\mathbb{S}f = \mathbb{S}(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbb{S}f_k)$$

yazılabilir. Böylece vanishing tipli alt uzayların  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  deki kapalılığından  $\mathbb{S}f \in L_0^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

### 4.3. Genelleştirilmiş Vanishing Morrey Uzayında Klasik Operatörlerin Kommutatörlerinin sınırlılığı

Bu bölümde  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^* L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarında, maksimal operatör, fraksiyonel maksimal operatör ve Riesz operatörünün kommutatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır.  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^* L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında maksimal operatörün ve fraksiyonel maksimal operatörün kommutatörlerinin sınırlılıkları A. Almedia tarafından [10] çalışmasında ispatlanmıştır.

**Teorem 4.3.1.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) \leq r^{-\frac{n}{p}} \varphi^{\frac{1}{p}}(r) \quad (4.12)$$

koşulunu sağlasın.  $b \in BMO$  iken  $M_b$  kommutatörü  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:**  $M_b$  kommutatörünün sınırlı olduğu Teorem 2.9.6. dan bilindiğinden ispat için  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayının  $M_b$  kommutatörüne göre değişmezliğini göstermek yeterlidir.

Yani

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, r) = 0 \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(M_b f; x, r) = 0$$

önermesini ispatlamak yeterlidir. Eğer  $f \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ise  $\varepsilon > 0$  olmak üzere her  $t \geq R$  için  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, r) < \varepsilon$  olacak şekilde  $R = R(\varepsilon) > 0$  vardır.  $\varphi \in \Phi$

olmak üzere (2.15) eşitsizliğini kullanarak (4.12) koşulu altında her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r \geq R$  için

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(M_b f; x, r) &\lesssim \|b\|_{BMO}^p \frac{r^n}{\varphi(r)} \sup_{t>r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right)^p t^{-n} \|f\|_{L^p(B(x_0,t))}^p \\ &= \|b\|_{BMO}^p \frac{r^n}{\varphi(r)} \sup_{t>r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right)^p t^{-n} \varphi(t) \mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, r) \\ &\lesssim \varepsilon \|b\|_{BMO}^p \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(M_b f; x, r) = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.3.2.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi$  fonksiyonu (4.12) koşulunu sağlasın. Eğer  $b \in BMO$  negatif olmayan bir fonksiyon ise bu durumda  $[b, M]$  operatörü  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  de sınırlıdır.

**Teorem 4.3.3.**  $1 < p < \infty$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi$  fonksiyonu (4.12) ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln^p t \frac{\varphi(t)}{t^n} = 0 \tag{4.13}$$

koşulunu sağlasın. Eğer  $b \in BMO$  ise  $M_b$  komutatörü  $V^{(*)} L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**İspat:**  $M_b$  komutatörünün  $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlı olması nedeniyle [31]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(f) = 0 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(M_b f) = 0$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. İspat 4 adımda gerçekleştirilecektir.

Adım 1:  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $N \in \mathbb{N}$ , için  $f$  fonksiyonunu

$$\Omega_{x,M} := B(x, 2) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, M)), \quad M > 0$$

olmak üzere

$$f_1 := f \chi_{\Omega_{x,N/2}}, \quad f_2 = f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}} \quad \text{için} \quad f = f_1 + f_2$$

yukarıdaki gibi iki parçaya ayıralım.

$M_b$  nin alt lineerliğinden

$$\mathcal{A}_{N,p}(M_b f) \leq C [\mathcal{A}_{N,p}(M_b(f_1)) + \mathcal{A}_{N,p}(M_b(f_2))] \tag{4.14}$$

yazılabilir. Ayrıca  $M_b$  nin  $L^p(\mathbb{R}^n)$  deki sınırlılığundan

$$\begin{aligned} \int_{B(x,1)} (M_b(f_1)(y))^p \chi_N(y) dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (M_b(f_1)(y))^p \chi_N(y) dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|^p dy = C \int_{\Omega_{x,N/2}} |f(y)|^p dy \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki keyfi sabit  $x$ ,  $N$  ve  $f$  den bağımsız olarak elde edilir. Bu durumda  $f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan  $N \rightarrow \infty$  iken sağ taraf her  $x \in \mathbb{R}^n$  için sifıra düzgün yaklaşır. Böylece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(M_b f_1) = 0$$

elde edilir.

Adım 2: İkinci terimi hesaplayabilmek için  $t > t_0$  (sabitlenmiş aşağıdaki gibi seçilmek üzere) aşağıdaki gibi

$$I(x, N, t_0) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) dy \sup_{0 < t < t_0} \left[ \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} |b(y) - b(z)| |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

ve

$$II(x, N, t_0) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) dy \sup_{t > t_0} \left[ \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} |b(y) - b(z)| |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

parçalanması seçilerek

$$\int_{B(x,1)} (M_b(f_2)(y))^p \chi_N(y) dy \leq C [I(x, N, t_0) + II(x, N, t_0)]$$

olacak şekilde düzenlenir.

Adım 3:  $II(x, N, t_0)$  terimini hesaplayabilmek için  $\varepsilon > 0$  keyfi olmak üzere yeniden bir parçalamaya gidilerek

$$II_1(x, N, t_0) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) dy \sup_{t > t_0} \left[ \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} |b(y) - b_{B(y,t)}| |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

ve

$$II_2(x, N, t_0) := \int_{B(x,1)} \chi_N(y) dy \sup_{t > t_0} \left[ \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} |b(z) - b_{B(y,t)}| |f(z)| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{x,N/2}}(z) dz \right]^p dy$$

olmak üzere

$$II(x, N, t_0) \leq II_1(x, N, t_0) + II_2(x, N, t_0)$$

yazılabiliriz. Hölder eşitsizliği ve (2.10) dan, (4.13) gereği her  $t > t_0$  için  $\frac{\varphi(t)}{t^n} < \varepsilon$  olacak şekilde  $t_0 > 1$  yeterince büyük alınırsa

$$II_2(x, N, t_0) \leq \|b\|_{BMO}^p \int_{B(x,1)} \chi_N(y) dy \sup_{t > t_0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)} |f(z)|^p dz dy \lesssim \|b\|_{BMO}^p \|f\|_{p,\varphi}^p \varepsilon$$

elde edilir.

$II_1(x, N, t_0)$  teriminin hesaplanabilmesi için;

$$|b(y) - b_{B(y,t)}| \leq |b(y) - b_{B(x,1)}| + |b_{B(x,1)} - b_{B(y,2)}| + |b_{B(y,2)} - b_{B(y,t)}|$$

parçalaması ile

$$II_1(x, N, t_0) \leq \|b\|_{BMO}^p \|f\|_{p,\varphi}^p \varepsilon + \|f\|_{p,\varphi}^p \int_{B(x,1)} \sup_{t > t_0} |b_{B(y,2)} - b_{B(y,t)}|^p \frac{\varphi(t)}{t^n} dy$$

elde edilir. Her  $t \geq t_0 \geq 2$  için  $B(y,2) \subset B(y,t)$  olduğundan her  $t \geq t_0$  için  $\ln^p(1 + t/2) \frac{\varphi(t)}{t^n} \leq \varepsilon$  olacak şekilde  $t_0$  yeteri kadar büyük alınırsa (2.13) özelliğinden

$$|b_{B(y,2)} - b_{B(y,t)}|^p \frac{\varphi(t)}{t^n} \lesssim \ln^p(1 + t/2) \|b\|_{BMO}^p \frac{\varphi(t)}{t^n} \leq \|b\|_{BMO}^p \varepsilon$$

yazılabilir. Bu yüzden

$$II_1(x, N, t_0) \leq C \|b\|_{BMO}^p \|f\|_{p,\varphi}^p \varepsilon$$

elde edilir. Uygun  $t_0$  seçimiyle  $II_1$  ve  $II_2$  için bulduğumuz sonuçlardan

$$II(x, N, t_0) \leq C \|b\|_{BMO}^p \|f\|_{p,\varphi}^p \varepsilon$$

ifadesinin her  $x \in \mathbb{R}^n$  için düzgün sınırlı olduğunu görürüz.

Adım 4: Son olarak  $I(x, N, t_0)$  ifadesini hesaplayalım.  $z \notin \Omega_{x,N/2}$  (ve  $z \in B(y,t)$ ) iken, iki ayrı durum ortaya çıkar. Eğer  $z \in B(0, N/2)$  ise  $t > |z - y| \geq |y| - |z| > N/2$  olur ve burada  $N \geq 2t_0$  için  $t \in (0, t_0)$  üzerinde supremum sorun çıkarmaz. Ancak

eğer  $z \notin B(x, 2)$  ise  $t > |z - y| \geq |z - x| - |y - x| > 1$  olur ve geriye  $t \in (1, t_0)$  üzerinden supremum alınırken  $I(x, N, t_0)$  ifadesini hesaplamak kalır. Bunun için aşağıdaki ifadeyi

$$\begin{aligned} I(x, N, t_0) &\lesssim \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \left[ \int_{B(y,t_0)} |b(y) - b(z)| |f(z)| dz \right]^p dy \\ &:= I_1(x, N, t_0) + I_2(x, N, t_0) + I_3(x, N, t_0) \end{aligned}$$

şeklinde parçalayalım. Bu parçalanmalar sırasıyla;

$$\begin{aligned} I_1(x, N, t_0) &:= \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \left[ \int_{B(y,t_0)} |b(y) - b_{B(x,1)}| |f(z)| dz \right]^p dy \\ I_2(x, N, t_0) &:= \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \left[ \int_{B(y,t_0)} |b_{B(x,1)} - b_{B(y,t_0)}| |f(z)| dz \right]^p dy \\ I_3(x, N, t_0) &:= \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \left[ \int_{B(y,t_0)} |b_{B(y,t_0)} - b(z)| |f(z)| dz \right]^p dy \end{aligned}$$

olarak seçilsin.  $I_3(x, N, t_0)$  ifadesinde  $s \in (1, p)$  üssü ile Hölder eşitsizliği uygulanarak (2.12) yardımıyla;

$$\begin{aligned} \int_{B(y,t_0)} |b_{B(y,t_0)} - b(z)| |f(z)| dz &\leq \|b_{B(y,t_0)} - b(\cdot)\|_{L^{s'}(B(y,t_0))} \|f\|_{L^s(B(y,t_0))} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} t_0^{n/s'} \|f\|_{L^s(B(y,t_0))} \\ &\approx \|b\|_{BMO} \|f\|_{L^s(B(y,t_0))} \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer  $a \leq 0$  ise  $\chi_a := 1$  ve eğer  $a > 0$  ise  $\chi_a := \chi_{\mathbb{R}^n/B(0,a)}$  alınarak Minkowski eşitsizliği ve değişken değiştirme yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned} I_3(x, N, t_0) &\lesssim \|b\|_{BMO}^p \int_{B(x,1)} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_N(y) \chi_{B(0,t_0)}(z) |f(y-z)|^s dz \right]^{\frac{p}{s}} dy \\ &\leq \|b\|_{BMO}^p \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{B(x,1)} \chi_N(y) \chi_{B(0,t_0)}(z) |f(y-z)|^p dz \right]^{\frac{s}{p}} dy \right)^{\frac{p}{s}} \\ &\leq \|b\|_{BMO}^p \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,t_0)}(z) \left[ \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \int_{B(v,1)} \chi_{N-|z|}(u) |f(u)|^p du \right]^{\frac{s}{p}} dz \right)^{\frac{p}{s}} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.  $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan Lebesgue yakınsama teoreminden  $N \rightarrow \infty$  iken her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $I_3(x, N, t_0) \rightarrow 0$  yakınsaması düzgündür sonucu elde edilir.

Benzer bir yakınsamayı  $I_2(x, N, t_0)$  için göstermek amacıyla öncelikle

$$|b_{B(x,1)} - b_{B(y,t_0)}| \leq t_0^n \|b\|_{BMO}^p$$

olduğunu göz önüne alarak,  $t_0 \geq 2$  ve  $y \in B(x, 1)$  için  $B(x, 1) \subset B(y, t_0)$  olduğundan,  $I_3(x, N, t_0)$  ifadesinde olduğu gibi değişken değiştirme ve Minkowski eşitsizliği uygulayarak istenen sonuç elde edilmiş olur.

Son olarak  $I_1(x, N, t_0)$  ifadesini hesaplamak durumundayız.  $\chi_N(y) \leq \chi_{N-t_0}(z)$  ve her  $z \in B(y, t_0)$  için  $|y| > N$  dir.  $y \in B(x, 1)$  için  $B(y, t_0) \subset B(x, 2t_0)$  olduğundan Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} I_1(x, N, t_0) &\leq \int_{B(x,1)} |b(y) - b_{B(x,1)}|^p \left[ \int_{B(y,t_0)} \chi_{N-t_0}(z) |f(z)| dz \right]^p dy \\ &\leq \int_{B(x,1)} \|b(\cdot) - b_{B(x,1)}\|_{L^p(B(x,1))}^p \int_{B(x,2t_0)} \chi_{N-t_0}(z) |f(z)|^p dz \\ &\approx \|b\|_{BMO}^p \int_{B(x,2t_0)} \chi_{N-t_0}(z) |f(z)|^p dz \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.  $(V^*)$  özelliği  $x$  merkezli yuvarların yarıçapından bağımsız olduğundan [7];

$$I_1(x, N, t_0) \leq C \|b\|_{BMO}^p \mathcal{A}_{N-t_0,p}(f)$$

elde edilir.  $t_0$  sabitlenmiş olduğundan  $N \rightarrow \infty$  iken her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $I_1(x, N, t_0) \rightarrow 0$

yakınsaması düzgündür. 2-4 adımlarında elde edilen tüm sonuçlar göz önüne alınarak  $N \rightarrow \infty$  iken  $\mathcal{A}_{N,p}(M_b(f_2)) \rightarrow 0$  olduğu görülür. Adım 1 ve (4.14) eşitsizliğinden

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{N,p}(M_b(f_2)) = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca (2.14) eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.3.4.** Teorem 4.3.3 ün koşullarını sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  negatif olmayan bir fonksiyon ise  $[b, M]$  komütatörü  $V^*L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

**Teorem 4.3.5.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{\alpha - \frac{n}{p}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) \leq Cr^{-\frac{n}{q}} \varphi^{\frac{1}{q}}(r) \quad (4.15)$$

koşulunu sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ise  $M_{\alpha,b}$  kommutatörü  $V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_{\infty}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 2.9.6. dan  $M_{\alpha,b}$  kommutatörünün sınırlı olduğu biliniyor. (2.17) eşitsizliğinden yararlanılarak her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için

$$\mathfrak{M}_{q,\varphi}(M_{\alpha,b}(f; x, r)) \leq C \|b\|_{BMO}^q \frac{r^n}{\varphi(r)} \left( \sup_{t > 2r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{q}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) (\mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} \right)^q$$

yazılabilir. Buradan istenen sonuç elde edilir.

**Teorem 4.3.6.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $q > p$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu (4.12) ve

$$\sup_{r < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{\alpha - \frac{n}{p}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) \leq Cr^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (4.16)$$

koşullarını sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ise  $M_{\alpha,b}$  kommutatörü  $V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_{\infty}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 2.9.8. den  $M_{\alpha,b}$  kommutatörünün sınırlı olduğu biliniyor. (2.18) eşitsizliğinden yararlanılarak her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için

$$\mathfrak{M}_{q,\varphi}(M_{\alpha,b}(f; x, r)) \leq C \|b\|_{BMO}^q \|f\|_{L^{p,\varphi}}^{q-p} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(M_b(f; x, r))$$

yazılabilir. Teorem 4.3.1 gereği  $f \in V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  iken  $M_b f \in V_{\infty}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan  $M_{b,\alpha} f \in V_{\infty}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

**Teorem 4.3.7.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $q > p$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu (4.12), (4.16) ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \log^p t \frac{\varphi(t)}{t^n} = 0$$

koşullarını sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ise  $M_{\alpha,b}$  kommutatörü  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V^{(*)}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 2.9.8. den  $M_{\alpha,b}$  kommutatörünün sınırlı olduğu bilindiğinden ( $V^{(*)}$ ) özelliğinin korunduğunu göstermek yeterlidir. Eşitsizlik (2.18) den

$$\mathcal{A}_{N,q}(M_{\alpha,b}f) \leq C \|b\|_{BMO}^q \|f\|_{L^{p,\varphi}}^{q-p} \mathcal{A}_{N,p}(M_b f)$$

yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki  $C$  sabiti  $x$ ,  $N$  ve  $r$  den bağımsız gelmektedir. Teorem 4.3.3 gereği  $f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ise  $M_b f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan  $M_{\alpha,b}f \in V^{(*)}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

**Teorem 4.3.8.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{\alpha - \frac{n}{p}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) \frac{dt}{t} \leq C r^{-\frac{n}{q}} \varphi^{\frac{1}{q}}(r) \quad (4.17)$$

koşulunu sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ise  $[b, I_\alpha]$  kommutatörü  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_\infty L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 2.9.10. dan  $[b, I_\alpha]$  kommutatörünün sınırlı olduğu biliniyor. (2.19) eşitsizliğinden yararlanarak her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için

$$\mathfrak{M}_{q,\varphi}([b, I_\alpha](f; x, r)) \leq C \|b\|_{BMO}^q \frac{r^n}{\varphi(r)} \left( \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{q}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) (\mathfrak{M}_{p,\varphi}(f; x, t))^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \right)^q$$

yazılabilir. Buradan istenen sonuç elde edilir.

**Teorem 4.3.9.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $q > p$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu (4.12) ve

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{\alpha - \frac{n}{p}} \varphi^{\frac{1}{p}}(t) \frac{dt}{t} \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (4.18)$$

koşullarını sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ise  $[b, I_\alpha]$  kommutatörü  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V_\infty L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 2.9.12. den  $[b, I_\alpha]$  kommutatörünün sınırlı olduğu biliniyor. (2.20) eşitsizliğinden yararlanarak her  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için

$$\mathfrak{M}_{q,\varphi}([b, I_\alpha](f; x, r)) \leq C \|b\|_{BMO}^q \|f\|_{L^{p,\varphi}}^{q-p} \mathfrak{M}_{p,\varphi}(M_b(f; x, r))$$

yazılabilir. Teorem 4.3.1 gereği  $f \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  iken  $M_b f \in V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan  $[b, I_\alpha] \in V_\infty L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

**Teorem 4.3.10.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $q > p$  ve  $\varphi \in \Phi$  olsun.  $\varphi \in \Phi$  fonksiyonu (4.12), (4.18) ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \log^p t \frac{\varphi(t)}{t^n} = 0$$

koşullarını sağlasın. Eğer  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  ise  $[b, I_\alpha]$  kommutatörü  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $V^{(*)}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Teorem 2.9.12. den  $[b, I_\alpha]$  kommutatörünün sınırlı olduğu bilindiğinden  $(V^{(*)})$  özelliğinin korunduğunu göstermek yeterlidir. (2.20) eşitsizliğinden

$$\mathcal{A}_{N,q}(M_{\alpha,b}f) \leq C \|b\|_{BMO}^q \|f\|_{L^{p,\varphi}}^{q-p} \mathcal{A}_{N,p}(M_b f)$$

yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki  $C$  sabiti  $x$ ,  $N$  ve  $r$  den bağımsız gelmektedir. Teorem 4.3.3 gereği  $f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ise  $M_b f \in V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  olduğundan  $[b, I_\alpha] f \in V^{(*)}L^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  elde edilir.

#### 4.4. Genelleştirilmiş Ağırlıklı Vanishing Morrey uzayında Klasik Operatörlerin ve Kommutatörlerinin Sınırlılığı

Bu kısımda genelleştirilmiş ağırlıklı vanishing Morrey uzayında klasik operatörlerin ve kommutatörlerinin sınırlılıkları araştırılmıştır. İlk olarak  $S$ ,  $M_\alpha$ ,  $I_\alpha$  ve  $S_\alpha$  operatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır. Daha sonra  $S_b$ ,  $I_{\alpha,b}$ ,  $M_{\alpha,b}$  ve son olarak  $S_{\alpha,b}$  kommutatörlerinin  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  uzayından,  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(\mathbb{R}^n; w^q)$  uzayına sınırlılıkları gösterilmiştir. Sınırlılık koşulları, monotonluk koşulu kullanmaksızın,  $(\varphi, \psi)$  fonksiyonları üzerine Zygmund tipli integral koşulları bırakılarak elde edilmiştir. Bu bölümde elde ettiğimiz sonuçların bazıları [18] makalesinde yayınlanmıştır.

**Tanım 4.4.1.**  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^n$  de açık bir bölge ve  $\Pi$ ,  $\Omega$  nın keyfi bir alt kümesi olsun.  $\varphi(x, r)$  fonksiyonu  $\Pi \times [0, l)$  ( $l$  çap) üzerinde tanımlı ve her  $(x, t) \in \Pi \times (0, l)$  için pozitif olsun.  $w$ ,  $\Omega$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\Omega; w) := VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)$  ile gösterilen ağırlıklı vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı  $\tilde{B}(x, r) = B(x, r) \cap \Omega$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$\|f\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)} = \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(\tilde{B}(x,r))}$$

yarı normunu sonlu yapan

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(\tilde{B}(x,r))} = 0 \quad (4.19)$$

olacak şekilde  $f \in L_{p,w}^{loc}(\Omega)$  fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Uzayın non trivial olması için  $\varphi(x, r)$  üzerine

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{\|w\|_{L_1(\tilde{B}(x,r))}}{\varphi(x, r)} &= 0 \\ \inf_{r > 1} \sup_{x \in \Pi} \varphi(x, r) &> 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

koşullarının bırakılması doğaldır.

$\varphi(x, r)$ ,  $\Pi \times [0, l)$  üzerinde non-negatif ölçülebilir ve her  $(x, t) \in \Pi \times (0, l)$  için pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer  $\varphi$  fonksiyonu (4.20) koşullarını sağlıyor ise  $\varphi \in \mathfrak{B}(w)$  dir denir.

$w \equiv 1$  ise bu durumda  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\Omega; w)$  uzayı [57] çalışmasında sunulan  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\Omega)$  uzayına karşılık gelir.

**Teorem 4.4.2.**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de açık bir bölge ve  $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  nın keyfi bir alt kümesi olsun.  $1 < p < \infty$ ,  $w \in A_p$  ve  $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(w)$  olmak üzere  $P(x, y)$  reel değerli bir polinom,  $K$  standart C-Z çekirdeğine sahip C-Z singular operatorü  $T$ ,  $(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$  tipli olsun. Her  $\delta > 0$  için

$$c_{\delta} := \int_{\delta}^{\infty} \sup_{x \in \Pi} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L_1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} < \infty \quad (4.21)$$

ve

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L_1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq c_0 \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)}{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}}} \quad (4.22)$$

eşitsizliği  $x \in \Pi$  ve  $r > 0$  den bağımsız  $c_0$  sabiti için sağlanıyorsa  $S$  oscillatory integral operatorü  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{p,\psi}(\mathbb{R}^n; w)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** (2.24) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{VM_{\Pi}^{p,\psi}(w)} &= \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|Sf\|_{L^{p,w}(B(x,r))} \\ &\leq c \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \int_r^{\infty} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,t))} \|w\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \\ &\leq c \|f\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)} \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \int_r^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(x, t) \|w\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.22) den

$$\|Sf\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)} \leq c \|f\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)}$$

elde edilir.  $VL_{\Pi}^{p,\psi}(w)$  uzayına ait olduğunu gösterebilmek için

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} = 0 \Rightarrow \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|Sf\|_{L^{p,w}(B(x,r))} = 0$$

olduğunu kanıtlamak gereklidir. Yeterince küçük  $r$  ler için  $\sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|Sf\|_{L^{p,w}(B(x,r))} < \varepsilon$  göstermek amaçlı,  $\delta_0 > 0$  ve  $r < \delta_0$  olmak üzere ( $\delta_0 < 1$  alınabilir) (2.24) eşitsizliğinin sağ tarafını

$$I_{\delta_0}(x, r) := \frac{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \left( \int_r^{\delta_0} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L_1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} \frac{dt}{t} \right)$$

ve

$$J_{\delta_0}(x, r) := \frac{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \left( \int_{\delta_0}^l \frac{\varphi(x, t)}{\|w\|_{L_1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} \frac{dt}{t} \right)$$

olacak şekilde

$$\frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|Sf\|_{L^{p,w}(B(x,r))} \leq C [I_{\delta_0}(x, r) + J_{\delta_0}(x, r)] \quad (4.23)$$

iki parçaya ayıralım.  $\delta_0 > 0$  sabitlenerek,  $c_0$  ve  $C$  sabitleri sırasıyla (4.22) ve (4.23) deki sabitler olmak üzere

$$\sup_{x \in \Pi} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} < \frac{\varepsilon}{2Cc_0}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sup_{x \in \Pi} CI_{\delta_0}(x, r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < r < \delta_0$$

elde edilir.  $r$  yeterince küçük alınıp (4.21) göz önünde bulundurularak

$$J_{\delta_0}(x, r) \leq c_{\delta_0} \frac{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)}$$

elde edilir. (4.20) den  $r$  yi yeterince küçük alarak

$$\sup_{x \in \Pi} \frac{\|w\|_{L_1(B(x,r))}}{\psi(x, r)} < \left( \frac{\varepsilon}{2Cc_{\delta_0} \|f\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w)}} \right)^p$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.4.3.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $w \in A_{p,q}$ ,  $\varphi \in \mathcal{B}(w^p)$  ve  $\psi \in \mathcal{B}(w^q)$  olsun. Her  $\delta > 0$  için

$$c_\delta := \int_\delta^\infty \sup_{x \in \Pi} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{\|w\|_{L^q(B(x,t))}} \frac{dt}{t} < \infty \quad (4.24)$$

oluyor ve

$$\int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{\|w\|_{L^q(B(x,t))}} \frac{dt}{t} \leq c_0 \frac{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)}{\|w\|_{L^q(B(x,r))}} \quad (4.25)$$

eşitsizliğini sağlayan  $x \in \Pi$  ve  $r > 0$  den bağımsız bir  $c_0$  bulunabiliyorsa  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörleri  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(\mathbb{R}^n; w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:**  $M_\alpha f(x) \leq I_\alpha(|f|)(x)$  noktasal eşitsizliğini kullanarak, her  $0 < \alpha < n$  için yalnızca fraksiyonel integral operatörünün sınırlılığını göstermek yeterlidir. Her  $f \in VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  için

$$\|I_\alpha f\|_{VL_{\Pi}^{q,\psi}(w^q)} \leq c \|f\|_{VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w^p)}$$

ve

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)} \|I_\alpha f\|_{L^{q,w^q}(B(x,r))} = 0$$

ifadelerinin geçerli olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle  $f \in VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w^p)$  iken  $I_\alpha f \in VL_{\Pi}^{q,\psi}(w^q)$  olduğunu yani

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \|f\|_{L^{p,w^p}(B(x,r))} = 0 \Rightarrow \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)} \|I_\alpha f\|_{L^{q,w^q}(B(x,r))} = 0$$

varlığını gösterelim.  $0 < r < \delta_0$  için  $\sup_{x \in \Pi} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)} \|I_\alpha f\|_{L^{q,w^q}(B(x,r))} < \varepsilon$  olduğunu ortaya koyabilmek için

$$A_{\delta_0}(x,r) := \frac{\|w\|_{L^q(B(x,r))}}{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)} \left( \int_r^{\delta_0} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{t \|w\|_{L^q(B(x,t))}} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \|f\|_{L^{p,w^p}(B(x,r))} dt \right)$$

ve

$$B_{\delta_0}(x,r) := \frac{\|w\|_{L^q(B(x,r))}}{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)} \left( \int_{\delta_0}^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{t \|w\|_{L^q(B(x,t))}} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \|f\|_{L^{p,w^p}(B(x,r))} dt \right)$$

seçilerek

$$\frac{1}{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)} \|I_\alpha f\|_{L^{q, w^q}(B(x, r))} \leq C [A_{\delta_0}(x, r) + B_{\delta_0}(x, r)] \quad (4.26)$$

olacak şekilde düzenlemeler yapılır.  $c_0$  ve  $C$  sırasıyla (4.25) ve (4.26) deki sabitler olmak üzere

$$\sup_{x \in \Pi} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p, w^p}(B(x, r))} < \frac{\varepsilon}{2C c_0}$$

sağlanacak şekilde  $\delta_0 > 0$  sabitleyelim. Böylece  $0 < r < \delta_0$  için düzğün olarak

$$\sup_{x \in \Pi} C A_{\delta_0}(x, r) < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. İkinci terimin hesaplanması için (4.24) koşuluyla

$$B_{\delta_0}(x, r) \leq c_{\delta_0} \frac{\|w\|_{L^q(B(x, r))}}{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)} \|f\|_{V L_{\Pi}^{p, \varphi}(w^p)}$$

elde edilir.  $\psi \in \mathcal{B}(w^q)$  olduğundan  $r$  yi yeterince küçük alarak

$$\sup_{x \in \Pi} \frac{\|w^q\|_{L^1(B(x, r))}}{\psi(x, r)} < \left( \frac{\varepsilon}{2C c_{\delta_0} \|f\|_{V L_{\Pi}^{p, \varphi}(w^p)}} \right)^q$$

istenilen sonu. elde edilir.

Normun tanımı ve Lemma 2.10.4. yardımıyla

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_{V L_{\Pi}^{q, \psi}(w^q)} &= \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)} \|I_\alpha f\|_{L^{q, w^q}(B(x, r))} \\ &\leq c \sup_{x \in \Pi, r > 0} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)} \|w\|_{L^q(B(x, r))} \int_r^\infty \|f\|_{L^{p, w^p}(B(x, t))} \|w\|_{L^q(B(x, t))}^{-1} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylelikle (4.25) kullanılarak

$$\|I_\alpha f\|_{V L_{\Pi}^{q, \psi}(w^q)} \leq c \|f\|_{V L_{\Pi}^{p, \varphi}(w^p)}$$

elde edilir ve Teorem 4.4.3. ün ispatı tamamlanmış olur.

**Uyarı 4.4.4.** Ağırlık fonksiyonunun  $w \equiv 1$  olma durumu için Teorem 4.4.3. nin ispatı [57] çalışmasında yer almaktadır.

**Teorem 4.4.5.**  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $P(x, y)$  reel değerli bir polinom,

$w \in A_{p,q}$ ,  $\varphi \in \mathfrak{B}(w^p)$  ve  $\psi \in \mathfrak{B}(w^q)$  olsun. Her  $\delta > 0$  için

$$\int_{\delta}^{\infty} \sup_{x \in \Pi} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{\|w\|_{L^q(B(x,t))}} \frac{dt}{t} < \infty$$

ve

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{\|w\|_{L^q(B(x,t))}} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)}{\|w\|_{L^q(B(x,r))}}$$

eşitsizliğini sağlayan  $x \in \Pi$  ve  $r$  den bağımsız bir  $C$  sabiti bulunabiliyorsa  $S_{\alpha}$  operatörü  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:**  $|S_{\alpha}f(x)| \leq I_{\alpha}(|f|)(x)$  eşitsizliği ve lemma 4.4.3. den ispat elde edilir.

**Örnek 4.4.6.** Eğer  $w$  bir ağırlık fonksiyonu ve hemen hemen  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $C \leq w(x) \leq D$  olacak şekilde  $C$  ve  $D$  sabitleri varsa  $1 < p < q < \infty$  olmak üzere  $w \in A_{p,q}$  olur.  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$  ve  $0 < \lambda < n - \alpha p$  olsun.  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\varphi(x,r) = r^{\lambda}$  ve  $\psi(x,r) = r^{\frac{\lambda q}{p}}$  olmak üzere  $M_{\alpha}$  ve  $I_{\alpha}$  operatörleri  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(\mathbb{R}^n; w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**Örnek 4.4.7.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$  ve  $0 < \lambda < n - \alpha p$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\varphi(x,r) = r^{\lambda}$  ve  $\psi(x,r) = r^{\frac{\lambda q}{p}}$  olsun.  $v(y) = |y|^{\beta}$  olmak üzere eğer  $0 < \beta < n(p-1)$  ise  $v \in A_p$ ,  $1 < p < \infty$  olur. (2.3) ten eğer  $0 < \beta < n\frac{q}{p}$  ise  $w(y) = |y|^{\frac{\beta}{q}} \in A_{p,q}$ ,  $1 < p < q < \infty$  elde edilir. Böylece

$$\|w\|_{L^q(B(x,r))} \approx \begin{cases} |x| < 3r & \text{iken} & r^{\frac{n+\beta}{q}} \\ |x| \geq 3r & \text{iken} & r^{\frac{n}{q}}(|x|+r)^{\frac{\beta}{q}} \end{cases}$$

yazılabilir.

Eğer  $|x| < 3r$  ise  $\frac{\lambda}{p} - \frac{n+\beta}{q} < 0$  olduğundan (4.23) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x,t)}{\|w\|_{L^q(B(x,t))}} \frac{dt}{t} \leq Cr^{\frac{\lambda}{p} - \frac{n+\beta}{q}}$$

elde edilir.

Diğer yandan aşağıdaki değerlendirme yapılarak

$$\frac{\psi^{\frac{1}{q}}(x,r)}{\|w\|_{L^q(B(x,r))}} \approx r^{\frac{\lambda}{p} - \frac{n+\beta}{q}}.$$

$|x| \geq 3r$  iken

$$\int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^q(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq C \frac{r^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n}{q}} + |x|^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n}{q}}}{|x|^{\frac{\beta}{q}}}$$

olur ve

$$\frac{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)}{\|w\|_{L^q(B(x, r))}} \approx \frac{r^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n}{q}}}{(|x|+r)^{\frac{\beta}{q}}}.$$

olduğundan dolayı

$$|x| \geq 3r \quad \text{iken} \quad \frac{r^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n}{q}} + |x|^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n}{q}}}{|x|^{\frac{\beta}{q}}} \leq C \frac{r^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n}{q}}}{(|x|+r)^{\frac{\beta}{q}}}$$

elde edilir. Buradan

$$c_\delta \approx \delta^{\frac{\lambda-n}{p}-\frac{n+\beta}{q}}$$

bulunur. Böylelikle  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörleri  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(\mathbb{R}^n; w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**Teorem 4.4.8.**  $1 < p < \infty$  ve  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  olsun.  $w \in A_p$  ve  $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(w)$  olmak üzere her  $\delta > 0$  için

$$c_\delta := \sup_{0 < r < \delta} \int_r^\infty \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^1(B(x, t))}^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} < \infty \quad (4.27)$$

ve

$$\int_r^\infty \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^1(B(x, t))}^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq c_0 \frac{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)}{\|w\|_{L^1(B(x, r))}^{\frac{1}{p}}} \quad (4.28)$$

eşitsizliğini sağlayan  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  den bağımsız bir  $c_0$  sabiti bulunabiliyorsa  $S_b$  komutatörü  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{p,\psi}(\mathbb{R}^n; w)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** İspat için Lemma 2.10.8. ve Teorem 4.4.2. den yararlanacağız. Sınırlılığı gösterebilmek için

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x, r))} = 0 \Rightarrow \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|S_b f\|_{L^{p,w}(B(x, r))} = 0$$

olduğunu ispatlamak gerekir.  $0 < r < \delta_0$  olsun. (4.28) den

$$\frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \|S_b f\|_{L^{p,w}(B(x, r))} \leq C \frac{\|b\|_* \|w\|_{L^1(B(x, r))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x, r)} \int_r^\infty \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p,w}(B(x, t))} \|w\|_{L^1(B(x, t))}^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \quad (4.29)$$

yazılır. Yeterince küçük  $r$  ler için  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \|S_b f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} < \varepsilon$  olduğunu gösterebilmek amacıyla, (4.29) eşitsizliğinin sağ tarafını

$$I_{\delta_0}(x,r) := \|b\|_* \frac{\|w\|_{L^1(B)}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \int_r^{\delta_0} \frac{\varphi^{1/p}(x,t) \ln(e + \frac{t}{r})}{t \|w\|_{L^1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{1/p}(x,r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} dt$$

ve

$$J_{\delta_0}(x,r) := \|b\|_* \frac{\|w\|_{L^1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \int_{\delta_0}^{\infty} \frac{\varphi^{1/p}(x,t) \ln(e + \frac{t}{r})}{t \|w\|_{L^1(B(x,t))}^{\frac{1}{p}}} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{1/p}(x,r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} dt$$

olarak aşağıdaki gibi düzenleyelim

$$\frac{1}{\psi^{\frac{1}{p}}(x,r)} \|S_b f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} \leq C [I_{\delta_0}(x,r) + J_{\delta_0}(x,r)]$$

Ardından  $\delta_0 > 0$  sabitlenerek  $C$  ve  $c_0$  sırasıyla (4.27) ve (4.28) den olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r < t} \frac{1}{\varphi^{1/p}(x,r)} \|f\|_{L^{p,w}(B(x,r))} < \frac{\varepsilon}{2C c_0 \|b\|_*}$$

yazılır. Bu durum  $r \in (0, \delta_0)$  için ilk terimin

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} C I_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < r < \delta_0.$$

olduğunu gösterir.

İkinci terimin hesabı için  $r$  yeterince küçük alınarak (4.20) den

$$J_{\delta_0}(x,r) \leq \|b\|_* c_{\delta_0} \|f\|_{VM_{\mathbb{H}}^{p,\varphi}(w)} \frac{\|w\|_{L^1(B)}^{\frac{1}{p}}}{\psi^{\frac{1}{p}}(x,r)}$$

eşitsizliği  $c_{\delta_0}$  sabiti (4.27) den olacak şekilde elde edilir. Böylece (4.20) den, yeterince küçük  $r$  ler için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|w\|_{L^1(B(x,t))}}{\psi(x,r)} \leq \left( \frac{\varepsilon}{2C c_{\delta_0} \|b\|_* \|f\|_{VM_{\mathbb{H}}^{p,\varphi}(w)}} \right)^p$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

**Teorem 4.4.9.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ,  $w \in A_{p,q}$ ,

$\varphi \in B(w^p)$  ve  $\psi \in B(w^q)$  olsun. Eğer her  $\delta > 0$  için

$$c_\delta := \sup_{0 < r < \delta} \int_\delta^\infty \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \sup_{x \in \Pi} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^q(B(x, t))}} \frac{dt}{t} < \infty \quad (4.30)$$

oluyor ve

$$\int_r^\infty \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^q(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq c_0 \frac{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)}{\|w\|_{L^q(B(x, r))}} \quad (4.31)$$

eşitsizliğini sağlayan  $x \in \Pi$  ve  $r > 0$  den bağımsız bir  $c_0$  sabiti bulunabiliyorsa  $I_{\alpha, b}$  komutatörü  $VL_{\Pi}^{p, \varphi}(w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q, \psi}(w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:** Bu teoremin ispatı, Lemma 2.10.8. den yararlanarak Teorem 4.4.3. nin ispatına benzer olarak elde edilir.

**Sonuç 4.4.10.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ,  $w \in A_{p, q}$ ,  $\varphi \in B(w^p)$  ve  $\psi \in B(w^q)$  olsun. Eğer  $\varphi$  ve  $\psi$  fonksiyonları için (4.30) ve (4.31) koşulları sağlamıyorsa  $M_{\alpha, b}$  komutatörü  $VL_{\Pi}^{p, \varphi}(w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q, \psi}(w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**Teorem 4.4.11.**  $1 < p < \infty$ ,  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ , ve  $P(x, y)$  reel değerli bir polinom olsun.  $\varphi \in \mathfrak{B}(w^p)$  ve  $\psi \in \mathfrak{B}(w^q)$  olmak üzere her  $\delta > 0$  için

$$\sup_{0 < r < \delta} \int_\delta^\infty \ln \left( e + \frac{t}{r} \right) \sup_{x \in \Pi} \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^q(B(x, t))}} \frac{dt}{t} < \infty$$

geçerli ve

$$\int_r^\infty \frac{\varphi^{\frac{1}{p}}(x, t)}{\|w\|_{L^q(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\psi^{\frac{1}{q}}(x, r)}{\|w\|_{L^q(B(x, r))}}$$

eşitsizliği  $x$  ve  $r$  den bağımsız  $C$  sabitleri için sağlanıyorsa  $S_{\alpha, b}$  komutatörü  $VL_{\Pi}^{p, \varphi}(w^p)$  uzayından  $VL_{\Pi}^{q, \psi}(w^q)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat:**  $|S_{\alpha, b} f(x)| \leq I_{\alpha, b}(|f|)(x)$  eşitsizliğinden ve  $I_{\alpha, b}$  komutatörünün sınırlılığın-  
dan (Teorem 4.5.9.) ispat elde edilir.



## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Harmonik analizde lineer ve altlineer operatörler ve komütatörlerinin sınırlılıkları kısmi türevli denklemler PDE teorisinde, süreksiz katsayılı elliptik ve parabolik denklemlerin çözümlerinin ön eşitsizliklerinin elde edilmesinde önemli bir yer oluşturmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının çalışılmasında ve lokal düzgünlüğünün tanımlanmasında Morrey uzaylarının, Lebesgue uzaylarına göre daha kullanışlı olduğu görülmüştür. Morrey uzayları, Lebesgue uzaylarına göre daha iyi lokal davranışlar gösterdikleri halde, ayrılabilirlik ve iyi fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım gibi bazı önemli özelliklere sahip değildirler. Morrey uzayında birim fonksiyonla yaklaşım iyi davranış sergilememektedir çünkü bu uzaylarda tekilliğe sahip bazı fonksiyonlar vardır. Ayrıca Morrey uzaylarının ayrılabilir olmadığı bilinmektedir [56]. Bu durumdan kaynaklanan bir takım eksiklikler, öteleme operatörünün sürekli olduğu tüm Morrey fonksiyonlarını içeren Zorko uzayı ve vanishing özelliğine sahip  $V_{(0)}, V_{(\infty)}$  ve  $V_{(*)}$  gibi alt uzayların tanımlanmasını motive etmiştir.

Morrey uzayının bazı vanishing koşullarına sahip alt uzayları, A. Almeida ve S. Samko'nun [7] ve [9] çalışmalarında yer almıştır. Yazarlar vanishing tipli koşullar kullanarak Morrey uzayının yeni bir kapalı alt uzayını  $V_{0,\infty}^{(*)}$  tanımladılar. Bu uzay Zorko sınıfından kesinlikle daha küçüktür ve Morrey normuyla  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uzayının Morrey uzayında kapanışına karşılık gelmektedir. Morey uzayındaki bu kapalılık harmonik analizde, Calderón-Zygmund teorisinde önemli bir rol oynamaktadır çünkü duali, bir öndual oluşturur.

Literatürde  $V_0$  uzayı ile ilgili çalışmalar yetersiz kalmakta,  $V_\infty$  ve  $V^{(*)}$  özelliğine sahip Morrey alt uzaylarında ise klasik operatörlere ait çalışmalar neredeyse bulunmamaktadır. Bu alanda yalnızca iki adet çalışma [7], [9] bulunmuştur. Bu eserlerde, bahsi geçen uzaylarda yalnızca integrallenebilir çekirdekli konvolüsyon operatörlerinin sınırlılığı ortaya konulmuştur.

Tez çalışmamızın esas amacı,  $V_0, V_\infty$  ve  $V^{(*)}$  vanishing özelliklerinin, Harmonik Analizin önemli operatörlerinden maksimal, singular, potansiyel ve Hardy operatörlerinin davranışları altında korunduğunu göstermektir. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

1) [7] makalesinde ortaya konulan sonuçların bir devamı olarak,  $p$ -admissible alt lineer singular tipli  $T$  operatörü,  $M, H, \mathcal{H}$  ve  $\mathbb{S}$  ile  $I^\alpha, H^\alpha, \mathcal{H}^\alpha, K_\beta$  ve  $\mathcal{K}_\beta$  operatörlerinin  $V_\infty L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlılık koşulları ortaya konulmuştur. Ayrıca  $M, H, \mathcal{H}$  ile  $M^\alpha, I^\alpha, H^\alpha, \mathcal{H}^\alpha$  operatörlerinin  $V^{(*)}$  özelliğine sahip vanishing uzayında sınırlılıkları ispatlanmış ve  $M, H, \mathcal{H}$  ve  $\mathbb{S}$  operatörlerinin  $V_{0,\infty}^{(*)} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlılıkları gösterilmiştir.

2) [9] makalesi ileriye taşınarak  $p$ -admissible alt lineer singular tipli  $T$  operatörünün ve  $M, H, \mathcal{H}, M^\alpha, I^\alpha, H^\alpha, \mathcal{H}^\alpha$  operatörlerinin, sırasıyla  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında sınırlılığı ispatlanmış ve  $M, H, \mathcal{H}$  ve  $\mathbb{S}$  operatörlerinin  $V_{0,\infty}^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlılık koşulları ortaya konulmuştur.

3) [10] makalesindeki sonuçlar, genelleştirilmiş vanishing Morrey uzaylarına taşınarak  $M_b$  komutatörünün sırasıyla  $V_\infty L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  ve  $V^{(*)}L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında sınırlılık koşulları ortaya konulmuştur. Ayrıca  $M_{\alpha,b}$  kommutatörünün, vanishing Morrey uzaylarında sınırlılığı kanıtlanmıştır.

4) Genelleştirilmiş ağırlıklı vanishing Morrey uzayları tanımlanarak  $S, M_\alpha, I_\alpha$  ve  $S_\alpha$  operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılık koşulları ortaya konulmuştur. Daha sonra  $S_b, I_{\alpha,b}, M_{\alpha,b}$  ve son olarak  $S_{\alpha,b}$  komutatörlerinin  $VL_{\Pi}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n; w^p)$  uzayından,  $VL_{\Pi}^{q,\psi}(\mathbb{R}^n; w^q)$  uzayına sınırlılıkları gösterilmiştir. Sınırlılık koşulları, monotonluk koşulu kullanmaksızın,  $(\varphi, \psi)$  fonksiyonları üzerine Zygmund tipli integral koşulları bırakılarak elde edilmiştir.

**6. KAYNAKLAR**

- [1] Adams, D. R. 1975. A note on Riesz potentials. *Duke Math J*, 42 (4) : 765-778
- [2] Adams, D. R., Xiao, J. 2012. Morrey spaces in harmonic analysis. *Ark, Mat.* 50 (2) : 201–230.
- [3] Adams, D. R. 2015. Morrey Spaces. *Lecture Notes in Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhauser, 37-42
- [4] Adams, R. A. , Fournier, J. F. 2003. *Sobolev Spaces*. Vancouver, Canada, 1-30.
- [5] Alabalık, A. Ç, Almeida, A. , Samko, S. 2019. On the invariance of certain vanishing subspaces of Morrey spaces with respect to some classical operators. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 1 (14) : 987–1000.
- [6] Alabalık, A. Ç. , Almeida, A. , Samko, S. 2020. Preservation of certain vanishing properties of generalized Morrey spaces by some classical operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 14 (2020) :1–12.
- [7] Almeida, A. , Samko, S. 2017. Approximation in Morrey spaces. *J. Funct. Anal*, 272 (2017) : 2392–2411.
- [8] Almeida, A. , Samko, S. 2017. Embeddings of local generalized Morrey spaces between weighted Lebesgue spaces, *Nonlinear Anal*, 164 (2017) : 67–76.
- [9] Almeida, A. , Samko, S. 2018. Approximation in generalized Morrey spaces. *Georgian Math, J.* 272 (2) : 155-168.
- [10] Almeida, A. 2020. Maximal Operators and commutators of Potential Operators in new vanishing Morrey spaces. *Nonlinear Analysis*, 192 (2019): 111684 <https://doi.org/10.1016/J.NA.2019>.
- [11] Bourbaki, N. 1989. *Probability Theory and Related Fields* Springer, Verlag, Berlin, 405-434.
- [12] Burenkov, V.I. , Tararykova, T.V. 2016. An analog of Young’s inequality for convolutions of functions for general Morrey-type spaces. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 293 (2016) : 113–132
- [13] Burtseva, E. , Samko, N. 2016. Weighted Adams type theorem for the Riesz fractional integral in generalized Morrey spaces. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 19 (2016) : 954–972.
- [14] Calderón, A. P., Zygmund, A. 1952. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math*, 88 (1952) : 85–139.

- [15] Campanato, S. 1964. Proprietà di una famiglia di spazi funzioni. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 18 (1964): 137–160.
- [16] Chiarenza, F, Frasca, M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. *Rend. Mat. Appl.* 7(1987): 273-279
- [17] Chiarenza, F, Frasca, M. 1992. A generalization of a theorem by C. Miranda. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 161 (1992) 285–297.
- [18] Çekiç B, Alabalık Ç.A. 2017. Boundedness of Fractional Oscillatory Integral Operators and Their Commutators in Vanishing Generalized Weighted Morrey Spaces, *Journal of Function Spaces*, 3295376 (2017): 9-18.
- [19] David, G. , Journé, J.L. 1983. Une characterization des opérateurs intégraux singuliers bornés sur. *C.R. Acad. Sci. Paris* , 296 (1983) : 761–764.
- [20] Deringöz, F. , Guliyev, V. S. , Samko, S. 2015. Boundedness of the maximal operator and its commutators on vanishing generalized Orlicz-Morrey spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 40 (2015) 535-549.
- [21] Ding, Y. 1996.  $L_p$ -Boundedness for fractional oscillatory integral operator with rough kernel. *Approximation Theory and its Applications*, 12 (17) : 70-79.
- [22] Di Fazio, G. , Ragusa, M. A. 1991. Commutators and Morrey spaces. *Boll. U.M.I.* 75-A (1991), 323-332.
- [23] Dzhumakaeva, G.T., Nauryzbaev, K.Z. 1982. Lebesgue-Morrey spaces. *Izv. Akad. Nauk Kazakh SSR Ser. Fiz.-Mat*, 79 (5) : 7–12
- [24] Eroğlu A. 2013. Boundedness of fractional oscillatory integral operators and their commutators on generalized Morrey spaces. *Boundary Value Problems*, 2013 (70) :1-12
- [25] Eridani, G. , Gunawan, E. , Nakai, H. , Sawano, Y. 2014. Characterizations of the generalized fractional integral operators on Morrey spaces. *Math. Ineq. Appl.* 17 (2014) : 761–777.
- [26] Eridani, G. , Sawano, Y. 2017. Fractional integral operators in generalized Morrey spaces defined on metric measure spaces, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 158 (2012) : 13–24.
- [27] Giaquinta, M. 1983. Multiple integrals in the calculus of variations and non-linear elliptic systems. Princeton Univ. Press, Princeton.
- [28] Guliyev, V.S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. *J. Inequal. Appl.*, 503948 (48) : 20-25.

- [29] Guliyev, V. S. 2012. Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, Eurasian Math. J., vol. 3, pp. 33-61.
- [30] Guliyev, V. S. , Karaman, T. , Mustafayev, R. Ch. ,Şerbetçi, 2014. A. Commutators of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operator on generalized weighted Morrey space. Czech. Math. J., 64 (139) : 365-386.
- [31] Guliyev, V. S. , Shukurov, P. S. 2013. On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces. Oper. Theory Adv. Appl., 229 : 175–194.
- [32] Hakim, D. , Nakamura, S. , Sawano, Y. 2017. Complex interpolation of smoothness Morrey subspaces, Constr. Approx. 46 (2017) :489–563.
- [33] Hakim, D., S. , Sawano, Y. Calderón’s first and second complex interpolations of closed subspaces of Morrey spaces, J. Fourier Anal. Appl. 23 (2017) :1195–1226.
- [34] John, F. , Nirenberg, L. 1961. On functions of bounded mean oscillation, Comm.Pure Appl. Math, 14 : 415-426.
- [35] Karaman T., Guliyev V.S., Serbetci A., Boundedness of sublinear operators generated by Calderon-Zygmund operators on generalized weighted Morrey spaces, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.) 60 (1) (2014), 227–244.
- [36] Kato, T. 1992. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. Bol. Soc. Bras. Mat. 22 (1992) : 127–155.
- [37] Komori, Y. , Shirai, S. 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator. Math. Nachr., 282 (2) :. 219-231.
- [38] Kurata, K., Nishigaki, S., Sugano, S. 2000. Boundedness of integral operators on generalized Morrey spaces and its application to Schrödinger operators. Proc. Amer. Math. Soc. 128 : 1125–1134.
- [39] Lu, S. , Zhang, Z. Y. 1992. Criterion on  $L_p$ -boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels, Rev. Mat. Iberoam., 8 (5) : 201-219.
- [40] Lu, S. Z. ,Yang, D. C. , Zhou, Z. 1998. Sublinear operators with rough kernels on generalized Morrey spaces. Hokkaido Math. J., vol. 27, pp. 219-232
- [41] Mikhlin, S.G. On a boundedness theorem for a singular integral operator. Uspekhi Mat. Nauk, 8 (1953) : 213–217.
- [42] Mizuhara, T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, ICM-90 Satellite Conf. Proc., S. Igari (Ed.), 3 (1991) :183-189.

- [43] Morrey, C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.
- [44] Muckenhoupt, B. 1972. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 165, pp. 207-226.
- [45] Muckenhoupt, B. , Wheeden, R. L. 1976. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Stud. Math.,54 (3) : 221-237.
- [46] Mustafayev, R. Ch. 2012. On boundedness of sublinear operators in weighted Morrey spaces, Azerbaijan Journal of Mathematics, 2 (1) : 66-79
- [47] Nakai, E. 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr. 166 (1994) : 95–103.
- [48] Nakai, E. 2000 A characterization of pointwise multipliers on the Morrey spaces. Sci. Math. 3 (2000), 445–454.
- [49] Peetre, J. 1969. On the theory of  $L_{p,\lambda}$  spaces. J. Funct. Anal. 4 (1) : 71–87.
- [50] Persson, L.E. , Ragusa, M.A. Samko, N., Wall, P. 2012. Commutators of Hardy operators in vanishing Morrey spaces, AIP Conf. Proc. 1493 (2012) :859–866.
- [51] Pick, L. , Kufner, A. , John, O. , Fučík, S. 2013. Function spaces. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 14, Berlin.
- [52] Ragusa, M.A. 2008. Commutators of fractional integral operators on vanishing Morrey spaces. J. Global Optim., 40 (2008) : 361–368.
- [53] Ragusa, M. A. 2008. Commutators of fractional integral operators on vanishing-Morrey spaces. J. Global Optim., 40 (1) : 361-368.
- [54] Ricci, F. , Stein, E. M. 1987. Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals oscillatory integrals. J. Funct. Anal., 73 (1987) : 179-194.
- [55] Rosenthal, M., Triebel, H. 2014. Calderón-Zygmund operators in Morrey spaces. Rev. Mat. Complut. 27 (2014) : 1–11.
- [56] Rosenthal, M., Triebel, H. 2015. Morrey spaces, their duals and preduals. Rev. Mat. Complut. 28 (2015) : 1–30.
- [57] Samko, N. 2013. Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces. J. Glob. Optim. 57 (2013) : 1385–1399.
- [58] Samko, N. 2013. Weighted Hardy operators in the local generalized vanishing Morrey spaces. Positivity 17 (2013) : 683–706.

- [59] Sawano, H. , Wadade, H. 2013. On the Gagliardo-Nirenberg type inequality in the critical Sobolev-Morrey space, *J. Fourier Anal. Appl.* 19 (2013), 20–47.
- [60] Sawano, Y., Sugano, S., Tanaka, H. 2009. A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces. *Bound Value Probl., INDO.* 835865. doi:10.1155/2009/835865.
- [61] Shi, S. G. 2011. Weighted boundedness for commutators of one class of oscillatory integral operators. *J. Beijing Normal Univ. (Nat. Sci.)*, 47: 344-346.
- [62] Shi, S. G. , Fu, Z. W. 2013. Boundedness of sublinear operators with rough kernels on weighted Morrey spaces. *J. Funct. Spaces*, 2013 (784983), 9-19.
- [63] Shi, S. G. , Fu, Z. W. , Lu, S. Z. 2013. Boundedness of oscillatory integral operators and their commutators on weighted Morrey spaces. *Scientia Sinica Mathematica*, 43, : 147–158.
- [64] Softova, L.G. Morrey-type regularity of solution to parabolic problems with discontinuous data, *Manuscr. Math.* 136 (2011) : 365–382
- [65] Stein, E. M. *Harmonic Analysis Real-variable Methods Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University, New Jersey,1993.
- [66] Sugano, S., Tanaka, H. 2003. Boundedness of fractional integral operators on generalized Morrey spaces. *Sci. Math. Jpn.* , 58(3) : 531–540..
- [67] Triebel, H. 2013. *Local function spaces Heat and Navier-Stokes equations*, EMS Tracts in Mathematics, America.
- [68] Triebel, H. 2015. *Hybrid function spaces, Heat and Navier-Stokes equations*, EMS Tracts in Mathematics, America.
- [69] Taylor, M.E. *Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators and Layer Potentials.* Math. Surveys and Monogr., Vol. 81, AMS, Providence, 2000.
- [70] Vitanza, C. 1993. Regularity results for a class of elliptic equations with coefficients in Morrey spaces. *Ric. Mat.* 42.(2) : 265–281.
- [71] Vitanza, C. 1990. Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential equations. *Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations*, Capri, Springer, 147–150.
- [72] Wadade, H. 2014. Optimal embeddings of critical Sobolev-Lorentz-Zygmund spaces. *Stud. Math.* 223 (1) : 77–95.

- [73] Yuan, W. , Sickel, W. , Yang, D. 2015. Calderón's first and second complex interpolations of closed subspaces of Morrey spaces. *Sci. Math. China* 58 (2015): 1835–1908.
- [74] Zorko, C. 1986. Morrey spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (1986): 586–592.



## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Ayşegül ÇELİK ALABALIK

**Doğum Yeri ve Yılı:** DİYARBAKIR, 10.10.1980

**Medeni Hali:** Evli

**Yabancı Dili:** İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)**

**Lisans:** 1999-2004, Dicle Üniversitesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği

**Yüksek Lisans:** 2012-2015, Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

**Adres:** Diyarbakır Bilim ve Sanat Merkezi





**DİCLE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**TEZ İNTİHAL FORMU**

**ÖĞRENCİ BİLGİLERİ**

<b>ADI VE SOYADI</b>	Ayşegül ÇELİK ALABALIK
<b>ÖĞRENCİ NO</b>	15804501
<b>EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI</b>	2019-2020
<b>YARIYIL</b>	<input type="checkbox"/> Güz <input checked="" type="checkbox"/> Bahar
<b>ANABİLİM DALI</b>	MATEMATİK
<b>PROGRAM</b>	Doktora
<b>TEZ KONUSU</b>	Vanishing Morrey Uzaylarında Klasik Operatörlerin ve Komutatörlerinin Sınırlılığı

**İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ**

<b>RAPOR TÜRÜ</b>	Tez Savunma Sınavı Sonrası
<b>SAYFA SAYISI</b>	88
<b>BENZERLİK ORANI</b>	%21
<b>RAPORLAMA TARİHİ</b>	10/08/ 2020

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 88 sayfalık kısmına ilişkin, 10/08/ 2020 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %21 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- Kabul/Onay sayfaları hariç,  
 Kaynakça hariç  
 Alıntılar hariç/dâhil  
 Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Ayşegül ÇELİK ALABALIK  
10/08/2020

Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ  
Tez Danışmanı  
10/08/2020

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY  
Anabilim Dalı Başkanı  
10/08/2020

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.