GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

BLOK MATRİS VE BALANCING SAYILARI

Veli HEVEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2020

Veli HEVEŞ tarafından hazırlanan "BLOK MATRİS ve BALANCING SAYILARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Fatih YILMAZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 28/02/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………..

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Veli HEVEŞ

28/02/2020

BLOK MATRİS VE BALANCING SAYILARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Veli HEVEŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2020

ÖZET

Uzun yıllardır bilim insanlarının ilgisini çeken ve hakkında birçok bilimsel çalışma yayınlanmış olan sayı dizileri hala birçok yeni ve ilginç sonuçlar vermekte, araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Bu çalışma başlıca dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmış, bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamıza zemin teşkil eden kaynak incelenmesi verilmiştir. Çalışmamızın esas kısmı olan üçüncü bölümde ise tanımlanan bir blok matris ile balancing sayıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son bölümde ise yapılan çalışma ile ilgili bazı sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bilim Kodu	: 20401
Anahtar Kelimeler	: Blok matris, Balancing Sayıları, Kroneker Çarpım, Pfaffian
Sayfa Adedi	: 45
Danışman	: Doç. Dr. Fatih YILMAZ

ON BLOCK MATRICES AND THE BALANCING NUMBER

(M. Sc. Thesis)

Veli HEVEŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2020

ABSTRACT

Number sequences that have attracted scientists' interest for years and have been subject to numerous scientific studies published, still give many new and amazing outcomes and draw attention of researchers. This study consists of four main sections. In the first section, the purpose and scope of the study has been explained, some basic definitions and properties of the study are given. In the second part, the source examination which is the basis of our study is given. In the main part of our study, the relationship between a defined block matrix and balancing numbers is examined. In the last section, some conclusions and suggestions about the study are given.

Science Code : 20401

Key Words : Block matrix, Balancing numbers, Kronecker product, Pfaffian

Page Number : 45

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fatih YILMAZ

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Fatih YILMAZ yönetiminde hazırlanmış ve Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Fatih YILMAZ' a her zaman bana destek olan anneme, babama, kardeşlerime ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekiller **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\|A\|$	A kare matrisinin determinantı
A^{-1}	A matrisinin tersi (inversi)
A^T	A matrisinin transpoz matrisi
$A \otimes B$	Kroneker çarpım
B_n	n. Balancing sayısı
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
I_n	$n \times n$ boyutlu birim matris
$M_n(F)$	Elemanları F cisminde olan bütün $n \times n$ kare matrislerin kümesi
$M_{m,n}(F)$	Elemanları F cisminde olan bütün $m \times n$ kare matrislerin kümesi
$Pf(A)$	A kare matrisinin Pfaffianı
$per(A)$	A kare matrisinin permanenti

1. GİRİŞ

Doğada meydana gelen bir olayın sonucu olarak veya bir soruna matematiksel bir model vermek için tanımlanan; matematik, biyoloji ve mühendislik gibi alanlarda uygulamaları olan sayı dizileri ve genellemeleri birçok araştırmacı tarafından yıllardır incelenmektedir.

Tez çalışmamızda, son yıllarda üzerine birçok araştırma makalesi yazılan, başlangıç koşulları $B_1 = 1,\ B_2 = 6$ olan

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, \quad n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan balancing sayıları incelenmiş, geniş bir literatür taraması yapılmıştır. Genel formu

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

ile verilen 2×2 blok matris tanımından hareketle bir blok matris tanımlanmış ve blok matrislerin özelliklerinden faydalanılarak balancing sayılarının yeni bazı özellikleri elde edilmiştir. "A ve B iki kare matris olmak üzere $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde tekil olmayan (yani $\det(P) \neq 0$) bir P matrisi varsa, A ve B matrislerine benzer matris denir" tanımı ve benzer matrislerin özelliklerinden hareketle tanımlanan blok matrisin özelliklerinin incelenmesi ve balancing sayıları ile ilişkilendirilmesi kolaylaşmıştır. Sonuçlar Maple programı ile kontrol edilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş, ikinci bölümde çalışmada kullanılacak bazı tanım ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde kaynak araştırması yapılmıştır. Esas sonuçların verildiği son bölümde ise blok matris ve balancing sayılarının matris gösterimi tanımlanmış ve bu matrisler ile ilgili bazı eşitlikler elde edilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamıza temel teşkil eden, bazı temel tanımlara ve özelliklere yer vereceğiz.

Tanım 2.1.

Fibonacci sayı dizisi $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç koşulu olmak üzere, $n \geq 0$ için,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır. Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Şekil 2.1. Fibonacci sayıları

Birçok bilim insanı tarafından yıllardır çalışılan, her defasında ilginç sonuçlar veren ve tavşanlarla ilgili bir problemin çözümü neticesinde ortaya çıkan Fibonacci sayıları en bilinen sayı dizilerinden biridir.

Tavşan problemi şöyle özetlenebilir. Biri erkek diğeri dişi yeni doğmuş iki tavşan olsun.

- Her bir çiftin olgunlaşması bir ay sürsün.
- Her bir çift tavşan ikinci aydan itibaren her ay erkek-dişi bir çift dünyaya getirsin.
- Dünyaya gelen bütün tavşanlar ölümsüz olsun.

Bu koşullar altında bir yılda dünyaya gelen tavşan sayısı hesaplanmak istensin. Kabul edelim ki tavşanların ilk çiftleri 1 Ocak'ta doğsun. Olgunlaşmaları bir ay süreceğinden bu nedenle 1 Şubat'ta hala 1 çift olur. 1 Mart'ta iki aylıklar ve yeni bir çift ürettiler. Böylece toplam 2 çift oldu. Bu şekilde ilerleyerek, Nisan ayında 3 çift, Mayıs ayında 5 çift olacak şekilde devam eder. Buradaki her bir sayı; 1, 1, 2, 3, 5, 8 …, kendinden önceki iki sayının toplamı olarak ifade edilen Fibonacci sayılarıdır.

Tanım 2.2.

Her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ için,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına Lucas sayıları denir.

Bazı Lucas sayıları aşağıda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Şekil 2.1. Lucas sayıları

Tanım 2.3.

$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$ reel sayılar olmak üzere,

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

fonksiyonu $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır. Sonlu dizilerin üreteç fonksiyonu da sonludur. Yani,

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

gibi sonlu dizilerin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

şeklindedir.

Üreteç fonksiyon tanımı kullanarak Fibonacci rekürans bağıntısını çözelim. Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$g(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \ldots + F_n x^n + \ldots$$

olsun. F_{n-1} ve F_{n-2} sayılarının mertebesi, F_n'in mertebesinden sırasıyla 1 ve 2 daha az olduğundan;

$$xg(x) = F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots + F_{n-1} x^n + \ldots$$

$$x^2 g(x) = F_1 x^3 + F_2 x^4 + \ldots + F_{n-2} x^n + \ldots$$

$$g(x) - xg(x) - x^2 g(x) = \underset{1}{F_1}\, x + (\underbrace{F_2 - F_1}_{0})x^2 + (\underbrace{F_3 - F_2 - F_1}_{0})x^3 + \ldots + (\underbrace{F_n - F_{n-1} - F_{n-2}}_{0})x^n + \ldots$$

$$= x$$

olacaktır.

$$g(x) \cdot [1 - x - x^2] = x \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right]$$

$$\sqrt{5} g(x) = \frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n - \beta^n) \cdot x^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}} \cdot x^n$$

Dolayısıyla üreteç fonksiyonun eşitliğini kullanarak F_n için Binet formülü ; $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

denklemin pozitif kökü ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ denklemin negatif kökü olmak üzere:

$$F_n = \frac{\left(\alpha^n - \beta^n\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir [1].

Tanım 2.4.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{2.1}$$

şeklindeki polinoma ikinci tür Chebyshev polinomu denir. Diğer bir ifadeyle, $n \geq 2$ ve $x = \cos\theta$ için,

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},\ U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta},\ U_{n-2}(x) = \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
U_n(x) + U_{n-2}(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin n\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos n\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin n\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \cos n\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{2 \cdot \cos\theta \cdot \sin n\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{2x \sin n\theta}{\sin\theta} \\
&= 2xU_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$

eşitliği elde edilir. İkinci tür Chebyshev polinomlarının ilk dört terimi

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 4x, \ldots$$

yukarıdaki gibidir [2].

Tanım 2.5.

Bir üçgensel sayı, 1'den n'ye kadar olan n tane doğal sayının toplamıdır. n'inci üçgensel sayının formülü şöyledir:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bazı üçgensel sayı şunlardır: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136…

Tanım 2.6.

F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. m satır n sütunlu matrise $m \times n$ boyutlu(mertebeli) ya da kısacası bir $m \times n$ matris denir [3].

Tanım 2.7

A bir kare matris olmak üzere $A^T = -A$ ise A matrisine ters simetrik matris denir. Yani transpozesi negatifine eşit olan matrise ters simetrik matris denir.

Tanım 2.8.

Eğer $A\, n\times n$ bir kare matris ve $I\, n\times n$ birim matris olmak üzere, $AB = BA = I$ olacak şekilde bir $n\times n$ B matrisi varsa o zaman B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün, tekil olmayan) matrisler denir [3].

Tanım 2.9.

A bir kare matris olmak üzere $A = JAJ^{-1}$ olacak şekilde ters-köşegen elemanlar 1 ve diğer elemanlar 0 olan bir anti-diagonal J matrisi varsa A matrisine centro-simetrik matris denir. Eğer $A = -JAJ^{-1}$ ise A matrisine skew-centro-simetrik matris denir. Ters simetrik matrislerin sağladığı bazı özellikler aşağıda sıralanmıştır.

- İki ters simetrik matrisin toplamı, ters simetriktir.
- Ters simetrik bir matrisin bir skaler katı ters simetriktir.
- Ters simetrik matrisin köşegenindeki elemanlar sıfırdır ve dolayısıyla izi de sıfırdır.
- A reel elemanlı bir ters simetrik matris ise $\det A \geq 0$ dir.

Tanım 2.10.

Eğer $A = (a_{ij})_{n\times n}$ kare matrisi için $a_{i,i+1} = 1,\ a_{n1} = 1$ ve diğer bütün elamanları sıfır oluyorsa o zaman A matrisine permütasyon matris denir. Üçüncü mertebeden permütasyon matrisine örnek olarak

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin verebiliriz [3].

Tanım 2.11.

$$T_n = (t_{i,j})_{i,j=1}^{n} = \begin{cases} t_{i,i+k} = a_i, & i = 1,2,\ldots,n-k \quad \text{için} \\ t_{i,i} = d_i, & i = 1,2,\ldots,n \quad \text{için} \\ t_{i+k,i} = a_i, & i = 1,2,\ldots,n-k \quad \text{için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrise k-tridiagonal matris denir. $k = 1$ için bu matrislere tridiagonal matris denir. Bilim insanları tarafından ilgi gören k-tridiagonal matrislerin mühendislik ve fen alanlarında birçok uygulaması bulunmaktadır. Spline yaklaşımı, telekomünikasyon sistem analizi, paralel hesaplama bu tipteki matrislerin uygulama alanlarına örnek olarak verilebilir [4].

Tanım 2.12.

$A = \left(a_{ij}\right)$ bir n-kare matris olmak üzere, A matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S_n simetrik grup ve $\operatorname{sgn}(\sigma)$;

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \ \text{çift ise} \\ -1, & \sigma \ \text{tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonudur [3].

Determinantla ilgili bazı temel özellikler aşağıda sıralanmıştır.

- A ve B $n \times n$ iki matris ise $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ dir.
- A ve P aynı boyutlu karesel matrisler ve P ters çevrilebilir bir matris ise $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$ dır.

Örnek

n = 3 için {1,2,3} kümesinin 3! = 6 tane permütasyonu vardır. Şimdi bunları yazarak işaretlerinin inceleyelim. Buna göre;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \operatorname{sgn}(\sigma_1) = +1, \ \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \ \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), \ \operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1, \ \ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (13)(21), \ \operatorname{sgn}(\sigma_4) = -1$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (12)(13), \ \operatorname{sgn}(\sigma_5) = +1, \ \ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \ \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$$

işaretleri bulunur. Buna göre 3×3 tipindeki A matrisinin determinantı,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

$$= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+ \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.13.

Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin permanenti

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. *P(A)* veya *per(A)* ile gösterilir. Burada S_n simetrik grubu ve σ permütasyonu gösterir. A $n \times n$ kare matris olmak üzere herhangi bir α skaleri için,

$$per(\alpha A) = \alpha^n per(A)$$

dır [3].

Örnek

n = 3 için {1,2,3} kümesinin 3! = 6 tane permütasyonu vardır. Şimdi bunları yazalım. Buna göre;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Buna göre, 3×3 tipindeki *A* matrisinin permanenti,

$$per(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_3} \prod_{i=1}^{3} a_{i\sigma(i)}$$

$$= a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} + a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)}$$

$$+ a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} + a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)} + a_{1\sigma_6(1)} a_{2\sigma_6(2)} a_{3\sigma_6(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{33}$$

dir.

Tanım 2.14

$A = \left[a_{ij} \right]$ satır vektörleri $r_1, r_2, \ldots, r_n$ olacak şekilde $m \times n$ mertebeli bir matris olsun. Eğer *A* matrisinin *k*. sütununda tam iki elemanı sıfırdan farklı diğer elamanların hepsi sıfır ise *A* matrisinin *k*. sütununa göre contraction (büzüşme) uygulanabilir denir. Farz edelim ki, *A* matrisinde $a_{ik} \neq 0 \neq a_{jk}$ ve $i \neq j$ olmak üzere *k*. sütuna göre contraction uygulayalım. O halde $A_{ij:k}$ olarak adlandıracağımız $(m-1)\times(n-1)$ mertebeli matris *A* matrisinde *i*. satıra $a_{jk} r_i + a_{ik} r_j$ vektörü yazılıp *j*. satır ve *k*. sütunun silinmesi ile elde edilir. Bu işlem *A* matrisinin *k*. sütununa göre contraction (büzüşme) olarak adlandırılır. Eğer *A* matrisi $a_{ik} \neq 0 \neq a_{jk}$ ve $i \neq j$ olmak üzere *k*. satıra göre contraction (büzüşme) yapılabilirse $A_{k:ij} = (Ai^{T}_{ij:k})^{T}$ ifadesi doğrudur. Eğer *A* matrisi tam sayılardan oluşan bir matris ve *B* matrisi de *A* matrisinden contraction (büzüşme) ile elde ediliyorsa,

$$perA = perB$$

dir [5].

Teorem 2.1.

Başlangıç şartları $u_0 = 0,\ u_1 = 1, u_2 = a$ olan

$$u_n = au_{n-1} + bcu_{n-2}$$

olmak üzere,

$$T_n\left(a,b,c\right) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & & \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & 0 & c & a \end{pmatrix}_{n\times n}$$

şeklinde tanımlanan matrisin permanent değeri

$$per\left(T_n\right) = u_{n+1}$$

dir [6].

İspat

Bu eşitliği göstermek için permanent hesaplama yöntemi olan "contraction" yöntemini kullanacağız.

$r = 1$ için

$$T_n^{\{1\}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & c & a & b \\ 0 & & 0 & c.u_2 & u_3 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$r = 2$ için

$$T_n^{\{2\}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & c & a & b \\ 0 & & 0 & c.u_3 & u_4 \end{pmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$\vdots$$

$r = n-3$ için

$$T_n^{\{n-3\}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & cu_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$r = n-2$ için

$$T_n^{\{n-2\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c.u_{n-1} & u_n \end{pmatrix}$$

$$per(T_n) = u_{n+1}$$

olur. $per(T_n) = per\left(T_n^{\{r\}}\right)$ olduğundan

$$per(T_n) = au_n + bcu_{n-1}$$

olur ki, ispat tamamlanır.

Tanım 2.15.

A bir $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. Eğer λ bir skaler ve x vektörü de sıfır olmayan, $x \neq 0$ bir sütun vektörü olmak üzere, $Ax = \lambda x$ eşitliği sağlanıyorsa x vektörü, A matrisinin öz vektörü, λ skaleri de A matrisinin öz değeridir. Aynı zamanda x, λ öz değerine karşılık gelen öz vektördür.

Ayrıca bir matrisin öz değerlerinin çarpımı, matrisin determinantına eşittir. Yani

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \det(A)$$

dır [7].

Tanım 2.16.

Ters simetrik $A=\left(a_{i,j}\right)\in M_{2k,2k}(F)$ matrisinin Pfaffianı, $1\leq i_s\leq j_s\leq n$ ve $1\leq s\leq n$ olmak üzere,

$$P(A)=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \cdots & i_n & j_n \end{Bmatrix}_{2n} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Pfaffian, determinanta benzer olarak aşağıdaki özellikleri sağlar:

- Bir satırın ve bir sütunun bir sabit ile çarpımı, Pfaffian aynı sabit ile çarpılmasına eşdeğerdir.
- İki farklı satırın ve karşılık gelen sütunların eş zamanlı değişimi Pfaffian işaretini değiştirir.
- Bir satıra ve ilgili sütuna eklenen bir satırın ve karşılık gelen sütunun katları, Pfaffianın değerini değiştirmez.

Bu özellikleri kullanarak Pfaffian, determinanta benzer ve hızlı bir şekilde hesaplanabilir. Bir $2n\times 2n$ ters simetrik A matris için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- $pf(A^T)=(-1)^n pf(A)$
- $pf(\lambda A)=\lambda^n pf(A)$
- $pf(A)^2=\det A$

Pfaffian tanımından hareketle, bazı matrislerin Pfaffian'ının hesabı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } pf(A) = a_{22},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ise

$$P(A_4) = \sum \operatorname{sgn} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 \end{Bmatrix}_{2n} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}$$

$$= \operatorname{sgn}\{1\ 2\ 3\ 4\}\, \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{34} + \operatorname{sgn}\{1\ 3\ 2\ 4\}\, \mathrm{a}_{13}\mathrm{a}_{24} + \operatorname{sgn}\{1\ 4\ 2\ 3\}\, \mathrm{a}_{14}\mathrm{a}_{23}$$

$$= \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{34} - \mathrm{a}_{13}\mathrm{a}_{24} + \mathrm{a}_{14}\mathrm{a}_{23}$$

Çift mertebeli herhangi bir tridiagonal matrisin Pfaffian hesabı aşağıdaki gibidir:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ -a_1 & 0 & b_1 & & & & \\ & -b_1 & 0 & a_2 & & & \\ & & -a_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & \\ & & & & -b_{n-1} & 0 & a_n \\ & & & & & -a_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$pf\ (A_n) = a_1 a_2 \ldots a_n$$

dır.

Tanım 2.17.

$A=(a_{ij})\in M_{m,n}(F)$ ve $B=(b_{i,j})\in M_{p,q}(F)$ matrislerinin Kroneker çarpımı $A\otimes B$ ile gösterilir ve

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A\otimes B\in M_{mp,nq}(F)$ dir. Kroneker çarpımda aynı zamanda matrislerin tensör çarpım ya da direkt çarpımda denir [3].

Kroneker çarpımının bazı temel özellikler aşağıda sıralanmıştır.

- Genel olarak Kronoker çarpımı değişmeli değildir. Yani $A\otimes B\neq B\otimes A$ dir.
- Her $\alpha\in F,\ A\in M_{m,n}(F)$ ve $\beta\in F,\ B\in M_{p,q}(F)$ için $(\alpha A)\otimes B=A\otimes(\alpha B)$ dir.
- $A\in M_{m,n}(F),\ B\in M_{p,q}(F)$ ve $C\in M_{r,s}(F)$ için $\left(A\otimes B\right)\otimes C=A\otimes\left(B\otimes C\right)$ dir.
- $A\in M_{m,n}(F),\ B\in M_{p,q}(F)$ için $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$ dir.
- A ve B tekil olmayan iki matris olmak üzere,

  $A\in M_m(F),\ B\in M_n(F)$ için $\det(A\otimes B)=\det(B\otimes A)=\left(\det(A)\right)^n\left(\det(B)\right)^m$ dir.
- A ve B tekil olmayan iki matris olmak üzere, $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$ dir.

Tanım 2.18.

A herhangi bir matris olmak üzere A'nın bir kısım satır ve sütunlarının silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin bir alt matrisi denir. Alt matris olarak adlandırılan bölümlere ayrılmış matrislere blok matris denir. Ayrıca verilen bir matris farklı yollarla bloklara bölünebilir [9].

3. LİTERATÜR ÖZETİ

Sayı sistemleri antik çağlardan bu yana matematikçiler için ilgi kaynağı olmuştur. Bu bölümde tez çalışmamıza zemin teşkil eden bazı makalelerin özetleri verilmiştir.

Behera ve Panda

$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)$, ($r\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $n\geq 2$)

şeklinde Diophantine denkleminin çözümü olarak çalışmamızın giriş kısmında tanımı verilen balancing sayı dizisini elde etmişlerdir. Daha sonra bir n pozitif tam sayısının balancing sayısı olması gerek ve yeter şart için n^2'nin bir üçgensel sayı ya da $8n^2+1$ in mükemmel bir kare olmasıdır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+1}}{B_n}=3+\sqrt{8}$$

olduğunu göstermişlerdir [10].

Kulkarni, Schmidt ve Tsui,

$$T_n(a,b,c)=\begin{bmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

şeklindeki tridiagonal Toeplitz matrisin öz değerlerini

$$\lambda_k=a-2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\quad k=1,2,...,n \tag{3.2}$$

olarak elde etmişlerdir [6].

Ray birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomların özelliklerini kullanarak balancing sayılarını:

$$B_n = \prod_{k=1}^{n-1}(6-2\cos\frac{k\pi}{n}). \tag{3.3}$$

şeklinde çarpanlara ayırmıştır. Ayrıca A_n, n-kare $(n=1,2,\ldots)$ matrisi

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & \\ & A_{32} & A_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & A_{(n-1)n} \\ & & & A_{n(n-1)} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

formda bir matris ise n'nin ardışık değerleri için A_n'in determinantı,

$$\det(A_1) = A_{11}$$

$$\det(A_2) = A_{11} \cdot A_{22} - A_{21} \cdot A_{12}$$

$$\vdots$$

$$\det(A_n) = A_{nn} \cdot \det(A_{n-1}) - A_{(n-1)n} \cdot A_{n(n-1)} \cdot \det(A_{n-2}).$$

rekürans bağıntısıyla elde etmiştir. Bu bağlamda,

$$D_n = [d_{ij}] = \begin{cases} -i, & j = i+1 \quad \text{için}, \\ i, & i = j+1 \quad \text{için}, \\ 6, & i = j \quad \text{için}, \end{cases}$$

formunda tanımlanan matrisinin determinantını, yukarıda verilen tridiagonal matris determinant hesabından hareketle,

$\det(D_1) = 6$

$\det(D_2) = 36 + i^2 = 35$

$\vdots$

$\det(D_n) = 6\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2}),$

olarak elde etmiştir. Ayrıca yazar $n \geq 2$ için

$B_n = \det(D_{n-1})$

olduğunu göstermiştir. Bunun yanında D_n matrisini

$$S_n = \begin{pmatrix} 0 & -i & & & \\ i & 0 & -i & & \\ & i & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -i \\ & & & i & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $D_n = 6I + S_n$ şeklinde yazmış, λ_k, $k = 1, 2, 3, ..., n$, S_n matrisinin öz değerleri ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler X_k olmak üzere, her j için,

$$\begin{aligned} D_n X_j &= (6I + S_n) X_j \\ &= 6IX_j + S_n X_j \\ &= 6X_j + \lambda_j X_j \\ &= (6 + \lambda_j) X_j \end{aligned}$$

dir. Böylece, $\delta_k = 6 + \lambda_k$, D_n matrisinin öz değerleridir. Sonuç olarak k = 1, 2, 3,…,n için,

$$\det D_n = \prod_{k=1}^{n} (6+\lambda_k), \quad k \geq 1$$

dir. İkinci tür Chebyshev polinomlarının özelliklerinden ve (3.2) eşitliğinden hareketle (3.3) eşitliğin sağlandığını göstermişlerdir [11].

Koç ve Tekcan çalışmasında, *k*-balancing sayılarının bazı cebirsel özelliklerini ele almışlar, *k*-balancing sayılarının en büyük ortak böleni, *k*-balancing sayılarının bölünebilirlik özellikleri, *k*-balancing sayılarının toplamı ve *k*-balancing sayılarının basit sürekli kesir genişlemesi için bazı formüller ortaya çıkarmışlardır [12].

Panda çalışmasında yüksek mertebeli balancing ve cobalancing sayı dizileri tanımlamıştır [13].

Panda ve Ray makalelerinde balancing ve cobalancing sayılarının Pell ve Pell benzeri sayı dizileri ile olan ilişkileri incelemişlerdir [14].

Panda ve Davala makalelerinde, balancing sayıları arasındaki tek mükemmel sayının 6 olduğunu göstermişlerdir [15].

Péter makalesinde balancing sayılar ve cobalancing sayıların ilginç özelliklerini ve bütün genelleşmiş balancing sayı türlerini incelemişlerdir [16].

Ray çalışmasında bazı balancing ve Lucas balancing sayılarının topamlarını elde etmek için 2×2 matrislerinin özel tipi olan iki tane

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ve } T = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlamışlar, bu matrisleri balancing ve Lucas balancing sayılarının bazı yeni özelliklerini ortaya çıkarmak için kullanmışlardır [17].

Panda çalışmasında balancing sayılarının başka ilginç aritmetik tip, de-Moivre tip ve trigonometrik tip özelliklerini ortaya koymuş. Aynı zamanda iki balancing sayısının en büyük ortak bölenine ilişkin önemli bir özellik ortaya koymuştur [18].

Mikkawy ve Sogabe *k*-tridiagonal matrislerin genelleştirilmiş *k*-tridiagonal matrislerin tasvirinde önemli rol oynadığını bulmuşlardır [19].

Rimas *k*-tridiagonal matrislerin tipteki matrislerin tam sayı kuvvetlerini Chebyshev polinomların özelliklerini kullanarak hesaplamıştır [20, 21].

Brualdi ve Ryser de

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$$

şeklindeki blok matrisler için

$$per(A) = per(A_1) \cdot per(A_2) \tag{3.4}$$

eşitliğini elde etmişlerdir [22].

Tomohiro ile Moawwad, permütasyon matrisler yardımıyla *k*-tridiagonal matrisleri, *k* tane tridiagonal matrislerin direkt toplamı haline getirmişlerdir. Daha sonra elde edilen matrisin determinantını hesaplamışlardır [23].

Mikkawy ve arkadaşları *k*-tridiagonal matrislerin blok köşegenleştirilmesi için algoritma vermişler ve *k*-tridiagonal matrislerin tersinin hesaplanması üzerine çalışmışlardır ([19, 24].

Kırklar ve Yılmaz aşağıdaki formda verilen

$$T_{n(k)}^{(k)} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & d_2 & & & & a_2 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & & \\ 0 & & & d_k & & & & a_k & & \\ b_1 & & & & d_1 & & & & a_1 & 0 \\ 0 & b_2 & & & & d_2 & & & & \ddots \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & 0 \\ & & & b_k & & & & d_k & & \vdots \\ & & & & b_1 & & & & d_1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

n-kare matrisini k-tridiagonal k-Toeplitz matris olarak ifade etmişler, tridiagonal matrisler ve Toeplitz matrislerle yapılan çalışmalardaki bilgileri kullanarak bu matrislerin determinant değerlerini, permanentlerini ve öz değerlerini elde etmişlerdir [25].

Brualdi ve Gibson, P permütasyon matris olmak üzere

$$per(PAP^{-1}) = per(A)$$

olduğunu göstermiştir [5].

Yılmaz ve arkadaşları $A_n = \left[a_{i,j}\right]$ ve $B_n = \left[b_{i,j}\right]$ aşağıdaki formda kare matrisler olmak üzere ($1 \le i, j \le n$):

$$\left[a_{i,j}\right] = \begin{cases} a, & j = i+1 \quad \text{için,} \\ -a, & i = j+1 \quad \text{için,} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\left[b_{i,j}\right] = \begin{cases} (-1)^{i+1} b, & i + j = n+1 \text{ için,} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

tipindeki skew-centro-simetrik blok matrisleri tanımlamışlar ve bu matrislerin determinant ve Pfaffianını iki terimli çift rekürans bağıntısı yardımıyla hesaplamışlardır. Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayılarını bu tipteki matrislerin Pfaffianı olarak elde etmişlerdir [26].

3. BLOK MATRİS VE BALANCING SAYILARI

Bu kısımda, tanımı tez çalışmamızın giriş kısmında verilen balancing sayıları ile blok matrisler ilişkilendirilerek, blok matrislerin özelliklerinden de faydalanarak bazı sonuçlar elde ettik [27].

Aşağıda bazı balancing sayıları yazılmıştır.

n	1	2	3	4	6	7
B_n	1	6	35	204	1189	6930

Şekil 4.1. Balancing sayıları

H_n ve G_n n-kare $(\mathrm{n}=2\mathrm{k},\ \mathrm{k}=1,2,\ldots)$ matrisleri

$$U_k=[u_{ij}]=\begin{cases}1, & i=j+1 \text{ ve } j=i+1 \quad \text{için}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$V_k=[v_{ij}]=\begin{cases}1, & j=i+1 \quad \text{için}\\ -1, & i=j+1 \quad \text{için}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olmak üzere,

$$H_n=\left(\begin{array}{c|c} U_k & 6I_k \\ \hline 6I_k & U_k\end{array}\right),\ G_n=\left(\begin{array}{c|c} V_k & 6I_k \\ \hline -6I_k & V_k\end{array}\right),$$

formunda matrisler olsun. Burada I_k , k mertebeli birim matristir.

Eğer k = 3 ($n = 6$) ise

$$H_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zhang'ın kitabında yer alan ve çalışmamızda kullandığımız determinant hesabında kolaylık sağlayan özelliği ispatsız olarak bir Lemma formunda verelim.

Lemma 4.1.

A ve B aynı mertebeli kompleks elemanlı kare matrisler ise

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right| = \det(A+B)\cdot\det(A-B) \tag{4.1}$$

dir [7].

Ayrıca n-kare ($n = 2k$) E_n matrisini

$$E_n = \left(\begin{array}{c|c} I_k & I_k \\ \hline I_k & -I_k \end{array} \right),$$

formunda tanımlayalım.

Lemma 4.2.

$\det E_n = (-2)^k$ [28].

İspat

Kroneker çarpım özelliklerinden hareketle

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_k$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_k \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right|^k \cdot \left| I_k \right|^2$$

$$= (-2)^k$$

dır.

Lemma 4.3.

$$E_n^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} I_k & I_k \\ \hline I_k & -I_k \end{array} \right) \text{[28]}.$$

İspat

$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_k$, $n = 2k$ için A ve B tekil olmayan iki matris olmak üzere,

$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

$$E_n^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & I_k \\ \hline I_k & -I_k \end{array}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \otimes \left(I_k\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_k$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} -I_k & -I_k \\ \hline -I_k & I_k \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} I_k & I_k \\ \hline I_k & -I_k \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} I_k & I_k \\ \hline I_k & -I_k \end{array}\right)$$

dır.

Lemma 4.4.

$$E_n^{-1} = \frac{1}{2}\left(E_n\right)^T .$$

İspat

$$E_n E_n^{-1} = \frac{1}{2} E_n \left(E_n\right)^T = I_n .$$

$M_k = [m_{ij}]$ ve $N_k = [n_{ij}]$ matrisleri elemanları

$$[m_{ij}] = \begin{cases} 1, & i = j+1 \text{ ve } j = i+1 \text{ için}, \\ 6, & i = j \qquad\qquad \text{için}, \qquad ; i, j = 1, 2, 3, \ldots, k \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$[n_{ij}] = \begin{cases} 1, & i = j+1 \text{ ve } j = i+1 \text{ için}, \\ -6, & i = j \qquad\qquad \text{için}, \qquad ; i, j = k+1, \ldots, n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

formunda olan matrisler olsun. Ayrıca blok diagonal S_n n-kare matrisini,

$$S_n = \left(\begin{array}{c|c} M_k & 0 \\ \hline 0 & N_k \end{array} \right)$$

formunda tanımlayalım. Eğer $k = 3$ ($n = 6$) ise

$$S_6 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

dır.

Önerme 4.1.

H_n ve S_n matrisleri benzer matrislerdir.

İspat

$$E_n^{-1} H_n E_n = \left(\frac{1}{2}\right) E_n H_n E_n = S_n$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_k & I_k \\ I_k & -I_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_k & 6I_k \\ 6I_k & U_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & I_k \\ I_k & -I_k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U_k + 6I_k & 6I_k + U_k \\ U_k - 6I_k & 6I_k - U_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & I_k \\ I_k & -I_k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U_k + 6I_k + U_k + 6I_k & U_k + 6I_k - U_k - 6I_k \\ U_k - 6I_k - U_k + 6I_k & U_k - 6I_k + U_k + 6I_k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2U_k + 12I_k & 0 \\ 0 & 2U_k - 12I_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_k + 6I_k & 0 \\ 0 & U_k - 6I_k \end{pmatrix}$$

$$= S_n$$

dır.

Sonuç 4.1.

H_n'nin öz değerleri, $j = 1,2,\ldots,k$ olmak üzere

$$\lambda_j = \prod_{j=1}^{k}\left(6 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right),$$

$$\lambda_j = \prod_{j=1}^{k}\left(-6-2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)$$

dir.

İspat

Buradan H_n matrisinin determinantını 4.1. Lemmadan hareketle

$$\det H_n = \left|\begin{array}{c|c} U_k & 6I_k \\ \hline 6I_k & U_k \end{array}\right| = \det\left(U_k + 6I_k\right)\cdot\det\left(U_k - 6I_k\right)$$

dır. $M_k = U_k + 6I_k$ ve $N_k = U_k - 6I_k$ tridiagonal matrislerini aşağıdaki gibi açık olarak yazacak olursak,

$$M_k = \begin{pmatrix} 6 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 1 & & \\ & 1 & 6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} -6 & 1 & & & \\ 1 & -6 & 1 & & \\ & 1 & -6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

dır. (3.2) den hareketle tridiagonal H_n matrisinin öz değerleri

$$\lambda_j = \prod_{j=1}^{k}\left(6-2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right),\ \lambda_j = \prod_{j=1}^{k}\left(-6-2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.2

H_n matrisinin determinantı

$$\det H_n = \prod_{j=1}^{k} (6 - 2\cos\frac{j\pi}{k+1})(-6 - 2\cos\frac{j\pi}{k+1})$$

dır.

İspat

Bir matrisin öz değerlerinin çarpımı, matrisin determinantına eşit olduğundan ve Sonuç 4.1.' den ispat görülür.

Teorem 4.1.

B_k, k. balancing sayısı olmak üzere

$$\det \mathrm{H}_n = (-1)^k \mathrm{B}_{k+1}^2$$

dır.

İspat

Sonuç 4.1.' den ve (3.2) eşitlikten sonuç görülür. Daha açık bir ifadeyle, N_k matrisinin birinci satırını (-1) parantezine alalım

$$\det N_k = \det(-1)\begin{pmatrix} 6 & -1 & & & \\ 1 & -6 & 1 & & \\ & 1 & -6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

sırası ile ikinci satırdan *k*. satıra kadar bu işlemi devam ettirirsek,

$$\det N_k = \det \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{k \text{ tane}} \begin{pmatrix} 6 & -1 & & & \\ -1 & 6 & -1 & & \\ & -1 & 6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det N_k = \det(-1)^k \begin{pmatrix} 6 & -1 & & & \\ -1 & 6 & -1 & & \\ & -1 & 6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

olur. En son elde edilen N_k, matrisinde, $a = 6,\ b = -1$ ve $c = -1$ için özdeğerleri (3.2) eşitliğinden yazılacak olursa,

$$\lambda_j = (-1)^k \cdot \left(a - 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right), \quad j = 1,2,\ldots,k$$

$$= (-1)^k \cdot \left(6 - 2\sqrt{(-1)\cdot(-1)}\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)$$

$$= (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^{k}\left(6 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)$$

Ayrıca (3.3) eşitliğinden

$$B_{k+1} = \prod_{j=1}^{k}(6 - 2\cos\frac{j\pi}{k+1})$$

ifadesi yazılır. Sonuç olarak,

$$\det H_n = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} (6 - 2\cos\frac{j\pi}{k+1}) \cdot (6 - 2\cos\frac{j\pi}{k+1})$$

$$= (-1)^k B_{k+1} \cdot B_{k+1}$$

$$= (-1)^k B_{k+1}^2$$

bulunur.

Sonuç 4.3.

Başlangıç şartları $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 6$ olan $u_k = 6u_{k-1} + u_{k-2}$, $k > 2$ için u_k dizisini tanımlayalım.

$$perS_n = (-1)^k u_{k+1}^2$$

dir.

İspat

(3.4) eşitliğinden

$$perS_n = \left(\begin{array}{c|c} M_k & 0 \\ \hline 0 & N_k \end{array}\right) = per\left(M_k\right) \cdot per\left(N_k\right)$$

dir.

$$M_k = \begin{pmatrix} 6 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 1 & & \\ & 1 & 6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} -6 & 1 & & & \\ 1 & -6 & 1 & & \\ & 1 & -6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

N_k matrisini birinci satırdan, *k.* satıra kadar (-1) parantezine alırsak

$$perN_k = per(-1)^k \begin{pmatrix} 6 & -1 & & & \\ -1 & 6 & -1 & & \\ & -1 & 6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

M_k ve N_k matrislerine sırası ile permanent hesaplama yöntemi olan "contraction" uygulayalım.

$r=1$ için

$$M_k^{\{1\}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & 6 & 1 \\ 0 & & 0 & 6 & 37 \end{pmatrix}_{(k-1)\times(k-1)}$$

$r=2$ için

$$M_k^{\{2\}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & 6 & 1 \\ 0 & & 0 & 37 & 228 \end{pmatrix}_{(k-2)\times(k-2)}$$

$$\vdots$$

$r=k-3$ için

$$M_k^{\{k-3\}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & u_{k-2} & u_{k-1} \end{pmatrix}$$

$r=k-2$ için

$$M_k^{\{k-2\}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ u_{k-1} & u_k \end{pmatrix}$$

olur. $per\left(M_k\right) = per\left(M_k^{\{r\}}\right)$ olduğundan $per\left(M_k\right) = 6u_k + u_{k-1}$ olur. Böylece

$per\left(M_k\right)=u_{k+1}$ olur.

Yukarıdaki işlemlerin aynısını N_k matrisine uygularsak, $per\left(N_k\right)=per\left(N_k^{\{r\}}\right)$ olduğundan $per\left(N_k\right)=6u_k+u_{k-1}$ olur. Böylece $per\left(N_k\right)=u_{k+1}$ olur.
Böylece,

$$perS_n=(-1)^k\, per\left(M_k\right)\cdot per\left(N_k\right)$$

$$=(-1)^k\, u_{k+1}\cdot u_{k+1}$$

$$=(-1)^k\, u_{k+1}^2$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.

B_k k. balancing sayısı olmak üzere,

$$\det G_n=B_{k+1}^2$$
dır.

İspat

Tanım 4.1.' den G_n matrisi yeniden yazılabilir. K_n ve G_n matrisleri benzer matrisler olmak üzere,

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\otimes I_k,$$

$$K=P^{-1}GP,\ \det(P)\neq 0$$

yazılır.

$$\det(K) = \det(P^{-1}GP)$$

$$= \det(P^{-1}G)\cdot\det(P)$$

$$= \det(P^{-1})\cdot\det(G)\det(P)$$

$$= \det(G)\cdot\det(P^{-1})\det(P)$$

$$= \det(G)\cdot\det(P^{-1}\cdot P)$$

$$= \det(G)\cdot\det(I)$$

$$= \det(G)$$

Buradan

$$P^{-1}G_nP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_k & 6I_k \\ -6I_k & V_k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{I_k}{\sqrt{2}} & \frac{I_k}{\sqrt{2}} \\ \frac{iI_k}{\sqrt{2}} & -\frac{iI_k}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{V_k}{\sqrt{2}} + \frac{6i\cdot I_k}{\sqrt{2}} & \frac{6I_k}{\sqrt{2}} - \frac{iV_k}{\sqrt{2}} \\ \frac{V_k}{\sqrt{2}} - \frac{6i\cdot I_k}{\sqrt{2}} & \frac{6I_k}{\sqrt{2}} + \frac{iV_k}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{I_k}{\sqrt{2}} & \frac{I_k}{\sqrt{2}} \\ \frac{iI_k}{\sqrt{2}} & -\frac{iI_k}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V_k + 6iI_k & 0 \\ 0 & V_k - 6iI_k \end{pmatrix}$$

$6iI_k + V_k$ ve $-6iI_k + V_k$ tridiagonal matrisler ve bu matrislerin öz değerleri,

$$\lambda_j = 6i - 2i\cos\frac{j\pi}{k+1} \text{ ve } \lambda_j = -6i - 2i\cos\frac{j\pi}{k+1},$$

dir.

Böylece,

$$\det K_n = \det\left(P^{-1}G_nP\right)$$

$$= \det(6iI_k - V_k)\det(-6iI_k + V_k)$$

$$= \prod_{t=1}^{k}(6i - 2i\cos\frac{t\pi}{k+1})(-6i - 2i\cos\frac{t\pi}{k+1})$$

$$= \prod_{t=1}^{k}(6 - 2\cos\frac{t\pi}{k+1})(6 - 2\cos\frac{t\pi}{k+1})$$

$$= B_{k+1}^2$$

dır.

Bu tezde, S_n matrisinin permanentini hesaplamak için aşağıdaki Maple kodunu kullandık.

```
with(linalg):
k := -:
a := 1 : b := 6 : c := 1 : d := -6 :
f := (i; j)- > piecewise(j = i + 1; a; i = j + 1; c; j = i; b; 0) :
g := (i; j)- > piecewise(j = i + 1; a; i = j + 1; c; j = i; d; 0) :
n := k :
M_n := matrix(n; n; f):
N_n := matrix(n; n; g) :
S_n := Linear Algebra : -Diagonal Matrix([M_n; N_n]);
permanent(S_n);
```

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, çalışmamızda blok matrislerin bazı özelliklerini kullanarak balancing sayıları için bazı yeni özellikler elde edilmiştir.

Ters simetrik bir matrisin Pfaffian'ı ve determinantı yakından ilişkili kavramlardır. Bilindiği üzere bir matrisin Pfaffianın karesinin matrisin determinantına eşittir.

Yani, bir n-kare ters simetrik A matrisi için,

$$\det A = [PfA]^2.$$

dır.

İspatını henüz yapamadığımız, çalışmada tanımlanan H_n matrisinin Pfaffianı balancing sayılarını vermektedir. B_k, k. balancing sayısı olmak üzere,

k	$n=2k$	$\det(H_n)$	$pf(H_n)$	B_{k+1}
1	2	-36	-6	$-B_2$
2	4	1125	35	B_3
3	6	-41616	-204	$-B_4$
4	8	1413721	1189	B_5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Şekil 5.1. Pfaffian ve Balancing sayıları

Yani

$$Pf(H_n) = \begin{cases} B_{k+1} & k \equiv 0 \text{ veya } 2 \pmod 4 \\ -B_{k+1} & k \equiv 1 \text{ veya } 3 \pmod 4 \end{cases}$$

dır.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T. (1999). *Fibonacci and Lucas Numbers With Applıcations*. Canada: Framingham State College, 221, 222.

2. Mason, J.C., Handscomb, D.C. (2003). *Chebyshev Polynomials*. Washington: Chapman and Hall/Crc, 24, 25.

3. Taşçı, D. (2017). *Lineer Cebir*. (Beşinci Baskı). Türkiye: Gazi Yayınevi, 17-18, 33, 48, 117.

4. Sogabe, T. and El-Mikkawy, M. (2011). Fast block diagonalization of k-tridiagonal matrices, *Applied Mathematics and Computation*. 218 (6), 2740-2743.

5. Brualdi, R. A. and Gibson, P.M. (1977). Convex polyhedra of doubly stochastic matrices: I. Application of the permanent function. *Journal of Combinatorial Theory*, (A) 22, 194-230.

6. Kulkarni D., Schmidt D. and Tsui, S. K. (1999). Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 297, 63-80.

7. Sabuncuoğlu, A. (2014). *Lineer Cebir*. (Beşinci Baskı). Türkiye: Nobel Akademik Yayıncılık, 125.

8. Zhang, F. (1999). *Matrix Theory*. Springer, New York, 24, 45.

9. Hacısalihoğlu, H. (1991). *Lineer Cebir*. Türkiye: Tuğra Ajans, 79-80.

10. Hosoya, H. (2004). Sequences of Polyomino and Polyhex Graphs whose Perfect Matching Numbers are Fibonacci or Lucas Numbers. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 164(3), 405 – 412.

11. Ray, P. K. (2012). Application of Cheybyshev Polynomials in Factorizations of Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 30(2), 49-56.

12. Tekcan, A. and Koç A. (2016). On k- balancing Numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 23(3), 38-52.

13. Panda, G.K. (2006). Sequence Balancing and Cobalancing Numbers. *Fibonacci Quarterly*, 12(3), 1-7.

14. Panda, G. K. and Ray P. K. (2011). Some Lınks of Balancıng And Cobalancıng Numbers Wıth Pell And Assocıated Pell Numbers. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica,* 6(1), 41-72.

15. Panda, G. K. and Davala, R. K. (2015). Perfect Balancıng Numbers. *Fibonacci Quarterly,* 5(3), 1-5.

16. Olajos, P. (2010). Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae,* 37, 125–138.

17. Ray, P. K. (2013). Balancıng And Lucas-Balancıng Sums By Matrıx Methods. *Department of Mathematics*, 13(2), 45-61.

18. Panda, G. K. (2006). Some Fascinating Propertıes Of Balancing Numbers. *Fibonacci Numbers and Their Applications*, 10(6), 1-7.

19. El-Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010). A new family of k-Fibonacci numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 215 (12), 4456-4461.

20. Rimas, J. (2005). On computing of arbitrary positive integer Powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order-I. *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 783-787.

21. Rimas, J. (2006). On computing of arbitrary positive integer Powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order II. *Applied Mathematics and Computation*, 172 (2), 997-100.

22. Brualdi, R. A. ve Ryser, H. J. (1991). *Combinatorial Matrix Theor*y. Cambridge University Press, 53, 55.

23. Sogabe, T. and El-Mikkawy, M. (2011). Fast block diagonalization of k-tridiagonal matrices. *Applied Mathematics and Computation*, 218(6), 2740-2743

24. Jia , J., Sogabe, T. and El-Mikkawy, M. (2013). Inversion of k-tridiagonal matrices with Toeplitz structure. *Applied Mathematics and Computation*, 65(1), 116-125.

25. Kırklar, E. and Yılmaz F. (2015). A Note On k-Tridiagonal k-Toeplitz Matrices. *Alabama Journal of Mathematics,* 2373-0404, 39.

26. Yılmaz, F., Sogabe, T. and Kırklar, E. (2017). On The Pfaffian and Determinants of Some Skew-Centrosymmetric Matrices. *Journal of Integer Sequences*, 20, 1-9.

27. Heveş, V. ve Yılmaz, F. (2019). *Balancing Sayıları ve Blok Matrisler*. 14. Ankara matematik Günleri Sempozyumu, Ankara.

28. Yılmaz, F. and Eldutar, P. (2019). On Bipartite Graphs and the Fibonacci Numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 25(4), 143-149.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: HEVEŞ, Veli
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 14.10.1994, Göle
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0537 915 7671
e-mail	: heves.veli@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2017
Lise	Eyüp Sabri Çarmıklı Lisesi	2012

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Uzman Kariyer Yayın Evi	Yayıncı, Editör

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Heveş, V. and Yılmaz, F. (3-5 July 2019). *Some Applications of Linear Algebra to Sociology, Chemistry and Networks.* 3. International Conference on Mathematics, İstanbul.

2. Heveş, V. and Yılmaz, F. (28-29 Haziran 2019). *Balancing Sayıları ve Blok Matrisler.* 14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Ankara.

Hobiler

Spor Yapmak, Kitap Okumak, Müzik Dinlemek, Seyahat Etmek

GAZİ GELECEKTİR...