

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL GRAFLARIN SEIDEL SPEKTRASI

Tezi Hazırlayan
Kübra UÇAR

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2020
NEVŞEHİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerimi benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU ya,

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren değerli AİLEME,

Yol arkadaşım sevgili Cihan Boray BAKIROĞLUGİL 'e,

Desteklerinden dolayı arkadaşım Nurten YÜCEL' e,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na teşekkürlerimi sunarım.

Kübra UÇAR

BAZI ÖZEL GRAFLARIN SEIDEL SPEKTRASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra UÇAR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2020

ÖZET

Graf teori gündelik hayatımızda farkına varmadan da olsa birçok alanda kullandığımız bir kavramdır. Sosyal ve bilimsel yaşantımızın birçok yerinde grafa ait özelliklerle daha basit ve sistemli çalışmalar yapılabilmektedir. Graf, matematiksel anlamda noktalar ve noktalar arasındaki ilişkileri gösteren kenarlardan oluşan bir kümedir. Graflar, matrislerle doğrudan ilişkilidir. Yani çok farklı biçimlerdeki matris yapılarıyla grafları temsil etmek mümkündür. Bu bağlamda en çok kullanılan matrislerden biri komşuluk matrisidir. Komşuluk matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris olup noktalar arasındaki ilişkileri içerir. Ayrıca komşuluk matrisini kullanarak Seidel matrisi elde edebiliriz. I birim matris, J bütün elemanları 1 olan matris ve komşuluk matrisini ele alarak; $S(G) = J - I - A(G)$ biçiminde tanımlanır. Bu tez çalışmasının birinci bölümünde, öncelikle graf teori ile ilgili genel bilgilerden ve günlük yaşamımızda nerelerde kullanıldığından bahsedilmiştir. Bununla birlikte Seidel matrisle ilgili farklı yazarların yapmış olduğu literatürde mevcut bazı çalışmalardan söz edilmiştir. İkinci bölümde, tezin devamı için gerekli olan lineer cebirle ilgili bazı genel bilgilerden ve buna ek olarak graf teoride bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, Berman v.d. 'nin [11] da yapmış olduğu özel bir graf türü olan çok parçalı tam grafların Seidel spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarına dair çalışmada elde edilen tüm bulgulara detaylı bir biçimde yer verilmiştir. Bunlara ek olarak, özel graf türleri olan, ananas (pineapple) graf ve arkadaşlık (friendship) grafının genel formlarının Seidel matrislerine göre karakteristik polinomları bu tez çalışmasında elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Seidel Matris, Karakteristik Polinom, Graf Spektrumu*

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU

Sayfa Sayısı: 55

SEIDEL SPECTRA OF SOME SPECIAL GRAPHS

(MsC. Thesis)

Kübra Uçar

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2020

ABSTRACT

Graph theory is a concept that we use in many areas in our daily life, albeit without realizing it. In many parts of our social and scientific life, simpler and more systematic studies can be made with the features of graphs. Graph is a set of edges that shows the relationships between vertices and vertices in a mathematical sense. Graph are directly related to matrices. In other words, it is possible to represent graphs with very different forms of matrix structures. In this context, one of the most used matrices is the adjacency matrix. The neighborhood matrix is an $n \times n$ matrix that contains the relationships between vertices. We also get the Seidel matrix by using the adjacency matrix. If I is the identity matrix and J is the all-one matrix then it is defined as $S(G) = J - I - A(G)$. In the first part of this thesis, first of all, general information about graph theory and where it is used in our daily life is mentioned. However, some studies in the literature made by different authors on the Seidel matrix were mentioned. In the second chapter, some general information about linear algebra necessary for the continuation of the thesis and additionally some basic concepts in graph theory are mentioned. In the third part, all findings obtained in [11] by Berman et al. about the spectral determination of the complete multipartite graphs, which is a special graph type, according to Seidel spectra are given in detail. In addition to these, the characteristic polynomials of the general forms of pineapple graph and friendship graph according to Seidel matrices have been also obtained in this thesis.

Keywords: Seidel Matrix, Characteristic Polynomial, Graph Spectrum

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hatice TOPCU

Page Number: 55

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGE VE KISALTMALAR	x
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2.BÖLÜM	
ÖN BİLGİLER.....	3
2.1 Lineer Cebirde Bazı Temel Kavramlar	3
2.2. Graf Teoride Bazı Temel Kavramlar.....	11
2.3. Graf Matrisleri	21
3.BÖLÜM	
3.1. Seidel Switching.....	27

3.2. Çok Parçalı Tam Grafların Seidel Spektrası	28
3.3. Üç Parçalı Tam Grafların Seidel Spektrası	33
3.4 Ananas ve Arkadaşlık Graflarının Karakteristik Polinomları	38
4. BÖLÜM	
TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.2.1 G grafi	12
Şekil 2.2.2 K_4 Tam Grafi	13
Şekil 2.2.3	13
Şekil 2.2.4	14
Şekil 2.2.5	14
Şekil 2.2.6	15
Şekil 2.2.7 Bağlantılı bir graf.....	15
Şekil 2.2.8 Bağlantısız bir graf.....	16
Şekil 2.2.9 G ve \bar{G} grafları.....	16
Şekil 2.2.10 . $W_{1,4}$ ve $W_{1,5}$ grafları.....	17
Şekil 2.2.11 . $S_{1,4}$ ve $S_{1,5}$ grafları	17
Şekil 2.2.12. $K_{3,4}$ iki parçalı tam grafi.....	17
Şekil 2.2.13. Tam olmayan $K_{1,1,3,3}$ grafi	18
Şekil 2.2.14. K_n^k Ananas Grafi	19
Şekil 2.2.15. F_n^k arkadaşlık graf	19
Şekil 2.2.16. İzomorf graflar	21
Şekil 2.3 1. Bir grafın bitişiklik matrisi	21

Şekil 2.3 2. Bir grafın derece matrisi	22
Şekil 2.3 3. G grafi ve karakteristik polinomu	23
Şekil 2.3 4. G grafi	24
Şekil 2.3 5. Seidel matrisin spektrum ve enerji örneği	25
Şekil 3.1.1. G grafına Seidel switching uygulaması	27
Şekil 3.1.2. $K_1 \cup P_4$, $K_1 \cup K_2 \cup K_2$, $K_1 \cup H$	29



SİMGE VE KISALTMALAR

$A = B$	Matris eşitliği
$0_{m \times n}$	$m \times n$ sıfır matrisi
I_n	$n \times n$ birim matris
A^t	A matrisinin transpozu
A^{-1}	A matrisinin tersi
$A \otimes B$	Kronecker çarpım
G	G Graf
$V(G)$	G grafının noktalar kümesi
E	G grafının kenarlar kümesi
v_i	V' ye ait noktalar
e_i	E' ye ait noktalar
$v_1 \sim v_2$	Komşu noktalar
$deg(v)$	Nokta derecesi
$\delta(G)$	G grafının minimum dereceli nokta
$\Delta(G)$	G grafının maksimum dereceli nokta
K_n	n noktalı tam graf
P_n	n noktalı yol graf
$W_{1,n}$	N noktalı tekerlek graf
$S_{1,n}$	N noktalı yıldız graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
K_{m_1, \dots, m_n}	Çok parçalı tam graf
K_p^n	Ananas graf
F_n^k	Arkadaşlık grafi
$\omega(G)$	G grafının klik sayısı
$X(G)$	G grafının kromatik sayısı
$G \cong G'$	İzomorf graflar
$B(G)$	G grafının bitişiklik matrisi
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi

$M(G)$	G' nin M matrisine göre karakteristik polinomu
$Spec(M(G))$	$M(G)$ ' nin spektrumu
$\xi(\lambda)$	λ' nin öz alt uzayı
$S(G)$	G grafinın Seidel matrisi
$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$	Seidel matrisine göre özdeğerler
$S\varepsilon(G)$	G grafinın Seidel enerjisi



1. BÖLÜM

GİRİŞ

Graf, bir olay veya ifadenin nokta ve çizgiler kullanarak gösterilmesi şeklindedir.

Fizik, Kimya gibi temel bilimlerde, mühendislik uygulamalarında ve Tıp biliminde pek çok problemin çözümü ve modellenmesi graflara dayanılarak yapılmaktadır. Örneğin; bir kimyasal molekülde atomlar noktalarla, kimyasal bağlar ise kenarlarla temsil edilerek; bu molekülün sanki bir graf gibi düşünülmesiyle birçok özelliği graf teori yardımıyla çok daha detaylı incelenebilir.

Graf, matematiksel anlamda noktalar ve noktalar arasındaki ilişki gösteren kenarlardan oluşan bir kümedir. Mantıksal ilişki nokta ve nokta veya nokta ve kenar arasında kurulur. Graf sözcüğü ilk kez 1822 yılında bilim adamı J.J. Sylvester tarafından kullanılmıştır.[3].

Graflar, matrislerle doğrudan ilişkilidir. Yani çok farklı biçimlerdeki matris yapılarıyla grafları temsil etmek mümkündür. Bu bağlamda en çok kullanılan matrislerden biri komşuluk matrisidir. Komşuluk matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris olup noktalar arasındaki ilişkileri içerir. Bir G grafi için " $A(G)$ " şeklinde gösterilir. Komşuluk matrisindeki her bir 1 rakamı satır ve sütun numaraları ile belirlenmiş olan noktalar arasında bir kenar olduğunu ifade eder [3,15]. Bu tez çalışmasında esas olarak üzerinde durulmuş olan matris, Seidel matrisidir. Bir G grafinin Seidel matrisini " $S(G)$ " şeklinde gösterecek olursak; $S(G) = J - I - 2A(G)$ biçiminde tanımlanır. Burada I birim matris ve J bütün elemanları 1 olan matristir [9,15]. Literatürde, Seidel matrisle ilgili yapılmış farklı çalışmalar bulunmaktadır. [17,18] de, Seidel matrisleri ile ilgili oldukça detaylı incelemeler yapılmıştır. Nokta sayısı 14' den küçük olan grafların spektrumları ve buna bağlı çeşitli cebirsel özellikleri [17] de sunulmuştur. Aynı zamanda bu çalışmada nokta sayısı 24 ten küçük olan ve kesin olarak üç adet ayrık Seidel özdeğere sahip olan tüm graflar sınıflandırılmıştır. Bir grafin Seidel özdeğerleri tamsayılardan oluşuyorsa bu grafa S-integral graf denir ve literatürde bununla ilgili de

çeşitli çalışmalar yapılmıştır. [10,13,19]. Bu çalışmalarda özel olarak S-integral olan çok parçalı tam graflar incelenmiştir. Bir grafin Seidel spektrumu, o grafa switching uygulandığında elde edilebilen her bir graf ile aynı olur. Dolayısıyla, bir grafa Seidel spektrumu ile belirlenebilir ya da kısaca S-determined diyebilmek için gerekli koşul o graf ile aynı Seidel spektruma sahip olan herhangi bir grafin yine o graftan Seidel switching uygulanarak elde edilebilmesidir. Çok parçalı tam grafların S-determined olup olmadıklarına dair güncel bir çalışma Berman v.d. tarafından yapılmıştır[11]. Bu çalışmada yazarlar öncelikle K_{p_1, p_2, \dots, p_k} çok parçalı tam grafi ile aynı Seidel spektruma sahip herhangi bir G grafinin yine k-parçalı bir tam graf (switching'e göre) olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra ise parçalarda bulunan nokta sayılarının oluşturduğu diziler birbirinden farklı olduğunda, yani $k \geq 3$ iken toplam nokta sayısı aynı olan k-parçalı iki farklı graf incelendiğinde, bunların switching uygulanarak birbirlerinden elde edilemeyeceğini göstermişlerdir. İki parçalı tam grafi özel olarak incelediklerinde ise bu graf türünün S-determined olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Aynı zamanda, $s_i \geq 3$ ve $p_1 > \dots > p_l \geq 1$ iken her $i = 1, \dots, l$ için $K_{\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{p_l, \dots, p_l}_{s_l}}$ çok parçalı tam grafinin da S-determined olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca üç parçalı tam graflar için de detaylı incelemeler yapmışlardır. Birbirinden farklı 3-parçalı iki tam grafin Seidel kospektral olması için parçalardaki nokta sayılarının toplamalarının ve çarpımlarının eşit olması gerektiği açıktır. Bu durumdan yola çıkılarak, 3-parçalı tam graflar ile ilgili çeşitli gözlemler ve sonuçlar elde etmişlerdir. n adet noktaya sahip üç parçalı bir tam graf için, $n < 13$, $n=15$ ya da $n=18$ ise bu grafin S-determined olduğu sonucuna ulaşmışlardır. $n=13, 14, 16, 17$ için de Seidel kospektral olan birbirinden farklı 3-parçalı tam graflar elde etmişlerdir. Genel olarak ise, $n \geq 3$ olacak şekilde her n tamsayısı için mertebesi n olan 3- parçalı bir tam grafin daima bulunabileceğini söylemişlerdir. Buraya kadar bahsedilen bütün bu sonuçlara, bu tez çalışmasında detaylı bir biçimde yer verilmiştir. Bunlara ek olarak ise özel graf türleri olan ananas (pineapple) graf ve arkadaşlık (friendship) grafin genel formlarının Seidel matrislerine göre karakteristik polinomları bu tez çalışmasında elde edilmiş ve üçüncü bölümde sunulmuştur.

2.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

2.1 Lineer Cebirde Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. [1] Günlük yaşantımızda, birden fazla veri aynı anda kullanılmak istenildiğinde bu veriler tablolar ile temsil edilir. Bu gösterim şekli pek çok alanda kullanılmaktadır. Örneğin, muhasebe işlemleri, okullardaki ders programlarının hazırlanması ve öğrencilerin not durumlarının takibi, anket sonuçlarının değerlendirilmesi, bazı bilim dallarında yapılan deneylerin sonuçlarının değerlendirilmesi bunlardan bir kaç tanesidir. Matris kavramı matematiksel olarak şu şekilde tanımlanır;

$m \times n$ tane sayının , m satır ve n sütuna yerleştirilmesiyle oluşturulan tabloya bir *matris* denir.

Genel olarak bir matris,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mx} \end{pmatrix} m \times n$$

$m \times n$ tipinde bir matris kısaca $A = (a_{ij})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.2. [1] $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m \times n}$ matrisleri verilsin. Eğer $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine *eşit matrisler* denir ve bu matrisler $A = B$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ matrisleri eşit matrisler ise;

$b_{11} = 1, b_{12} = 2, b_{21} = 3, b_{22} = 4$ olur.

Tanım 2.1.3. [1] $A, m \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $m = 1$ ise, yani $A 1 \times n$ tipinde bir matris ise A matrisine *satır matrisi*; $n = 1$ ise, yani $A m \times 1$ tipinde bir matris ise A matrisine *sütun matrisi* denir.

Örnek 2.1.2. $A = [1 \ 3 \ -4]$ matrisi satır matrisine, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ matrisi de sütun matrisine birer örnektir.

Tanım 2.1.4. [7] Bir matriste satır sayısı ile sütun sayısı eşit ise bu matrise kare matris denir. $n \times n$ tipinde bir kare matrise kısaca n . mertebeden bir *kare matris* denir.

Örnek 2.1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

matrisinin satır ve sütun sayıları 3 olup birbirine eşittir. Yani A matrisi bir kare matristir.

Tanım 2.1.5. [7] Bir matrisin tüm öğeleri sıfır ise, bu matrise *sıfır matrisi* denir. $m \times n$ tipindeki bir sıfır matrisi $0_{m \times n}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ matrisi bir sıfır matrisidir.

Tanım 2.1.6. [7] $A n$. mertebeden bir kare matris olsun. Her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine *köşegen matris* denir.

$$\text{Örnek 2.1.5. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla 3. ve 4. mertebeden köşegen matrislerdir. Özel olarak, n . mertebeden bir sıfır matrisi de bir köşegen matristir.

Tanım 2.1.7. [7] Bir köşegen matriste, köşegen üzerindeki öğelerin hepsi eşit ise bu matrise *skaler matris* denir.

$$\text{Örnek 2.1.6. } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

matrisinin skaler matris olması için x ve y değerlerini bulalım.

A matrisinde a_{11} dir. Diğer taraftan skaler matriste $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ olması gerektiğinden $x = a_{22} = 2$ ve $y = a_{33} = 2$ olmalıdır.

Tanım 2.1.8. [7] Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki tüm öğeleri 1 ve geriye kalan bütün öğeleri 0 ise, bu matrise bir *birim matris* denir.

n . mertebeden birim matris I_n ile gösterilir ve

$$I_n = (\delta_{ij})_{m \times n}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.

$$\text{Örnek 2.1.7. } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla 2. ve 4. mertebeden birim matrislerdir.

Tanım 2.1.9. [7] Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine *simetrik matris* denir.

Örnek 2.1.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

matrisinin simetrik olup olmadığını inceleyelim. A matrisinin simetrik olabilmesi için $i, j = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ olmalıdır. $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 4$ olduğundan A matrisi bir simetrik matristir.

Tanım 2.1.10. [7] $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ ise A matrisine *ters simetrik matris* denir.

Bir ters simetrik matriste, $i = j$ olması durumunda $a_{ii} = -a_{ii}$ koşulunun ancak $a_{ii} = 0$ iken sağlandığına dikkat edersek, ters simetrik matrisin köşegen öğelerinin sıfır olması gerektiğini söyleyebiliriz.

Örnek 2.1.9. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

matrisi 4. mertebeden ters simetrik bir matristir.

Tanım 2.1.11. [1] Bir A matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen yeni matrise, A matrisinin *transpozesi* denir ve bu matris A^t ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, $m \times n$ tipindeki bir matrisin transpozesi $n \times m$ tipindedir.

Örnek 2.1.10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesi $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Bir A matrisi için $(A^t)^t = A$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.12. [11] Köşegen elemanları 1 ve -1 lerden oluşan köşegen matrise *işaret matrisi* denir.

Tanım 2.1.13. [1] A , n . mertebeden bir kare matris olsun. Eğer, $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ olacak şekilde n . mertebeden bir B kare matrisi var ise, B matrisine A matrisinin tersi denir.

A kare matrisinin tersinin olabilmesi için $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ koşullarından yalnızca birinin sağlanması yeterlidir. Ayrıca, A 'nın tersi var ise bu tektir ve ters matris A^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.1.14. [1] $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(F)$ ve $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(F)$ matrisinin Kronecker çarpımı $A \otimes B$ ile gösterilir ve

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Şeklinde tanımlanır. Burada $A \otimes B \in M_{mp,nq}(F)$ dir. Kronecker çarpımına aynı zamanda matrislerin tensör çarpımı ya da direkt çarpımı da denir. Bu çarpım bir F cismi üzerinde keyfi mertebeli iki matris için tanımlanır.

Tanım 2.1.15. [7] Bir $n \times n$ kare matrisin determinanı tanımlandığında ve bu determinantların hesaplanması için verilen yöntem, ilk olarak 2×2 bir matrisin determinantlarının tanımı ve özellikleri şu şekilde ifade edilir;

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ reel sayılar olmak üzere 2×2 tipinden bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinanı

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

formülü ile tanımlanan bir reel sayıdır.

Teorem 2.1.1. [1] Her $n \times n$ matrise bir reel sayıyı karşılık getiren ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir ve yalnızca bir fonksiyon, \det vardır.

(i) B matrisi; verilen bir $n \times n$ tipinde A matrisinin bir satırının bir $\alpha \neq 0$ için;

$$\det B = \alpha \det A$$

(ii) B matrisi; verilen $n \times n$ tipinde A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi ile A' dan elde edildiği her zaman

$$\det B = -\det A$$

(iii) B , $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$\det B = \det A$$

(iv) I_n , $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$\det I = 1$$

Teorem 2.1.2. [1] A bir $n \times n$ bir kare matris olsun. Buna göre

(i) Eğer A matrisinin iki satırı eşit ise, o zaman $\det A = 0$ dir.

(ii) Eğer A matrisi bir sıfır satırına sahip ise, o zaman $\det A = 0$ dir.

Teorem 2.1.3. [1] Bir köşegen matrisin determinanı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

Teorem 2.1.4. [1] Bir üst üçgen (ya da alt üçgen) matrisin determinanı, matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

Teorem 2.1.5. [1] Bir A kare matrisinin determinanı ile A nın transpozunun determinant değeri aynıdır. Yani

$$\det A = \det A^T$$

dir.

Tanım 2.1.16. [1] Bazı şartlar altında A bir $n \times n$ kare matris ve $x \neq 0$ bir $n \times 1$ sütun vektörü olmak üzere, eğer Ax çarpımı λx şeklinde (λ herhangi bir skaler) yazılabilirse, o takdirde cebirde dikkate değer bir basitlik söz konusu olacaktır. Buna göre $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi ile x , $n \times 1$ vektörünün çarpımı sonucunda elde edilen vektörün orijinal vektöre paralel olduğunu kabul edelim. Yani

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

olsun. Keza (2.1) denklemini I , $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.2)$$

Şeklinde yazabiliriz. Halbuki (2.2) denklemini n bilinmeyenli, n denklemden ibaret bir homojen lineer denklem sistemidir. Diğer taraftan bir homojen lineer denklem sisteminin aşıkâr olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin tekil olması gerekir. Bundan dolayı (2.2) denklem sisteminin aşıkâr olmayan çözümü

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad (2.3)$$

Olması halinde mevcuttur. (2.3) ifadesini aşağıdaki gibi açık şekilde yazabiliriz:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

$\det(A - \lambda I)$ nın hesaplanması sonucunda λ 'ya bağlı n -yinci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir ve $M_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dır. Ayrıca $M_A(\lambda) = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu karakteristik denklemin kökleri A matrisinin özdeğerleri (ya da karakteristik değerleri) denir. Hemen hatırlatalım ki; $M_A(\lambda) = 0$ n -inci dereceden bir denklem olduğundan cebirin esas teoreminden tam olarak n tane köke sahiptir. Tabiatıyla bunların hepsinin farklı olması gerekmez.

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0$$

Denkleminde sıfır olmayan x çözümlerine A 'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri (karakteristik vektörleri) denir. Özdeğer ve özvektörlerin bu tanımından doğrudan

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

temel formülünü elde ederiz.[2]

Not 2.1. [1] $Ax = \lambda x$ dolayısıyla $(A - \lambda I)x = 0$ bir homojen lineer denklem sistemi olup daima sıfır çözümü dediğimiz aşikar çözümü mevcuttur. Fakat bizim için önemli olan aşikar olmayan çözümlerin bulunmasıdır.

Not 2.2. [1] A bir $n \times n$ kare matris olmak üzere

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A)$$

dır.

Örnek 2.1.11 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerini gösterelim.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

A matrisinin özdeğerleri $\{-1, 0, 2\}$ olur.

Teorem 2.1.6. [1] A bir $n \times n$ matris olsun. A matrisinin tersinir olmayan matris olması için gerek ve yeter şart $\lambda = 0$ in A 'nın bir özdeğeri olmasıdır.

İspat: \Rightarrow : A tersinir olmayan matris olsun. O takdirde $Ax = 0$ olacak şekilde sıfır olmayan bir x vektörü vardır ve böylece $Ax = 0x$ bir aşikar olmayan çözüme sahiptir. Bu sonuç bir tersinir olmayan matrisin daima bir özdeğer olarak $\lambda = 0$ 'a sahip olduğunu ifade eder. \square

\Leftarrow : Eğer $\lambda = 0$ A 'nın bir özdeğeri ise, o takdirde $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A$ ifadesinden $\det A = 0$ yazarız. Bu da A matrisinin tersinir olmayan matris olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.7. [1] Bir özvektörün sıfır olmayan herhangi bir katı yine bir özvektördür.

İspat: Eğer A matrisinin bir λ özdeğerine karşılık gelen sıfırdan farklı bir özvektörü x ise, o zaman $Ax = \lambda x$ özdeğer denklemini yazarız. α herhangi sıfır olmayan bir skaler olmak üzere $y = \alpha x$ olarak alırsak, o takdirde

$$Ay = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x = \lambda y$$

yazarız. \square

2.2. Graf Teoride Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. [3] $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesini ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kenarlar kümesini oluşturmak üzere bir G grafi, $G = (V, E)$ sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır. Burada E kümesindeki bir *kenar*, V kümesindeki noktaların bir sıralı ikilisidir. $|V| = n$ ve $|E| = m$ ise G ye n noktalı ve m kenarlı bir graf denir. Nokta sayısına kısaca G nin *mertebesi* de denir.

Tanım 2.2.2. [3] Bir grafın tüm kenarları, bu kenarları oluşturan noktalardan biri çıkış noktası diğeri varış noktası olacak biçimde yönlendirilmiş ise bu grafa *yönlü graf* denir. Tüm kenarları yönlendirilmemiş grafa *yönsüz graf* denir.

Tanım 2.2.3. [3] İki nokta arasında birden fazla kenar var ise bu kenarlara *katlı kenar* (multiple edge) denir. Aynı nokta üzerinde başlayıp biten bir kenara ise *ilmek* (loop) denir.

Tanım 2.2.4. [3] Katlı kenar ve ilmek içermeyen bir grafa *basit graf* denir.

Tanım 2.2.5. [6] $G = (V, E)$ grafının keyfi iki noktası $v_1, v_2 \in V$ olmak üzere, bu iki nokta arasında bir kenar var ise bu noktalar birbirine *komşudur* denir ve $v_1 \sim v_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6. [6] $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsun. v noktasına komşu olan noktaların sayısına *derece* denir. $deg(v)$ ya da $d(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. [6] $G = (V, E)$ grafi verilsin. V deki noktalardan en küçük dereceye sahip noktaya grafın *minimum derecesi* denir. $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. [6] $G = (V, E)$ grafi verilsin. V deki noktalardan en büyük dereceye sahip noktalara grafın *maksimum derecesi* denir. $\Delta(G)$ ile gösterilir.

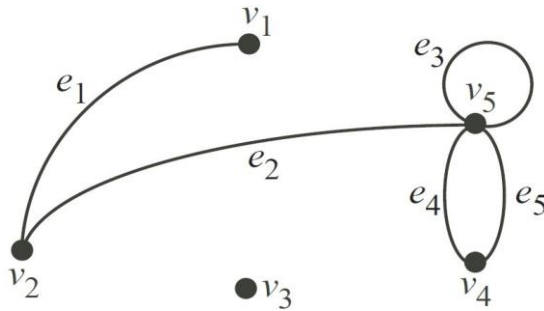
Tanım 2.2.9. [5] Bir noktanın derecesi sıfır ise bu noktaya *izole nokta* (*isolated vertex*) ve derecesi 1 ise noktaya *sarkıt nokta* (*pendant vertex*) denir.

Teorem 2.2.1. [5] $G = (V, E)$ grafi verilsin ve $|E| = m$ olsun. Bu takdirde;

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.2.1.

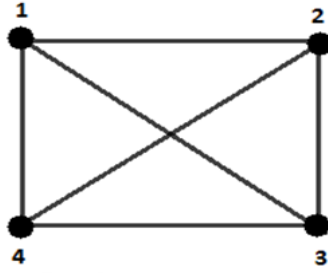


Şekil 2.2.1 G grafi

Yukarıdaki G grafında v_1 noktası sarkıt nokta, v_3 noktası izole noktadır. G grafi basit graf değildir çünkü v_5 noktası ilmek (loop) içermektedir. Aynı zamanda v_4 ve v_5 noktaları arasında katlı kenar (multiple edge) bulunmaktadır. Bazı noktaların derecesini yazacak olursak; $deg(v_2) = 2$, $deg(v_5) = 4$ şeklindedir.

Tanım 2.2.10. [3] n noktalı bir basit grafta her bir nokta çifti arasında bir kenar varsa buna *tam graf* denir ve K_n ile gösterilir.

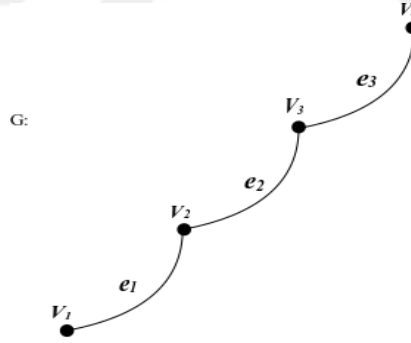
Örnek 2.2.2.



Şekil 2.2.2 K_4 Tam Grafı

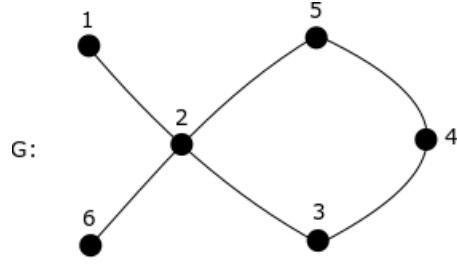
Tanım 2.2.11. [3] Başlangıç ve bitiş noktası farklı olan kenar tekrarlamayan bir yürüyüşe gezi, nokta tekrarlamayan bir yürüyüşe ise *yol* denir. P_n ile gösterilir.

Örnek 2.2.3.



Şekil 2.2.3

Yukarıdaki G grafında $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4$ ifadesi bir açık yürüyüş ve yol belirtir. Aynı zamanda G grafı basit bir graf olduğundan $v_1v_2v_3v_4$ şeklinde de yazabiliriz.

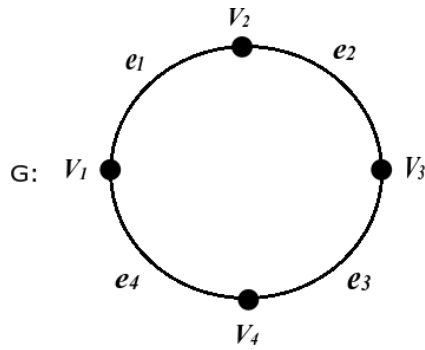


Şekil 2.2.4

Yukarıdaki G grafında 1-2-3-4-5-2-6 ifadesi bir açık yürüyüştür fakat nokta tekrar ettiği için yol belirtmez.

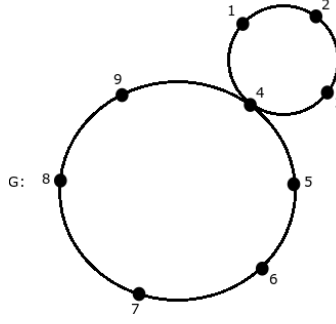
Tanım 2.2.12. [3] Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yürüyüşe *kapalı yürüyüş* denir. Kenar tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe *devir*; nokta tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe ise *döngü* denir.

Örnek 2.2.4.



Şekil 2.2.5

Yukarıdaki G grafında $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_1$ ifadesi kapalı bir yürüyüş ve döngü belirtir.

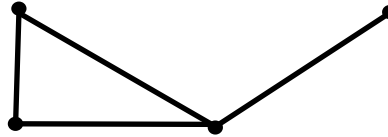


Şekil 2.2.6

Yukarıdaki G grafında 1-2-3-4-5-6-7-8-9-4-1 ifadesi kapalı bir yürüyüştür fakat nokta tekrar ettiği için döngü belirtmez.

Tanım 2.2.13. [3] Herhangi iki noktası arasında en az bir yol bulunabilen bir grafa *bağlantılı graf (connected graf)* denir.

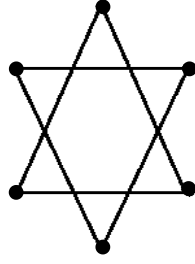
Örnek 2.2.6.



Şekil 2.2.7 Bağlantılı bir graf

Tanım 2.2.14. [3] Herhangi iki nokta arasında yol bulunmayan graflara *bağlantısız graf (disconnected graf)* denir.

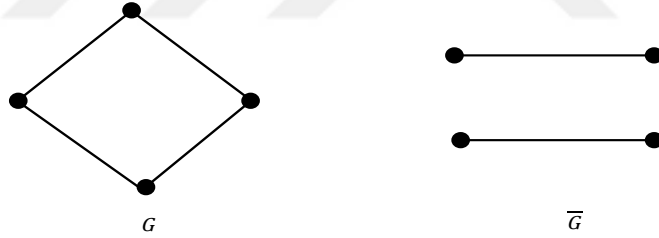
Örnek 2.2.7.



Şekil 2.2.8 Bağlantısız bir graf

Tanım 2.2.15. [6] Bir $G = (V, E)$ grafının tümleyeni $\bar{G} = (V, E')$ ile gösterilir öyle ki burada $\forall u, v \in V$ için E' kümesi " $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$ " biçiminde oluşturulur.

Örnek 2.2.8.



Şekil 2.2.9 G ve \bar{G} grafları

Tanım 2.2.16. [3] $(n + 1)$ noktalı bir döngü grafın her bir noktasının, bir tek noktaya (bu nokta döngü grafa ait değildir) birer kenar ile bağlanmasıyla elde edilen grafa *tekerlek graf* denir. $n + 1$ noktalı bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.9.



Şekil 2.2. 10 . $W_{1,4}$ ve $W_{1,5}$ grafları

Tanım 2.2.17. [3] $(n + 1)$ noktalı bir G grafında bir noktanın derecesi n , diğer noktaların derecesi 1 ise bu grafa *yıldız graf* denir. $S_{1,n}$ ile gösterilir.

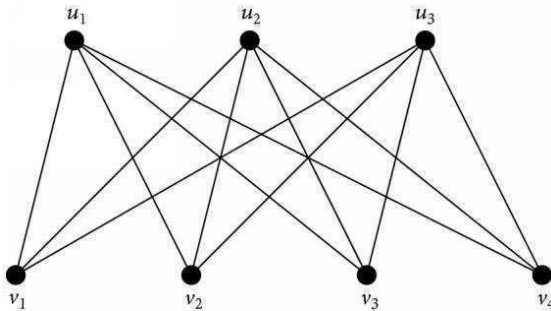
Örnek 2.2.10.



Şekil 2.2. 11 . $S_{1,4}$ ve $S_{1,5}$ grafları

Tanım 2.2.18. [3] İki parçalı bir grafta A kümesinin her bir noktası, B kümesinin her bir noktası ile komşu ise böyle bir grafa *iki parçalı tam graf* denir. A' ya ait noktaların sayısı m ve B' ye ait noktaların sayısı n ise; iki parçalı tam graf $K_{m,n}$ ile gösterilir.

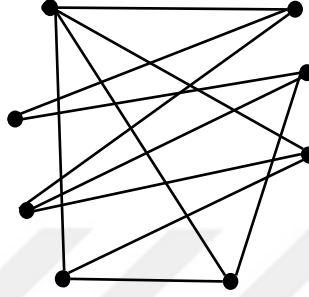
Örnek 2.2.11.



Şekil 2.2. 12. $K_{3,4}$ iki parçalı tam grafi

Tanım 2.2.19. [4] Çok parçalı bir grafta, aynı bağımsız küme içerisinde bulunmayan her nokta çifti birbirine kesinlikle komşu ise bu grafa *çok parçalı tam graf* denir ve parçalardaki nokta sayıları sırasıyla m_1, \dots, m_n olmak üzere K_{m_1, \dots, m_n} ile gösterilir.

Örnek 2.2.12.



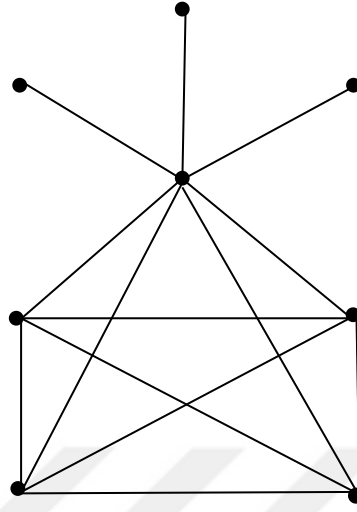
Şekil 2.2. 13. Tam olmayan $K_{1,1,3,3}$ grafi

Tanım 2.2.20. [9] Döngü içermeyen, bağlantılı basit bir grafa *ağaç* denir. Bileşenlerinin hepsi ağaç olan bir grafa ise *orman* denir.

Tanım 2.2.21. [9] $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G grafi hem katlı kenar hem de ilmek içeriyorsa G grafına *pseudo graf* denir.

Tanım 2.2.22. [9] Bir K_p tam grafına, belirli bir noktasından q adet sarkıt kenar eklenmesiyle oluşan grafa *ananas graf* denir ve K_p^q ile gösterilir.

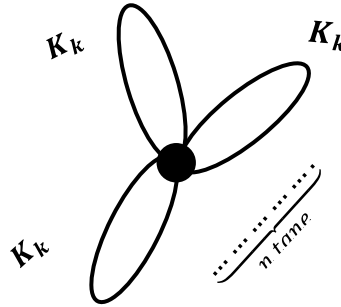
Örnek 2.2.13.



Şekil 2.2.14. K_3^3 Ananas Grafı

Tanım 2.2.24. [12] k noktalı K_k tam grafinin n adet kopyasının ortak bir noktada birleştirilmesiyle oluşan grafa *arkadaşlık (friendship) grafi* denir. Literatürde *k-fan*, *dutch*, *windmill* gibi isimlendirmeleri de mevcuttur. F_n^k ile gösterilir.

Örnek 2.2.14.



Şekil 2.2.15. F_n^k arkadaşlık graf

Tanım 2.2.25. [9] $G = (V, E)$ grafinin tam olan alt grafin noktalar kümesine *klik (clique)* denir. Yani öyle bir alt graf ki tüm noktalar birbirleri ile kenar oluşturur.

Tanım 2.2.26. [9] $G = (V, E)$ grafindaki en geniş klik kümesinin eleman sayısına (nokta sayısı) grafin *klik sayısı* denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.27. [6] Herhangi bir $G = (V, E)$ grafi için $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olmak üzere $H = (V', E')$ grafına, G nin bir alt grafi denir.

Tanım 2.2.28. [6] Bir grafın bileşeni, herhangi iki noktası arasında daima en az bir yol bulunabilen maksimal alt graf olarak tanımlanmaktadır. Bağlantılı bir grafta sadece bir bileşen bulunur.

Tanım 2.2.29. [3] G grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt grafa G 'nin nokta indirgenmiş alt grafi denir. Bazı kenarlarının (uç noktaları sabit bırakılarak) silinmesiyle elde edilen alt grafa ise G 'nin kenar indirgenmiş alt grafi denir. Nokta- indirgenmiş alt grafa kısaca *indirgenmiş alt graf* da denir.

Tanım 2.2.30. [5] Bir G grafında, G 'nin tüm noktalarını renklendirmek için gerekli olan en az sayıdaki renk sayısına *kromatik sayı (chromatic number)* denir ve $X(G)$ ile gösterilir. Yani komşu olan iki nokta farklı renklerle etiketlenir.

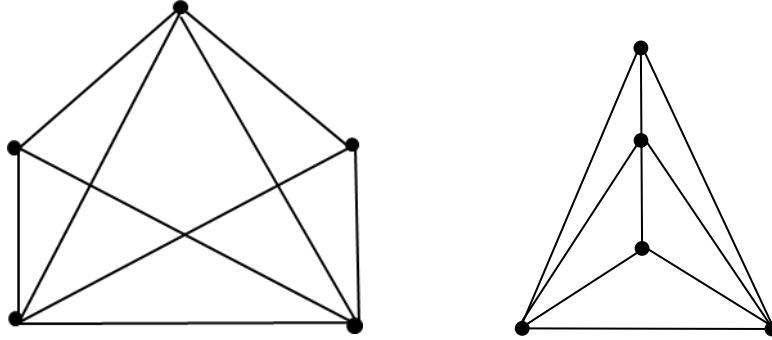
Lemma 2.2.1. (Interlacing) [4] n noktalı bir G grafının özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ve bu G grafının indirgenmiş bir alt grafi olan m noktalı H grafının özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ olsun. Buna göre, $i = 1, 2, \dots, m$ için $\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ olur.

Tanım 2.2.31. [4] $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları için birebir ve örten bir $f: V \rightarrow V'$ dönüşümü aşağıdaki dönüşümü sağlıyorsa, bu dönüşüme G ve G' arasında bir *izomorfizma* denir.

$$\forall u, v \in V \text{ için } "u \sim v \Leftrightarrow f(u), f(v) \in V' \text{ ve } f(u) \sim f(v)"$$

Aralarında en az bir izomorfizmanın tanımlı olduğu herhangi iki G ve G' grafına, *izomorf graflar* denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.14.



Şekil 2.2. 16. İzomorf graflar

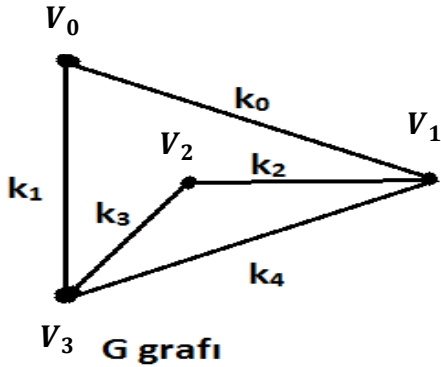
2.3. Graf Matrisleri

Tanım 2.3.1 [12] Bitişiklik matrisi (incidence matrix), bir graftaki noktalarla kenar arasındaki ilişkiyi gösteren bir matristir. Matrisin satır sayısı graftaki nokta sayısını, sütun sayısı graftaki kenar sayısı kadar olur. Bir $G = (V, E)$ grafinin bitişiklik matrisi $B(G)$ ile gösterilir.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } (v_i, e_j) \text{ bağıntısı varsa} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $B(G) = [b_{ij}]_{m \times n}$ biçimindedir.

Örnek 2.3.1 Bir G grafinin bitişiklik matrisi aşağıdaki gibidir.



$$B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Şekil 2.3 1. Bir grafin bitişiklik matrisi

Tanım 2.3.2. [3] $G = (V, E)$ grafi verilsin ve $V = \{1, \dots, n\}$ olsun. $\forall i \in V$ için ;

$$D(G) = [d_{ij}]_{n \times n} \text{ öyle ki } d_{ij} = \begin{cases} d(i), & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $n \times n$ tipindeki köşegen matrise G grafinin *derece matrisi* denir.

Örnek 2.3.2.



Şekil 2.3 2. Bir grafin derece matrisi

Tanım 2.3.3. [3] $G = (V, E)$ grafi n noktalı ve m kenarlı graf olsun. $\forall i, j \in V$ için;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

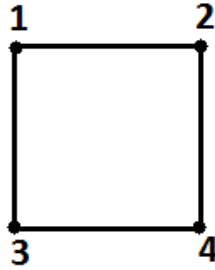
olmak üzere G grafinin komşuluk matrisi $A(G) = [a_{ij}]$ biçiminde tanımlanan

$n \times n$ tipindeki matristir.

Tanım 2.3.4. [4] $M(G)$ ya da kısaca M, G grafına ait bir graf matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $\det(xI - M(G))$ polinomuna G nin $M(G)$ karakteristik polinomu denir ve $\text{char}(M(G))(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani $M(G)$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye ise G nin $M(G)$ spektrumu denir ve $\text{spec}(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir.

Tanım 2.3.5. [9] G ve G' grafları verilsin. $\text{spec}(M(G)) = \text{spec}(M(G'))$ ise G ve G' graflarına, M matrisine göre *kospektral graflar* denir.

Örnek 2.3.3. Bir G grafinin komşuluk matrisi ve bu matrise göre karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{char}(A(G))(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -1 & x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 4)$$

Şekil 2.3 3. G grafi ve karakteristik polinomu

$A(G)$ nin özdeğerleri $\{0, 0, \pm 2\}$ olur. Yani $\text{spec}(A(G)) = \{0^2, \pm 2\}$ olur. Burada 0 özdeğeri iki katlıdır.

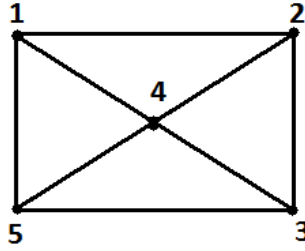
Tanım 2.3.7. [3] $G = (V, E)$ grafi verilsin. $A = A(G)$ komşuluk matrisinin keyfi bir özdeğeri λ ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ olsun. $(A(G))x = \lambda x$ eşitliğinden $A(G)$ matrisinin tanımı gereği;

$$\lambda x_u = \sum_{v \sim u} x_v \quad (u = 1, 2, \dots, n)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki denklemlere G grafinin komşuluk matrisine göre özdeğer denklemleri denir.

Tanım 2.3.8. [15] G grafi verilsin. $A(G)$ nin bir özdeğeri λ ise $\{x \in R^n: (A(G))x = \lambda x\}$ kümesi R^n nin bir alt uzayı olur. Bu alt uzaya λ nin öz alt uzayı denir ve $\xi(\lambda)$ yada $\xi_{A(G)}(\lambda)$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.5. Aşağıda verilen G grafinin komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu hesaplayalım.



Şekil 2.3 4. G grafi

$$\text{char}(A(G))(x) = \det(Ix - A(G)) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^5 - 8x^3 - 8x^2 = x(x+2)(x^3 - 2x - 4)$$

Böylece G nin komşuluk özdeğerleri sırasıyla $\lambda_1(A(G)) = 1 + \sqrt{5}$, $\lambda_2(A(G)) = 0$, $\lambda_3(A(G)) = 0$, $\lambda_4(A(G)) = 1 - \sqrt{5}$, $\lambda_5(A(G)) = -2$ olur. Öz uzaylar sırasıyla $\xi(1 + \sqrt{5}) = \langle x_1 \rangle$, $\xi(0) = \langle x_2, x_3 \rangle$, $\xi(1 - \sqrt{5}) = \langle x_4 \rangle$ ve $\xi(-2) = \langle x_5 \rangle$ olur.

Tanım 2.3.9. [8] Bir grafın $S(G) = [S_{ij}]$ Seidel matris elemanları;

$$S_{ij} = \begin{cases} 0; & i = j \\ -1; & i \sim j \\ 1; & i \not\sim j \end{cases}$$

olan $n \times n$ tipinde matristir. Diğer bir ifade ile A komşuluk matrisi, J bütün elemanları 1 olan matris ve I birim matris olmak üzere;

$$S(G) = J - I - 2A(G) = A(\overline{G}) - A(G)$$

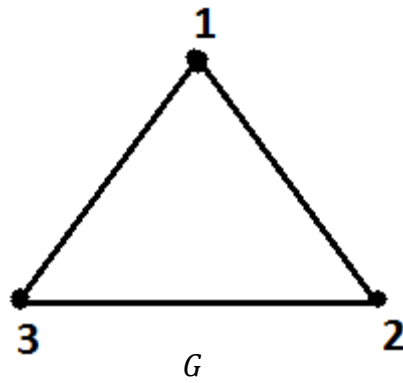
biçiminde tanımlanır. G nin Seidel matrisine göre özdeğerleri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ile gösterilir ve $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ şeklinde sıralanır. [16]

Tanım 2.3.10. [8] Bir G grafı için Seidel enerji;

$$SE(G) = \sum_{i=1}^n |\theta_i|$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.3.6.



Şekil 2.3.5. Seidel matrisin spektrum ve enerji örneği

G grafinın Seidel matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$S(G) = J - I - 2A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{char}(S(G))(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x + 2$$

$S(G)$ nin özdeğerleri $2, -1, -1$ olur.

Yani $\text{spec}(S(G)) = \{2, -1, -1\}$ olur.

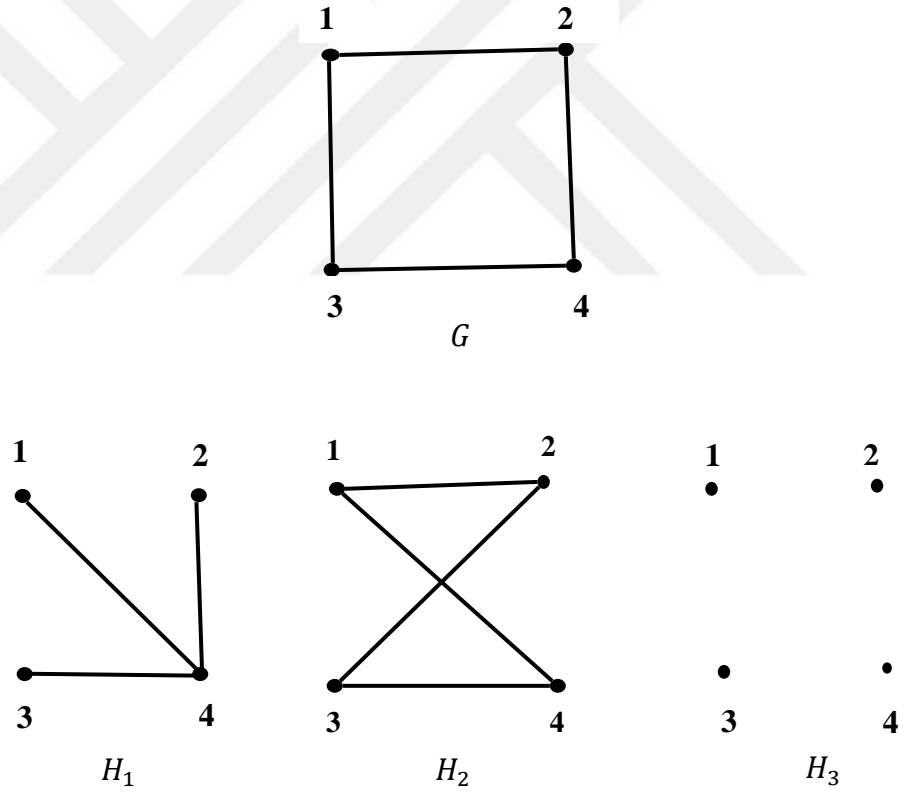
$S(G)$ nin enerjisi $S\mathcal{E}(G) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ olur.

3.BÖLÜM

3.1. Seidel Switching

Tanım 3.1.1. [11] $G = (V(G), E(G))$ grafi verilsin. $U, W \subseteq V(G)$ ve $U \cap W = \emptyset$ olsun. U ve W arasındaki mevcut kenarları silerek ve $(u, w) \notin E(G)$ olacak şekildeki bütün $u \in U$ ve $w \in W$ noktaları arasına bir kenar ekleyerek G grafinin H grafinin dönüştürülmesine, U' ya göre *Seidel switching* denir. Seidel switching uygulanarak birbirinden elde edilebilen graflara *switching denk graflar* denir.

Örnek 3.1.1.



Şekil 3.1 1. G grafinin Seidel switching uygulaması

G grafinin $U_1 = \{1\}, W_1 = \{2,3,4\}, U_2 = \{1,2\}, W_2 = \{3,4\}, U_3 = \{1,4\}, W_3 = \{2,3\}$ olmak üzere $(U_1, W_1), (U_2, W_2), (U_3, W_3)$ kümelerine Seidel switching uygulandığında

H_1 , H_2 ve H_3 grafları elde edilmiştir. G grafinin Seidel spektrumu $spec\{-3, 1\}$ 'dir. H_1 , H_2 ve H_3 graflarının da Seidel spektrumları $spec\{-3, 1\}$ olur. Yani G grafinin Seidel switching uygulanarak elde etmiş olduğumuz H_1 , H_2 ve H_3 grafları, G grafi ile aynı Seidel spektruma sahiptirler.

Not 3.1.1. [11] Seidel Switching, graflar üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur.

Not 3.1.2. [11] G den Seidel switching yoluyla elde edilen graf H olmak üzere, genel olarak bu graflar izomorf değildirler. Fakat A bir işaret matrisi olmak üzere $S(H) = AS(G)A$ olduğundan, $S(H)$ ve $S(G)$ benzer matrisler olur. Dolayısıyla aynı G ve H aynı Seidel spektruma sahiptirler.

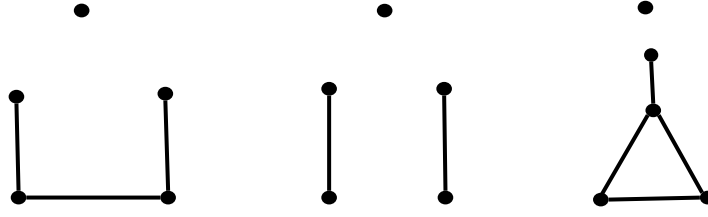
Tanım 3.1.3. [11] Bir G grafi ile aynı Seidel spektruma sahip tüm graflar, Seidel switching yoluyla G den elde edilebiliyorsa, G grafinin Seidel spektrumuna göre belirlenebilir (S-determined) bir graf denir.

3.2. Çok Parçalı Tam Grafların Seidel Spektrısı

Lemma 3.2.1. [11]

- (a) n noktalı null grafin Seidel spektrumu $\{n-1, -1\}$ dir.
- (b) K_n tam grafinin Seidel spektrumu $\{1, 1-n\}$ dir.
- (c) $K_{p,q}$ parçalı tam grafinin Seidel spektrumu $\{p+q-1, -1\}$ dir.

İspat: n noktalı null grafin Seidel matrisi $n \times n$ tipinde $J - I'$ dir. K_n tam grafinin Seidel matrisi $I - J'$ dir. $K_{p,q}$ iki parçalı tam grafin spektrumu ise boş grafa switching denk olduğundan, (a) da n yerine $p+q$ yazarak elde edilir. \square



Şekil 3.1.2. Sırasıyla $K_1 \cup P_4$, $K_1 \cup K_2 \cup K_2$, $K_1 \cup H$ grafları

Lemma 3.2.2. [11]

(a) $K_1 \cup P_4$ grafinin Seidel spektrumu $[\sqrt{5}]^2$, $[0]^1$, $[\sqrt{5}]^2$; $-\sqrt{5} \approx -2,2361$. olur

(b) $K_1 \cup K_2 \cup K_2$ grafinin Seidel spektrumu $\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]^1$, $[1]^2$, $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right]^1$, $[-3]^1$; $\frac{1-\sqrt{17}}{2} \approx -1.561$ olur.

(c) $K_1 \cup H$ grafinin Seidel spektrumu $\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]^1$, $[1]^2$, $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right]^1$, $[-3]^1$ olur.

Aşağıdaki lemmada $K_{p,p,\dots,p}$ çok parçalı tam grafin Seidel matrisine göre karakteristik polinomu verilmiştir. Bu polinom daha önce [10] da elde edilmiştir.

Lemma 3.2.3. [11] $n = kp$ olmak üzere, n adet noktaya sahip $K_{p,p,\dots,p}$ çok parçalı tam grafin Seidel spektrumu şöyledir;

$$\text{spec}(K_{p,p,\dots,p}) = \{[2p - 1]^{k-1}, [-1]^{n-k}, [-n + 2p - 1]^1\}.$$

İspat: $K_{p,p,\dots,p}$ grafinin Seidel matrisi $(2I_k - J_k) \otimes J_p - I_n$ dir. $2I_k - J_k$ matrisinin spektrumu $\{[2]^{k-1}, [2 - k]^1\}$ dir, J_p matrisinin spektrumu ise $\{[p]^1, [0]^{p-1}\}$ dir. Kronecker çarpımın spektrumu da $2I_k - J_k$ ve J_p matrisleri özdeğerlerinin çarpımından oluşur. Yani; $\{[2p]^{k-1}, [0]^{(p-1)k}, [(2 - k)p]^1\} = \{[2p]^{k-1}, [0]^{n-k}, [2p - n]^1\}$ bulunur. Dolayısıyla $K_{p,p,\dots,p}$ grafinin Seidel spektrumu $\{[2p - 1]^{k-1}, [-1]^{n-k}, [-n + 2p - 1]^1\}$ olur. \square

Lemma 3.2.4. [11] $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k \geq 1$ olmak üzere, K_{p_1, p_2, \dots, p_k} k -parçalı tam grafının Seidel özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ve nokta sayısı $n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ ise aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$(1) \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k-1} > 0 > \lambda_k = -1 = \lambda_{n-1} \geq \lambda_n.$$

$$(2) 2p_1 - 1 \geq \lambda_1 \geq 2p_2 - 1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 2p_{k-1} \geq 2p_k - 1.$$

$$(3) (2 - k)p_k - 1 \geq \lambda_n \geq 2p_k - n - 1.$$

$$(4) \text{Eğer } p_i \geq p_{i+1} \text{ ise } i = 1, \dots, k - 1 \text{ için } 2p_{i-1} > \lambda_i > 2p_{i+1} - 1 \text{ dir.}$$

Teorem 3.2.1. [11] K_{p_1, p_2, \dots, p_k} k -parçalı tam grafi ile aynı Seidel spektruma sahip bir graf G olsun. O zaman, G grafi da (Seidel switching' e göre) k -parçalı bir tam graf olur.

İspat: Öncelikle, G grafının switchinge göre çok parçalı bir tam graf olduğu gösterilmelidir. G grafındaki bir noktanın komşuluk kümesi üzerinde uygun biçimde switching uygulanmasıyla $K_1 \cup D$ formunda bir graf elde edilebilir. Bu yüzden $G = K_1 \cup D$ olduğunu varsayalım. G nin Seidel spektrumu K_{p_1, p_2, \dots, p_k} ile aynı olduğundan, G için $\lambda_{n-1} = -1$ dir. G nin 5 noktalı herhangi bir alt grafının özdeğeri $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_5$ ise (interlacing lemma) $\mu_4 \geq \lambda_{n-5+4} = -1$ olur. Dolayısıyla, G grafi lemma 3.2.2. de verilen $K_1 \cup P_4$, $K_1 \cup K_2 \cup K_2$ ve $K_1 \cup H$ graflarını indirgenmiş alt graf olarak içeremez. D' nin en fazla bir bileşeninde en az bir kenar bulunmak zorundadır; aksi taktirde $K_2 \cup K_2$, D' nin bir indirgenmiş alt grafi olur. D nin kromatik sayısını $X(D) = t$ ile gösterelim. Eğer $t > 1$ ise, D en az bir kenara sahip (kesin olarak) bir C bileşenini içerirse $X(D) = X(C)$ olur. C nin nokta kümesini $V(C)$ ile gösterelim. $u, v \in V_i$ için $u \sim v$ ye her $i \neq j$ için bitim noktalarının biri V_i de diğeri V_j de olan bir kenar mevcut olacak biçimde $V(C) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t$ yazalım. $u \in V_j$ ve $v \in V_i$ komşu olsun. Eğer $w \in V_i$ ve $w \neq v$ ise, $w \sim u$ olur. Bunu görmek için $w \sim u$ olduğunu varsayalım. O zaman C' nin bağlantılılığından, $w \sim z$ ve $z \neq u$ olacak şekilde bir z noktası mevcuttur. $v \sim w$ olduğundan D' nin $\{u, v, z, w\}$ noktaları tarafından oluşturulan alt grafi şunlardan biri olacaktır: indirgenmiş bir $K_2 \cup K_2$ grafi (eğer sadece uv, wz kenarlarına sahipse) indirgenmiş bir P_4 grafi (eğer $u \sim z$ ve $v \sim z$ ise) ya da indirgenmiş bir H grafi (eğer v ve u her ikiside z 'ye komşu ise). Bunların hiçbiri D' nin muhtemel indirgenmiş alt grafi

olamayacağından, bu durum çelişki oluşturacaktır. Böylece, $v \in V_i$ noktasının her komşusu V_i deki diğer tüm noktalara da komşu olmak zorundadır. $u \in V_j$ ve $j \neq i$ olsun. Benzer şekilde, V_j deki her bir nokta, V_i deki her bir noktaya komşu olur. Bu da $V_i \cup V_j$ tarafından oluşturulan indirgenmiş alt grafın iki parçalı bir tam graf olduğu anlamına gelir. Bu durum, her $i \neq j$ için geçerli olduğundan C grafi t -parçalı bir tam graf olur. Yani, G grafi çok parçalı bir tam graf ile izole noktaların birleşimi formundadır. $G = K_1 \cup D$ deki tüm izole noktaların kümesi U olsun. U ya göre, G üzerinde Seidel switching uygulanmasıyla $(t + 1)$ parçalı bir tam graf oluşur. Bu da G nin (switchinge göre) r -parçalı bir tam graf olduğu anlamına gelir. G deki pozitif Seidel özdeğer sayısı $r - 1$ olur. Aynı zamanda, $spec(G) = Spec(K_{p_1, p_2, \dots, p_k})$ olduğundan $r - 1 = k - 1$ yani $r = k$ elde edilir. Sonuç olarak G , k -parçalı bir tam graftır. \square

Teorem 3.2.2. [11] $k \geq 3$ olmak üzere $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k \geq 1$, $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k \geq 1$ ve $\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k q_i$ olsun. Burada $\{p_1, \dots, p_k\} \neq \{q_1, \dots, q_k\}$ ise K_{p_1, p_2, \dots, p_k} ve K_{q_1, q_2, \dots, q_k} grafları switching denk değildir.

İspat: $G = K_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ grafında $i = 1, \dots, k$ için p_i adet noktaya sahip bağımsız her kümeyi V_i ile gösterelim. K_{q_1, \dots, q_k} grafındaki bağımsız kümeleri de W_i ile gösterelim. $U \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_i$ olsun. U 'ya göre G grafına Seidel switching uygulandığında $G' = K_{q_1, q_2, \dots, q_k}$ grafının elde edildiğini varsayalım. $\{q_1, \dots, q_k\}$ ve $\{p_1, \dots, p_k\}$ birbirinden farklı olduğundan $G' \neq G$ olur. Her bir V_i kümesini $V_{i1} = V_i \cap U$ ve $V_{i2} = V_i \setminus V_{i1}$ olacak şekilde ikiye parçaya ayıralım. Buna göre G' grafında, V_{i1} deki her bir nokta ile V_{i2} deki her bir nokta arasında bir kenar oluşur. Genelliği bozmadan, $V_{i1} \neq \emptyset$ için durumu inceleyelim. O zaman $i = 2, \dots, k$ olmak üzere V_{i2} kümelerinden en fazla bir tanesi boştan farklı olabilir. Aksini düşünüp, $i \neq j$ ve $i, j \geq 2$ iken $V_{i2}, V_{j2} \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, bazı uygun bir l tamsayısı için $V_{i1} \subseteq W_l$ olduğundan $V_{i1} \cup V_{i2}$, G' de bağımsız bir kümedir. Ayrıca $V_{i2} \subseteq W_l'$ dir. Benzer şekilde $V_{j2} \subseteq W_l$ olur. Fakat V_{i2} ve V_{j2} arasında kenarlar bulunması, W_l kümesinin bağımsız olmasıyla çelişir. Böylece, $3 \leq i \leq k$ için $V_{i2} = \emptyset$ olur. Yani; $3 \leq i \leq k$ iken $V_{i1} = V_i$ elde edilir. G grafından V_{i1} ve V_{k1} boş değildirler. $V_{22} \neq \emptyset$ olsun. O zaman, $V_{11} \cup V_{22}$ bağımsız bir küme oluşturduğundan uygun bir l için W_l tarafından kapsanır. Ayrıca $V_{41} \cup V_{22}'$ de bağımsız bir küme olduğundan $V_{k1} \subseteq W_l'$ dir. Fakat V_{11} ile V_{k1} arasında kenarlar

olduğundan bu durum bir çelişki oluşturur. Yani $V_{22} = \emptyset$ dir ve $V_{21} = V_2$ boştan farklı bir kümedir. $V_{k1} \cup V_{12}$ ve $V_{21} \cup V_{12}$ kümeleri de G grafında bağımsız olduklarından ve V_{21} ile V_{k1} arasında kenarlar mevcut olduğundan, V_{12} kümesi de boş olmak zorunda kalır. Yani $V_{11} = V_1'$ dir. Bu da $G' = G$ anlamına gelir. Fakat bu durum teoremin ifadesindeki $\{p_1, \dots, p_k\} \neq \{q_1, \dots, q_k\}$ olmasıyla çelişir. \square

Not. 3.1.3. [11] Bütün iki parçalı tam graflar Seidel kospektraldir. Herhangi iki adet iki parçalı tam graf switching denktir. $p + q = s + t = n$ ve $\{s, t\} \neq \{p, q\}$ olacak şekilde $K_{p,q}$ ve $K_{s,t}$ iki parçalı tam grafları üzerinde inceleyelim. $p \geq q, s \geq t$ ve $p > s$ olsun. $K_{p,q}$ grafındaki p ve q elemanlı bağımsız kümeler sırasıyla V_1 ve V_2 ile gösterelim. $p - t = s - q$ ve $p - t > s - t \geq 0$ olduğundan $p > s - q > 0$ elde edilir. $s - q$ adet nokta içeren bir $U \subseteq V_1$ seçelim. $K_{p,q}$ grafında U ' ya göre switching uygulanırsa, bağımsız kümeleri sırasıyla $W_1 = U \cup V_2$ ve $W_2 = V_1 \setminus U$ olan $K_{s,t}$ iki parçalı tam grafi elde edilir.

Teorem 3.2.1 ' den ve yukarıdaki nottan, aşağıdaki teorem doğrudan ifade edilebilir.

Teorem 3.2.3. [11] Her iki parçalı tam graf S-determined olur.

Teorem 3.2.4. [11] $p_1 > \dots > p_l \geq 1$ olmak üzere, $i = 1, \dots, l$ için $s_i \geq 3$ olsun. Buradan $K_{\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{p_l, \dots, p_l}_{s_l}}$ parçalı tam grafi S-determined olur.

İspat: $i = 1, \dots, l$, $r_0 = 0$ olmak üzere $r_i = \sum_{j=1}^i s_j$ olsun. $k = r_l$ ile gösterelim. $n = \sum_{i=1}^l s_i p_i$ olacak şekilde $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, $K_{\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{p_l, \dots, p_l}_{s_l}}$ k-parçalı tam grafın Seidel özdeğerleri olsun. Lemma 3.1.4.'den $i = 1, \dots, l$ için;

$$\lambda_j = 2p_i - 1, j = r_{i-1} + 1, \dots, r_i - 1,$$

ve

$$2p_i - 1 > \lambda_{r_i} > 2p_{i+1} - 1$$

olur.

$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k$ için K_{q_1, q_2, \dots, q_k} çok parçalı tam grafi aynı Seidel spektruma sahip ise; Lemma 3.2.4. (2) ' den $i = 1, \dots, l$ için;

$$2q_j - 1 \geq \lambda_j = 2p_i - 1 \geq 2q_{j+1} - 1, \quad j = r_{i-1} + 1, \dots, r_i - 1$$

olur. Buradan $j = r_{i-1} + 2, \dots, r_i - 1$ için $q_j = p_i$ olur. Lemma 3.2.4. (4) ' den $q_{r_{i-1}+1} > q_{r_{i-1}+2}$ yazmamız mümkün değildir. Aksi takdirde

$$2q_{r_{i-1}+1} - 1 > \lambda_{r_{i-1}+1} > 2q_{r_{i-1}+2} - 1$$

Olur ki bu da $\lambda_{r_{i-1}+1} = 2p_i - 1 = 2q_{r_{i-1}+2} - 1$ ile çelişir. Buradan $i = 1, \dots, l$, $j = r_{i-1} + 2, \dots, r_i - 1$ için $q_j = p_i$ olur. $\sum_{j=1}^k q_j = \sum_{i=1}^k s_i p_i$ olduğundan, $\sum_{i=1}^l q_{r_i} = \sum_{i=1}^l p_i$ ifadesini elde ederiz. Her $i = 1, \dots, l$ için $q_{r_i} \leq q_{r_{i-1}}$ olduğundan, ikinci toplamların eşitliği $q_{r_i} = p_i$ anlamına gelir.

Buradan itibaren aşağıda vereceğimiz bilgiler $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam graflar ile ilgilidir. $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafinin Seidel matrisinin karakteristik polinomu [9] da da elde edilmiştir.

3.3. Üç Parçalı Tam Grafların Seidel Spektrası

$K_{p,q,r}$ 3- parçalı tam grafi için;

$$\text{char}(K_{p,q,r}) = (\lambda + 1)^{n-3} (\lambda^3 + \lambda^2(3 - n) + \lambda(3 - 2n) + (4pqr - n + 1))$$

olur [11]. Böylece, $\lambda_1 > \lambda_2$ $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafinin iki pozitif Seidel özdeğeri ve λ_n ise en küçük Seidel özdeğeri. Buradan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ polinomunun kökleridir. $n = p + q + r$ olmak üzere;

$$\lambda^3 + \lambda^2(3 - (p + q + r)) + \lambda(3 - 2(p + q + r)) + (4pqr - (p + q + r) + 1)$$

yazarız. $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam graflarının, $n - 3$ özdeğerinin tümü -1 eşit olduğundan, $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafları ancak ve ancak aşağıdaki iki eşitlik sağlanırsa aynı Seidel spektrumuna sahip olur. [11]

$$x + y + z = p + q + r \quad (1)$$

$$xyz = pqr \quad (2)$$

Gözlem 3.3.1. [11] $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafinin S-determined olabilmesi için gerek ve yeter koşul (1) ve (2) eşitliklerinin tek çözümünün $\{x, y, z\} = \{p, q, r\}$ olmasıdır.

Örnek 3.1.1 $K_{6,6,1}$ ve $K_{9,2,2}$ 3-parçalı tam graflarının aynı Seidel spektruma sahip ancak switching denk olmayan graflardır.

Gözlem 3.3.2. [11] x, y, z ve p, q, r üçlülerinden x ve p' yi birbirlerine eşit aldığımızı varsayalım. Yani $x = p$ olsun. Buradan y, z ve q, r değişkenlerinin çarpım ve toplam sonuçları eşit olmalıdır. Böylece $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafları aynı Seidel spektruma sahip fakat switching denk değildir. Buradan $\{x, y, z\} \cap \{p, q, r\} = \emptyset$ olur. Eğer $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafları aynı Seidel spektrumuna sahip ise, $K_{kx,ky,kz}$ ve $K_{kp,kq,kr}$ 3-parçalı tam graflarının da Seidel spektrumları aynıdır. Dolayısıyla her k pozitif tamsayısı için $K_{p,q,r}$ 3- parçalı tam grafi S-determined değil ise, $K_{kp,kq,kr}$ 3-parçalı tam grafi da S-determined değildir. Ancak tersinde bu durum geçerli değildir. $K_{10,2,2}$ 3-parçalı tam grafi, $K_{8,5,1}$ aynı Seidel spektrumuna sahip, fakat S-determined değildir. $K_{10,2,2}$ 3-parçalı grafini iki pozitif tam sayısına böldüğümüzde $K_{5,1,1}$ elde edilir. Burada $K_{5,1,1}$ 3- parçalı tam grafi S- determined olur.

Teorem 3.3.1. [11] $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafi aşağıdaki durumlar sağlandığında S-determined olur.

(a) $p = q = r$

(b) p, q, r sayıları a asal sayısının kuvvetleridir.

(c) $\max\{p, q, r\}$ nin bir asal sayı olması

İspat: (a) şartı Teorem 3.2.4.' de açıklanmıştır. (b) şartı $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,q,r}$ 3-parçalı tam grafları aynı Seidel spektruma sahipse o zaman, $xyz = pqr$ ve $x + y + z = p + q + r$

olduğundan, $x, y, z, 'den her biri a 'nın bir kuvveti şeklinde yazılabilir. x, y, z ve p, q, r toplamları eşit olduğundan, p, q, r de a 'nın üstleri şeklinde yazmak tek çözüm yoludur. (c) $p \geq q \geq r$ ve p asal bir sayı olsun. $xyz = pqr$ olduğundan p asalı x, y, z sayılarından birini böler. Bu sayıya x diyelim. O zaman $x = kp$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ bulunabilir. $k \geq 2$ ise,$

$$3p \geq p + q + r = x + y + z \geq kp + 2$$

olacaktır. Yani $k = 2$ elde edilir. Buna göre, $qr = 2yz$, $q + r = p + y + z$ ve $q \geq q + r - p = y + z \geq 2z$ olur. Buradan, $2yz = qr \geq 2zr$ olur ki bu da $y \geq r$ demektir. Böylece, $p + y \geq q + r = p + y + z > p + y$ olur. Fakat bu da çelişki oluşturur. Yani $k = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\{x, y, z\} = \{p, q, r\}$ elde edilir.

Lemma 3.3.1. [11] $x \geq y \geq z$ ve $x, y, z \notin \{p, r\}$ olsun.

- i. $p > r$ iken $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,p,r}$ Seidel kospektral ise $x > p > y \geq z > r$ ve $x + y < 2p$ olur.
- ii. $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,r,r}$ Seidel kospektral ise $p > x \geq y > r > z$ ve $x + y < 2p$ olur.

Teorem 3.3.2. [11] a ve b iki farklı asal sayı olsun. $K_{ab,ab,a}$ 3-parçalı tam grafinin S-determined olması için gerek ve yeter koşul $(a, b) \neq (2,3)$ olmasıdır.

İspat: $K_{6,6,2}$ ve $K_{8,3,3}$ 3-parçalı tam grafinin Seidel kospektral dir. Bu durum $(a, b) = (2,3)$ için $K_{ab,ab,a}$ 3-parçalı grafinin S-determined olmadığını gösterir.

$(a, b) \neq (2,3)$ için inceleyelim. Lemma 3.2.5. ve (1) ve (2) eşitlikleri yardımıyla, $x \geq y \geq z$ ve $x, y, z \notin \{ab, a\}$ olacak şekilde $K_{x,y,z}$ ve $K_{ab,ba,a}$ 3-parçalı tam grafları, Seidel kospektral olması için aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$x + y + z = 2ab + a \quad (3)$$

$$xyz = a^3 b^2 \quad (4)$$

$$x > ab > y \geq z > a \quad (5)$$

(4) şartına göre z , en az iki asalın çarpımı olamaz. Çünkü xy en fazla üç asal sayının birleşimi şeklinde olacağından, $x > y \geq z$ olması durumu ile çelişir. Bu da z nin asal bir sayı olduğunu gösterir.(4) eşitliğinden $z \in \{a, b\}$ olur. Fakat bu durum $x, y \notin \{ab, a\}$ olması durumu ile çelişir. Bu da $z = b$ demektir. Böylece $b < a$ olamaz. Eğer $b > a$ ise $z = b$, $xy = a^3b$, $x > y \geq b$ ve $x, y \in \{ab, a\}$ olduğundan $x = a^3$, $y = z = b$ elde ederiz. Şart (3)'den $a^3 + 2b = 2ab + a$, yani; $a^3 - a = 2b(a - 1)$ ve dolayısıyla $a(a + 1) = 2b$ olur. Ancak bu, son eşitlik varsayımımızın aksine $a = 2$ ve $b = 3$ olduğu sürece sağlanır. Bu nedenle $K_{ab,ba,a}$ 3-parçalı tam grafi S-determined olur.□

Teorem 3.3.3. [11] a ve b iki asal sayı olacak şekilde $p = ab$ ve $a > b$ olsun. $K_{p,p,1}$ 3-parçalı tam grafi S-determined değil ise o zaman, $K_{p,p,1}$ grafına Seidel kospektral olan graf yalnızca $K_{a^2,b,b}$ 3-parçalı tam grafıdır. Öyle ki $a = 2b - 1$ dir.

İspat: $K_{p,p,1}$ ile Seidel kospektral ve $K_{x,y,z}$ 3-parçalı tam graflarının Seidel kospektral olduğunu kabul edersek, Lemma 3.2.5.'den $x > p > y \geq z > 1$ elde ederiz. Buna göre $xyz = a^2b^2$, $x > ab$, $y, z \notin \{ab, 1\}$ ve $x \notin \{a^2b^2, a^2b, ab^2\}$ olur. Bu yüzden $x = b^2$ ya da $x = a^2$ olur. $x = b^2$ olduğunu varsayalım. O zaman $yz = a^2$ ve $y, z \neq 1$ olduğundan $y = z = a$ olur. Şart (1) den $b^2 + 2a = 2ab + 1$ ifadesi düzenlendiğimizde $b^2 - 1 = 2a(b - 1)$ yani; $b + 1 = 2a$ bulunur. Ancak burada, $a > b > 1$ olduğundan bu durum bir çelişki oluşturur. Aynı hesaplama kullanılarak $x = a^2$ olacak şekilde $y = z = b$ ve $a + 1 = 2b$ elde edilir. $a = 2b - 1$ olacak şekilde $K_{ab,ba,a}$ ve $K_{a^2,b,b}$ 3-parçalı tam graflarının Seidel spektrumları aynıdır.□

Teorem 3.3.4. [11] Eğer $q \leq 4$ ise $K_{p,q,1}$ S-determined olur. $q > 4$ olmak üzere, $K_{p,q,1}$ 3-parçalı tam grafi S-determined olmamasını sağlayan bir p pozitif tamsayısı daima vardır.

İspat: Şart (1) ve (2) den;

$$x + y + z = p + q + 1 \quad (6)$$

$$xyz = pq \quad (7)$$

olur. Burada $x \geq y \geq z$, $p, q, 1$ ' den farklı bir üçlüdür ve $y \geq z \geq 2$ dir. Teorem 3.1.4. (c) şartından x ' in asal olmaması durumunu inceleyelim. (6) şartını q ile çarpıp pq ' yu xyz ile yer değiştirirsek, $q(x + y + z) = xyz + q^2 + q$ elde ederiz. Böylece $q(y + z - q - 1) = x(yz - q)$ dir. $y \geq z \geq 2$, $yz \geq y + z$ olduğundan;

$$x(yz - q) \leq q(yz - q - 1) \quad (8)$$

elde edilir.

Teoremin ilk kısmı için incelemeye devam edelim. $q \leq 4$ için, $x \geq y \geq z$ eşitsizliğini sağlayan x, y, z lerin var olduğunu kabul edelim. $y, z \geq 2$ olduğundan, $yz \geq 4 \geq q$ ve $yz \neq q$ elde ederiz. Böylece $yz > q$ olur ve;

$$x \leq q \frac{yz - q - 1}{yz - q} < q$$

elde edilir. $q \leq 4$ olduğundan x asal olur ve bir çelişki elde ederiz.

Teoremin ikinci kısmın ipatında $q > 4$ için inceleme yapalım. Burada q tek sayı ise, $K_{\frac{(q-1)^2}{2}, q, 1}$ ve $K_{q\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}, 2}$ 3-parçalı tam grafları aynı Seidel spektrumuna sahiptir. Bu sonuç özellikle, q ' nun asal olduğu durumları kapsar. $q = ab$ ise, burada $a > 1$ ve $b > 2$ olur. Burada $p = (b - 1)(ab - a - b + 2)$ alırsak, $K_{x,y,z}$ ve $K_{p,q,1}$ 3-parçalı tam grafinin aynı Seidel spektruma sahip olması için $x = b(ab - a)$, $y = b - 1$, $z = a$ olur.

Sonuç 3.3.1. [11] Herhangi bir $n \geq 3$ tamsayısı için, nokta sayısı n ye eşit olan S-determined 3-parçalı tam grafi daima vardır.

[11] da nokta sayısı n olan 3-parçalı tam graflar üzerinde bilgisayar yardımıyla incelemeler yapılmıştır ve aşağıdaki gözlemler elde edilmiştir.

$n < 13$ ve $n = 15, n = 18$ iken S-determined olur.

$n = 13, 14, 16, 17$ iken S-determined olmayan 3-parçalı tam graflar mevcuttur. Elde edilen örnekler aşağıdaki gibidir.

$n = 13$ için $K_{9,2,2}, K_{6,6,1}$ Seidel kospektraldir.

$n = 14$ için $K_{8,3,3}, K_{6,6,2}$ Seidel kospektraldir.

$n = 16$ için $K_{9,5,2}, K_{10,3,3}$ Seidel kospektraldir.

$n = 17$ için $K_{9,4,4}, K_{8,6,3}$ Seidel kospektraldir.

$n = 7k - \alpha$, $\alpha \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ için [3] de yapılan incelemeler sonucunda aynı çarpım ve toplama sahip $(\alpha, 3k, 4k - 2\alpha)$ ve $(2\alpha, k, 6k - 3\alpha)$ sayı üçlüleri elde edilmiştir. [3] de $n \notin \{22,24,30,36,42\}$ iken bu sayı üçlülerinin birbirinden farklı olduğu gösterilmiştir. $n \in \{22,24,30,36,42\}$ için aşağıdaki hesaplar yapılmıştır.

$n = 22$ için 9,8,5 ve 10,6,6 olur.

$n = 24$ için 12,10,2 ve 16,5,3 olur.

$n = 30$ için 20,7,3 ve 21,5,4 olur.

$n = 36$ için 21,13,2 ve 26,7,3 olur.

$n = 42$ için 24,16,2 ve 32,6,4 olur.

Böylece her $n \geq 13$ için, $n \neq 15$ ve $n \neq 18$ olacak şekilde n adet noktaya sahip S-determined olmayan 3-parçalı tam grafları mevcuttur.

3.4 Ananas ve Arkadaşlık Graflarının Karakteristik Polinomları

Önerme 3.4.1. K_p^q ananas grafinin Seidel matrisine göre karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\text{char} \left(S(K_p^q) \right) (x) = (x + 1)^q (x - 1)^{p-2} (x^2 + (p - q - 2)x - (p - 3p + 2pq - 1))$$

İspat: K_p^q ananas grafinin Seidel matrisi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$S(K_p^q) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1} & (I - J)_{(p-1) \times (p-1)} & J_{(p-1) \times q} \\ -\mathbf{1} & J_{q \times (p-1)} & (J - I)_{q \times q} \end{bmatrix}$$

Buna göre $S(K_p^q) + I$ matrisinde $q + 1$ adet aynı satır; $S(K_p^q) - I$ matrisinde ise $p - 1$ adet aynı satır bulunur. Bu da sırasıyla $(x + 1)^q$ ve $(x - 1)^{p-2}$ polinomlarının, $S(K_p^q)$ matrisinin karakteristik polinomunun birer çarpanı olması demektir. $S(K_p^q)$ matrisinin bir eşit parçalanışı

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 - p & -q \\ -1 & 2 - p & q \\ -1 & p - 1 & q - 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Bu matrisin karakteristik polinomu $\text{char}(P)(x) = (x + 1)[x^2 + (p - q - 2)x - (p - 3q + 2pq - 1)]$ olur. $\text{char}(P)(x) \setminus \text{char}(K_p^q)(x)$ olduğundan,

$$\text{char}(K_p^q)(x) = (x + 1)^q (x - 1)^{p-2} [x^2 + (p - q - 2)x - (p - 3q + 2pq - 1)]$$

elde edilir. \square

Önerme 3.4.2. F_n^k arkadaşlık (friendship) grafının Seidel matrisine göre karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\text{char}(S(F_n^k))(x) = (x - 1)^{n(k-2)} (x + 2k - 3)^{n-1} [x^2 - (1 + (n - 2)(k - 1))x - n(k - 1)]$$

İspat: F_n^k grafının Seidel matrisi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$S(F_n^k) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T & \dots & -\mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1} & (I-J)_{(k-1)(k-1)} & J_k & \dots & J_k \\ -\mathbf{1} & J_k & (I-J)_{(k-1)(k-1)} & \dots & J_k \\ -\mathbf{1} & J_k & J_k & \dots & J_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{1} & J_k & J_k & \dots & J_k \\ -\mathbf{1} & J_k & J_k & \dots & (I-J)_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

Burada $S(F_n^k) - I$ matrisinin $n(k-2) + 1$ adet satırının aynı olduğu görülür. Yani $(x-1)^{n(k-2)}$ polinomu, $S(F_n^k)$ matrisinin karakteristik polinomunun bir çarpanıdır. $S(F_n^k)$ matrisinin bir eşit parçalanışı,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1-k & 1-k & \dots & 1-k \\ -1 & 2-k & k-1 & \dots & k-1 \\ -1 & k-1 & 2-k & \dots & k-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & k-1 & k-1 & \dots & 2-k \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

biçiminde yazılır. Buradan, Q matrisinin karakteristik polinomu, $\text{char}(Q)(x) = (x+2k-3)^{n-1}(x^2 - (1+(n-2)(k-1))x - n(k-1))$ olur. Q matrisinin karakteristik polinomunun, $S(F_n^k)$ matrisinin karakteristik polinomunu bölmesi gerektiğinden,

$$\text{char}(S(F_n^k))(x) = (x-1)^{n(k-2)}(x+2k-3)^{n-1}[x^2 - (1+(n-2)(k-1))x - n(k-1)]$$

olur.

4. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında matematikte ve mühendislik alanlarında, önemli bir yeri olan graf teori konusu cebirsel olarak ele alınmıştır. Çalışmamızda graflar üzerinde tanımlanan Seidel matris en genel haliyle incelenmiştir.

Bir grafin Seidel spektrumu, o grafa switching uygulandığında elde edilebilen her bir graf ile aynı olur. Dolayısıyla, bir grafa Seidel spektrumu ile belirlenebilir ya da kısaca S-determined diyebilmek için gerekli koşul o graf ile aynı Seidel spektruma sahip olan herhangi bir grafin yine o graftan Seidel switching uygulanarak elde edilebilmesidir. Çok parçalı tam grafların S- determined olup olmadıklarına dair güncel bir çalışma Berman v.d. tarafından yapılmıştır. [11] ' de elde edilen bulgular bu tez çalışmasında detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Ayrıca bu tez çalışmasında ananas ve arkadaşlık graflarının Seidel spektrumları incelenmiş ve bunların genel formlarının Seidel karakteristik polinomları hesaplanmıştır. Bu hesaplar yapılırken ananas ve arkadaşlık graflarının Seidel matrislerinin özel biçimde bloklanabilir olmasından faydalanılmıştır ve eşit parçalanış metoduyla bu polinomlar aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

Önerme 3.4.1. 'den

$$\text{char}\left(S(K_p^q)\right)(x) = (x + 1)^q(x - 1)^{p-2}(x^2 + (p - q - 2)x - (p - 3p + 2pq - 1))$$

Önerme 3.4.2. ' den

$$\text{char}(S(F_n^k))(x) = (x - 1)^{n(k-2)}(x + 2k - 3)^{n-1}[x^2 - (1 + (n - 2)(k - 1))x - n(k - 1)]$$

Özel graf türlerinin (ananas, arkadaşlık, çok parçalı tam graf v.b.) S-determined olup olmadıklarına dair literatürde çok sayıda çalışmanın olmadığı; bu tez çalışması esnasında yapılan araştırmalar ve incelemeler sonucunda görülmüştür. Dolayısıyla bu konuda çalışmaların yapılmasının, literatüre katkı sağlayacağı gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Taşçı D. "Lineer Cebir", *Selçuk Üniversitesi*, Eylül 2005
2. Oboudi M.R. "Energy and Seidel Energy of Graphs", 2016
3. Bapat R. B., "Graphs and Matrices" *Springer-Hindustan Book Agency*, (2010)
4. Topcu H., "Graf İzomorfizmi ve Ko-Spektral Graflar", *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Doktora Tezi*, (2016)
5. Vasudev C., "Graph Theory with Application." (2006)
6. Balakrishnan V.K., "Graph Theory." (1997)
7. Çetin N., Orhun N., "Lineer Cebir" *Anadolu Üniversitesi* (1998)
8. Hamers, W.H., "Seidel Switching and Graph Energy", *MATCH Commun* (2012)
9. Brouwer, A.E., Haemers, W.H., "Spectra of graphs", *Sprinter*, New York (2012)
10. S. M. Lv, L. Wei, H.X. Zhao, "On the Seidel Integral Complete Multipartite Graphs ", *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.*, 705-710, (2012)
11. Berman A., Monderer N. S., Singh R., Zhang X.D., "Complete multipartite graphs that are determined, up to switching, by their Seidel spectrum", *Linear Algebra and its Applications*, (2018)
12. Haemers W.H., Cioaba S.M., Vermette J.R., "The graphs with all but two eigenvalues equal to -2 or 0", *Designs Codes and Cryptography*, Aralık 2017
13. S. M. Lv, L. Wei, H.X. Zhao, "Seidel Integral Complete r-partite Graph" *Graph and Combinatoric* (2014)
14. Harishchandra S. R., Gutman I. , Mahadevappa M. G., "Seidel Energy of Iterated Line Graphs of Regular Graphs", (2015)
15. Chetkovic D., Rowlinson P., Simic S., "An Introduction to the Theory of Graph Spectra", *Cambridg University Pres*, (2010)
16. Zhou H. "The Main Eigenvalues of the Seidel Matrix", (2008)
17. Greaves G., Koolen J. H., Munemasa a., Szöllösi F., "Equiangular lines in Euclidean spaces", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* (2016)
18. Szöllösi F., Östergard R.J.P., " Enumeration of Seidel matrices", *European Journal of Combinatorics* (2018)
19. Hic P., Pokorny M., Stevonovic D. "Seidel Integral Complete Split Graphs", *Mathematics Interdisciplinary Research* (2019)

ÖZGEÇMİŞ

Kübra UÇAR 1992 yılında Kayseri ilinin Kocasinan ilçesinde doğdu. İlkokulu ve ortaokulu Şükrü Malaz İlköğretim Okulunda okudu. Liseyi, Sümer Anadolu Lisesinde tamamladı. 2011 yılında Kırıkkale Üniversitesini kazandı. 2011-2015 yılları arasında Kırıkkale Üniversitesinde eğitime devam etti. 2015-2016 yılları arasında Erciyes Üniversitesine yatay geçiş yaptı ve aynı yıl içersinde mezun oldu. 2016-2017 yılları arasında Kayseri Melikgazi Ahmet Baldöktü Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmenliği yaptı. 2017 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde Yüksek Lisans Eğitimine başladı ve Öğrenime hala devam etmektedir.

e-posta: kbr1ucr@gmail.com