



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUAZİ OPTİĞİN DURGUN OLMAYAN DENKLEMİ için
BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Dilek İPEK

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
EKİM-2020



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KUAZİ OPTİĞİN DURGUN OLMAYAN DENKLEMİ için
BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

DİLEK İPEK
ORCID: 0000-0002-4221-1303

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANSTEZİ

DANIŞMAN
Prof.Dr. Bünyamin YILDIZ
ORCID: 0000-0002-3683-9719

HATAY
EKİM-2020

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KUAZİ OPTİĞİN DURGUN OLMAYAN DENKLEMİ için
BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

Dilek İPEK

ENFORMATİKANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANSTEZİ

Mustafa Kemal Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalı öğrencisi Dilek İPEK'in **Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ** danışmanlığıyla yapılan bu tez çalışması **14/10/2020** tarihinde yapılan sınav sonucunda aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Başkan

Prof. Dr. Yakup HAMEŞ
Üye

Doç. Dr.Orkun TAŞBOZAN
Üye

Kod No:

Doç. Dr. Cengiz KARACA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

14/10/2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

İmzası

Dilek İPEK

ÖZET

KUAZİ OPTİĞİN DURGUN OLMAYAN DENKLEMİ için BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Bu tezde Kuazi optiğinin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin sonlu farklar yöntemiyle çözümü ele alınmıştır. Bu çalışmanın 3.1. bölümünde Fonksiyonel uzayda kararsız ekstramal problemi tanımlanarak bu probleme ait genelleştirilmiş çözümlerin varlığı ve bu tekniğe ait hükmün ispatı verilmiştir. Devamında problemle ilgili örnekler verilip çözümler yapıldıktan sonra probleme ait teoremler verilip bu teoremlerin ispatı yapılmıştır.

Çalışmanın 3. bölümünde ise 2. Çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanarak bu probleme ait fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edildi ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. Son olarak 1. ve 2. Çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için algoritma verilmiştir. Verilen algoritmalar ile fonksiyonların minimize edilebilmesi için $f_0(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ fonksiyonlarının δ doğrulukta verilmesi $T_\alpha[u, J]$ fonksiyonlarının yerine $T_\alpha[u, J_\delta]$ fonksiyonlarının minimizasyonunun gerektiği gösterilmiştir.

2020, 30 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuazi Optik, Sınır Değer Problemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Schrödinger Denklemi, Fark Şeması, Yakınsama, Hata

ABSTRACT

SOLUTION of INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS by FINITE DIFFERENCE METHOD for NON-STATIONARY EQUATION of QUASI OPTICS

In this thesis, the initial boundary problems are studied for non-stationary equation of quasi optics. In the 3.1. section, describing first-type initial boundary value problem a difference scheme belong to this problem is constituted. A stability estimation is obtained for the solution of difference scheme using Cauchy-Bunyakovskii's inequality and Gronwall's lemma. Using the stability estimation an estimation for the error of difference scheme is obtained.

In the 3.2 section, describing the second-type initial-boundary value problem a stability estimation for the solution of difference scheme belong to this problem is obtained. The error of difference scheme using obtained estimation is evaluated. Consequently, an algorithm is given for the numeral solutions of first and second-type initial-boundary value problems.

2020, 30 Pages

Key Words: Quasi Optics, Boundary Value Problem, Finite Difference Method, Schrödinger Equation, Difference Scheme, Stability, Convergence, Error

TEŞEKKÜR

Mesleki ve akademik hayatımda önemli kararlar almam gerektiğinde sürekli yanımda olan ve varlığı ile benim için önemli bir rol model oluşturan, yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmamda bana ön ayak olup; çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ 'a ve Mustafa Kemal Üniversitesi Öğretim Üyesi Hakan YETİŞKİN hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Verdiğim bu mücadelede beni maddi ve manevi olarak destekleyen, sevgisini ve şefkatini her daim hissettiğim bana her koşulda güvenen ve daima yanımda olan ailem ve can parçam çocuklarım ayrıca teşekkürü sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	5
3.1. Problemin Formüle Edilmesi.....	5
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	10
4.1. Fonksiyonel uzaylarda Kararsız Ekstramal Problemler.....	10
4.2. Matematiksel Programlamanın Kararsız Problemleri	20
4.3. Optimal Yöntemin Kararsız Problemleri.....	22
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	30

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	: Herhangi
$\tau > 0$	: t değişkenine göre adım
$i = \sqrt{-1}$	: Sanal birim
$\ell > 0$ H	: Hilbert uzayı
$\langle u, v \rangle$	:İç çarpım
B	: Banach Uzayı
x	: E_n uzayında $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$\ell > 0$	:Herhangi bir sayı

1. GİRİŞ

Durağan olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon problemleri genellikle homojen olmayan ortamda ışık huzmesinin dağılımının incelendiği lineer olmayan optikte ortaya çıkar. Bu problemlerde bilinmeyen fonksiyonlar genellikle ışık dalgasının dağılma ortamının kırılma ve emilme göstergelerinin yanı sıra dağılan dalganın başlangıç fazı da ola biliyor (Yagubov, 1994). Daha öncesinde durağan olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon problemleri, örneğin (Din N.H; Iyosida, K., 1980) çalışmalarında ve diğerlerinde ele alınmıştır.

Bu çalışmada; durağan olmayan kuazi optik denkleminin kompleks değerli katsayısının bulunması problemi ele alınmıştır ki, burada kompleks katsayının reel kısmı homojen ve lineer olmayan ortamın kırılma göstergesi, sanal kısmı ise emilme göstergesidir ve ancak uzay değişkenlerine bağlıdır. Bu durumda kullanılan nitelik kriteri tüm bölge üzerinden gözleme dayalı fonksiyoneldir. Bu arada şunu da ifade etmek gerekir ki durağan olmayan kuazi optik denklemi için bu çalışmadaki identifikasyon problemi formülasyon açısından önceki (Din N.H, 1986; Iyosida K., 1980) çalışmalarından ve diğerlerinden ayrılmaktadır. Bu sebeple, durağan olmayan kuazi optik denkleminin kompleks katsayısının bulunması üzerine bu çalışmadaki identifikasyon probleminin araştırılması büyük bir ilgiyi hak etmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez’de kullanacağımız temel tanımlar ve kavramların kısa bir özeti verilecektir.

Tanım 2.1 : $L_2(0, \ell)$ Hilbert Uzayıdır. Elemanları, bu sembol ile $(0, \ell)$ aralığı üzerinde ölçülebilen ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilen fonksiyonlar uzayıdır. Aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0, \ell)} = \int_0^{\ell} u(x) \bar{v}(x) dx$$

$$\|u\|_{L_2(0, \ell)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0, \ell)}}$$

Tanım 2.2 : $L^\infty(0, \ell)$ Banach uzayı ve elemanları da $(0, \ell)$ aralığında ölçülebilen ve sınırlanabilen fonksiyonlar uzayıdır. Buda aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$\|u\|_{L^\infty(0, \ell)} = \max_{x \in (0, \ell)} |u(x)| = \text{ess sup}$$

Tanım 2.3 : $W_2^1(0, \ell)$ Sobolev uzayıdır. Elemanları ve elemanlarının x'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, \ell)$ yani Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzaya Hilbert uzayı da denir. Bu uzay, aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1(0, \ell)} = \int_0^{\ell} \left[u(x) \bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx} \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right] dx,$$

$$\|u\|_{W_2^1(0, \ell)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1(0, \ell)}}$$

Bu ifadede $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ ’in karmaşık sayısıdır. $W_2^1(0, \ell)$ uzayı $W_2^1(0, \ell)$ uzayının alt uzayıdır. Elemanları da 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.4 : $W_2^3(0, \ell)$ Hilbert ve Sobolev uzayıdır. $(0, \ell)$ aralığında tanımlanan

elemanların $u=u(x)$ fonksiyonlarıdır ve $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \in L_2(0, \ell)$ şeklindedir. Bu

uzaydaki iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir.

$$\langle u, v \rangle_{W_2^3(0, \ell)} = \int_0^\ell \sum_{j=0}^3 \frac{d^j u(x)}{dx^j} \frac{d^j \bar{v}(x)}{dx^j} dx,$$

$$\|u\|_{W_2^3(0, \ell)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^3(0, \ell)}}$$

Tanım 2.5 : $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayıdır. Elemanları ve elemanlarının t 'ye

göre 1.dereceden genişletilmiş diferansiyeli $L_2(\Omega)$ Lebesgue Fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayın norm ve iç çarpımı alttaki şekilde ifade edilir:

$$\langle \psi, v \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\psi(x, t) \bar{v}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial t} \right] dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.6 : $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayıdır. Elemanları ve bu elemanlarının x 'e

göre 1. Dereceden diferansiyeli $L_2(\Omega)$ 'den fonksiyon uzayı olup aynı zamanda Hilbert uzayıdır. İç çarpım ve norm alttaki formülde gösterilmiştir:

$$\langle \psi, v \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\psi(x, t) \bar{v}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x} \right] dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

$W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, Ω dikdörtgenin ya taraflarında

sıfıra eşittir.

Tanım 2.7 : $W_2^{2,1}(\Omega)$ hem Hilbert hem de Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω

bölgesinde tanımlı öyle $\psi(x, t)$ fonksiyonlardır.

$$\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$$

Özelliklerini sağlar. Buradaki iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\psi(x,t) \bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dx dt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}.$$

$W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır ve elemanları Ω dikdörtgenin yan tarafında sıfırdır.

Tanım 2.8 : $W_2^{2,0,0}(\Omega)$ uzayı elemanları ve elemanlarının x değişkenine göre 2.

Dereceden genişletilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ dan olan fonksiyonları Sobolev ve Hilbert uzayıdır. Bu uzay alttaki şekilde ifade edilir:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\psi \Phi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} \right] dx dt dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}} < +\infty.$$

Tanım 2.9 : $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ elemanları ve elemanlarının t ve z reel sayılarına göre difrensiyeli $L_2(\Omega)$, den fonksiyonların Sobolev ve Hilbert uzayıdır. Bu uzayın iç çarpımı ve normu altta gösterilmiştir:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\psi \Phi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \right] dx dt dz.$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}} < +\infty$$

$$W_2^{2,1,1}(\Omega) = W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega) \text{ dir.}$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında alt uzayıdır. Elemanları $(0, \ell)$ sınırlarında sıfır olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Problemin Formüle Edilmesi

Farz edelim ki D bölgesi n -boyutlu kadar boyutlu E^n - Öklid uzayının sınırlı bölgesi, Γ ise D bölgesinin yeterince düzgün sınırı olsun; mesela $\Gamma \subset C^2$, $T > 0$, $L > 0$ verilen sayılar, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq z \leq L$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - noktası D bölgesinin keyfi noktası olsun, $\Omega_t = D \times (0, t)$, $\Omega_z = D \times (0, z)$, $\Omega_{tz} = D \times (0, t) \times (0, z)$, $\Omega = \Omega_{TL}$, $S_{tz} = \Gamma \times (0, t) \times (0, z)$; $S = S_{TL}$; $C^k([0, T], B)$ - Banach uzayı olup, elemanları değerlerini B Banach uzayından alan ve $[0, T]$ aralığında tanımlı $k \geq 0$ kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır, $L_p(D)$ ise $p \geq 1$ dereceden integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır;

$W_p^k(D), W_p^{k,m}(Q)$, $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$ - Sobolev uzayları olup, tanımları örneğin [6] çalışmasında verilmiştir; $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ -Hilbert uzayı olup, elemanları ve onların $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan $u = u(x, t, z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır, burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(u_1 \bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} \right) dx dt dz,$$

$$\|u\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}} < +\infty;$$

$W_2^{2,0,0}(\Omega)$ - Hilbert uzayı olup, elemanları ve onların $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_p}$, $j, p = \overline{1, n}$ genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan $u = u(x, t, z)$

fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır, burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(u_1 \bar{u}_2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_j} + \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_p} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_j \partial x_p} \right) dx dt dz,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega); \quad W_2^{0,2,1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzaylarıdır ve bu uzayın elemanları $S = \Gamma \times (0, T) \times (0, L)$ üzerinde sıfıra eşdeğerdir; $\forall$ sembolü hemen hemen her yerde anlamına gelir. Aşağıda her yerde değerlendirilen miktarlardan bağımsız sabitleri $c_j, j = 0, 1, 2, \dots$ ile göstereceğiz.

Durumu aşağıdaki durağan olmayan lineer kuazi optik denklem ile tanımlanan bir süreci düşünelim:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} \right) + a(x) \psi + v_0(x) \psi + i v_1(x) \psi = f(x, t, z), (x, t, z) \in \Omega \quad (3.1)$$

Burada $i = \sqrt{-1}$ sanal birimdir, $\psi = \psi(x, t, z)$ dalga fonksiyonu olup, “ z ” eksenini boyunca dağılan ışık dalgasının elektrik alanının kompleks genişliğidir, $a_0 > 0$ - verilen sayı, $a_{jp}(x), j, p = \overline{1, n}, a(x)$ reel değerli ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup, ölçülebilir sınırlı $\frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l}, j, p, l = \overline{1, n}$ türevlere sahip olup, aşağıdaki şartları sağlar:

$$a_{jp}(x) = a_{pj}(x), j, p = 1, 2, \dots, n, \mu_0 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \leq \sum_{j,p=1}^n a_{jp}(x) \xi_j \bar{\xi}_p \leq \mu_1 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2, \forall \xi_j \in \mathbf{C}, j = 1, 2, \dots, n, \forall x \in D, \mu_0, \mu_1 = \text{const} > 0; \quad (3.2)$$

$$\left| \frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l} \right| \leq \mu_2, \forall x \in D, j, p, l = \overline{1, n}, \mu_2 = \text{const} > 0; \quad (3.3)$$

$$0 \leq a(x) \leq \mu_3, \forall x \in D, \mu_3 = \text{const} > 0; \quad (3.4)$$

$f(x, t, z)$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyondur, ayrıca aşağıdaki şartı sağlar:

$$f \in W_2^{0,1,1}(\Omega). \quad (3.5)$$

$v_0(x)$, $v_1(x)$ ise bilinmeyen katsayılar olup, sırasıyla ışık dalgalarının dağılım ortamının kırılma ve emilme indisleridir ve ya göstergeleridir.

Farz edelim ki (1.1) denklemini için aşağıdaki başlangıç ve sınır değer şartları sunulmuş olsun:

$$\psi(x, 0, z) = \varphi_0(x, z), (x, z) \in \Omega_L, \quad (3.6)$$

$$\psi(x, t, 0) = \varphi_1(x, t), (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.7)$$

$$\psi|_S = 0 \quad (3.8)$$

Burada $\varphi_0(x, z)$ - ışık dalgasının elektrik alanın başlangıç kompleks genişliği, $\varphi_1(x, t)$ ise ışık dalgasının başlangıç faz profili olup verilen fonksiyonlardır ve aşağıdaki şartları sağlar:

$$\varphi_0 \in W_2^{0,2,1}(\Omega_L), \varphi_1 \in W_2^{0,2,1}(\Omega_T). \quad (3.9)$$

Bizim amacımız, bilinmeyen katsayılar olan $v_0(x)$, $v_1(x)$ fonksiyonlarını ışık dalgalarının $y = y(x, t, z)$ dağılımının elde edilmesi yoluyla, başka bir deyişle aşağıdaki ek şart altında bulmaktır:

$$\psi(x, t, z) = y(x, t, z), (x, t, z) \in \Omega \quad (3.10)$$

Burada $y(x, t, z)$ - verilen kompleks değerli fonksiyon olup, aşağıdaki şartı sağlar:

$$y \in L_2(\Omega). \quad (3.11)$$

Farz edelim ki $v = (v_0, v_1)$, $v_0 = v_0(x)$, $v_1 = v_1(x)$ fonksiyonu şu kümede aranacaktır:

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), v_m \in L_2(\Omega), |v_m(x)| \leq b_m, m = 0, 1, \forall x \in D \right\}. \quad (3.12)$$

Burada $b_m > 0$, $m = 0, 1$ -verilen sayılar olacaktır. Tanımlanan V kümesini olası elemanlar kümesi adlandıracağız. V kümesi üzerinde $v = (v_0, v_1)$ 'nin (3.1), (3.6)-(3.8), (3.10) şartları altında bulunması problemi ters problem veya (1.1) durağan olmayan kuazi optik denklemi için ters problem veya identifikasyon problemidir. Bu problemin varyasyon formülasyonu

$$J_\alpha(v) = \|\psi - y\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (3.13)$$

Fonksiyonelinin V kümesi üzerinde (3.1), (3.6)-(3.8) şartları altında minimumunun bulunmasıdır. Burada $\alpha \geq 0$ - verilen sayı, $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in H$ - verilen eleman, $H \equiv L_2(D) \times L_2(D)$ 'dir. Aşağıda bu varyasyon formülasyonu, başka deyişle (1.13) fonksiyonelinin V kümesi üzerinde (3.1), (3.6)-(3.8) şartları altında minimumunun bulunması problemini inceleyeceğiz ve bu problemi (3.1), (3.6)-(3.8), (3.13) identifikasyon problemi adlandıracağız.

Her bir $v \in V$ için (3.1), (3.6)-(3.8) şartlarından $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ fonksiyonunun bulunması problemi durağan olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemidir. Her bir $v \in V$ için (3.1), (3.6)-(3.8) probleminin çözümü olarak $W_2^{0, 2, 1, 1}(\Omega)$ uzayına ait olan hemen hemen her yerde $(x, t, z) \in \Omega$ için (3.1), (3.6)-(3.8) şartlarını sağlayan, başka bir deyişle $\forall (x, t, z) \in \Omega$ için (3.1) denklemini, $\forall (x, z) \in \Omega_L, \forall (x, t) \in \Omega_T$ sırasıyla (3.6), (3.7) başlangıç şartlarını ve $\forall (\xi, t, z) \in S$ için ise (3.8) sınır değer şartlarını sağlayan $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Şu da not edilmelidir ki, (3.1), (3.6)-(3.8) biçiminde başlangıç sınır değer problemi önceden (Ladijenskaya, 1976) çalışmasında incelenmiş ve Galerkin metodu ile durağan olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine ait teoremlerle ispatlanmıştır. Bu teoremlerden özel durum olarak aşağıdaki hüküm elde edilir:

Teorem 1: Farz edelim ki, $a_{jp}(x)$, $j, p = \overline{1, n}$, $a(x)$, $f(x, t, z)$, $\varphi_0(x, z)$, $\varphi_1(x, t)$, fonksiyonları (3.2)-(3.5), (3.9) şartlarını sağlıyor olsun ve D bölgesinin sınırı yeterli kadar düzgün olsun. Bu takdirde (3.1), (3.6)-(3.8) başlangıç sınır değer probleminin her $v \in V$ için $W_2^{0,2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan tek bir çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi_0\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right). \quad (3.14)$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti φ_0, φ_1 ve f ' e bağlı değildir. Bu teorem şunu ima etmektedir ki, (3.13) fonksiyoneli, her verilen $v \in V$ için (3.1), (3.6)-(3.8) başlangıç sınır değer probleminin çözüm sınıfları içerisinde anlam ifade etmektedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Fonksiyonel uzaylarda Karasız Ekstramal Problemler

$J(u)$ Fonksiyonunun, B metrik uzayının bir U kümesinde tanımlı fonksiyonel En basit sonlu optimalleştirme problemlerin $f(x)$ fonksiyonunun $X \subseteq R^n$ kümesinde en küçük değerinin bulunması olarak ifade edilir ve

$$f(x) \rightarrow \inf, x \in X \quad (4.1)$$

Olarak yazılır.

Sonsuz boyutlu uzaylarda ise bu problem sembolik olarak B metrik uzayının U alt uzayında tanımlı $J(u)$ fonksiyonlarının bulunması olarak ifade edilir ve

$$J_* = \inf J(u), u \in U$$

Olarak gösterilir. Burada ayrıca

$$U_* = \{u : u \in U, J(u) = J_*\}$$

Noktasında bulunması istenir.

Örnek 4.1: Farz edelim ki, $J(u) = \int_0^1 u^2(t) dt$ fonksiyonunun $[0,1]$ noktasındaalanı en aza indirelim. Görülür ki $J_* \equiv \inf J(u) = 0 = J(0)$ ve U_* 'nin tek minimum nokta sayısı $u_* = u_*(t) = 0$ elementinden ibarettir. Yani $U_* = \{u_*\}$, $J_* = j(u_*) = 0$ olduğu açıktır. Aşağıdaki diziyi ele alalım

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 - |2kt - 1|, & 0 \leq t < \frac{1}{k} \\ 0 & 1/k \leq t \leq 1, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Burada $\{u_k(t)\}$ için bir minimizasyon dizisi olduğunu gösterelim. Gerçekten de

$$\begin{aligned} J(u_k) &= \int_0^1 u_k^2(t) dt = \int_0^{1/k} (1 - |2kt - 1|)^2 dt = \\ &= \int_0^{1/k} [1 - 2|2kt - 1| + (2kt - 1)^2] dt = \frac{1}{3k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Anlamına gelir $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u) = J_* = 0$ Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\|_{C(0,1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_k(t) - u_*(t)| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq 1} |1 - |2kt - 1|| = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Bu nedenle bu işlevsellik için minimizasyon dizisi her zaman ona minimum değeri veren elemanda toplanmaz. Matematiksel programlama ve optimal kontrol için bu tarz örnekler aşağıda gösterilecektir.

Tanım 4.1: (3.1) örneğinde ki $J_* > -\infty$ problemi için $U_* \neq \emptyset$ olsun. Rastgele bir U_* Minimum dizisi noktaların çoğuna yığılırsa buna düzgün konmuş ekstral (son derece düzeltilmiş) problem denir.

Eğer bu tanımdaki herhangi bir koşul sağlanmaz ise (3.1) problemine korrekt olmayan problem denir. Eğer bu minimallaştırıcı dizisinin minimumunu veren elementlerin çoğuna yığılmalar olursa buna kararsız problem denir.

Eğer ekstral problemin bir çözümü varsa ve bu çözüm karalı yapıda ise buna düzgün problem denir. Düzgün koyulmuş ekstral problemlerde minimallaştırıcı dizilerin yeterince büyük numaralı elementlerini aynı problemlerin yaklaşık bir çözümü olur. Fakat kararsız problemlerde bu tür eylemler yanlış sonuçlara yol açabilir. Bu sebeple düzgün olmayan problemleri çözmek için özel yöntemlerden faydalanmak gerekiyor. İşte bu yöntemlerden biri de yukarda anlattığımız regülasyon yöntemi.

Tanım 4.2: Eğer minimallaştırıcı diziler kompakt çokluğa dahil edilirse ona regülasyonlanmış minimallaştırıcı dizi denir.

Minimallaştırıcı dizilerin en önemli özelliklerinde biri de, eğer integrallenebilir bir minimum fonksiyonel elementin tek bir element alınırsa onda regülasyonlanmış minimallaştırıcı dizinin elementine aynen öyle yığılır. Gerçekten de $\{u_k\}$ dizisi regülasyonlanmış minimallaştırıcılık dizisidir. $\{u_k\}$ Kompakt dizisi çokluğa dahildir denir. Bu diziden $\{u_{k_n}\}$ alt dizilerini ayırmak mümkündür. Bu alt dizilerde belli u_0 elementine yığılır. Bu $p(u, u_0)$ metriğinin u ile ilgili $\lim_{n \rightarrow \infty} p(u_{k_n}, u_0) = 0$ değişmez olduğu anlamına gelir. Diğer taraftan $J(u)$ fonksiyonu integrallenebilir olduğundan

$$J_* \leq J(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(u_{k_n}) = J_* \quad (4.2)$$

Olur. Buradan $J(u_0) = J_*$ ve u_0 elementi $J(u)$ fonksiyonun minimum noktasıdır. Koşula göre fonksiyonun tek noktasıdır. Denmelidir ki $u_* = u_0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} p(u_k, u_*) = 0$ olur.

Burada da görüldüğü üzere $\{u_k\}$ dizisi istenilen yığılan alt dizinin limiti u_* elementine yığılır. $d_k = p(u_k, u_*)$, $k = 1, 2, \dots$ sayısal diziye bakalım. Burada dizinin istenilen noktadaki sağdan ve soldan limitleri sıfır olduğu görülür. Matematiksel analizden de görüldüğü üzere sayısal dizilerin yığılması için önemli ve tek koşul bu dizinin sağdan ve soldan limitlerinin var ve eşit olmasıdır. O halde $\{d_k\}$ sayısal dizisi yığılma noktası vardır. Ve yığılma noktası sıfır olacak bir $\{u_k\}$ dizisi var ve u_* elementine yığılır. (4.2) tanımında da görülüyor ki $J(u)$ fonksiyonlu reguleştirilmiş minimallaştırıcı dizinin rastgele limit noktasında en küçük değerini alır. O halde (4.1) probleminin çözümü için reguleştirilmiş minimallaştırıcı dizisini oluşturmak yeterlidir. Bu amaçla stabilize edici fonksiyonun kavramını tanımlayalım.

Tanım 4.3: Farz edelim ki $\Omega(u)$ fonksiyonu $U_\Omega \subseteq U \subseteq B$ kümesinde atanmış bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlar

- 1) $\Omega(u) \geq 0$, $u \in U_\Omega$
- 2) Rastgele $c > 0$ sabit sayısı için $\Omega(u) \equiv \{u : u \in U_\Omega, \Omega(u) \leq c\}$ kümesi B uzayında kompaktır.
- 3) $U_\Omega^* = U_* \cap U_\Omega$ kümesinde boş değildir

Burada $\Omega(u)$ fonksiyonuna (4.1) problemini için stabilize edici fonksiyon denir. Şimdi stabilize edici fonksiyonlarla ilgili problemleri gösterelim.

Örnek 4.2: Farz edelim (4.1) probleminde $B = C[a, b]$, $U \subset B$ kapalı ve boş olmayan U_* kümesi olsun. Farz edelim ki U_* 'a dahil olan bir $u_* = u_*(t)$ elemanı var ve bu eleman $u_* \in W_2^1(a, b)$ bulunur ki bu eleman $W_2^1(a, b)$ kendisi ve genelleştirilmiş

türevleri $L_2(a,b)$ 'den olan fonksiyonlar uzayına işaret eder. Bu uzaya Hilbert uzayı denir. Burada skaler norma uygun olarak aşağıdaki bazı gerçekler sağlanır:

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{W_2^1(a,b)} = \int_a^b [u_1(t) \cdot u_2(t) + \dot{u}_1(t) \cdot \dot{u}_2(t)] dt$$

$$\|u\|_{W_2^1(a,b)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1(a,b)}}.$$

$$U_\Omega = U \cap W_2^1(a,b) \text{ kümesine atanmış}$$

$$\Omega(u) = \|u\|_{W_2^1(a,b)}^2 = \int_a^b (|u(t)|^2 + |\dot{u}(t)|^2) dt \quad (4.3)$$

Fonksiyonuna bakalım. Burada görülüyor ki $\Omega(u)$ fonksiyonu (4.1) problemi için stabilleştirici bir fonksiyondur. Bu amaçla 3.3 teki tanıma göz atalım. Kabul edilen varsayıma göre $U_* \cap W_2^1(a,b)$ boş olmayan bir küme. Burada görülüyor ki U_Ω ve $U_\Omega^* = U_* \cap U_\Omega$ kümelerinde boş değil. Diğer taraftan $(u) \geq 0$, $u \in U_\Omega$ 'dir. Burada tanım 4.3 'ün 1) ve 3) şartları sağlanır. Şimdi 2) şartına bakarsak $\Omega_c = \{u : u \in U_\Omega, \Omega(u) \leq c\}$ kümesi $C[a,b]$ uzayında kopmaktır. Bu hükmün doğruluğu fonksiyonel analizi teoremlerinde görülür. Bu teoremlere göre $W_2^1(a,b)$ uzayında kapalı sınırlı aralığında $C[a,b]$ kümesinde kopmaktır. Bununla birlikte karar bağımsız ispat edilebilir.

Burada $\Omega(u) \leq c$ eşitsizliğinden $\int_a^b |u(t)|^2 dt \leq c$ olur. Burada $u(t)$ fonksiyonu integrallenebilir olduğundan ortalama teoremine göre (3.5) bu eşitsizlikten $[a, b]$ aralığı da $t_1 \in [a, b]$ noktası var ki bu nokta $(b-a)|u(t)|^2 \leq c$ olur. Burada görülür ki $|u(t)| \leq (c(b-a)^{-1})^{1/2}$ den rastgele bir $u(t) \in \Omega_c$ için

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \int_{t_1}^t \dot{u}(\tau) d\tau + u(t_1) \right| \leq [c(b-a)]^{1/2} + \\ &+ \left(\int_a^b |\dot{u}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} (b-a)^{1/2} \leq [c(b-a)^{-1}]^{1/2} + [c(b-a)]^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= const, \quad t \in [a, b]$$

Eşitsizliğini alırsak buda Ω_c fonksiyonlar kümesi $[a, b]$ aralığında düzenli sınırlıdır. Diğer taraftan rastgele $u(t) \in \Omega_c$ için

$$\begin{aligned} |u(t) - u(\tau)| &= \left| \int_{\tau}^t \dot{u}(s) ds \right| \leq |t - \tau|^{1/2} \left(\int_a^b |\dot{u}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c^{1/2} |t - \tau|^{1/2} \end{aligned}$$

Eşitsizliği doğru olduğu görülür yani Ω_c fonksiyonlar kümesi $[a, b]$ aralığında aynı dereceden integrallenebilirdir. Bu da gösteriyor ki Ω_c fonksiyonlar kümesi $[a, b]$ aralığında düzenli sınırlı ve aynı dereceden integrallenebilirdir. Buda Ascoli-Arzela teoremine göre rastgele $\{u_k(t)\} \subset \Omega_c$ dizisinin alt dizisini alırsak $[a, b]$ aralığında integrallenebilir belli $u_0(t)$ fonksiyonuna yığılır. Görülür ki $u_0(t) \in \Omega_c$ dir. U kümesi kapalı olduğundan, $\{u_k(t)\} \subset U$ tutumundan anlıyoruz. Diğer taraftan Ω_c kümesi $W_2^1(a, b)$ uzayında küre olduğundan zayıf kompaktır. $\{u_k(t)\} \subset \Omega_c$ Tutumundan anlıyoruz. $\{u_k(t)\}$ dizisinin limit noktası olan $u_0(t)$ elemanı Ω_c 'yi içerir, yani $\Omega(u_0) \leq c$ olur. Ω_c Kümesi rastgele $c > 0$ için $C[a, b]$ uzayında kompaktır, böylelikle ispat tamamlanır.

Böylelikle (4.3) fonksiyonu için tanım 4.3 'ün bütün şartlarını alırsak bu fonksiyonun $C[a, b]$ uzayında (4.1) minimallaştırma problemi için stabilize edici fonksiyonlardır.

$C[a, b]$ Uzayında başka stabilize edici fonksiyonlarda alınabilir. Örneğin

$$\Omega(u) = \int_a^b \left(p(t) |u(t) - \bar{u}(t)|^2 + q(t) |\dot{u}(t) - \dot{\bar{u}}(t)|^2 \right) dt,$$

Burada $\bar{u}(t) \in W_2^1(a, b)$ verilmiş fonksiyona $p(t)$, $q(t)$ ise $[a, b]$ aralığından alınmış integrallenebilir olumlu fonksiyonlardır. Bundan başka bu uzayda

$$\Omega(u) = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)| + \sup_{t, \tau \in [a, b]} \frac{|u(t) - u(\tau)|}{|t - \tau|} \quad (4.4)$$

Fonksiyonu da stabilizeştirici fonksiyondur. Burada $\gamma \in [0, 1]$ verilmiş sabittir.

Pratikte rastgelen ekstralal problemlerde bazen $J(u)$ fonksiyonunun $U \subseteq B = L_2^{(m)}(a, b)$, $m \geq 1$ kümesinde minimallaştırılması istenir, burada $L_2^{(m)}(a, b)$ uzayı her bir bileşeni $L_2(a, b)$ 'den olan m boyutlu vektör; fonksiyon uzayıdır ve bu uzayda normu belirler:

$$\|u\|_{L_2^{(m)}(a, b)} = \left(\sum_{i=1}^m \int_a^b |u^i(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_a^b \|u\|_{R^m}^2 dt \right)^{1/2}$$

$L_2^{(m)}(a, b)$ uzayında stabilizeştirici fonksiyon olup

$$\Omega(u) = \int_a^b \left(\|u(t)\|_{R^m}^2 + \|\dot{u}(t)\|_{R^m}^2 \right) dt = \|u\|_{W_{2,m}^1(a, b)}^2 \quad (4.5)$$

Veya

$$\Omega(u) = \int_a^b \left(p(t) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{R^m}^2 + q(t) \|\dot{u}(t) - \dot{\bar{u}}(t)\|_{R^m}^2 \right) dt \quad (4.6)$$

Fonksiyonlarını almak olur. Burada $W_{2,m}^1(a, b)$ uzayı Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci dereceden genel türevi olan vektör fonksiyonlar uzayıdır, $\bar{u}(t) \in W_{2,m}^1(a, b)$ verilmiş fonksiyona $p(t), q(t)$ ise $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olumlu fonksiyonlardır. Eğer $U \subseteq L_2^{(m)}(a, b)$ kapalı aralığı varsa ve $J(u)$ fonksiyonun U kümesinde minimum noktalarından en az biri $W_{2,m}^1(a, b)$ uzayına dahil edilirse $W_{2,m}^1(a, b)$ uzayının $L_2^{(m)}(a, b)$ uzayına kompakt dahil edilmesinden yararlanırsak (4.5) veya (4.6) formülü ile verilmiş $\Omega(u)$ fonksiyonu $L_2^{(m)}(a, b)$ uzayında stabilizeştirici fonksiyondur.

Pratikte karşılaşılan optimallaştırıcı problemlerinde keyfi kriteri olan $J(u)$ fonksiyonu belli olmuyor. Bu fonksiyonların yerine belli bir doğrulukla $J_\delta(u)$ fonksiyonu verilir. Farz edelim ki $J_\delta(u)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlıyor olsun

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta \Omega(u) \quad (4.7)$$

Burada $\Omega(u)$ (4.1) problemi için stabilleştirici fonksiyon $\delta \geq 0$ değeri ise $J_\delta(u)$ fonksiyonlarının verilme hatasını karakterize eden sayıdır. Eğer $\delta = 0$ olursa demek ki (4.1) probleminde $J(u)$ fonksiyonu net verilmiştir. Burada görüldüğü üzere (4.7) eşitsizliği ile verilme biçimi tek değildir. Pratikte başka eşitsizliklerden de yararlanılır. Bazı durumlarda U çokluğu yaklaşık verilebilir. Açıklamanın basitliği için bu durumu dikkate almıyoruz.

Böylelikle (4.1) probleminin yerine $J_\delta(u)$ fonksiyonlarının U çokluğunda minimallaştırılması problemini ele alırız. Alınmış bu yaklaşık probleminin çözümünü öncelikle (4.1) probleminin yaklaşık çözümü olarak kabul etmiyoruz. Çünkü (4.1) problemi kararsız olduğundan (4.7) eşitsizliğini yeteri kadar küçük δ alınsa da yaklaşık durum (4.1) probleminin kesin çözümünden istenilen çözüm fark gösterebilir. Bu yüzden (4.1) problemini çözmek için regülasyon yöntemi kullanmak gerekir.

Eğer ki $\Omega(u)$ (4.1) problemi için stabilleştirici fonksiyon $J_\delta(u)$ fonksiyonu ise $J(u)$ 'nin yaklaşık değeri olup (4.7) eşitsizliğini karşılar. U_Ω Çokluğunda atanmıştır.

$$T_\alpha[u, J_\delta] = J_\delta(u) + \alpha \Omega(u) \quad (4.8)$$

Fonksiyonlarına bakarak, burada $\alpha > 0$ rastgele sabitidir. Bu sefer (4.8) fonksiyonuna pürüzsüzleştirici veya Tixonov fonksiyonu denir. α sayısına ise regülasyon parametresi denir.

Böylelikle (4.1) probleminin yerine (4.8) fonksiyonunun U_Ω çokluğunda minimallaştırılması problemi alınır. Görülür ki eğer $J_* \equiv \inf_U J(u) > -\infty$ ve $\alpha > \delta$ alırsak

burada $T_\alpha[u, J_\delta]$ fonksiyonu U_Ω çokluğunda aşağıdan sınırlı olacaktır. Doğrudan da (4.7) 'den yararlanacak olursak $u \in U_\Omega$ için

$$T_\alpha[u, J_\delta] \geq J(u) - \delta\Omega(u) + \alpha\Omega(u) \geq J(u) \geq J_* > -\infty$$

Eşitsizliğini alırız. Burada (4.8) fonksiyonu aşağıdan sınırlıdır. Yani $T_{*\alpha, \delta} = \inf_U T_\alpha[u, J_\delta]$ değerini rastgele $\alpha > \delta$ için sonludur. Buna göre tam alt sınır tanımından dolayı $u_{\alpha, \delta}$ elemanı var ki buda

$$T_{*\alpha, \delta} = \inf_U T_\alpha[u_{\alpha, \delta}, J_\delta] \leq T_{*\alpha, \delta} + \varepsilon(\alpha, \delta) \quad (4.9)$$

Şartı sağlanır, burada $\varepsilon(\alpha, \delta) \geq 0$ ve $\alpha \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ eğer varsa $\varepsilon(\alpha, \delta) \rightarrow 0$ olur. Alt sınır korumak için $u_{*\alpha, \delta}$ elemanını alalım yani;

$$T_{*\alpha, \delta} = T_\alpha[u_{*\alpha, \delta}, J_\delta] \quad (4.10)$$

Şartı sağlanır. Regulaştırma yönteminde $T_\alpha[u, J_\delta]$ fonksiyonlarını $\alpha > 0$ ve $\delta \geq 0$ parametrelerinin değişik değerlerinde minimallaştırmak istenir. Buna göre de farz edelim ki (4.7), (4.8), (4.10) denklemlerinde α, δ parametrelerinin yerine $\{\alpha_k\}, \{\delta_k\}$ dizileri verilmiştir ve $\alpha_k > 0, \delta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ şartları sağlanır.

Teorem 4.1: Farz edelim ki $J(u)$ integrallenebilir fonksiyonun en küçük değeri U kapalı çokluğunun tek u_* elemanını alır. Burada $\delta_k/\alpha_k \leq q < 1$, $k = 1, 2, \dots$ olduğunda $T_\alpha[u, J_\delta]$ fonksiyonunun U_Ω çokluğunda minimallaştırılması şartından dolayı $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ minimallaştırıcı dizinin regulaştırılmış minimallaştırıcı dizisidir ve bu dizi u_* elemanına yığılır.

İspat 4.1: Farz edelim ki $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ dizisi $T_{\alpha_k}[u, J_{\delta_k}]$ fonksiyonlarının U_Ω çokluğunda minimum şartı bulundu. Buradan da

$$T_{\alpha_k}[u_{\alpha_k, \delta_k}, J_{\delta_k}] = J_{\delta_k}(u_{\alpha_k, \delta_k}) + \alpha_k \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) \equiv T_{*\alpha_k, \delta_k} \leq$$

$$\leq T_{\alpha_k} [u_*, J_{\delta_k}] = J_{\delta_k}(u_*) + \alpha_k \Omega(u_*) \quad (4.11)$$

Burada u_* elemanı $J(u)$ fonksiyonuna U çokluğunda minimum veren elemandır.
(4.7) eşitsizliğinden $\delta = \delta_k$ alıp aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$J_{\delta_k}(u) \leq J(u) + \delta_k \Omega(u) \quad (4.12)$$

$$J_{\delta_k}(u) \geq J(u) - \delta_k \Omega(u) \quad (4.13)$$

Burada

$$T_{\alpha_k} [u_{\alpha_k, \delta_k}, J_{\delta_k}] \geq J(u_{\alpha_k, \delta_k}) - J_{\delta_k} \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) + \alpha_k \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) \quad (4.14)$$

Olur. Diğer taraftan (4.12) 'den faydalanırsak (4.11) 'den

$$T_{\alpha_k} [u_{\alpha_k, \delta_k}, J_{\delta_k}] \leq J(u_*) - J_{\delta_k} \Omega(u_*) + \alpha_k \Omega(u_*) \quad (4.15)$$

Böylelikle (4.14) 'ü ve (4.15) kıyaslayacak olursak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} J(u_{\alpha_k, \delta_k}) - J_{\delta_k} \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) + \alpha_k \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) &\leq \\ &\leq J(u_*) - J_{\delta_k} \Omega(u_*) + \alpha_k \Omega(u_*) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$J(u_{\alpha_k, \delta_k}) \geq J(u_*)$ Olduğundan (4.16)denkleminde aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu alıp

$$(\alpha_k - \delta_k) \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) \leq (\alpha_k + \delta_k) \Omega(u_*) \quad (4.17)$$

Koşuluna göre $\delta_k \leq q\alpha_k$, $q < 1$ dir. Burada (4.17) eşitsizliğinde δ_k 'nın $q\alpha_k$ yerine koyup her tarafını $\alpha_k(1-q)$ 'ye bölersek

$$\Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) = \frac{1+q}{1-q} \Omega(u_*) = d \quad (4.18)$$

Burada $d > 0$ belli sabitidir. Diyebiliriz $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ dizisinin bütün elemanları Ω_d çokluğuna dahildir. Bu koşula göre $\Omega(u)$ stabilizeştirici fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyon Ω_d çokluğunda kompaktır. Burada $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ dizisi kompakt çokluğa dahildir. Diğer taraftan (4.16) eşitsizliğinin sol tarafındaki 2. Ve 3. Sınırları atarsak oradan

$$0 \leq J_\delta(u_{\alpha_k, \delta_k}) - J(u_*) \leq (\alpha_k + \delta_k) \Omega(u_*) \quad (4.19)$$

Yukarda kabul ettiğimiz duruma göre $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ bunları (4.19)'da dikkate alarak $k \rightarrow \infty$ limit sınırına gidersek

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_{\alpha_k, \delta_k}) = J(u_*) = J_* \quad (4.20)$$

Olur. Bu da gösteriyor ki $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ dizisinin $J(u)$ fonksiyonu için minimallaştırıcı dizisidir. Öte yandan gördük ki bu dizinin de kompakt birçokluk olduğunu ispatladık. Öyleki $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ dizisi reguleştirilmiş minimallaştırıcı dizisidir. Reguleştirilmiş minimallaştırıcı dizisi yukarda ki ispata göre minimum değerini veren tek elemente yığıldığından teoremin hükmünün doğruluğu ispatlanır.

Not 4.1 teorem 4.1'in hükmü fonksiyonun minimumunu tek noktasında ispat edilmiştir. Bir küme ile minimum nokta arasındaki mesafe kavramını kullanırsak teorem aynı kuralla ispatlanır.

Not 4.2 Teorem 4.1'i ispat ederken (4.10) koşulunu sağlayan $\{u_{\alpha_k, \delta_k}\}$ dizisinden yararlandık. Ancak uygulamada (4.9) şartından sıklıkla kullanılır. Bu sefer $\frac{\varepsilon(\alpha_k, \delta_k)}{\alpha_k} \leq \xi_0$, $k = 1, 2, \dots$ olduğunu varsayarsak teoremin hükmünün doğruluğunu ciddi olmayan değişiklikle aynı yolla ispat edilebilir. Buradan da (4.11) eşitsizliğini

$$\begin{aligned} T_{\alpha_k} [u_{\alpha_k, \delta_k}, J_{\delta_k}] &= J_{\delta_k} (u_{\alpha_k, \delta_k}) + \alpha_k \Omega(u_{\alpha_k, \delta_k}) \leq T_{*\alpha_k, \delta_k} + \varepsilon(\alpha_k, \delta_k) \leq \\ &\leq J_{\delta_k} (u_*) + \alpha_k \Omega(u_*) + \varepsilon(\alpha_k, \delta_k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Şeklinde olur. Bu sefer $\varepsilon(\alpha, \delta)$ için kabul edilen koşullarla teoremin sonraki ispatı yapılır.

4.2. Matematiksel Programlamanın Kararsız Problemleri

Farz edelim $J(u)$ fonksiyonu R^n metrik uzayının U kümesinde tanımlanmış integrallenebilir fonksiyondur. Aşağıda matematiksel programlama problemine bakalım

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \subseteq R^n \quad (4.22)$$

Bu probleminin kararsız hallerine ait örneklerine bakalım

Örnek 4.2.1. Farz edelim $J(u) = u/(1+u^2)$ fonksiyonunun $U \equiv \{u : u \in R, 0 \leq u < \infty\}$ kümesinde minimalleştirilmek istenir. Görülür ki $J(u)$ fonksiyonunun minimum değeri $J_* \equiv \inf_U J(u) = 0$ 'dır. Bu değer ise tek $u_* = 0 \in U$ elemanını alır. $\{u_k\} = \{k\}$ dizisini alalım. Görülür ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{1+u_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{1+k^2} = 0.$$

Farz edelim $\{u_k\} = k$ dizisi minimallaştırıcı dizidir. Fakat bu dizi sadece $u_* = 0$ elemanına yığılmaz, hatta dağılır. İyi düşünülmüş matematiksel programlama problemi kararsızdır.

Örnek 4.2.2. Farz edelim $J(u) = \sin^2(\pi/u)$ fonksiyonu $U = \{u : u \in R; 1 \leq u < +\infty\}$ kümesinde minimallaştırmak istenir. Görülüyor ki $J(u)$ 'nin minimum değeri $J_* \equiv \inf_U J(u) = 0$ 'dır. Bu tek değer ise $u_* = 1 \in U$ elemanından alır. $\{u_k\} = k$ dizisini ele alalım: Görülür ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin^2(\pi/u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin^2(\pi/u) = 0$$

Farz edelim $\{u_k\} = k$ dizisi minimallaştırıcı dizidir. Fakat bu dizi $u_* = 1$ elemanına yığılmaz, hatta dağılır. Farz edelim ki bu problem kararsız ekstral mal problemidir.

Matematiksel programlama problemlerinin yukarıda görülen esas durum algoritmaları bütün elemanların yerine kesin uygulanır; Fakat pratikte yaklaşık miktarları verilir ve eylemler yaklaşık olarak gerçekleştirilir. Bundan başka en çok minimizasyon yöntemleri minimizasyon dizisinin kurulmasına dayanır. Yukarda ki örnekler gösteriyor ki optimizasyon problemler düzgün olmadığından bu zamana kadar yapılan çözüm gerçek çözümden önemli ölçüde değişebilir. Ona göre de düzgün olmayan matematiksel programlaştırma problemlerini çözmek için bu örnekleri hükmen reguleştirmek gerekir.

Varsayalım ki (4.22) probleminde $J(u)$ fonksiyonunun yerine $J_\delta(u)$ fonksiyonu verilmiştir ve ;

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta \Omega(u) \quad , \quad \delta \geq 0 \quad (4.23)$$

Eşitsizliği sağlanır, burada $\Omega(u)$ stabilleştirici fonksiyondur, yani sonlu ölçülü uzayda stabilleştirici fonksiyondur. Bu fonksiyon aşağıdaki şekilde seçilebilir

$$\Omega(u) = \|u\|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \quad , \quad \Omega(u) = \|u - \bar{u}\|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n |u_i - \bar{u}_i|^2 \quad ,$$

$$\Omega(u) = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} (u_i - \bar{u}_i)(u_j - \bar{u}_j) \quad ,$$

Burada $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) \in R^n$ verilmiş nokta, $P|p_{ij}|$ verilmiş sabit matristir.

Bu fonksiyonlardan birinin doğruluğundan da stabilleştirici olduğunu kontrol edelim (Gerisini bağımsız kontrol ediniz) . Farz edelim ki $\Omega(u) = \|u\|_{R^n}^2$, $U \subset R^n$ kapalı kümedir , $U \neq \emptyset$ ve $U_\Omega = U$ onda $\Omega_c = \{u : u \in U_\Omega, \|u\|_{R^n}^2 \leq c\}$ kümesi R_n 'de kapalı sınırlı küme olduğundan rastgele bir $c > 0$ sabit sayısı için kompakt bir kümedir. Diğer taraftan , $U_\Omega^* = U_* \cap U_\Omega = U_* \cap U = U_* \neq \emptyset$ ve $\Omega(u) \geq 0$, $u \in U_\Omega$. Böylelikle $\Omega(u) = \|u\|_{R^n}^2$ fonksiyonu (4.22) problemi için stabilleştirici fonksiyondur.

Şimdi de (4.22) matematiksel programlama problemi için Tixonov fonksiyonuna girelim

$$T_\alpha [u, J_\delta] = J_\delta (u) + \alpha \Omega(u) \quad (4.24)$$

Burada $\alpha > 0$ regülasyon parametresi $\Omega(u)$ stabilize edici fonksiyondur.

(4.22) matematiksel programlama problemi (4.1) probleminin özel durumudur. Ona göre de (4.1) problemi için ispat edilen teorem 3.1 'in hükmünü (4.22) problemi içinde doğru olmalıdır. Bu hüküm (4.22) matematiksel programlama problemini ifade edelim.

Teorem 4.2.1. Farz edelim ki $J(u)$ integrallenebilir fonksiyonun en küçük değerini U kapalı kümesinin tek u_* noktasından alır. Burada $\delta_k / \alpha_k \leq q < 1$, $\delta_k \geq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$, $\alpha_k > 0$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ olduğunda $T_\alpha [u, J_{\delta_k}]$ fonksiyonunun U_Ω kümesinde minimallaştırma şartında bulunan minimallaştırıcı dizisi regülasyonlanmış minimizasyondur ve bu dizi u_* noktasında yığılır. Bu teoremin ispatı teorem 4.1'in ispatı ile aynıdır. Bunun için her yerde fonksiyonel kelimesi yerine fonksiyon kelimesi kullanmak gerekir (İspatı bağımsız olarak al). Not 3.1 ve not 3.2 bu durumda geçerlidir., yani bu notların hükümleri matematiksel programlama problemleri için de doğrudur.

4.3. Optimal Yöntemin Kararsız Problemleri

Aşağıda optimal yöntemin problemine bakalım. Farz edelim ki

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (4.25)$$

Fonksiyonlarını $U_\Omega = \{u : u = u(t), u \in B \equiv L_2^{(m)}(t_0, T), \|u(t)\|_{R^m} \leq 1 \text{ sanki } \text{hepsi } t \in (t_0, T)\}$ kümesinde

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0 \quad (4.26)$$

Koşullar karşılandığında minimallaştırmak gerekir, burada t_0 , T 'verilmiş sayılar

$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ verilmiş vektör , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$,
 $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ varsayalım ki $f_j = f_j(x, u, t)$, $j = \overline{0, n}$ fonksiyonları
 $(x, u, t) \in R^n \times R^m \times [t_0, T]$ argumentine göre integrallenebilir ve $t \in [t_0, T]$ için (x, u)
değişkenlerine göre Lipshis koşulunu sağlarlar. Farz edelim ki $f_0(x, u, t) \geq 0$, $x \in R^n$,
 $u \in R^m$, $t \in [t_0, T]$. Buradan görülür ki $J(u) \geq 0$ 'dır. Bundan başka kolayca göstermek
gerekirse kabul edilmiş varsayımlar dahilinde $J(u)$ fonksiyonu U kümesinde
integrallenebilir .

Örnek.4.3.1: Farz edelim $J(u) = \int_0^1 x^2(t) dt$ fonksiyonlarının

$U \equiv \{u : u = u(t), u \in L_2(0,1), |u(t)| \leq 1 \text{ sanki hepsi } t \in (0,1)\}$ kümesinde
 $\dot{x}(t) = u(t), 0 < t \leq 1, x(0) = 0$, koşulları minimum değerleri bulmak için gereklidir.
Görüldüğü üzere bu problem (4.25) , (4.26) probleminin özel durumudur.

Görülür ki fonksiyonun minimum değeri için $J_* = \inf J(u) = 0$ 'dır ve bu değer
tek $u_* = u_*(t) = 0$ yönteminden alınır. Diğer taraftan kolayca kontrol etmek mümkündür.
 $\{u_k(t)\} = \{\sin 2\pi kt\}$, c dizisi bakılan optimal yöntem problemi için minimallaştırıcı
dizidir. Doğrudan da $u_k = u_k(t)$ fonksiyonunun denkleminde $u = u(t)$ 'nin yerine yazıp
başlangıç koşulunu dikkate alarak çözecek

$$x_k = x_k(t) = x(t; u_k) = (2\pi k)^{-1} [1 - \cos 2\pi kt] , k = 1, 2, \dots$$

Olduğunu alırsak. Bunu fonksiyonelin ifadesinin yerine alarak yazabiliriz.

$$0 \leq J(u_k) = \int_0^1 x_k^2(t) dt = \frac{1}{(2\pi k)^2} \int_0^1 (1 - \cos \pi kt)^2 dt = \frac{3}{8\pi^2 k^2} .$$

Buradan $k \rightarrow \infty$ olduğunda limit alırsak $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = 0 = J_*$ olur. Yani

$\{u_k(t)\} = \{\sin 2\pi kt\}$ minimizasyon dizisidir. Fakat bu dizi $u_*(t) = 0$ elemanına $L_2(0,1)$
uzayının normunda yığılmaz. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}\|u_k - u_*\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 (u_k(t) - u_*(t))^2 dt = \int_0^1 \sin^2 2\pi kt dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 4\pi kt) dt = \frac{1}{2} .\end{aligned}$$

Buradan da görülür ki;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \frac{1}{2} \neq 0 .$$

Başka bir deyişle minimallaştırıcı yönetimler dizileri minimum veren yöntemlerle yığılmıyor. Öyleyse bakılan optimal yönetim problemleri kararsızdır.

Böylelikle (4.25) ve (4.26) optimal yöntem problemi için kararlı çözüm algoritması regülasyon yöntemi ile elde edilebilir. Bunun için öncelikle (4.25) ve (4.26) problemi için stabilleştirici fonksiyonları inceleyelim. Bu durumda mümkün yönetim uzayında $L_2^{(m)}(t_0, T)$ 'dir. Ona göre de stabilleştirici fonksiyonlar bu uzaydan seçilmelidir. Yukarıda gösterildiği gibi,

$$\begin{aligned}\Omega(u) &= \int_{t_0}^T \left(\|u(t)\|_{R^m}^2 + \|\dot{u}(t)\|_{R^m}^2 \right) dt , \\ \Omega(u) &= \int_{t_0}^T \left(p(t) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{R^m}^2 + q(t) \|\dot{u}(t) - \dot{\bar{u}}(t)\|_{R^m}^2 \right) dt\end{aligned}$$

Fonksiyonları $L_2^{(m)}(t_0, T)$ uzayında stabilleştirici fonksiyonlardır.

(4.25) ve (4.26) optimal yönetim problemleri prensipte (4.1) problemi şeklinde ifade edilebilir. Başka bir deyişle bu problem belli bir fonksiyonu verilmiş fonksiyonel uzayda optimallaştırılması olarak gösterilebilir. Gerçekten de mümkün yönetim kümelerinden alınmış her bir yönetime uygun (4.26) Koşu problemlerinin yukarıda gösterilen şartlar dahilinde tek bir çözümü vardır (Butkovski, A.G., 1984; Yagubov G.Y., 1994) Bu çözümü (4.25) ilgili yere yazarsak U olası yönetimler kümesinde atanmış somut $J(u)$ fonksiyonlarını alırız. Diyebiliriz ki (4.25) ve (4.26) problemi bu somut fonksiyonun $U \subset L_2^{(m)}(t_0, T)$ olası yönetim kümesinde minimum değerinin bulunması şeklinde ifade edilebilir. Başka bir ifade ile (4.25) ve (4.26) problemi (4.1)'nin özel halidir. Burada regülasyon yöntemini (4.25) ve (4.26) problemine uygulayabiliriz.

$$T_\alpha[u, J] = J(u) + \alpha\Omega(u) \quad (4.27)$$

Fonksiyonunu $U_\Omega = U \cap W_{2,m}^1(t_0, T) \neq \emptyset$ kümesinde minimallaştırmak gerekir.

Eğer $J(u)$ fonksiyonlarının yerine

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta\Omega(u)$$

Koşullarını sağlayan $J_\delta(u)$ fonksiyonu verilirse, burada (4.27) fonksiyonlarının minimallaştırılması yerine

$$T_\alpha[u, J_\delta] = J_\delta(u) + \alpha\Omega(u) \quad (4.28)$$

Fonksiyonlarının U_Ω kümesinde minimizasyonuna bakmak gerekir. Eğer fonksiyon net verilmişse burada her yerde $\delta = 0$ ve $J_\delta(u) = J(u)$ götürülür. Teorem 4.1'den anlaşılır ki gerçekten de (4.28) probleminin çözümü $\alpha \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ olduğunda (4.25) ve (4.26) probleminin çözümüne yığılacaktır.

Görünürlük için son durumda alınan reguleştirilmiş problemi açık şekilde yazalım. Regulaştırma yönteminde

$$T_\alpha[u, J] = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t) dt + \alpha \int_{t_0}^T \left(\|u(t)\|_{R^m}^2 + \|\dot{u}(t)\|_{R^m}^2 \right) dt$$

Fonksiyonlarını U_Ω kümesinde (4.26) koşulları karşılandığında minimize edilebilir. $f_0(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ fonksiyonlarının δ doğrulukta verilmesi $T_\alpha[u, J]$ fonksiyonlarının yerine $T_\alpha[u, J_\delta]$ fonksiyonlarını minimizasyon gerektirir.

Tezin 4.1 bölümünde Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin sonlu farklar yöntemiyle çözümü incelendi. Problemin çözümünün varlığı ve tekliği teoremi ispatlandı. Ayrıca Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği de ispatlanmıştır.

Tezin 4.2 bölümünde ise göz önüne alınan optimal kontrol probleminde amaç için formül elde edilmiştir. Bunların yanı sıra ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartlar ispatlanmıştır.

Tezde ele alınan Kuazi optiğinin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin sonlu farklar yöntemi ile çözümü problemi konulma açısında önceki çalışmalardan farklıdır. Bu konu yok denecek kadar az araştırıldığından önem arz etmektedir. Bu tezde Kuazi optiğinin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer probleminin sonlu farkalar yöntemi için varılan çözümler önceki araştırma bulgularından farklıdır. Diğer çalışmalara benzememektedir.



5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde alınan Kuazi optiğinin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemi ile ilgili varlığa ve tekliğe ait çözümü elde edilip ispatlanmıştır, ancak çözümü sayısal analizin başka bir çalışma konusu olduğunda çözümüne yer verilmemiştir.



KAYNAKLAR

- Butkovski A.G.,Samoylenko,Y.I.,1984.**Kuantum Mekanik Süreçlerin Kontrolü**.M.Nauka-s.256 (Rusça)
- Din N.H.,1986,**Kuantum Objektlerinin Optimal Kontrolü. Optimatik ve Telemekanik**. no 2,s.1420 (Rusça)
- Goebel, M.,1979. On Existence of Optimal Control. **Math. Nacr-** Vol. 53 s.67-73
- İskenderov, A.D.,1988. **Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü için Varyasyon Yöntemi**. DAN SSSR, c.303, No:5, s.1044-1048.
- Iyosida, K.,1980. **Functional Analysis** –Springer-Verlag, New York, 624 p. (İngilizce)
- Ladijenskaya, O.A., 1973.**Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri** -M: Nauka, (Rusça)
- Ladijenskaya, O.A., 1976.**Parabolik Tip Lineer ve Kuazi Lineer Denklemler**. Moskova, Nauka,
- Landau, L.D., Lifsiş E.M.,1963. **Kuantum Mekaniği** Cilt 3-M--s. 702 (Rusça)
- Lions, J.L., 1971.**Optimal Control of Sysytems Governed by Partial Differential Equations**. Springer, Verlog Berlin Heidelberg New York--s. 400
- Mikhaylov,N., 1983. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler.-**Moskova , Nauka**,
- Musayeva, M.A., 1997. Lineer Olmayan Scrodinger Denklemi için İnditifikasyon Problemi Hakkında// Diferansiyel Denklemler-1997, c.33, No:12 s. 1691-1698 (Rusça)
- Potapov, M.M.,Razgulin, A.V., Şameeva, T.Y., 1987. Scrodinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyonu. **Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri**. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik). No:1 s. 8-13
- Razgulin, A.V., 1998. Lineer Olmayan Scrodinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları **Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri**. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik). No:2-s.28-33 (Rusça)
- Vasilyev, F.P., 1980.Extremal Problemlerin Nümerik Çözüm Yöntemleri **Moskova: Nauka**.;Extremal Problemlerin Çözüm Metotları. s 400 (Rusça) 41
- Vorontsov, M.A.,1984.Şmalqauzen, V.I., Adaptiv Optiğin Prensipleri. **Moskova, Nauka**
- Yagubov, G.Y., 1989.Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü. Otomatik ve Telemekanik. no:12-s.27-38 (Rusça)

- Yagubov, G.Y.,1995. Lineer Olmayan Scrodinger Denklemleri için Bir İnverson Problemin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü. **Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri: Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri.**, Cilt:16, No:1-2, s. 46-51
- Yagubov, G.Y., 1994. Kuazi Lineer Scrodinger Denkleminin Katsayı ile Optimal Kontrol. **Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enst.**, Doktora Tezi. Kiev. s.318 (Rusça)
- Yetişkin, H., 2008. Kompleks Potansiyelli Scrodinger Denklemleri için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, **Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum**, s:42.

ÖZGEÇMİŞ

Hatay ilinin Samandağ ilçesinde 1987 yılında doğdum. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimimi burada tamamladım. Uzun bir aradan sonra 2012 yılında tekrar sınava girip aynı yılda Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. Lisans eğitimimi tamamladıktan sonra 2018 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Enformatik Anabilim Dalında yüksek lisans programına başladım. Evliyim ve üç çocuk annesiyim.

