T.C.

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MERVE ESRA YILDIRIM

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAHRAMANMARAŞ 2018

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MERVE ESRA YILDIRIM

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
DOKTORA
derecesi için hazırlanmıştır.

KAHRAMANMARAŞ 2018

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Merve Esra YILDIRIM tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ" adlı bu tez, jürimiz tarafından 26/10/2018 tarihinde **oy birliği** / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM (Danışman) ....
Matematik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Prof. Dr. Alaattin ESEN (Üye) ....
Matematik Anabilim Dalı
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Fikret ANLI (Üye) ....
Fizik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Prof. Dr. Özkan KARAMAN (Üye) ....
Matematik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Doç. Dr. Abdullah KABLAN (Üye) ....
Matematik Anabilim Dalı
Gaziantep Üniversitesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa ŞEKKELİ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki tüm bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal kısımlar dışında her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Merve Esra YILDIRIM

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 Fikir ve Sanat Eserleri Kanundaki hükümlere tabidir.

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

(DOKTORA TEZİ)

MERVE ESRA YILDIRIM

ÖZET

Bu tez çalışması, genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler üzerinedir.

Eşitsizlik kavramı köklü bir tarihe sahip olup, 19.-20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin büyük bir kısmı konveks fonksiyonlarla elde edilerek temel eşitsizlikler haline getirilmiştir. Bu tarz elde edilen eşitsizliklerin en bilinenlerinden biri Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik ile ilgili çalışmaların büyük bir çoğunluğu S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından çalışılmıştır. Konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen eşitsizlikler üzerine çalışan bazı bilim insanları R. Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, N.S. Barnett, H. Yaldız, E. Set, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujevi´c, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir. Son yıllarda yapılan çalışmaların çoğu, kesirli interal ve kesirli türev yardımıyla yapılmıştır. Kesirli Türev ve İntegral 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçi tarafından ele alınarak çeşitli fikirler ve yaklaşımlar sunulmuştur.

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın, birinci bölümde; konuya genel hatlarıyla giriş yapılmıştır. Birinci bölümün devamında; daha sonraki kısımlarda ihtiyaç duyulan tanım ve teoremler ile literatürde yer alan bazı teoremler verildi. İkinci bölümde; yararlanılan kesirli integral ve kesirli türevin tarihi gelişimi ele alındı. Üçüncü bölümde; çalışmanın orijinal kısımlarını oluşturan alt başlıklar ele alınacaktır. Ele alınan alt başlıklarda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin daha önceki tiplerini içeren integral eşitsizlikleri bazı özel fonksiyonlar yardımıyla tanımladığımız genelleştirilmiş kesirli integraller için yeniden verilecektir. Tezin son kısmı olan dördüncü bölümde sonuç ve tartışma kısmına yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Kesirli türevler, Kesirli integraller, Riemann-Liouville kesirli integralleri, Caputo kesirli türev, φ-konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon, pre-inveks fonksiyon, Konformal kesirli integral, Konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard eşitsizliği.

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, 2018

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Sayfa sayısı: 83

SOME HERMİTE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRALS

(PHD THESIS)

MERVE ESRA YILDIRIM

ABSTRACT

The goal of this dissertation is to obtain Hermite-Hadamard inequalities by using generalized fractional integrals. Concept of inequality has a deep root and ıt has become basic inequalities obtained by convex functions of a large part of the inequalities found in the 19th century. One of the best known of such inequalities is the Hermite-Hadamard inequality. A great majority of Hermite-Hadamard type inequality studies have been conducted by S.S. Dragomir and C.E.M. Worked by Pearce. Some scientists working on inequalities in achieving convex functions are R. Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, N.S. Barnett, H. Yaldız, E. Set, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujevi´c, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone. The latter is derived from the fractional interal and fractional derivations provided by the studies. Fractional Derivative and Integral Since the 17th century, Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville and many other mathematicians.

In the first part of this thesis, which is prepared in four chapters; the topic has been introduced with general lines. In the continuation of the first chapter; the definitions and theorems needed in the following sections and some of the theorems in the literature are given. In the second chapter; the historical development of the fractional integral and the fractional derivative used are discussed. In the third chapter; the subtitles that form the original parts of the work will be covered. In the subheadings discussed, integral inequalities involving the previous types of Hermite-Hadamard inequalities will be given again for the generalized fractional integrals we have defined with some special functions. The final part of the thesis, the fourth section, contains the results and discussion section.

Key Words: Fractional Derivative, Fractional Integrals, Riemann-Liouville Fractional Integrals, Caputo Fractional Derivative, φ-Convex Function, s-Convex Function, preinvex Function, Conformable Fractional Integral, Convex Functions, Hermite Hadamard Inequalities.

University of Kahramanmaraş Sütçü Imam
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, October/2018

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Page number: 83

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a en derin saygılarımı ve teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince manevi desteklerini benden esirgemeyen Sivas Cumhuriyet Üniversitesindeki çalışma arkadaşlarım, Ankara Üniversitesi ve Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesinde birlikte doktora yaptığımız arkadaşlarıma en kalbi duygularla teşekkür ederim.

Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca 2228-B-Yüksek Lisans Öğrencileri İçin Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Merve Esra YILDIRIM

Kahramanmaraş, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$L_p(\mathbb{R}^n)$	:	Mutlak Değeri p. mertebeden İntegrallenebilen Fonksiyonların Uzayı
I^α	:	$\alpha.$ mertebeden Kesirli İntegral
$I_{a^+}^\alpha$	:	$\alpha.$ mertebeden sol Kesirli İntegral
$I_{b^-}^\alpha$	:	$\alpha.$ mertebeden sağ Kesirli İntegral
$D_{a^+}^\alpha$	:	$\alpha.$ mertebeden sol Kesirli Türev
$D_{b^-}^\alpha$	:	$\alpha.$ mertebeden sağ Kesirli Türev
$B(x, y)$	:	Beta Fonksiyonu
$B_a(x, y)$	:	Yarım Beta Fonksiyonu
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
Γ_k	:	k −Gamma Fonksiyonu
$\mathbb{R}^+$	:	$(0, \infty)$ aralığı
L_α^1	:	α-kesirli İntegrallenebilen Fonksiyonların Uzayı
D_{RL}^α	:	$\alpha.$ mertebeden Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}^C D^\alpha$	:	$\alpha.$ mertebeden Caputo Kesirli Türevi
$\mathbb{R}^n$	:	n −boyutlu Öklid Uzayı
$f^{(m)}$	:	$m.$ mertebeden Türev
AC	:	Mutlak Sürekli Fonksiyonların Uzayı
AC^n	:	$n.$ mertebeden Türevi Mutlak Sürekli Fonksiyonların Uzayı
${}_2F_1$	:	(Gauss) Hipergeometrik Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 Giriş

1.1 Amaç ve Kapsam

Bu tezin amacı, daha önceden elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri bazı özel fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla yeniden elde etmektir. Uzun yıllar boyunca matematikçiler ve fizikçiler, eşitsizlik kavramı üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Eşitsizlik üzerine yapılan çalışmaların çoğunluğu kesirli integraller yardımıyla genelleştirilip farklı eşitsizlikler de elde edilmiştir. Bu çalışmada, genelleştirilmiş kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Yani bu tezde, kesirli analiz, Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, çeşitli konveks fonksiyonlar ve gerekli olan diğer yapılardan bazıları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Eşitsizlik kavramı köklü bir tarihe sahip olup, 19. ve 20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin büyük bir kısmı konveks fonksiyonlarla elde edilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bu tarzda elde edilen eşitsizliklerin en bilinenleri, Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik ile ilgili çalışmaların büyük bir çoğunluğu S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından çalışılmıştır. Konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen eşitsizlikler üzerine çalışan bazı bilim insanları R. Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts ve D.E. Varberg, N.S. Barnett, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujevi´c, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir. Son yıllarda, yapılan çalışmaların çoğu kesirli interal ve kesirli türev yardımıyla yapılmıştır.

Bilim ve mühendislikteki uygulamaları son yıllarda popüler olmaya başlayan kesirli analizin tarihi oldukça köklü bir geçmişe sahiptir. Kesirli analiz doğanın gerçekliğini daha iyi ifade ettiğinden, konunun bilim ve mühendislik çevreleri arasında daha popüler hale getirilmesi, doğanın daha iyi anlaşılmasına ve anlatılmasına başka bir boyut katacağı çeşitli bilim insanlarınca öngörülmektedir. Son üç yüzyıldır bu konu matematikçilerce bilinmesine rağmen sadece son birkaç yıldır mühendislik, tıp, kimya, fizik ve ekonomi gibi bazı temel alanlarda kullanılmaya başlanmıştır. Önümüzdeki yıllarda, kesirli analizin popüleritesinin artacağı ve bilinen tamsayı sıralamalı analiz de dahil olmak üzere, kesirli "differintegral" analizin bir süper kümesi olarak düşünülebilecek pek çok uygulamasının ortaya çıkacağı öngörülmektedir. Bu uygulamalardan bazıları; ısı transferi, sıvıların kimyasal analizi, difüzyon, Schrödinger denklemi, akışkanlar, fraktal süreçler gibi alanlarıdır.

İntegral ve diferansiyel kavramı elementer analizdeki çalışmalara benzerlik göstermektedir.

Örneğin, $f(x) = x$ fonksiyonunun birinci mertebeden integrali $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + c$ ve aynı fonksiyonun ikinci mertebeden integrali $\int \left[\int f(x)\,dx\right] dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$ dır. Benzer olarak $\dfrac{d}{dx}(f(x)) = 1$ ve $\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x)) = 0$ dır. Diğer yandan, "$f(x)$ fonksiyonun $\frac{1}{2} - inci$ mertebeden integrali ve türevi var mıdır?" şeklindeki bir soru sonucu, kesirli türev ve kesirli integral kavramları dikkate alınmıştır.

L'Hospital'in G.W. Leibniz'e 30 Eylül 1695'te yazdığı bir mektuptaki yazısında, $n-$inci dereceden türev için kullandığı $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ notasyonunda $n = 1/2$ için sonucun ne olacağını sorar. Leibniz "ileride bir gün çok güzel sonuçlara yol açacak ancak şimdilik bir paradoks" demiştir. Dolayısıyla 1700 lerden bu yana Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi çok sayıda bilim insanı tarafından çeşitli tanım ve yorumlar ortaya atılmıştır. Geometrik anlamını kavramak kolay olmasa da, tanımları tamsayı mertebeli türevden daha karışık değildir.

P.S. Laplace, 1812 de keyfi mertebeden bir kesirli türev tanımlamış ve tamsayılı mertebe durumunu genelleştirerek yeni bir matematiksel alıştırma geliştirmiştir. m bir tam sayı olmak üzere $y = x^m$ fonksiyonunun, $n-$inci türevi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \ m \geq n$$

dir. Burada gamma fonksiyonu ve faktoriyel ilişkisi kullanılarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

sonucu elde edilmiştir. Burada $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ dir. Eğer özel olarak $y = x$ ve $n = 1/2$ seçilirse $\dfrac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ olur.

Kesirli analiz kesirlerin analizi demek değildir. Kesirli analiz, keyfi mertebeden integrasyonların ve türev almaların bir teorisidir. Tamsayılı mertebeden türev almayı ve $n-$katlı integrasyonu birleştirir ve genelleştirir. Kesirli mertebeden sistemler veya kesirli türevleri ve kesirli integralleri içeren sistemler pek çok fen ve mühendislik alanlarında çalışılmıştır. 1695 yılından günümüze L'Hospital'in türevin mertebesini soran sorusundan sonra, bu konu üzerinde çalışmaya başlayan ilk kişi G.W. Leibniz olmuştur.

Leibniz 1695 ve 1697 yıllarındaki çalışmalarında tam sayı olmayan kesirli türevin

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx} \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştir. Daha sonraları L. Euler (1730), (1.1) eşitliğini tamsayı olmayan ya da negatif değerler için

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

olarak vermiştir. Keyfi fonksiyonların diferensiyeli için genelleştirme ilk olarak J.B.J. Fourier tarafından ifade edilmiştir. Fourier $f(x) = \cos p(x-z)$ fonksiyonunun n. mertebeden kesirli türevini

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \int_{-\infty}^{\infty} p^n \cos\left[p(x-z) + n\frac{\pi}{2}\right] dp, \ n \in \mathbb{R}$$

eşitliği ile ifade etmiştir.

N. H. Abel kesirli analiz ile ilgili çalışmalarını "tautochrone" probleminin formülasyonu sırasında ortaya çıkan bir integralin çözümüne uygulamış ve elde ettiği integral denklemi, fizik, kimya, biyoloji, mekanik ve elektronik gibi birçok bilim ve mühendislik alanlarındaki çalışmalarda önemli bir araç olmuştur.

Kesirli türev ile ilgili çalışmalar yapan önemli bir diğer bilim adamı A. L. Cauchy, $f(z)$ kompleks fonksiyonu için $n-$inci mertebeden türev formülünü

$$D^n f(z) = f^n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

şeklinde vermiştir.

Uzun yıllar kesirli türev formülasyonu için yapılan çalışmalara, önemli katkı sağlayan bilim insanlarından biri de A. Marchaud dır. Marchaud, Riemann-Liouville kesirli integralini kullanarak kesirli türevi tanımlamaya çalışmış ve v yerine $-v$ alarak, $v > 0$ için kesirli türevi

$${}_{0^+}D_x^{\nu} f(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_{\varepsilon}^{\infty} u^{-v} f'(x-u)\, du = {}_{-\infty} I_x^{1-v} f'(x)$$

şeklinde yazmıştır.

1.2 Temel Kavramlar

Bu kısımda, tezde kullanılacak olan temel tanım ve yapılar ele alınacaktır. Öncelikle çalışmanın temel tanımlarından biri olan konveksklik kavramı ve onun tarihçesinden bahsedilecektir.

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı; C. Hermite tarafından 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ilk kez ortaya çıkmıştır.

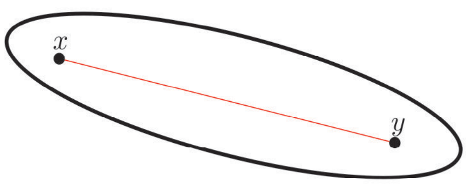
Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksi–yonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L. Jensen ile başlar.

Konveks foksiyon kavramına değinmeden önce konveks küme kavramından bahsedilecektir.

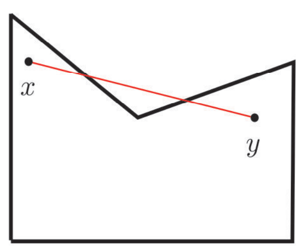
Tanım (Konveks Küme) 1.2.1: L bir lineer uzay olsun. Eğer $\varnothing \neq A \subset L$ kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine A kümesi içinde kalıyor ise, yani $\forall x, y \in A$ için

$$[x, y] := \{z \in L : \ \forall \alpha \in [0,1] \ \text{için} \ z = \alpha x + (1-\alpha)\, y\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Burada $[x, y]$ ifadesi x'i y'ye bağlayan doğru parçasıdır.



Konveks küme
Şekil 1.1



Konveks olmayan küme
Şekil 1.2

Klasik konveks fonksiyon tanımı ise aşağıdaki gibi verilmektedir.

Tanım (Konveks Fonksiyon) 1.2.2: $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

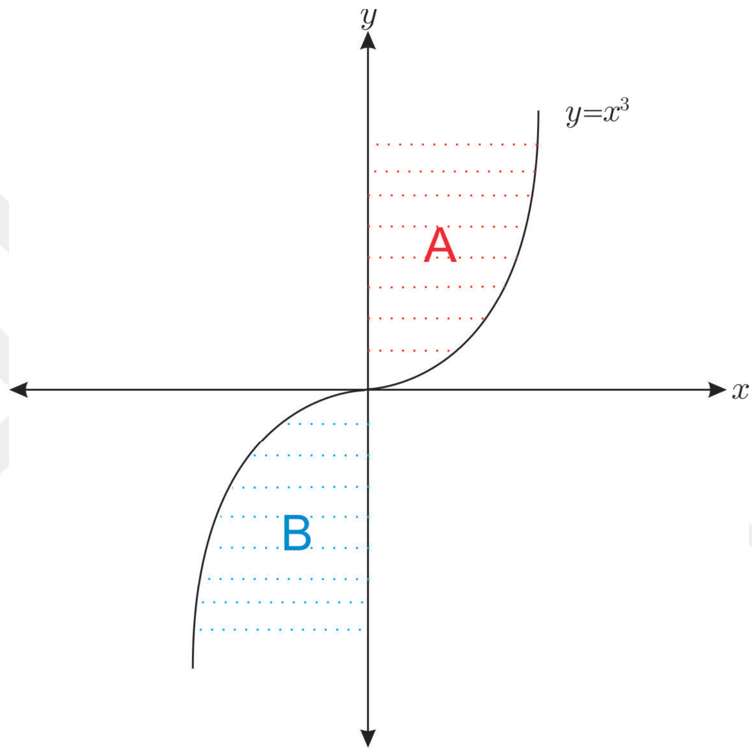
ise f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon denir.

Eğer $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

ise f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde konkav fonksiyon denir.

Geometrik olarak, eğer f fonksiyonunun grafiğinin üstündeki bölge konveks ise f fonksiyonu konveks fonksiyondur; eğer f fonksiyonunun grafiğinin altındaki bölge konveks ise f fonksiyonu konkav fonksiyondur. Örneğin



Şekil 1.3

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin üstünde kalan A kümesi konveks olduğundan f, $(0, +\infty)$ aralığında konveks fonksiyondur. $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan B kümesi konveks olduğundan f, $(-\infty, 0)$ aralığında konkav fonksiyondur.

Kalkulustan konveks fonksiyonun "f'', $[a, b]$ de mevcut olsun. Bu durumda f, $[a, b]$ aralığında konvekstir ancak ve ancak $f''(x) > 0$ dır." aksiyomu bilinmektedir.

Çeşitli konveks fonksiyon tanımları yapılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.2.3: $f : I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $s \in (0, 1]$ olmak üzere

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t^s)f(b)$$

ise f fonksiyonuna birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Breckner, 1978).

Tanım 1.2.4: $f : I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $s \in (0, 1]$ olmak üzere

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

ise f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir ve $f \in K_s^2$ olarak gösterilir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Ayrıca birinci anlamda $s-$konveks ve ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için bazı örnek ve teoremler H. Hudzik ve L. Maligranda nın çalışmalarında ayrıntılı olarak verilmiştir.

Aşağıdaki teoremde Hudzik ve Maligranda, $s-$konveksliğin her iki tanımının karşılaştırabilirliğini ve ikinci anlamda $s-$konveksliğin uygulamasını göstermiştir.

Teorem 1.2.5:

$i)$ $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_s^1$ dir.

$ii)$ $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^2$ ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^2$ dir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Tunç ve Yıldırım aşağıdaki tanımı vermişlerdir:

Tanım 1.2.6: $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}} f(x) + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}} f(y)$$

ise f fonksiyonuna $MT-$konveks fonksiyon denir (Tunç ve Yıldırım, 2012).

Tanım 1.2.7: $\varphi : (0, 1) \to (0, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in I$ için $t \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(t) f(x) + (1-t)\varphi(1-t) f(y)$$

ise $f : I \to [0, \infty)$ fonksiyonuna I aralığı üzerinde $\varphi-$konveks fonksiyon denir (Dragomir, 2015).

Bazı konveks fonksiyonlar, özel durumlarda birbiri cinsinden ifade edilebilmektedir.

Örneğin, Tanım 1.2.7 deki φ fonksiyonu için;

$\varphi(t) \equiv 1$ alınırsa f fonksiyonu, klasik konveksliğe,

$\varphi(t) = t^{s-1}$ alınırsa f fonksiyonu, $s-$konveksliğe ve

$\varphi(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$ alınırsa f fonksiyonu, $MT-$konveksliğe dönüşür.

Konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır, çünkü konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edilir. Bu yüzden E. F. Beckenbach, W.W. Breckner, Z. Dahmani, S. S. Dragomir, G.W. Leibniz, D.S. Mitrinovi ́c, J.E. Pecaric gibi birçok ünlü matematikçi konveks fonksiyonlar ile eşitsizlikler teorisini bir arada ele almışlardır.

Teorem (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) 1.2.8: $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pečarić 1992). Eğer f konkav fonksiyon ise eşitsizliğin tersi doğrudur.

İspat: f fonksiyonu konveks olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \tag{1.2.2}$$

sağlanır. (1.2.2) eşitsizliğinin her iki yanı $[0,1]$ aralığında t ye göre integre edilirse,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 tf(a)dt + \int_0^1 (1-t)f(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.2.3}$$

veya

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.2.4}$$

olur. (1.2.4) eşitsizliğinin sol tarafında, $x = ta + (1-t)b$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{1.2.5}$$

elde edilir. Dolayısıyla (1.2.4) eşitsizliği,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.2.6}$$

şeklinde yazılır. Şimdi (1.2.1) eşitsizliğinin sol tarafının ispatı için;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] \tag{1.2.7}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki integrallerde sırasıyla

$$x = a + \frac{t(b-a)}{2} \text{ ve } x = b - \frac{t(b-a)}{2}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right] dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem(Hölder Eşitsizliği) 1.2.9: $k = 1, \ldots, n$ için $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^q\right)^{1/q} \tag{1.2.8}$$

eşitsizliği mevcuttur (Mintronovic, 1970).

Teorem(Hölder Eşitsizliği) 1.2.10: $k = 1, \ldots, n$ için $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^q\right)^{1/q} \tag{1.2.9}$$

eşitsizliği mevcuttur (Mintronovic, 1970).

Yukarıdaki Teorem 1.2.9 ve Teorem 1.2.10'un şartları altında (1.2.8) ve (1.2.9) eşitsizliklerinin eşitlik durumları ancak $a^2 + b^2 > 0$ ı sağlayan a ve b negatif olmayan sabitleri için $a\,|\alpha_k|^p = b\,|\beta_k|^q$ şartıyla mevcuttur.

Teorem (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) 1.2.11: $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $|f|^p,\ |g|^q \in L\,[a,b]$ ise

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.2.10}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mintronovic, 1970).

(1.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumu ancak A ve B sabitleri için $A\,|f(x)|^p = B\,|g(x)|^q$ hemen hemen her yerde sağlandığında mevcuttur.

Sonuç (Power Mean Eşitsizliği) 1.2.12: $q \geq 1$ olmak üzere $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $|f|,\ |g|^q \in L\,[a,b]$ ise

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

Power Mean Eşitsizliği benzer şekilde iki katlı integraller için

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)\, g(x,y)|\, dxdy \leq \left(\int_a^b |f(x,y)|\, dxdy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x,y)|\, |g(x,y)|^q\, dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem (Üçgen Eşitsiziliğinin İntegral Versiyonu) 1.2.13: f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem (Ortalama Değer Teoremi) 1.2.14: f, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) de diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Teorem (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi) 1.2.15: f, $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Tanım (Gamma Fonksiyonu) 1.2.16: α pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

şeklinde ifade edilen $\Gamma(\alpha)$ gösterimine Gamma Fonksiyonu denir.

Tanım (Beta Fonksiyonu) 1.2.17: α ve β pozitif reel sayıları için,

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

ifadesine Beta Fonksiyonu denir.

Burada Gamma ve Beta fonksiyonları arasındaki ilişki ise

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

şeklindedir.

Tanım (Tam Olmayan Beta Fonksiyonu) 1.2.18: x ve y pozitif reel sayıları için,

$$B_a(x,y) = \int_0^a t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ 0 < a < 1$$

ifadesine tam olmayan beta fonksiyonu veya yarım beta fonksiyonu denir (Samko ve arkadaşları, 1993).

Tanım 1.2.19: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , 1 \le p < \infty \\ \operatorname*{esssup}_{x \in X} |f(x)| & , p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\operatorname*{esssup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda : \mu (x \in X : |f(x)| > \lambda) = 0 \}$$

dir.

Tanım (Dirichlet Formülü) 1.2.20: $\Omega_1 = [a,b]$, $\Omega_2 = [c,d]$ olmak üzere $f(x,y)$, $\Omega_1$ve Ω_2 kümeleri üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left. \begin{array}{l} a < y < x \\ a < x < b \end{array} \right\} \Longrightarrow a < y < x < b$$

sınır değişimine göre,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y) dx \right) dy$$

eşitliğine Dirichlet formülü denir (Samko ve arkadaşları, 1993).

Tanım 1.2.21: $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer bir f foksiyonu, $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli ise bu aralıkta süreklidir denir ve $f \in C\,[a,b]$ ile gösterilir.

Eğer bir f foksiyonunun n-inci mertebeden türevi mevcut ve $[a,b]$ aralığında sürekli ise $f \in C^n\,[a,b]$ yazılır.

Tanım 1.2.22: $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$, $[a,b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının bir örtüsü olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyon denir.

Eğer bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli ise $f \in AC\,[a,b]$ ile gösterilir.

Eğer bir f foksiyonunun n-inci mertebeden türevi, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise $f \in AC^n\,[a,b]$ ile gösterilir (Carter ve vanBrunt, 2000).

Tanım 1.2.23: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $h(x)$, $[0,\infty)$ aralığında pozitif monoton artan, $h'(x)$ türevi de $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $h(0) = 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere, $[0,\infty)$ aralığında reel değerli ölçülebilir fonksiyonların $X_h^p\,[0,\infty)$ uzayı

$$||f||_{X_h^p} = \left(\int_0^\infty |f|^p\, h'(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \ 1 \leq p < \infty \tag{1.2.11}$$

normuyla tanımlanır. Burada $p = \infty$ için

$$||f||_{X_h^\infty} = \text{esssup}\,[h'(t)f(t)] \tag{1.2.12}$$

dir. Ayrıca $p = 1$ alınırsa, $X_h^1\,[0,\infty)$ uzayı

$$X_h^1(0,\infty) = \left\{ f : \|f\|_{X_h^1} = \left(\int_0^\infty |f(t)|\, h'(t)dt \right) < \infty \right\} \tag{1.2.13}$$

normu ile verilen ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. Yine burada $h(x) = x$ alınırsa, Klasik $L_p[0,\infty)$ uzayı olarak bilinen

$$L_p[0,\infty) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p, q < \infty \right\}$$

şeklindeki normlu uzay elde edilir. Ayrıca $h(x)$ fonksiyonunun farklı seçimleri için farklı normlu uzaylar elde edilir (Yıldırım ve Kırtay, 2014).

2 Kesirli İntegral ve Kesirli Türev

Bu bölümde, tez çalışmasında ihtiyaç duyulacak kesirli integral ve kesirli türev kavramına ayrıntılı olarak değinilecektir. Birinci bölümde yer alan temel kavramlar ile bu bölümde bahsedilecek olan kesirli analiz ile ilgili detaylı bilgilerin büyük çoğunluğu Kilbas ve arkadaşlarının "Theory and applications of fractional diferential equations" adlı kitabında verilmiştir.

Şimdi kesirli mertebeden integral tanımını ifade edelim. Bunun için

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \cdots d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{2.1}$$

şeklindeki n katlı integrali göz önüne alınsın. (2.1) ile ifade edilen integrasyonda Dirichlet formülü dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
a < \sigma_2 < x &\implies \sigma_2 < \sigma_1 < x \\
a < \sigma_2 < \sigma_1 &\implies \sigma_3 < \sigma_2 < x \\
a < \sigma_3 < \sigma_2 &\implies \sigma_4 < \sigma_3 < x \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} &\implies \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\
a < \sigma_n < \sigma_{n-1} &\implies a < \sigma_n < x \\
a < \sigma_n < \sigma_{n-1} < &\ \cdots\ < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < x
\end{aligned}$$

sınır değişimi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \cdots d\sigma_2 d\sigma_1 \\
&= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \left(\cdots \left(\int_{\sigma_4}^x \left(\int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \right) d\sigma_3 \right) \cdots \right) d\sigma_{n-2} \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n
\end{aligned} \tag{2.2}$$

eşitliği yazılır. Elde edilen (2.2) eşitiğinin sağ tarafındaki integraller iç integralden başlanarak dışa doğru hesaplandığında,

$$\int_{\sigma_2}^{x} d\sigma_1 = \sigma_1|_{\sigma_2}^{x} = x - \sigma_2,$$

$$\int_{\sigma_3}^{x} (x-\sigma_2)d\sigma_2 = \frac{(x-\sigma_3)^2}{2},$$

$$\int_{\sigma_4}^{x} \tfrac{(x-\sigma_3)^2}{2} d\sigma_3 = -\frac{(x-\sigma_3)^3}{2.3}\Bigg|_{\sigma_4}^{x} = \frac{(x-\sigma_4)^3}{2.3},$$

$$\vdots$$

$$\int_{\sigma_n}^{x} \tfrac{(x-\sigma_{n-1})^{n-2}}{2.3...(n-2)} d\sigma_{n-1} = -\frac{(x-\sigma_{n-1})^{n-1}}{2.3.\cdots.(n-2)(n-1)}\Bigg|_{\sigma_n}^{x} = \frac{(x-\sigma_n)^{n-1}}{1.2.\cdots.(n-1)}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler (2.2) de yerlerine yazılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_1 = \int_a^x \tfrac{(x-\sigma_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(\sigma_n) d\sigma_n \tag{2.3}$$

olur. Elde edilen (2.3) ifadesinde, Gamma fonksiyonunun

$$(n-1)! = \Gamma(n)$$

özelliği kullanılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(\sigma_n)}{(x-\sigma_n)^{1-n}} d\sigma_n \tag{2.4}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada unutulmaması gereken şey n doğal sayısının integrasyon tekrar sayısı olmasıdır. Ayrıca, gamma fonksiyonu pozitif tam sayılar dışında da tanımlıdır. Yani n nin bir tam sayı olmaması durumunda (2.4) eşitliğinin sağ tarafı için aşağıdaki tanım ifade edilebilir:

Tanım 2.1: $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \tag{2.5}$$

ve

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \tag{2.6}$$

integrallerine sırasıyla α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri denir (Samko ve arkadaşları, 1993). Burada

$$I_{a^+}^{0} f(x) = I_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$$

şeklinde olur. Gerçektende

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned} u &= f(t) \Rightarrow du = f'(t)\,dt \\ dv &= (x-t)^{\alpha-1}\,dt \Rightarrow v = -\frac{(x-t)^{\alpha}}{\alpha} \end{aligned}$$

dönüşümleri altında kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ -f(t) \frac{(x-t)^{\alpha}}{\alpha} \Bigg|_a^x + \frac{1}{\alpha} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt \right\} \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $\alpha = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{0} f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer yöntemle

$$I_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$$

olduğu da gösterilebilinir.

Yukarıda bahsedilen özellikler dikkate alınarak, herhangi bir mertebeden integralin nasıl hesaplanacağına dair örnekler verilebilir.

Örnek 2.2: $\alpha = 1/2$ olmak üzere

$$f(x) = (x-a)^2$$

fonksiyonun yarım integralini hesaplayalım.

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integralinde $f(x) = (x-a)^2$ ve $\alpha = 1/2$ özel durumları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= I_{a^+}^{\frac{1}{2}} (x-a)^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} (t-a)^2 dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} (t-a)^2 dt \end{aligned}$$

yazılır. Burada,

$$t = a + (x-a)u \quad \Rightarrow \quad dt = (x-a)du$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\frac{1}{2}} f(x) \\ &= I_{a^+}^{\frac{1}{2}} (x-a)^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\pi)} \int_0^1 (x-a-(x-a)u)^{-\frac{1}{2}} (a+u(x-a)-a)^2 (x-a)du \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^2 du \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^{3-1} (1-u)^{-\frac{1}{2}+1-1} du \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} B\left(3, \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{16(x-a)^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

şeklinde $f(x) = (x-a)^2$ fonksiyonunun yarım integrali elde edilmiş olur. Burada $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dir.

Şimdi ise $f(x) = \dfrac{16(x-a)^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}$ foksiyonunun $\alpha = 1/2$ yarım integralinin

$$f(x) = \frac{(x-a)^3}{3}$$

olduğunu gösterelim. Yani

$$\begin{aligned}
&I_{a^+}f(x)\\
&= I_{a^+}^{\frac{1}{2}}\left(I_{a^+}^{\frac{1}{2}}f\right)(x)\\
&= I_{a^+}^{\frac{1}{2}}\left(I_{a^+}^{\frac{1}{2}}\frac{16(x-a)^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_a^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{16(t-a)^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}dt\\
&= \frac{16}{15\pi}\int\limits_a^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{5}{2}}dt\\
&= \frac{16}{15\pi}(x-a)^3\int\limits_0^1 u^{\frac{5}{2}+1-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}+1-1}du\\
&= \frac{16}{15\pi}(x-a)^3 B\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{1}{2}\right)\\
&= \frac{16}{15\pi}(x-a)^3\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)}\\
&= \frac{(x-a)^3}{3}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yine yukarıda bahsedilen özellikler dikkate alınarak aynı teknikle, herhangi bir polinom tipli fonksiyonun kesirli integrali hesaplanabilir.

Örnek 2.3: $f(x) = x^{\beta}$, $\beta > 0$ fonksiyonunun kesirli integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f(x) = x^{\beta}$ fonksiyonunun $(0, x)$ aralığı üzerinden kesirli integrali

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{\alpha}f(x) &= I_{0^+}^{\alpha}x^{\beta}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{\beta}dt,\ t = ux \text{ dönüşümü ile}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (x-ux)^{\alpha-1}(ux)^{\beta}xdu\\
&= \frac{x^{\alpha-1+\beta+1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta}du\\
&= \frac{B(\alpha,\beta+1)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\beta}\\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

Kesirli integralin birleşme ve değişme özellikleri vardır. Bu özellikler aşağıdaki gibi verilebilir:

1. $I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} = I_{a^+}^{\alpha+\beta}, \quad I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\beta} = I_{b^-}^{\alpha+\beta}$

2. $I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} = I_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha}, \quad I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\beta} = I_{b^-}^{\beta} I_{b^-}^{\alpha}.$

Buna göre,

1. Kesirli integralin tanımını kullanılarak,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta})f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I_{a^+}^{\beta} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-z)^{\beta-1} f(z)dz\right)dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

yazılır. Bu eşitliğinin sağ tarafında integrasyon sırası

$$\left.\begin{array}{l} a < z < t \\ a < t < x \end{array}\right\} \Rightarrow a < z < t < x$$

sınır değişimine bağlı olarak değiştirilirse,

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(z)\left(\int_z^x (x-t)^{\alpha-1}(t-z)^{\beta-1}dt\right)dz$$

olduğu görülür. Şimdi bu eşitliğin sağ tarafındaki iç integralde

$$t = z + (x-z)u \Rightarrow \quad u = \frac{t-z}{x-z}, \; du = \frac{dt}{x-z}$$

dönüşümü dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_z^x (x-t)^{\alpha-1}(t-z)^{\beta-1}dt \\ &= \int_0^1 (x-z-(x-z)u)^{\alpha-1}(z+(x-z)u-z)^{\beta-1}(x-z)du \\ &= (x-z)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du \\ &= (x-z)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-z)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (2.7) da yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
& I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-z)^{\alpha+\beta-1} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha+\beta-1} dz \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
& I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\beta} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} I_{b^-}^{\beta} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (z-t)^{\beta-1} f(z) dz \right) dt
\end{aligned}
$$

eşitliğinde $\left.\begin{array}{l} x<t<b \\ t<z<b \end{array}\right\} \Rightarrow x<t<z<b$ sınır değişimi ve $t = x + (z-x)u$ dönüşümü yapılırsa;

$$
\begin{aligned}
& I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\beta} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b f(z) \left(\int_x^z (t-x)^{\alpha-1} (z-t)^{\beta-1} dt \right) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b f(z) (\int_0^1 (x+(z-x)u-x)^{\alpha-1} (z-x-(z-x)u)^{\beta-1} (z-x) du) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b f(z)(z-x)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du \right) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^b (z-x)^{\alpha+\beta-1} f(z) dz \\
&= I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. Yukarıda 1. maddede verilen birleşme özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) \\ & = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-z)^{\alpha+\beta-1} f(z)dz, \end{aligned}$$

alınır. Burada $\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma(\beta+\alpha)$ olduğundan

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\beta+\alpha-1} f(z)dz \\ & = I_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha} f(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım (U. Katugampola)2.4: $f \in L_1(a,b)$ olmak üzere

$$J_{\rho}^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau, \ a < x, \ \rho > -1,$$

$$J_{\rho}^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\tau^{\rho+1} - x^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \tau^{\rho} f\left(\tau\right) d\tau, \ x < b, \ \rho > -1$$

şeklinde tanımlanan eşitliklere $\alpha > 0$ için α. mertebeden sırasıyla sol ve sağ taraflı genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri denir (Katugampola, 2011).

Yıldırım ve arkadaşları tarafından verilen sol ve sağ genelleştirilmiş kesirli integral tanımı aşağıdaki gibidir:

Tanım (Genelleştirilmiş Kesirli integraller) 2.5: f, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $h(x)$, $(a,b]$ aralığı üzerinde pozitif monoton artan ve $h'(x)$, (a,b) aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ için $J_{a^+,h}^{\alpha} f(x)$ ve $J_{b^-,h}^{\alpha} f(x)$ Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a^+,h}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(h\left(x\right) - h\left(\tau\right)\right)^{\alpha-1} h'\left(\tau\right) f(\tau) d\tau, \ x > a \tag{2.8}$$

ve

$$J_{b^-,h}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(h\left(\tau\right) - h\left(x\right)\right)^{\alpha-1} h'\left(\tau\right) f(\tau) d\tau, \ x < b \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldırım ve Kırtay, 2014). Bu integral formüllerine sırasıyla sol ve sağ taraflı genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integraller denir.

Açıktır ki, bu kesirli integral özel seçimlerde daha önceden bilinen kesirli integral kavramlarını vermektedir. $\alpha > 0,\ f \in X_h^p(a,b)$ olmak üzere $a < x < b$ için, aşağıdaki özel seçimler ile

i) Eğer 2.8 de $h(x) = x$ alınırsa, genelleştirilmiş kesirli integrali Riemann-Liouville kesirli integrali ile çakışır.

ii) Eğer 2.8 de $h(x) = \dfrac{x^\rho}{\rho}$ alınırsa, genelleştirilmiş kesirli integral Katugampola kesirli integrali ile çakışır.

Türev mertebesinin kesirli olması ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış ve literatürde bir çok farklı kesirli türev tanımı elde edilmiştir. Bu tanımların çoğu kesirli integrallerle elde edilmiştir ve büyük bir kısmının lineerlik, çarpım kuralı, bölüm kuralı gibi özelliklerle birlikte Rolle teoremi ve ortalama değer teoremi sağlamadığı görülmüştür.

2013 yılında R. Khalil ve arkadaşları tarafından kesirli türev ve kesirli integralin yeni bir tanımı yapıldı. Bu yeni tanım klasik türevin tanımındaki gibi bir limit formundan yararlanır. Onlar çalışmalarında, bu yeni kesirli türev tanımı için lineerlik şartını, çarpım kuralını, bölüm kuralını, kesirsel Rolle teoremini ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sundular.

Tanım (Konformal Türev) 2.6: $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $t > 0,\ \alpha \in (0,1)$ için, f nin α. mertebeden konformal (conformable) türevi

$$D_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer f fonksiyonu $\alpha-$diferansiyellenebilir ise

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t) \tag{2.10}$$

sağlanır. Burada $f^{(\alpha)}(t)$ fonksiyonu $D_\alpha(f)(t)$ ile gösterilir. Yani, bir f fonksiyonunun α. mertebeden konformal türevi mevcutsa, o zaman f fonksiyonuna α-diferansiyellenebilirdir denir (Khalil ve arkadaşları, 2013).

Teorem 2.7: Eğer $\alpha \in (0,1]$ ve f, g bir $t > 0$ noktasında α-diferansiyellenebilir olsun. O halde

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha(af + bg) = aD_\alpha(f) + bD_\alpha(g)$ (lineerlik),

ii. $\forall p \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,

iii. Her sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için $D_\alpha(\lambda) = 0$,

iv. $D_\alpha(fg) = fD_\alpha(g) + gD_\alpha(f)$ (Çarpım kuralı), *v.* $D_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gD_\alpha(f)-fD_\alpha(g)}{g^2}$ (Bölüm kuralı),

vi. $D_\alpha(f\circ g)(t)=f'(g(t))\,D_\alpha(g)(t)$ (Zincir Kuralı)

özellikleri mevcuttur (Khalil ve arkadaşları, 2013).

Tanım 2.8: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. O zaman $0\le a<b$ olmak üzere $\alpha\in(0,1]$ için, f nin $\alpha-$kesirli integrali

$$\int_a^b f(x)\,d_\alpha x=\int_a^b f(x)\,x^{\alpha-1}dx$$

olarak tanımlanır. $[a,b]$ aralığında tüm $\alpha-$kesirli integrallenebilen fonksiyonların uzayı $L^1_\alpha[a,b]$ ile gösterilir (Sarıkaya ve arkadaşları, 2016).

Teorem (Kısmi İntegrasyon) 2.9: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonsiyonları verilsin. Eğer f ve g fonksiyonları (a,b) de α-diferansiyellenebilir ise

$$\int_a^b f(x)\,D^a_\alpha(g)(x)\,d_\alpha(x,a)=fg|_a^b-\int_a^b g(x)\,D^a_\alpha(f)(x)\,d_\alpha(x,a) \tag{2.11}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $d_\alpha(x,a)=(x-a)^{\alpha-1}$ şeklindedir (Abdeljawad, 2015).

Yukarıda (2.9) ile verilen konformal türev formülünden hareketle, bir başka konformal türev tanımı Katugampola tarafından

$$D_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f\left(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde verilmiştir (Katugampola, 2016).

(2.9) konformal türev tanımını, bilinmeyen bir çekirdek yardımıyla genelleştirme fikri ilk olarak R. Almeida ve arkadaşları tarafından

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f\left(t+\varepsilon k(t)^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde yapılmıştır (Almeida, 2016).

Burada $k(t)$ nin keyfi seçimleri halinde birçok türev tanım formülü elde edilebilir.

Almeida nın tanımladığı bu türev tanımı daha genel olarak tarafımızdan aşağıdaki gibi ifade edilmiş ve aşağıdaki özellikler elde edilmiştir.

Tanım(Konformal Kesirli Türev) 2.10: $k:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve $k'(t)\neq0$ olsun. Verilen bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $\alpha\in(0,1)$ için, f nin α. mertebeden konformal kesirli türevi

$$D^\alpha(f)(t):=\lim_{\epsilon\to0}\frac{f\left(t-k(t)+k(t)\,e^{\varepsilon\frac{(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right)-f(t)}{\epsilon}$$

şeklinde tanımlanır (Akkurt ve arkadaşları, 2017).

Teorem 2.11: $k:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve $k'(t)\neq 0$ olsun. $\alpha\in(0,1]$ ve f,g bir $t>0$ noktasında α-diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,

1. $D^{\alpha}(af+bg)(t)=aD^{\alpha}(f)(t)+bD^{\alpha}(g)(t)$, her $a,b\in\mathbb{R}$ için (lineerlik),
2. $D^{\alpha}(t^{n})=\dfrac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}nt^{n-1}$ her $n\in\mathbb{R}$ için,
3. Bütün $f(t)=c$ sabit fonksiyonları için $D^{\alpha}(c)=0$,
4. $D^{\alpha}(fg)(t)=f(t)D^{\alpha}(g)(t)+g(t)D^{\alpha}(f)(t)$ (Çarpım Kuralı),
5. $D^{\alpha}\left(\dfrac{f}{g}\right)(t)=\dfrac{g(t)D_{\alpha}(f)(t)-f(t)D_{\alpha}(g)(t)}{[g(t)]^{2}}$ (Bölüm kuralı),
6. $D^{\alpha}(f\circ g)(t)=\dfrac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}f'(g(t))D'(g)(t)$ (Zincir kuralı)

özellikleri mevcuttur (Akkurt ve arkadaşları, 2017).

Şimdi kesirli mertebeden türevin elde edilişine değinelim.

n. mertebeden türevlerin

$$f(x),\frac{df}{dx},\frac{d^2x}{dx^2},\frac{d^3x}{dx3},\cdots$$

sonsuz dizisini göz önüne alınsın. Bu dizi keyfi mertebeden diferansiyellenebilirliğin genelleştirmesidir. Öncelikle genel kesirli türev formüllerini vermeden önce yarım türev olarak adlandırılan bir türev formülü elde edilecektir. Bunlarla ilgili bazı uygulamalar yaparak elde edilen bu türev formülünün daha genel bir formu olan kesirli türev formülleri verilecektir. k pozitif bir tamsayı olmak üzere $f(x)=x^k$ şeklindeki fonksiyonu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun ardışık olarak a. pozitif tamsayı mertebeden türevi

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^{k}\\
&f'(x)=kx^{k-1}\\
&f''(x)=k.(k-1)x^{k-2}\\
&f'''(x)=k.(k-1).(k-2)x^{k-3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(a)}(x)=k.(k-1).(k-2)...(k-a+1)x^{k-a}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen bu son eşitlikte faktöriyel tanım ve özellikleri kullanılarak,

$$f^{(a)}(x)=\frac{d^{a}f}{dx^{a}}=\frac{k!}{(k-a)!}x^{k-a} \tag{2.12}$$

ifadesi yazılabilir. Gamma fonksiyonu ve faktöriyel ilişkisinden, (2.12) ifadesi,

$$f^{(a)}(x)=\frac{d^{a}f}{dx^{a}}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}x^{k-a} \tag{2.13}$$

olarak yazılır. Buradaki a pozitif tamsayısı herhangi bir pozitif reel sayısı olarak seçilirse o zaman verilen fonksiyonun kesirli (Fractinal) türevleri hesaplanabilir. Örneğin $k = 2$ ve $a = 1/2$ olsun. Bu durumda $f(x) = x^2$ fonksiyonu $a = 1/2$ inci mertebeden türevi

$$\begin{aligned} f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) &= D^{\frac{1}{2}} x^2 \\ &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2!}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki yarım türevin, yarım türevi

$$\begin{aligned} f'(x) &= Df(x) \\ &= D^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(D^{\frac{1}{2}} f(x)\right)} \\ &= D^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} D^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{1!} x \\ &= 2x \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan $f(x) = x^2$, fonksiyonun $\alpha = 1/2$ mertebeden iki kez türevinin (yani iki yarım türevin) bir tam türev olduğu açıktır.

Şimdi ise $f(x) = \dfrac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ türev fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim. Bunun için daha önce elde edilen kesirli integral formülünde $a = 0$ durumunu göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\frac{1}{2}} f(x) &= I_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt \\
& t = ux \quad \Rightarrow \quad dt = xdu \ , \text{ dönüşümü ile} \\
&= \frac{8}{3\pi} \int_0^1 (x-xu)^{-\frac{1}{2}} (xu)^{\frac{3}{2}} x du \\
&= \frac{8}{3\pi} x^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+1} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} du \\
&= \frac{8}{3\pi} x^2 \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-1} u^{\frac{5}{2}-1} du \\
&= \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{5}{2})} \\
&= x^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yukarıda değinilen bilgiler doğrultusunda daha genel tanımlanan bir kesirli türev formülü elde edelim.

Bunun için, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x > a \tag{2.14}$$

Abel integral denklemini ele alalım. (2.14) denkleminde x yerine t, t yerine s yazıldığında,

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \tag{2.15}$$

olacaktır. (2.15) eşitliğinin her iki yanı $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpılarak a dan x e kadar t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \right) dt \tag{2.16}$$

olduğu görülür. (2.16) eşitliğinin sağ tarafında integrasyon sırası

$$\left.\begin{array}{l} a < t < x \\ a < s < t \end{array}\right\} \Rightarrow a < s < t < x$$

sınır değişimine bağlı olarak değiştirilirse,

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \varphi(s) \left(\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} dt \right) ds \tag{2.17}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (2.17) eştliğinin sağ tarafındaki iç integrali hesaplayalım. Bu iç integralde $t = s + (x-s)u \ \Rightarrow \ dt = (x-s)du$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} &\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-1)^{-\alpha} dt \\ &= \int_0^1 (s + (x-s)u - s)^{\alpha-1}(x - s - (x-s)u)^{-\alpha}(x-s)du \\ &= (x-s)^{\alpha-1-\alpha+1} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha} du \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \end{aligned} \tag{2.18}$$

olduğu görülür. Burada elde edilen (2.18) eşitliği (2.17) de yerine yazılırsa,

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt = \Gamma(1-\alpha) \int_a^x \varphi(s)ds \tag{2.19}$$

elde edilir. (2.19) ifadesinin her iki yanının x bağımsız değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \tag{2.20}$$

yazılır. Burdaki (2.20) ifadesine φ fonksiyonun α. mertebeden Kesirli Türevi denir. Bu türev Riemann-Liouville Kesirli Türevi olarak bilinir. Genel olarak (2.20) ifadesinin literatür gösterimi

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \qquad x > a \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır. (2.21) eşitliği yardımıyla daha genel bir Riemann-Liouville Kesirli Türevi formülü aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.12: f fonksiyonu her (a, x) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \epsilon \mathbb{N}$, $m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere reel değerli f fonksiyonun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_{RL}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}} dt, \qquad x > a \tag{2.22}$$

şeklindedir.

Tanım 2.13: $\alpha > 0$, $t > a$, α, t, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere verilen bir f fonksiyonunun Caputo kesirli türevi

$${}^{c}D^{\alpha}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \displaystyle\int_a^x \dfrac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau & , n-1 < \alpha < n, \ n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) & , \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Caputo, 1967).

Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türevinin bazı özellikleri aşağıdaki tabloda ifade edilebilir:

Riemann-Liouville

1) $D_{RL}^{\alpha} f(t) = D_{RL}^{n} I^{n-\alpha} f(t)$

2) $\lim\limits_{\alpha \to n} D_{RL}^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t)$
   $\lim\limits_{\alpha \to n-1} D_{RL}^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t)$

3) $D_{RL}^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_{RL}^{\alpha} f(t) + \mu D_{RL}^{\alpha} g(t)$

4) $D_{RL}^{m} D_{RL}^{\alpha} f(t) = D_{RL}^{m+\alpha} f(t) \neq D_{RL}^{\alpha} D_{RL}^{m} f(t)$

5) $D_{RL}^{\alpha}(f(t)\, g(t)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left(D_{RL}^{\alpha-k} f(t)\right) g^{(k)}(t)$

6) $D_{RL}^{\alpha} c = \dfrac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0$, c $(sabit)$

ve

Caputo

1) ${}^{C}D^{\alpha}f(t) = I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$

2) $\lim\limits_{\alpha\to n} {}^{C}D^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t)$

$\lim\limits_{\alpha\to n-1} {}^{C}D^{\alpha}f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$

3) ${}^{C}D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^{C}D^{\alpha}f(t) + \mu {}^{C}D^{\alpha}g(t)$

4) ${}^{C}D^{\alpha}D^{m}_{RL}f(t) = {}^{C}D^{m+\alpha}f(t) \neq D^{m}_{RL}\,{}^{C}D^{\alpha}f(t)$

5) $$ {}^{C}D(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left(D^{\alpha-k}_{RL}f(t)\right)g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(f(t)g(t))^{(k)}(0) $$

6) ${}^{C}Dc = 0,\ c\ (sabit)$

(Kamenova Ishteva, 2005).

Ayrıca R. Gorenflo ve F. Mainardi, 2000 yılındaki çalışmalarında Riemann-Liouville kesirli türev ile Caputo kesirli türevi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 2.14: $t > 0$,$\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n-1 < \alpha < n$ olsun. Bu durumda Riemann-Lioville Kesirli Türev ve Caputo kesirli türev operatörleri için

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(0) $$

eşitliği doğrudur (Gorenflo ve Mainardi, 2000).

3 Bulgular

Bu bölümde çalışmanın orjinal kısımlarını oluşturan alt başlıklar ele alınacaktır. Ele alınan alt başlıklarda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin daha önceki tiplerini içeren integral eşitsizlikleri, bazı özel fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integraller için yeniden verilecektir.

3.1 $\varphi-$Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Kesirli İntegraller İçin Bazı Eşitsizlikler

Öncelikle aşağıda verilen S_f operatörü için 2015 yılında J. Park tarafından elde edilen temel lemmadan bahsedilip, ardından bu S_f operatör ile tanımlanan $\varphi-$konveks fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler verilecektir. Bu eşitsizlikler bilinen temel eşitsizliklerin bir genellemesidir.

J. Park, $\alpha > 0$ ve her $x \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ için S_f operatörünü

$$\begin{aligned} & S_f\left(x, \lambda, \alpha; a, b\right) \\ & \equiv (1-\lambda)\left\{\frac{(b-x)^{\alpha+1}-(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\right\} f'(x) \\ & +(1+\alpha-\lambda)\left\{\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right\} f(x) \\ & +\lambda\left\{\frac{(x-a)^{\alpha}\left(f(a)+(b-x)^{\alpha} f(b)\right.}{b-a}\right\} \\ & -\frac{\Gamma(\alpha+2)}{b-a}\left\{J_{x^{-}}^{\alpha} f(a)+J_{x^{+}}^{\alpha} f(b)\right\} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlamıştır (Park, 2015).

Ana sonuçların ifade ve ispatlanması için gerekli olan lemma J. Park tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Lemma 3.1.1: $0 < a < b$ olmak üzere $a, b \in I$ için $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I°, I aralığının içi) üzerinde iki kez diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $x \in [a, b]$,

$\lambda \in [0,1]$, $\alpha > 0$ ve $f'' \in L_1[a,b]$ için

$$\begin{aligned} S_f(x,\lambda,\alpha;a,b) &= \frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\int_0^1 t(\lambda - t^\alpha) f''(tx+(1-t)a)\,dt \\ &+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\int_0^1 t(\lambda - t^\alpha) f''(tx+(1-t)b)\,dt \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

dir (Park, 2015).

Şimdi Lemma 3.1.1 yardımıyla, S_f operatörü için aşağıdaki temel sonuçlar elde edilecektir.

Teorem 3.1.2: $\varphi : (0,1) \to (0,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $a, b \in I^0$ ve $a < b$ için $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $I^\circ(I^\circ$, I nın içi) üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda $q \geq 1$ olmak üzere $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında $\varphi-$konveks fonksiyon ise herhangi $x \in [a,b]$, $\alpha > 0$ ve $t, \lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} &|S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)| \\ &\leq A_1^{1-\frac{1}{q}}(\alpha,\lambda)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi)|f''(x)|^q\right.\right. \\ &\left.+A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi)|f''(a)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi)|f''(x)|^q + A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi)|f''(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$\begin{aligned} A_1(\alpha,\lambda) &= \frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}+1}{\alpha+2} - \frac{\lambda}{2}, \\ A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi) &= \int_0^1 |t(\lambda - t^\alpha)|\, t\varphi(t)\,dt, \\ A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi) &= \int_0^1 |t(\lambda - t^\alpha)|\,(1-t)\,\varphi(1-t)\,dt. \end{aligned}$$

dir (Yıldırım ve arkadaşları, 2016).

İspat: Lemma 3.1.1 ve power mean eşitsizliği aynı anda dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|S_f\left(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b\right)\right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|\left|f''\left(tx+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|\left|f''\left(tx+(1-t)b\right)\right| dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= A_1^{1-\frac{1}{q}}(\alpha,\lambda)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|\left|f''\left(tx+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|\left|f''\left(tx+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.4}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $A_1(\alpha,\lambda)$ ifadesi

$$A_1(\alpha,\lambda)=\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|dt=\left(\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}+1}{\alpha+2}-\frac{\lambda}{2}\right)$$

şeklindedir. $|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde $\varphi-$konveks olduğundan, (3.1.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integraller sırasıyla

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|\left|f''\left(tx+(1-t)a\right)\right|^q dt \\
&\leq A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi)\left|f''(x)\right|^q+A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi)\left|f''(a)\right|^q
\end{aligned} \tag{3.1.5}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|\left|f''\left(tx+(1-t)b\right)\right|^q dt \\
&\leq A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi)\left|f''(x)\right|^q+A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi)\left|f''(b)\right|^q
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

eşitsizlikleri ile yazılır. Burada $A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi)$ ve $A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi)$ fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
A_2(\alpha,\lambda,t,\varphi) &= \int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|t\varphi(t)\,dt, \\
A_3(\alpha,\lambda,t,\varphi) &= \int_0^1 \left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|(1-t)\varphi(1-t)\,dt
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Eğer (3.1.5) ve (3.1.6) ifadeleri (3.1.4) de yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
&\left|S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)\right| \\
&\leq \left(\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}+1}{\alpha+2}-\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\left|f''(x)\right|^q\int_0^1\left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|t\varphi(t)\,dt\right.\right. \\
&\left.+\left|f''(a)\right|^q\int_0^1\left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|(1-t)\,\varphi(1-t)\,dt\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\left|f''(x)\right|^q\int_0^1\left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|t\varphi(t)\,dt\right. \\
&\left.\left.+\left|f''(b)\right|^q\int_0^1\left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|(1-t)\,\varphi(1-t)\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.3: Teorem 3.1.2 de $\varphi(t)=1$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|S_f(x,\lambda,\alpha;a,b)\right| \\
&\leq \left(\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}+1}{\alpha+2}-\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{A_2(\alpha,\lambda)\left|f''(x)\right|^q+A_3(\alpha,\lambda)\left|f''(a)\right|^q\right\}\right. \\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{A_2(\alpha,\lambda)\left|f''(x)\right|^q+A_3(\alpha,\lambda)\left|f''(b)\right|^q\right\}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.7}
$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikdeki $A_2(\alpha,\lambda)$ ve $A_3(\alpha,\lambda)$ ifadeleri,

$$
\begin{aligned}
A_2(\alpha,\lambda) &= \int_0^1\left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|t\,dt=\frac{3-(\alpha+3)\lambda+2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)}, \\
A_3(\alpha,\lambda) &= \int_0^1\left|t\left(\lambda-t^{\alpha}\right)\right|(1-t)\,dt \\
&= \frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2}-\frac{2\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)}+\frac{\alpha\lambda}{6}-\frac{\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+3)}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. (3.1.7) eşitsizliği J. Park'ın 2015 yılındaki çalışmasında bulunan Teorem 2.1 ile aynıdır.

Sonuç 3.1.4: Teorem 3.1.2 de $\varphi(t) = 1$ ve $x = \dfrac{a+b}{2}$ alınırsa, sırasıyla $\lambda = \dfrac{1}{3}$, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ için J. Park'ın 2015 yılındaki çalışmasında bulunan Sonuç 2.2, Sonuç 2.3 ve Sonuç 2.4 elde edilir.

Sonuç 3.1.5: Teorem 3.1.2 de $\varphi(t) = t^{s-1}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)\right| \\
&\leq \left(\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}+1}{\alpha+2}-\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{|f''(x)|^q A_4(\alpha,\lambda,s)+|f''(a)|^q A_5(\alpha,\lambda,t,\varphi)\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{|f''(x)|^q A_4(\alpha,\lambda,s)+|f''(b)|^q A_5(\alpha,\lambda,t,\varphi)\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $A_4(\alpha,\lambda,s)$ ve $A_5(\alpha,\lambda,t,\varphi)$ ifadeleri

$$\begin{aligned}
A_4(\alpha,\lambda,s) &= 2\frac{\lambda^{\frac{s+2}{\alpha}+1}}{s+2}-2\frac{\lambda^{\frac{s+2}{\alpha}+1}}{\alpha+s+2}+\frac{1}{\alpha+s+2}, \\
A_5(\alpha,\lambda,t,\varphi) &= \lambda B_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(2,s+1)-B_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha+2,s+1) \\
&\quad +B_{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha+2,s+1)-\lambda B_{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(2,s+1)
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Teorem 3.1.6: $\varphi : (0,1) \to (0,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $a, b \in I^0$ ve $a < b$ için $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $I^\circ(I^\circ$, I nın içi) üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda $q > 1$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f''|^q$, $[a,b]$ de $\varphi-$konveks fonksiyon ise herhangi $x \in [a,b]$, $\alpha > 0$ ve $t, \lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)\right| \\
&\leq R^{\frac{1}{p}}(\alpha,\lambda,p)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\left(|f''(x)|^q+|f''(a)|^q\right)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\left(|f''(x)|^q+|f''(b)|^q\right)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

dir. Burada

$$R(\alpha,\lambda,p)=\frac{\lambda^{\frac{1+p+\alpha p}{\alpha}}}{\alpha}\left\{\Gamma(1+p)\,\Gamma\left(\frac{1+p+\alpha}{\alpha}\right)\left({}_2F_1\left(1,1+p,2+p+\frac{1+p}{\alpha},1\right)\right)\right.$$

$$\left.+B\left(1+p,-\frac{1+p+\alpha p}{\alpha}\right)-B\left(\lambda,1+p,-\frac{1+p+\alpha p}{\alpha}\right)\right\},$$

ve $0<b<c$, $|z|<1$ için, ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1(a,b,c,z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt$$

dir (Yıldırım ve arkadaşları, 2016).

İspat: Lemma 3.1.1 ve Hölder eşitsizliğinden, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&|S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)|\\
&\leq\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1|t(\lambda-t^{\alpha})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f''(tx+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1|t(\lambda-t^{\alpha})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f''(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.1.10)\\
&=\left(\int_0^1|t(\lambda-t^{\alpha})|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1|f''(tx+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left(\int_0^1|f''(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde $\varphi-$konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_0^1|f''(tx+(1-t)a)|^q\,dt &\leq\int_0^1 t\varphi(t)\,|f''(x)|^q\,dt\\
&+\int_0^1(1-t)\,\varphi(1-t)\,|f''(a)|^q\,dt \qquad (3.1.11)\\
&=(|f''(x)|^q+|f''(a)|^q)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği alınır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(tx+(1-t)b)|^q\,dt &\leq \int_0^1 t\varphi(t)\,|f''(x)|^q\,dt \\
&+\int_0^1 (1-t)\,\varphi(1-t)\,|f''(b)|^q\,dt \qquad (3.1.12) \\
&= \left(|f''(x)|^q+|f''(b)|^q\right)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

yazılır.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\lambda,p) &= \int_0^1 |t(\lambda-t^\alpha)|^p\,dt \\
&= \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \{t(\lambda-t^\alpha)\}^p\,dt+\int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \{t(t^\alpha-\lambda)\}^p\,dt \qquad (3.1.13) \\
&= C_1(\alpha,\lambda,p)+C_2(\alpha,\lambda,p)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Sırasıyla $\lambda-t^\alpha=u$ ve $u=\lambda y$ değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha,\lambda,p) &= \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \{t(\lambda-t^\alpha)\}^p\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\lambda u^p(\lambda-u)^{\frac{1+p-\alpha}{\alpha}}\,du \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \lambda^p y^p \lambda^{\frac{1+p-\alpha}{\alpha}}(1-y)^{\frac{1-\alpha+p}{\alpha}}\,\lambda dy \qquad (3.1.14) \\
&= \frac{\lambda^{\frac{p\alpha+1+p}{\alpha}}}{\alpha}\int_0^1 y^p(1-y)^{\frac{1+p}{\alpha}}(1-y)^{-1}\,dy \\
&= \frac{\lambda^{\frac{1+p+\alpha p}{\alpha}}}{\alpha}\Gamma(1+p)\,\Gamma\left(\tfrac{1+p+\alpha}{\alpha}\right){}_2F_1\left(1,1+p,2+p+\tfrac{1+p}{\alpha},1\right)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
& C_2(\alpha,\lambda,p) \\
&= \int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \{t(t^{\alpha}-\lambda)\}^{p}\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_{\lambda^{u}}^{1} \frac{1+p-\alpha}{\alpha}(u-\lambda)^{p}\,du \qquad (3.1.15) \\
&= \frac{\lambda^{\frac{1+p+\alpha p}{\alpha}}}{\alpha}\left\{B\left(1+p,-\frac{1+p+\alpha p}{\alpha}\right)-B\left(\lambda,1+p,-\tfrac{1+p+\alpha p}{\alpha}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıda elde edilen (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14) ve (3.1.15) ifadeleri (3.1.10) da yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
& |S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)| \\
&\le R^{\frac{1}{p}}(\alpha,\lambda,p)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{(|f''(x)|^{q}+|f''(a)|^{q})\int_0^1 t\varphi(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{(|f''(x)|^{q}+|f''(b)|^{q})\int_0^1 t\varphi(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.7: Teorem 3.1.6 da $\varphi(t)=1$ alınırsa, her $x\in[a,b]$, $\alpha>0$ ve $t,\lambda\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
& |S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)| \\
&\le R^{\frac{1}{p}}(\alpha,\lambda,p)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\frac{(|f''(x)|^{q}+|f''(a)|^{q})}{2}\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \qquad (3.1.16) \\
&\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\frac{(|f''(x)|^{q}+|f''(b)|^{q})}{2}\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.16) eşitsizliği J. Park'ın 2015 yılındaki çalışmasında bulunan Teorem 2.2 ile aynıdır.

Sonuç 3.1.8: Teorem 3.1.6 da $\varphi(t)=1$ ve $x=\dfrac{a+b}{2}$ alınırsa, sırasıyla $\lambda=\dfrac{1}{3}$, $\lambda=0$, $\lambda=1$ için J. Park'ın 2015 yılındaki çalışmasında bulunan Sonuç 2.6, Sonuç 2.7 ve Sonuç 2.8 elde edilir.

Sonuç 3.1.9: Teorem 3.1.6 da $\varphi(t) = t^{s-1}$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
& |S_f(x,\lambda,\alpha,t,\varphi;a,b)| \\
& \leq \left(\int_0^1 |t(\lambda - t^{\alpha})|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\frac{(|f''(x)|^q + |f''(a)|^q)}{s+1}\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \qquad (3.1.17) \\
& \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a}\left\{\frac{(|f''(x)|^q + |f''(b)|^q)}{s+1}\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2 Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Konformal Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu alt başlıkta konveks fonksiyonlar yardımıyla, konformal(uyumlu) kesirli integraller için bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

Şimdi bazı temel sonuçları hatırlatalım:

S.S. Dragomir ve R.P. Agarwal bir çalışmasında Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonuçları aşağıdaki gibi vermiştir.

Lemma 3.2.0.1: $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}(I^{\circ}$, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $a, b \in I^{\circ}$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt \qquad (3.2.0.1)$$

dir (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 3.2.0.2: $a, b \in I^0$ ve $a < b$ için $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}(I^{\circ}$, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right) \qquad (3.2.0.2)$$

dir (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Lemma 3.2.0.3: $a, b \in I^0$ ve $a < b$ için $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}(I^{\circ}$, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= (b-a)\left[\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b)\,dt + \int_{1/2}^1 (t-1)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt\right]
\end{aligned} \qquad (3.2.0.3)$$

dir (Kırmacı, 2004).

Teorem 3.2.0.4: $a, b \in I^0$ ve $a < b$ için $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^{\circ}(I^{\circ}$, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \qquad (3.2.0.4)$$

dir (Kırmacı, 2004).

Tüm bunlar göz önüne alınırsa, α-kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için, 2016 yılında M.Z. Sarıkaya ve arkadaşları tarafından aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.2.0.5: $\alpha \in (0,1]$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) de $\alpha-$kesirli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda

i) f, $[a,b]$ aralığında konvekstir.

ii) $D_\alpha f(t)$, $[a,b]$ aralığında artandır.

ii) Herhangi bir $x_1, x_2 \in [a,b]$ için

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{(x_2^\alpha - x_1^\alpha)}{\alpha} D_\alpha (f)(x_1) \tag{3.2.0.5}$$

ifadeleri denktir (Sarıkaya ve arkadaşları, 2016).

Teorem 3.2.0.6: $a \geq 0$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli ve konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1]$

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha}\int_a^b f(x)\, d_\alpha x\right) \leq \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha}\int_a^b \varphi(f(x))\, d_\alpha x \tag{3.2.0.6}$$

dir (Sarıkaya ve arkadaşları, 2016).

Hermite-Hadamard eşitsizliği konformal kesirli integralleri için aşağıdaki gibi gösterilebilir:

Teorem 3.2.0.7: $\alpha \in (0,1]$ ve $0 \leq a < b$ için $f \in L_\alpha^1([a,b])$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda, konformal kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha}\int_a^b f(x^\alpha)\, d_\alpha x \leq \frac{f(a^\alpha) + f(b^\alpha)}{2} \tag{3.2.0.7}$$

eşitsizliği mevcuttur(Sarıkaya ve arkadaşları, 2016).

3.2.1 Hermite-Hadamard Tipli Bazı Eşitsizlikler

Bu bölümde, türevlerinin mutlak değeri diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Konformal Kesirli integraller kullanarak Hermite-Hadamard tipli bazı genelleştirilmiş eşitsizlikler verilecektir.

Bu bölüm boyunca $I_f(f;\alpha;\beta;u)$ operatörü aşağıdaki gibi alınacaktır.

$\forall a,b \in I$ $(a<b)$ için $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° da diferansiyellenebilir olsun.

$I_f(f;\alpha;\beta;u)$ operatörü $u\in[a,b]$, $\lambda\in[0,1]$, $\alpha,\beta\in(0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&I_f(f;\alpha;\beta;u)\\
&=\frac{-a^{\alpha-1}f(a^\alpha)+b^{\alpha-1}f(b^\alpha)}{2(b^\alpha-a^\alpha)^\alpha}\\
&-\frac{1}{2(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}}\int_a^b(b^\alpha-u^\alpha)^\beta u^{-\alpha}\\
&\times\left[\alpha-1-(\beta-\alpha+1)u^{2\alpha-1}(b^\alpha-u^\alpha)^{-\alpha}\right]f(u^\alpha)\,d_\alpha u\\
&-\frac{1}{2(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}}\int_a^b(u^\alpha-a^\alpha)^{\beta-\alpha+1}u^{-\alpha}\\
&\times\left[\alpha-1+(\beta-\alpha+1)u^{2\alpha-1}(u^\alpha-a^\alpha)^{-\alpha}\right]f(u^\alpha)\,d_\alpha u
\end{aligned}\tag{3.2.1.1}$$

şeklindedir.

Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik için yeni sonuçlar elde etmemize yardımcı olacak önemli bir özdeşlik aşağıdaki lemma ile verilir.

Lemma 3.2.1.1: $\alpha,\beta\in(0,1]$ ve $0\le a<b$ olmak üzere $f:[a^\alpha,b^\alpha]\to\mathbb{R}$, (a^α,b^α) aralığında $\alpha-$diferansiyellenebilen fonksiyon ve $D_\alpha(f)$ $[a^\alpha,b^\alpha]$ aralığında α-kesirli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $q>1$ için $|D_\alpha(f)|^q$, $[a^\alpha,b^\alpha]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}
&I_f(f;\alpha;\beta;u)\\
&\equiv\frac{-a^{\alpha-1}f(a^\alpha)+b^{\alpha-1}f(b^\alpha)}{2(b^\alpha-a^\alpha)^\alpha}\\
&-\frac{1}{2(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}}\int_a^b(b^\alpha-u^\alpha)^\beta u^{-\alpha}\\
&\times\left[\alpha-1-(\beta-\alpha+1)u^{2\alpha-1}(b^\alpha-u^\alpha)^{-\alpha}\right]f(u^\alpha)\,d_\alpha u\\
&-\frac{1}{2(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}}\int_a^b(u^\alpha-a^\alpha)^{\beta-\alpha+1}u^{-\alpha}\\
&\times\left[\alpha-1+(\beta-\alpha+1)u^{2\alpha-1}(u^\alpha-a^\alpha)^{-\alpha}\right]f(u^\alpha)\,d_\alpha u\\
&=\tfrac{1}{2}\int_0^1\left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right)D_\alpha(f)\left(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha)\right)d_\alpha\tau
\end{aligned}\tag{3.2.1.2}$$

dir. Burada

$$D_\alpha(f)\left(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha)\right)=\left(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha)\right)^{1-\alpha}f'\left(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha)\right)$$

dır (Yıldırım ve arkadaşları, 2018).

İspat: $I_1(f;\alpha;\beta;u)$ ve $I_2(f;\alpha;\beta;u)$ ifadelerinde $u^\alpha = a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha)$ değişken değiştirmesi ve kısmi integrasyon metodu dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
& I_1(f;\alpha;\beta;u) \\
&= \int_0^1 \tau^{\alpha\beta} D_\alpha(f)\left(a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha)\right) d_\alpha\tau \\
&= \frac{1}{(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b (b^\alpha-u^\alpha)^{\beta+\alpha-1-\alpha+1} D_\alpha(f)(u^\alpha)\, u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{1}{(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b (b^\alpha-u^\alpha)^{\beta-\alpha+1} D_\alpha(f)(u^\alpha)\, u^{\alpha-1} d_\alpha(b^\alpha,u^\alpha) \\
&= \frac{1}{(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b (b^\alpha-u^\alpha)^{\beta-\alpha+1} D_\alpha(f)(u^\alpha)\, u^{\alpha-1} d_\alpha(b^\alpha,u^\alpha) \\
&= \frac{1}{(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}} \left\{ \left[(b^\alpha-u^\alpha)^{\beta-\alpha+1} u^{\alpha-1}\right] f(u^\alpha)\Big|_a^b \right. \\
& \left. - \int_a^b D_\alpha\left((b^\alpha-u^\alpha)^{\beta-\alpha+1} u^{\alpha-1}\right) f(u^\alpha)\, d_\alpha(b^\alpha,u^\alpha) \right\} \\
&= -\frac{1}{(b^\alpha-a^\alpha)^\alpha} a^{\alpha-1} f(a^\alpha) \\
& -\frac{1}{(b^\alpha-a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b \frac{(b^\alpha-u^\alpha)^{\beta-\alpha+1}}{u} \left[\alpha-1-(\beta-\alpha+1)\, u^{2\alpha-1}(b^\alpha-u^\alpha)^{-\alpha}\right] \\
& \times f(u^\alpha)\, d_\alpha(b^\alpha,u^\alpha)
\end{aligned}
\tag{3.2.1.3}
$$

olur. Diğer yandan $I_2(f;\alpha;\beta;u)$ operatörü için,

$$
\begin{aligned}
& -I_2(f;\alpha;\beta;u) \\
&= -\int_0^1 (1-\tau^\alpha)^\beta D_\alpha(f)\left(a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha)\right) d_\alpha\tau
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)^{\beta+1}} \int_b^a (u^\alpha - a^\alpha)^{\beta+\alpha-1-\alpha+1} D_\alpha(f)(u^\alpha) u^{\alpha-1} du$$

$$= \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b (u^\alpha - a^\alpha)^{\beta-\alpha+1} D_\alpha(f)(u^\alpha) u^{\alpha-1} d_\alpha(u^\alpha, a^\alpha)$$

$$= \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b (u^\alpha - a^\alpha)^{\beta-\alpha+1} D_\alpha(f)(u^\alpha) u^{\alpha-1} d_\alpha(u^\alpha, a^\alpha)$$

$$= \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)^{\beta+1}} \left\{ \left[(u^\alpha - a^\alpha)^{\beta-\alpha+1} u^{\alpha-1} \right] f(u^\alpha) \Big|_a^b \right.$$

$$\left. - \int_a^b D_\alpha \left((u^\alpha - a^\alpha)^{\beta-\alpha+1} u^{\alpha-1} \right) f(u^\alpha) d_\alpha(u^\alpha, a^\alpha) \right\}$$

$$= \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)^\alpha} b^{\alpha-1} f(b^\alpha)$$

$$- \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)^{\beta+1}} \int_a^b \frac{(u^\alpha - a^\alpha)^{\beta-\alpha+1}}{u} \left[\alpha - 1 + (\beta - \alpha + 1) u^{2\alpha-1} (u^\alpha - a^\alpha)^{-\alpha} \right]$$

$$\times f(u^\alpha) d_\alpha(u^\alpha, a^\alpha) \tag{3.2.1.4}$$

yazılır. Buradaki (3.2.1.3) ve (3.2.1.4) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi Lemma 3.2.1.1 den yararlanarak konformal kesirli integraller için, Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 3.2.1.2: $\alpha, \beta \in (0,1]$ ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a^\alpha, b^\alpha] \to \mathbb{R}$, (a^α, b^α) aralığında $\alpha-$diferansiyellenebilen fonksiyon ve $D_\alpha(f)$ $[a^\alpha, b^\alpha]$ aralığında α-kesirli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|D_\alpha(f)|^q$ $[a^\alpha, b^\alpha]$ aralığında konveks ise

$$|I_f(f; \alpha; \beta; u)| \leq \frac{1}{\alpha(\beta+1)} \left(\frac{2^\beta - 1}{2^{\beta+1}} \right) \{ |D_\alpha(f)(a^\alpha)| + |D_\alpha(f)(b^\alpha)| \}$$

eşitsizliği mevcuttur (Yıldırım ve arkadaşları 2018).

İspat: $|D_\alpha(f)|$, $[a^\alpha, b^\alpha]$ aralığında konveks olduğundan, Lemma 3.2.1.1 yardımıyla,

$$\begin{aligned} |I_f(f; \alpha; \beta; u)| &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \left((1 - \tau^\alpha)^\beta - \tau^{\alpha\beta} \right) |D_\alpha(f)(a^\alpha \tau^\alpha + b^\alpha (1 - \tau^\alpha))| d_\alpha \tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\tau^{\alpha\beta} - (1 - \tau^\alpha)^\beta \right) |D_\alpha(f)(a^\alpha \tau^\alpha + b^\alpha (1 - \tau^\alpha))| d_\alpha \tau \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{0}^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\tau^{\alpha})^{\beta}-\tau^{\alpha\beta}\right)\left\{\tau^{\alpha}\left|D_{\alpha}(f)(a^{\alpha})\right|+(1-\tau^{\alpha})\left|D_{\alpha}(f)(b^{\alpha})\right|\right\}d_{\alpha}\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^{1} \left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^{\alpha})^{\beta}\right)\left\{\tau^{\alpha}\left|D_{\alpha}(f)(a^{\alpha})\right|+(1-\tau^{\alpha})\left|D_{\alpha}(f)(b^{\alpha})\right|\right\}d_{\alpha}\tau$$

$$=\frac{\left|D_{\alpha}(f)(a^{\alpha})\right|}{2}\left[\int_{0}^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \tau^{\alpha}\left((1-\tau^{\alpha})^{\beta}-\tau^{\alpha\beta}\right)d_{\alpha}\tau+\int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^{\alpha})^{\beta}\right)\tau^{\alpha}d_{\alpha}\tau\right]$$

$$+\frac{\left|D_{\alpha}(f)(b^{\alpha})\right|}{2}\int_{0}^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\tau^{\alpha})^{\beta}-\tau^{\alpha\beta}\right)(1-\tau^{\alpha})d_{\alpha}\tau$$

$$+\int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^{\alpha})^{\beta}\right)(1-\tau^{\alpha})d_{\alpha}\tau$$

$$=\frac{\left\{\left|D_{\alpha}(f)(a^{\alpha})\right|+\left|D_{\alpha}(f)(b^{\alpha})\right|\right\}}{2\alpha(\beta+1)(\beta+2)}\left[\beta+2-\frac{\beta+2}{2^{\beta}}\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha(\beta+1)}\left(\frac{2^{\beta}-1}{2^{\beta+1}}\right)\left\{\left|D_{\alpha}(f)(a^{\alpha})\right|+\left|D_{\alpha}(f)(b^{\alpha})\right|\right\}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1.3: $\alpha,\beta\in(0,1]$ ve $0\leq a<b$ olmak üzere $f:[a^{\alpha},b^{\alpha}]\to\mathbb{R}$, (a^{α},b^{α}) de $\alpha-$diferansiyellenebilen fonksiyon ve $D_{\alpha}(f)$, $[a^{\alpha},b^{\alpha}]$ aralığında α-kesirli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q\geq 1$ için $\left|D_{\alpha}(f)\right|^{q}$, $[a^{\alpha},b^{\alpha}]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|I_{f}(f;\alpha;\beta;u)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2-2^{1-\beta}}{\alpha(\beta+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left(\left|D_{\alpha}(f)(a^{\alpha})\right|^{q}+\left|D_{\alpha}(f)(b^{\alpha})\right|^{q}\right)}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{3.2.1.5}$$

dir (Yıldırım ve arkadaşları 2018).

İspat: Lemma 3.2.1.1 yardımıyla ve $q>1$ için power-mean eşitsizliğinden faydalanarak;

$$|I_f(f;\alpha;\beta;u)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right| |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))| \, d_\alpha\tau$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right| |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))| \, d_\alpha\tau$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left|\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right| d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q \, d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\tau^\alpha)^\beta-\tau^{\alpha\beta}\right) d_\alpha\tau + \int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right) d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 (|D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|)^q \, d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $|D_\alpha(f)|^q$ nın $[a^\alpha, b^\alpha]$ da konveks olduğu dikkate alınırsa,

$$\int_0^1 |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q \, d_\alpha\tau$$

$$\leq \int_0^1 \{\tau^\alpha |D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q + (1-\tau^\alpha)|D_\alpha(f)(b^\alpha)|^q\} \, d_\alpha\tau \tag{3.2.1.7}$$

$$= |D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q \int_0^1 \tau^\alpha d_\alpha\tau + |D_\alpha(f)(b^\alpha)|^q \int_0^1 \{1-\tau^\alpha\} \, d_\alpha\tau$$

$$= \frac{(|D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q + |D_\alpha(f)(b^\alpha)|^q)}{2\alpha}$$

yazılır. (3.2.1.6) ifadesindeki

$$\int_0^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\tau^\alpha)^\beta-\tau^{\alpha\beta}\right) d_\alpha\tau \text{ ve } \int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right) d_\alpha\tau$$

integrallerinde kısmi integrasyon metodu dikkate alınırsa, sonuçta

$$\int_0^{2^{-\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\tau^\alpha)^\beta-\tau^{\alpha\beta}\right) d_\alpha\tau + \int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right) d_\alpha\tau = \frac{2-2^{1-\beta}}{\alpha(\beta+1)} \tag{3.2.1.8}$$

elde edilir. (3.2.1.6) de (3.2.1.7), (3.2.1.8) kullanılarak $q > 1$ için istenilen sonuç elde edilir.

Diğer yandan, eğer $q=1$ ise

$$|I_f(f;\alpha;\beta;u)|\leq\frac{(|D_\alpha(f)(a^\alpha)|+|D_\alpha(f)(b^\alpha)|)}{4\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenilen sonucu verir.

Teorem 3.2.1.4: $\alpha,\beta\in(0,1]$ ve $0\leq a<b$ olmak üzere $f:[a^\alpha,b^\alpha]\to\mathbb{R}$, (a^α,b^α) de $\alpha-$diferansiyellenebilen fonksiyon ve $D_\alpha(f)$, $[a^\alpha,b^\alpha]$ aralığında α-kesirli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ve $q>1$ için $|D_\alpha(f)|^q$, $[a^\alpha,b^\alpha]$ aralığında konveks ise

$$|I_f(f;\alpha;\beta;u)|\quad\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\left(2^{\beta p}-1\right)}{\alpha(\beta p+1)2^{\beta p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{[|D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q+|D_\alpha(b^\alpha)|^q]}{2\alpha}\right\}^{q^{-1}} \tag{3.2.1.9}$$

dir (Yıldırım ve arkadaşları, 2018).

İspat: Lemma 3.2.1.1 yardımıyla, $|D_\alpha(f)|^q$ nun $[a^\alpha,b^\alpha]$ de konveks olduğu ve $q>1$ için Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&|I_f(f;\alpha;\beta;u)|\\
&\leq\frac{1}{2}\int_0^1\left|\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right||D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|\,d_\alpha\tau\\
&\leq\frac{1}{2}\left(\int_0^1\left|\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right|^p d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q\,d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq\frac{1}{2}\left\{\int_0^{2^{-\frac{1}{\alpha}}}\left[(1-\tau^\alpha)^\beta-\tau^{\alpha\beta}\right]^p d_\alpha\tau+\int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^1\left[\tau^{\alpha\beta}-(1-\tau^\alpha)^\beta\right]^p d_\alpha\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int_0^1|D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q\,d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq\frac{1}{2}\left\{\int_0^{2^{-\frac{1}{\alpha}}}\left[(1-\tau^\alpha)^{\beta p}-\tau^{\alpha\beta p}\right]d_\alpha\tau+\int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^1\left[\tau^{\alpha\beta p}-(1-\tau^\alpha)^{\beta p}\right]d_\alpha\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int_0^1|D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q\,d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha(\beta p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha+b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q\,d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{3.2.1.10}
$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan (3.2.1.10) ifadesinin sol tarafı için, $|D_\alpha(f)|^q$ nun $[a^\alpha, b^\alpha]$ da konveks oluduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q \, d_\alpha\tau \\
&\leq \int_0^1 [\tau^\alpha |D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q + (1-\tau^\alpha)|D_\alpha(f)(b^\alpha)|^q] \, d_\alpha\tau \\
&\leq |D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q \int_0^1 \tau^\alpha d_\alpha\tau \qquad (3.2.1.11) \\
&+ |D_\alpha(f)(b^\alpha)|^q \int_0^1 (1-\tau^\alpha) \, d_\alpha\tau \\
&= \frac{|D_\alpha(f)(a^\alpha)|^q + |D_\alpha(f)(b^\alpha)|^q}{2\alpha}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.1.11) ifadesindeki $\int_0^1 |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q \, d_\alpha\tau$ integrali, (3.2.1.10) ifadesinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.1.5: $\alpha, \beta \in (0,1]$ ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a^\alpha, b^\alpha] \to \mathbb{R}$, (a^α, b^α) de $\alpha-$diferansiyellenebilen fonksiyon ve $D_\alpha(f)$, $[a^\alpha, b^\alpha]$ aralığında α-kesirli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ için $|D_\alpha(f)|^q$, $[a^\alpha, b^\alpha]$ aralığında konveks ise

$$|I_f(f;\alpha;\beta;u)| \leq \frac{1}{2(b^\alpha - a^\alpha)^{\frac{2}{q}}} \|D_\alpha(f)\|_{L_q(a,b)} \left(\tfrac{1}{\alpha(\beta p+1)}\left[2 - 2^{-\beta p+1}\right]\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.2.1.12)$$

eşitsizliği mevcuttur ve $I_f(.)$ sınırlıdır (Yıldırım ve arkadaşları, 2018).

İspat: Lemma 3.2.1.1 yardımıyla, $|D_\alpha(f)|^q$ nun $[a^\alpha, b^\alpha]$ aralığında konveks oluşu ve $q > 1$ için Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
|I_f(f;\alpha;\beta;u)| &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\tau^{\alpha\beta} - (1-\tau^\alpha)^\beta\right| |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha))| \, d_\alpha\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |D_\alpha(f)(a^\alpha\tau^\alpha + b^\alpha(1-\tau^\alpha))|^q \, d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(\left|\tau^{\alpha\beta} - (1-\tau^\alpha)^\beta\right|\right)^p d_\alpha\tau\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\left(b^{\alpha}-a^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{b^{\alpha}-a^{\alpha}}\int_{a}^{b}\left|D_{\alpha}\left(f\right)\left(u^{\alpha}\right)\right|^{q}d_{\alpha}u\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_{0}^{1}\left(\left|\tau^{\alpha\beta}-\left(1-\tau^{\alpha}\right)^{\beta}\right|\right)^{p}d_{\alpha}\tau\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2.1.13}$$

$$= \frac{1}{2\left(b^{\alpha}-a^{\alpha}\right)^{\frac{2}{q}}}\left\|D_{\alpha}\left(f\right)\right\|_{L_{q}(a,b)}\left(\int_{0}^{1}\left(\left|\tau^{\alpha\beta}-\left(1-\tau^{\alpha}\right)^{\beta}\right|\right)^{p}d_{\alpha}\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan (3.2.1.12) eşitsizliğindeki

$$\int_{0}^{1}\left(\left|\tau^{\alpha\beta}-\left(1-\tau^{\alpha}\right)^{\beta}\right|\right)^{p}d_{\alpha}\tau$$

integrali

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}\left(\left|\tau^{\alpha\beta}-\left(1-\tau^{\alpha}\right)^{\beta}\right|\right)^{p}\tau^{\alpha-1}d\tau &= \int_{0}^{2^{-\frac{1}{\alpha}}}\left(\left(1-\tau^{\alpha}\right)^{\beta}-\tau^{\alpha\beta}\right)^{p}d_{\alpha}\tau \\
&+\int_{2^{-\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(\tau^{\alpha\beta}-\left(1-\tau^{\alpha}\right)^{\beta}\right)^{p}d_{\alpha}\tau \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{2^{-1}}\left(\left(1-u\right)^{\beta p}-u^{\beta p}\right)du \qquad (3.2.1.14) \\
&+\frac{1}{\alpha}\int_{2^{-1}}^{1}\left(u^{\beta p}-\left(1-u\right)^{\beta p}\right)du \\
&= \frac{1}{\alpha(\beta p+1)}\left[2-2^{-\beta p+1}\right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.1.13) ve (3.2.1.14) ifadelerinden istenilen sonuç elde edilir.

3.3 İkinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Caputo $k-$Kesirli Türevler İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde Caputo $k-$kesirli türevleri kullanarak ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde edilecektir.

Şimdi yukarıda tanımlanan ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon kavramı hatırlatılacaktır.

$f : I \subseteq \mathbb{R}_0 = [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $s \in (0, 1]$ olmak üzere

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

ise $f \in K_s^2$ dir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

S. S. Dragomir ve S. Fitzpatrick 1999 yılında yayınlanan makalelerinde ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini vermişlerdir.

Teorem 3.3.1: $f \in L[a, b]$ olmak üzere, $s \in (0, 1)$ için $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1} \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (3.3.1) de $s = 1$ alınırsa klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir (Dragomir ve Fitzpatrick, 1999).

Şimdi bu başlık altında ele alacağımız G. Farid ve arkadaşlarının 2016 yılındaki çalışmasında ifade ettiği Caputo $k-$kesirli türev tanımı aşağıdadır.

Tanım 3.3.2: $f \in AC^n[a, b]$ fonksiyonu verilsin. $\alpha > 0$, $k > 1$, $\alpha \notin \{1, 2, 3, \cdots\}$ ve $n = [|\alpha|] + 1$ olmak üzere

$${}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}} d\tau, \ x > a \tag{3.3.2}$$

ve

$${}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k} f(x) = \frac{(-1)^n}{k\Gamma_k\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau - x)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}} d\tau, \ x < b, \tag{3.3.3}$$

eşitliklerine sırasıyla sol ve sağ Caputo $k-$kesirli türev denir. Burada $\Gamma_k(x)$ ise,

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty \tau^{x-1} e^{-\frac{\tau^k}{k}} d\tau$$

$$\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$$

dir (Farid ve arkadaşları, 2016).

G. Farid ve arkadaşlarının tanımladığı bu türev tanımdan faydalanarak Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikleri aşağıdaki gibi verildi:

Teorem 3.3.3: $a < b$ için $f \in C^n[a,b]$ olmak üzere, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}$ ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ise

$$f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2^{s+\frac{\alpha}{k}-n}(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f\right)(b)\right] \tag{3.3.4}$$

$$\leq \left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\left\{\frac{2^{-2s}}{n+s-\frac{\alpha}{k}}+2^{n-\frac{\alpha}{k}-s}B_{\frac{1}{2}}\left(n-\frac{\alpha}{k},s+1\right)\right\}$$

dir.

İspat: $f^{(n)}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda $s-$konveks olduğundan her $x, y \in [a,b]$ için

$$f^{(n)}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f^{(n)}(x)+f^{(n)}(y)}{2^s}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\tau \in [0,1]$ için

$$x = \frac{\tau}{2}a + \frac{(2-\tau)}{2}b \text{ ve } y = \frac{(2-\tau)}{2}a + \frac{\tau}{2}b$$

alınırsa,

$$2^s f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f^{(n)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)+f^{(n)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right) \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği yazılır.

(3.3.5) eşitsizliğinin her iki yanı $\tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$ ile çarpılıp, $[0,1]$ aralığı üzerinden integre edilirse,

$$2^s f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}d\tau$$

$$\leq \int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}f^{(n)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)d\tau+\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}f^{(n)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)d\tau$$

$$= \frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}}}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}f^{(n)}(x)\,dx+\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}}}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}f^{(n)}(x)\,dx$$

olur. Caputo $k-$kesirli türev ve Γ_k fonksiyonunun

$$\Gamma_k(\alpha+k)=\alpha\Gamma_k(\alpha)$$

özelliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} & f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2^{s+\frac{\alpha}{k}-n}(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f\right)(b)\right] \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Bu da istenilen (3.3.4) eşitsizliğinin ilk kısmıdır.

Diğer yandan, $f^{(n)}$ fonksiyonunun ikinci anlamda $s-$konveks olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} & f^{(n)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)+f^{(n)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right) \\ & \leq\left(\frac{\tau}{2}\right)^s f^{(n)}(a)+\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s f^{(n)}(b)+\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s f^{(n)}(a)+\left(\frac{\tau}{2}\right)^s f^{(n)}(b) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Yine yukarıdaki aynı teknik kullanılarak, (3.3.7) eşitsizliğinin her iki yanı $\tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}f^{(n)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)d\tau+\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}f^{(n)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)d\tau\right] \\ & \leq\left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\left[\left(\frac{\tau}{2}\right)^s+\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s\right]d\tau \\ & =\left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]2^{n-\frac{\alpha}{k}}\left\{\frac{1}{2^{n+s-\frac{\alpha}{k}}\left(n+s-\frac{\alpha}{k}\right)}+B_{\frac{1}{2}}\left(n-\frac{\alpha}{k},s+1\right)\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikte Caputo $k-$kesirli türevi ve $\Gamma_k(\alpha+k)=\alpha\Gamma_k(\alpha)$ özelliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2^{\frac{\alpha}{k}-n}(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f\right)(b)\right] \\ & \leq\left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\left\{\frac{2^{-s}}{n+s-\frac{\alpha}{k}}+2^{n-\frac{\alpha}{k}}B_{\frac{1}{2}}\left(n-\frac{\alpha}{k},s+1\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.3.7) ve (3.3.8) ifadelerinden istenilen sonuç elde edilir.

G. Farid ve arkadaşlarının verdiği aşağıdaki lemma, tarafımızdan elde edilecek olan yeni sonuçları ispatlamada yardımcı olacaktır.

Lemma 3.3.4: $a<b$ için $f\in C^{n}[a,b]$ olmak üzere, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}$ ikinci anlamda $s-$konveks ise,

$$\begin{aligned}
&2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}k\Gamma_k\left(n-\tfrac{\alpha}{k}+k\right)\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f\right)(a)+(-1)^{n}\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f\right)(b)\right]\\
&-f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&=\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)d\tau\right.\\
&\left.-\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}f^{(n+1)}\left(\frac{2-\tau}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)d\tau\right]
\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

eşitliği sağlanır (Farid ve arkadaşları, 2016).

Bu yardımcı Lemma kullanılarak aşağıdaki üç temel sonuç verilsin.

Teorem 3.3.5: $a<b$ için $f\in C^{n}[a,b]$ olmak üzere, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $q\geq 1$ için $\left|f^{(n+1)}\right|^{q}$ ikinci anlamda $s-$konveks ise,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f\right)(a)+(-1)^{n}\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f\right)(b)\right]-f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\
&\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}+1}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left\{\left[\frac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}}{\left(n+s-\frac{\alpha}{k}+1\right)2^{s}}+2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}B_{\frac{1}{2}}\left(n-\tfrac{\alpha}{k}+1,s+1\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left[2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}B_{\frac{1}{2}}\left(n-\tfrac{\alpha}{k}+1,s+1\right)+\frac{\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}}{\left(n+s-\frac{\alpha}{k}+1\right)2^{s}}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}\tag{3.3.10}$$

dir.

İspat: Öncelikle $q=1$ durumunu ele alalım. $\left|f^{(n+1)}\right|$ nin ikinci anlamada $s-$konveksliği dikkate alınarak, Lemma 3.3.4 yardımıyla

$$\left|\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f\right)(b)\right]-f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)\right|d\tau\right.$$

$$\left.+\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)\right|d\tau\right\}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left(\left(\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right)d\tau\right.$$

$$\left.+\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left(\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left(\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right)d\tau\right\}$$

$$=\frac{(b-a)}{4}\left[\frac{2^{-s}}{n+s-\frac{\alpha}{k}+1}+2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}B_{\frac{1}{2}}\left(n-\tfrac{\alpha}{k}+1,s+1\right)\right]\left[\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right] \tag{3.3.11}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan $q>1$ olsun. Yine Lemma 3.3.3 yardımıyla ve $\left|f^{(n+1)}\right|^q$ nun $s-$konveksliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f\right)(b)\right]-f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left[\left|f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)\right|+\left|f^{(n+1)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)\right|\right]d\tau$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{(2-\tau)}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left[\left(\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right]d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1 \tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left[\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left(\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right]d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q}{\left(n+s-\frac{\alpha}{k}+1\right)2^s}+2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q B_{\frac{1}{2}}\left(n-\frac{\alpha}{k}+1,s+1\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q B_{\frac{1}{2}}\left(n-\frac{\alpha}{k}+1,s+1\right)+\frac{\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{\left(n+s-\frac{\alpha}{k}+1\right)2^s}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu iki durum teoremin ispatını verir.

Teorem 3.3.6: $a<b$ için $f\in C^n[a,b]$ olmak üzere, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon

olsun. Eğer $q>1$ için $\left|f^{(n+1)}\right|^q$ ikinci anlamda $s-$konveks ise,

$$\left|\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f\right)(b)\right]-f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{pn-p\frac{\alpha}{k}+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{1}{2^s(s+1)}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\frac{2^{s+1}-1}{2^s(s+1)}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2^{s+1}-1}{2^s(s+1)}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\frac{1}{2^s(s+1)}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

dir.

İspat: $q>1$ olmak üzere $\left|f^{(n+1)}\right|^q$ fonksiyonunun ikinci anlamda s-konveksliği dikkate alınırsa, Lemma 3.3.4 ve Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\left|\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}+1}k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f\right)(b)\right]-f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)\right|d\tau+\int_0^1\tau^{n-\frac{\alpha}{k}}\left|f^{(n+1)}\left(\frac{2-\tau}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)\right|d\tau\right]$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\tau^{pn-p\frac{\alpha}{k}}d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^1\left|f^{(n+1)}\left(\frac{\tau}{2}a+\frac{(2-\tau)}{2}b\right)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left|f^{(n+1)}\left(\frac{2-\tau}{2}a+\frac{\tau}{2}b\right)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{pn-p\frac{\alpha}{k}+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^1\left[\left(\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right]d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left[\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left(\frac{\tau}{2}\right)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right]d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$= \frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{pn-p\frac{\alpha}{k}+1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{2^{s}\left(s+1\right)}\left|f^{(n+1)}\left(a\right)\right|^{q}+\frac{2^{s+1}-1}{2^{s}\left(s+1\right)}\left|f^{(n+1)}\left(b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2^{s+1}-1}{2^{s}\left(s+1\right)}\left|f^{(n+1)}\left(a\right)\right|^{q}+\frac{1}{2^{s}\left(s+1\right)}\left|f^{(n+1)}\left(b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

olarak yazılır.

3.4 $(p_1, p_2)-$Preinveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu alt başlıkta, öncelikle $(p_1, p_2)-$preinveks fonksiyonlar yardımıyla kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilecek. Sonrasında genelleştirilmiş kesirli integ-raller için $(p_1, p_2)-$preinveks fonksiyonlar yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmı ile ilgili bazı genellemeler elde edilecektir.

Son zamanlarda, konveks fonksiyonlar ve konveks kümeler genel bir çerçevede yeni teknikler kullanılarak çeşitli alanlarda genelleştirilmişlerdir. Bu konudaki araştırmacılardan biri olan M.A. Hanson, 1981 yılındaki çalışmalarında inveks fonksiyonları tanıttı. Preinveks fonksiyonlar olarak adlandırılan bir başka konveks fonksiyon sınıfı da T. Weir ve B. Mond tarafından 1998 yılındaki çalışmasında tanıtılmış ve bazı preinveks fonksiyon sınıflarının aynı zamanda inveks fonksiyonlar olduğunu göstermişlerdir, fakat bu ifade her preinveks fonksiyonun, inveks fonksiyon olması anlamına gelmez. İnveks fonksiyonların ve preinveks fonksiyonların bazı durumlarda eşdeğer olduğu bilinmektedir (Noor ve Noor 2006). Yine M.A. Noor ve arkadaşları 2017 yılındaki çalışmasında inveks kümeler üzerinde ayırt edilebilen preinveks fonksiyonların minimumunun, varyasyon benzeri eşitsizlikler sınıfı ile karakterize edilebileceğini göstermiştir. Preinveks fonksiyonlarının uygulamaları ve diğer özellikleri için bakınız T. Antczak 2005, A. Barani ve arkadaşları 2011, M. A. Noor 2007 ve K. I. Noor 2017.

K_η, $\mathbb{R}$ nin boştan farklı kapalı bir kümesi olmak üzere f: $K_\eta \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. η: $K_\eta \times K_\eta \to \mathbb{R}$ sürekli bi-fonksiyonu yardımıyla T. Weir ve B. Mond çalışmasında aşağıdaki yeni tanımları elde etmiştir.

Tanım 3.4.0.1: $\forall x, y \in K_\eta$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$x + \tau\eta(y, x) \in K_\eta$$

oluyorsa $K_\eta \subseteq \mathbb{R}$ ye η bi-fonksiyonuna göre inveks küme denir (Weir ve Mond, 1998).

Bu tanımlar göz önüne alındığında eğer $\eta(y, x) = y - x$ olarak seçilirse, K_η inveks kümesi klasik konveks kümeye dönüşür. Açıktır ki, her konveks küme bir inveks kümedir, fakat tersi doğru değildir.

Tanım 3.4.0.2: $\forall x, y \in K_\eta$, $\tau \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$f\left(x + \tau\eta\left(y, x\right)\right) \leq \left(1 - \tau\right) f\left(x\right) + \tau f\left(y\right) \tag{3.4.0.1}$$

mevcut ise $f : K_\eta \to \mathbb{R}$ ye $\eta(.,.)$ bi-fonksiyonuna göre preinveks fonksiyon denir (Weir ve arkadaşları, 1998).

Klasik anlamda ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği preinveks fonsiyolar için aşağıdaki gibi

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.4.0.2}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard-Noor eşitsizliği olarak adlandırılmıştır (Noor ve arkadaşları, 2000).

Bu tarz çalışmaların sonuçlarını incelemek için referanslara bakılabilir.

Tanım 3.4.0.3: $K_\eta \subseteq \mathbb{R}$, η bi-fonksiyonuna göre inveks küme olsun. $\forall x, y \in K_\eta$, $\tau \in [0,1]$ için

$$f(x+\tau\eta(y,x)) \leq \tau^{p_1}(1-\tau)^{p_1}[f(x)+f(y)], \ p_1, p_2 > 0 \tag{3.4.0.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f : K_\eta \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\eta(.,.)$ bi-fonksiyonuna göre $(p_1, p_2)-$preinveks fonksiyon denir (Noor ve arkadaşları, 2017).

Uyarı 3.4.0.4: $I \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : I \times I \to \mathbb{R}$ bi-fonksiyonuna göre inveks bir küme olsun. Her $x, y \in I$ ve her $t \in [0,1]$ için

$$\eta(y, y+t\eta(x,y)) = -t\eta(x,y) \tag{3.4.0.4}$$

ve

$$\eta(x, y+t\eta(x,y)) = (1-t)\eta(x,y) \tag{3.4.0.5}$$

ifadeleri elde edilir. (3.4.0.4) ve (3.4.0.5) eşitliklerinden

$$\eta(y+t_2\eta(x,y), y+t_1\eta(x,y)) = (t_2-t_1)\eta(x,y)$$

eşitliği sağlanır (Mohan ve Neogy, 1995).

Genelleştirilmiş kesirli integrallerin çeşitli tanımları yapılmaktadır, bunlardan biri olan aşağıdaki tanım M.Z. Sarıkaya ve arkadaşlarının çalışmasında verilmiştir.

Tanım 3.4.0.6: $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında artan ve pozitif monoton bir fonksiyon, $a < b$ olmak üzere $f, u \in L[a,b]$ olsun. $a \geq 0$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$J_{a^+,u}^{\alpha,k}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}(u(x)-u(\tau))^k f(\tau)d\tau, \ x > a \tag{3.4.0.6}$$

ve

$$J_{b-,u}^{\alpha,k}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (\tau - x)^{\alpha-1}(u(\tau) - u(x))^k f(\tau)d\tau,\ x < b \tag{3.4.0.7}$$

integrallerine sırasıyla α. mertebeden $J_{a^+,u}^{\alpha,k}f$ ve $J_{b-,u}^{\alpha,k}f$ genelleştirimiş Riemann-Liouville kesirli integralleri denir (Sarıkaya ve arkadaşları, 2017).

3.4.1 Ana Sonuçlar

Bu başlık altında öncelikle, kesirli integraller için $(p_1, p_2)-$preinveks fonksiyonu yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliği tarafımızdan verilmiştir.

Teorem 3.4.1.1: $\alpha > 0$ ve $a < a + \eta(b, a)$ olmak üzere $a, b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ bi-fonksiyonuna göre açık inveks bir küme ve $f \in L[a, a+\eta(b, a)]$ olsun. Eğer $f : [a, a + \eta(b, a)] \to (0, \infty)$ bir $(p_1, p_2)-$preinveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}\right) \\ & \le \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{p_1+p_2}\eta^{\alpha}(b, a)}[J_{a^+}^{\alpha} f(a + \eta(b, a)) + J_{(a+\eta(b,a))^-}^{\alpha} f(a)] \\ & \le \alpha\frac{[f(a) + f(a + \eta(b, a))]}{2^{p_1+p_2}}[B(\alpha + p_1, p_2 + 1) + B\alpha + p_2, p_1 + 1)] \end{aligned} \tag{3.4.1.1}$$

dir.

İspat: $a, b \in A$ olmak üzere A , η ye göre inveks bir küme olsun, bu durumda her $\tau \in [0, 1]$ için $a+\tau\eta(b, a) \in A$ olur. f fonksiyonunun $(p_1, p_2)-$preinveks olduğu dikkate alınırsa, her $x, y \in [a, a + \eta(b, a)]$ için

$$f\left(x + \frac{\eta(y, x)}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2^{p_1+p_2}} \tag{3.4.1.2}$$

yazılır. (3.4.1.2) eşitsizliğinde $x = a + (1 - \tau)\eta(b, a)$, $y = a + \tau\eta(b, a)$ değişken değiştirmeleri yapılırsa, eşitsizliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned} & 2^{p_1+p_2} f\left(a + (1 - \tau)\eta(b, a) + \frac{\eta(a + \tau\eta(b, a), a + (1 - \tau)\eta(b, a))}{2}\right) \\ & = 2^{p_1+p_2} f\left(a + (1 - \tau)\eta(b, a) + \frac{(2\tau - 1)\eta(b, a))}{2}\right) \\ & = 2^{p_1+p_2} f\left(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.4.1.3}$$

şeklinde ifade edilir. (3.4.1.3) eşitsiziliğinin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, τ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa,

$$\frac{2^{p_1+p_2}}{\alpha} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)$$

$$\leq \left[\int_0^1 \tau^{\alpha-1} f(a+(1-\tau)\eta(b,a))d\tau + \int_0^1 \tau^{\alpha-1} f(a+\tau\eta(b,a))d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{\eta^{\alpha}(b,a)} \left[\int_a^{a+\eta(b,a)} (a+\eta(b,a)-u)^{\alpha-1} f(u)du\right.$$

$$\left.+\int_a^{a+\eta(b,a)} (u-a)^{\alpha-1} f(u)du\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a)) + J_{(a+\eta(b,a))^-}^{\alpha} f(a)\right]$$

elde edilir. Buradan da,

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{p_1+p_2}\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a)) + J_{(a+\eta(b,a))^-}^{\alpha} f(a)\right] \tag{3.4.1.4}$$

ifadesi yazılır. Bu ise (3.4.1.1) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatıdır.

Şimdi de (3.4.1.1) eşitsizliğinin sol tarafını gösterelim. Eğer f, η inveks fonksiyonuna göre $[a, a+\eta(b,a)]$ aralığında preinveks fonksiyon ise, bu durumda her $\tau \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} &f(a+\tau\eta(b,a)) \\ &= f(a+\eta(b,a)+(1-\tau)\eta(a,a+\eta(b,a))) \\ &\leq \tau^{p_1}(1-\tau)^{p_2}\left[f(a+\eta(b,a))+f(a)\right] \end{aligned} \tag{3.4.1.5}$$

eşitsiziliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} &f(a+(1-\tau)\eta(b,a)) \\ &= f(a+\eta(b,a)+\tau\eta(a,a+\eta(b,a \\ &\leq (1-\tau)f(a+\eta(b,a))+\tau f(a) \\ &\leq (1-\tau)^{p_1}\tau^{p_2}\left[f(a+\eta(b,a))+f(a)\right] \end{aligned} \tag{3.4.1.6}$$

eşitsizliği de elde edilir. (3.4.1.5) ve (3.4.1.6) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp, $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığı üzerinden τ ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 \tau^{\alpha-1} f(a+\tau\eta(b,a))d\tau + \int_0^1 \tau^{\alpha-1} f(a+(1-\tau)\eta(b,a))d\tau$$

$$\leq [f(a)+f(a+\eta(b,a)] \int_0^1 \tau^{\alpha-1} \left[\tau^p(1-\tau)^q + (1-\tau)^p \tau^q\right] d\tau$$

$$= [f(a)+f(a+\eta(b,a)] \left[B(\alpha+p,q+1) + B(\alpha+q,p+1)\right]$$

olur. Bu ise,

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{p_1+p_2}\eta^{\alpha}(b,a)}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a)) + J_{(a+\eta(b,a))^-}^{\alpha} f(a)\right] \\ &\leq \frac{\alpha}{2^{p_1+p_2}}[f(a)+f(a+\eta(b,a)]\left[B(\alpha+p,q+1)+B(\alpha+q,p+1)\right]\end{aligned} \tag{3.4.1.7}$$

dir. (3.4.1.4) ve (3.4.1.7) ifadelerinden ispat tamamlanır.

Uyarı 3.4.1.2: Teorem 3.4.1.1 de $p_1 = p_2 = 1$ olmak üzere $\eta(x,y) = x - y$ olarak alınırsa İ. İşcan'ın 2013 yılındaki çalışmasında bulunan Teorem 3.1 elde edilir.

Şimdi de bu başlık altında ispatlarda faydalanılacak İ. İşcan 2013 deki çalışmasında aşağıdaki lemmayı ispatlamıştır.

Lemma 3.4.1.3: $a < a+\eta(b,a)$ olmak üzere $a,b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ e göre açık inveks bir küme olsun. Eğer $f' \in L[a, a+\eta(b,a)]$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} \\ &-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a)) + J_{(a+\eta(b,a))^-}^{\alpha} f(a)\right] \\ &= \frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1 \left[\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}\right] f'(a+\tau\eta(b,a))d\tau\end{aligned} \tag{3.4.1.8}$$

dir(İşcan, 2013).

Teorem 3.4.1.4: $a < a+\eta(b,a)$ olmak üzere $a,b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ e göre açık inveks bir küme ve $f' \in L[a, a+\eta(b,a)]$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, a+\eta(b,a)]$ üzerinde (p_1,p_2) −preinveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(a + \eta(b,a))}{2} \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)} [J^{\alpha}_{a^+} f(a + \eta(b,a)) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-} f(a)] \right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} [|f'(a)| + |f'(b)|] \tag{3.4.1.9}$$

$$\times \left[B_{1/2}(p_1+1, p_2+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_1+1, p_2+1) \right.$$

$$\left. + B_{1/2}(p_2+1, p_1+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_2+1, p_1+1) \right]$$

dir. Burada $B_{1/2}(.)$ yarım (tam olmayan) beta fonksiyonudur.

İspat: Yukarıdaki Lemma 3.4.1.3 den ve $|f'|$ nin $(p_1, p_2)-$preinveksliğinden faydalanarak

$$\left| \frac{f(a) + f(a + \eta(b,a))}{2} \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J^{\alpha}_{a^+} f(a + \eta(b,a)) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 |\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}| \, |f'(a + \tau\eta(b,a))| \, d\tau$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 |\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}| \, \tau^{p_1} (1-\tau)^{p_2} [|f'(a)| + |f'(b)|] \, d\tau$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \left\{ \int_0^{1/2} [(1-\tau)^{\alpha} - \tau^{\alpha}] \tau^{p_1} (1-\tau)^{p_2} [|f'(a)| + |f'(b)|] \, d\tau \right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^1 [\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}] \tau^{p_1} (1-\tau)^{p_2} [|f'(a)| + |f'(b)|] \, d\tau \right\}$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{2} [|f'(a)| + |f'(b)|] \left[B_{1/2}(p_1+1, p_2+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_1+1, p_2+1) \right.$$

$$\left. + B_{1/2}(p_2+1, p_1+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_2+1, p_1+1) \right]$$

elde edilir, bu ise istenilen sonuçtur.

Uyarı 3.4.1.5: Teorem 3.4.1.4 de $\eta(x,y) = x - y$ seçilirse, (p_1, p_2) −konveks fonksi–yonlar için elde edilen sonuçları verir.

Teorem 3.4.1.6: $a < a + \eta(b,a)$ olmak üzere $a, b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ e göre açık inveks bir küme ve $f' \in L[a, a + \eta(b,a)]$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, a+\eta(b,a)]$ üzerinde (p_1, p_2) −preinveks fonksiyon ise $r > 1$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J^{\alpha}_{a^+} f(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-} f(a) \right] \right| \tag{3.4.1.10}$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2(\alpha r+1)^{\frac{1}{r}}} \left\{ B(p_1+1, p_2+1) \left[|f'(a)|^{\frac{r}{r-1}} + |f'(a+\eta(b,a))|^{\frac{r}{r-1}} \right] \right\}^{\frac{r-1}{r}}$$

dir

İspat: Lemma 3.4.1.3 ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\left| \frac{f(a) + f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J^{\alpha}_{a^+} f(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 |\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}| \, |f'(a+\tau\eta(b,a))| \, d\tau$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \left(\int_0^1 |\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |f'(a+\tau\eta(b,a))|^{\frac{r}{r-1}} d\tau \right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2(\alpha r+1)^{\frac{1}{r}}} B(p_1+1, p_2+1) \left[|f'(a)|^{\frac{r}{r-1}} + |f'(a+\eta(b,a))|^{\frac{r}{r-1}} \right]^{\frac{r-1}{r}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.4.1.7: Teorem 3.4.1.6 da $\eta(x,y) = x - y$ seçilirse, (p_1, p_2) −konveks fonksi–yonlar için elde edilen sonuçları verir.

Teorem 3.4.1.8: $a < a + \eta(b,a)$ olmak üzere $a, b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ e göre açık inveks bir küme ve $f' \in L[a, a + \eta(b,a)]$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^{\frac{r}{r-1}}$, $[a, a+\eta(b,a)]$ üzerinde (p_1, p_2) −preinveks fonksiyon ise $r > 1$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(a + \eta(b,a))}{2} \right.$$

$$\left. -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J^{\alpha}_{a^+} f(a^+ + \eta(b,a)) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-} f(a) \right] \right|$$

$$= \eta(b,a) \left(\frac{2^{\alpha}-1}{(\alpha+1)\,2^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{r}} \left[|f'(a)|^{\frac{r-1}{r}} + |f'(b)|^{\frac{r-1}{r}} \right]^{\frac{r}{r-1}} \tag{3.4.1.11}$$

$$\times \left\{ B_{1/2}(p_1+1, p_2+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_1+1, p_2+1) \right.$$

$$\left. + B_{1/2}(p_2+1, p_1+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_2+1, p_1+1) \right\}^{\frac{r}{r-1}}$$

dir.

İspat: Lemma 3.4.1.3 ve Hölder eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\left| \frac{f(a) + f(a + \eta(b,a))}{2} \right.$$

$$\left. -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^{\alpha}(b,a)} \left[J^{\alpha}_{a^+} f(a + \eta(b,a)) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \left(\int_0^1 |\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}|\, d\tau \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times \left(\int_0^1 |\tau^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}| \left[|f'(a)|^{\frac{r-1}{r}} + |f'(b)|^{\frac{r-1}{r}} \right] d\tau \right)^{\frac{r}{r-1}}$$

$$= \eta(b,a) \left(\frac{2^{\alpha}-1}{(\alpha+1)\,2^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{r}} \left[|f'(a)|^{\frac{r-1}{r}} + |f'(b)|^{\frac{r-1}{r}} \right]^{\frac{r}{r-1}}$$

$$\times \left\{ B_{1/2}(p_1+1, p_2+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_1+1, p_2+1) \right.$$

$$\left. + B_{1/2}(p_2+1, p_1+\alpha+1) - B_{1/2}(\alpha+p_2+1, p_1+1) \right\}^{\frac{r}{r-1}}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Uyarı 3.4.1.9: Teorem 3.4.1.8 de $\eta(x,y) = x - y$ seçilirse, (p_1, p_2) −konveks fonksi– yonlar için elde edilen sonuçları verir.

3.4.2 Genelleştirilmiş Bazı İntegral Eşitsizlikleri

Bu başlık altında ilk olarak, aşağıdaki teoremde (p_1, p_2) −preinveks fonksiyonlar yardımıyla genelleştirilmiş yeni kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipi eşitsiz-liği verilecektir.

Teorem 3.4.2.1: $a < a+\eta(b,a)$ olmak üzere $a, b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A\times A \to \mathbb{R}$ e göre açık inveks bir küme olsun. $a < b$ için F, f, $u \in L[a, a+\eta(b,a)]$ ve $u : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$, $(a, a+\eta(b,a))$ üzerinde artan ve pozitif monoton bir fonksiyon olsun. Eğer f ve u, (p_1, p_2) −preinveks fonksiyonlar $\alpha > 0$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)\right] \\ & -\frac{1}{2}\left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(F)(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(F)(a)\right] \qquad (3.4.2.1) \\ & \leq \left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2^{p_1+p_2}} \end{aligned}$$

dir.

İspat: f fonksiyonunun $[a, a+\eta(b,a)]$ üzerinde (p_1, p_2) −preinveks olduğu dikkate alınırsa, her $x, y \in [a, a+\eta(b,a)]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^{p_1+p_2}}$$

elde edilir. $\tau \in [0,1]$ olmak üzere $x = a + (1-\tau)\eta(b,a)$ ve $y = a + \tau\eta(b,a)$ değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$2^{p_1+p_2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a+(1-\tau)\eta(b,a)) + f(a+\tau\eta(b,a)) \qquad (3.4.2.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonrasında (3.4.2.2) eşitsizliğinin her iki yanı

$$\tau^{\alpha-1}(u(b) - u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k$$

ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinden τ ya göre integrali alınırsa,

$$2^{p_1+p_2} f\left(a+(1-\tau)\eta(b,a)+\frac{\eta(a+\tau\eta(b,a),a+(1-\tau)\eta(b,a))}{2}\right)$$

$$\times\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k d\tau$$

$$\leq \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k f(a+(1-\tau)\eta(b,a))d\tau$$

$$+\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k f(a+\tau\eta(b,a))d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan $y=a+(1-\tau)\eta(b,a)$ değişken değiştirmesi ile

$$2^{p_1+p_2} f\left(a+(1-\tau)\eta(b,a)+\tfrac{\eta(a+\tau\eta(b,a),a+(1-\tau)\eta(b,a))}{2}\right) J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a))$$

$$\leq J^{\alpha,k}_{a^+,u}(\tilde{f})(a+\eta(b,a))+J^{\alpha,k}_{a^+,u}(f)(a+\eta(b,a)),$$

elde edilir, yani

$$2^{p_1+p_2} f\left(a+(1-\tau)\eta(b,a)+\tfrac{\eta(a+\tau\eta(b,a),a+(1-\tau)\eta(b,a))}{2}\right) J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a))$$
$$\leq J^{\alpha,k}_{a^+,u}(F)(a+\eta(b,a)) \tag{3.4.2.3}$$

ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde (3.4.2.3) eşitsizliğinin her iki yanı $\tau^{\alpha-1}(u(a+\tau\eta(b,a))-u(a))^k$ ile çarpılıp, $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integrali alınırsa,

$$2^{p_1+p_2} f\left(a+(1-\tau)\eta(b,a)+\frac{\eta(a+\tau\eta(b,a),a+(1-\tau)\eta(b,a))}{2}\right)$$

$$\times\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(u(a+\tau\eta(b,a))-u(a))^k d\tau$$
$$\tag{3.4.2.4}$$
$$\leq \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(u(a+\tau\eta(b,a))-u(a))^k f(a+(1-\tau)\eta(b,a))d\tau$$

$$+\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(u(a+\tau\eta(b,a))-u(a))^k f(a+\tau\eta(b,a))d\tau$$

elde edilir. (3.4.2.4) eşitsizliğinde $y=a+\tau\eta(b,a)$ değişken değiştirmesi ile

$$2^{p_1+p_2}f\left(a+(1-\tau)\eta(b,a)+\tfrac{\eta(a+\tau\eta(b,a),a+(1-\tau)\eta(b,a))}{2}\right)J^{\alpha+p_2,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a) \tag{3.4.2.5}$$

$$\leq J^{\alpha+p_2,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(F)(a)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.4.2.3) ve (3.4.2.5) eşitsizliklerinden

$$f\left(a+(1-\tau)\eta(b,a)+\frac{\eta(a+\tau\eta(b,a),a+(1-\tau)\eta(b,a))}{2}\right)$$

$$\times\left[J^{\alpha+p_1,k}_{a^+,u}(1)(b)+J^{\alpha+p_2,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2^{p_1+p_2}}\left[J^{\alpha+p_1,k}_{a^+,u}(F)(a+\eta(b,a))+J^{\alpha+p_2,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(F)(a)\right]$$

alınır. Böylece (3.4.2.1) in ilk kısmı ispatlanmış olur.

(3.4.2.1) eşitsizliğinin diğer kısmını göstermek için yine f'nin (p_1,p_2) −preinveks fonksiyon olduğu dikkate alınırsa,

$$f(a+(1-\tau)\eta(b,a))+f(a+\tau\eta(b,a)) \tag{3.4.2.6}$$

$$\leq\left[\tau^{p_1}(1-\tau)^{p_2}+\tau^{p_2}(1-\tau)^{p_1}\right][f(a)+f(b)]$$

dir, (3.4.2.6) eşitsizliğinin her iki yanı $\tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k$ ile çarpılıp, $[0,1]$ üzerinde τ ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1\tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^kf(a+(1-\tau)\eta(b,a))d\tau$$

$$+\int_0^1\tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^kf(a+\tau\eta(b,a))d\tau$$

$$\leq[f(a)+f(b)]\int_0^1\tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k$$

$$\times\left[\tau^{p_1}(1-\tau)^{p_2}+(1-\tau)^{p_1}\tau^{p_2}\right]d\tau$$

$$\leq[f(a)+f(b)]\int_0^1\tau^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-\tau)\eta(b,a)))^k\left[\tau^{p_1}+\tau^{p_2}\right]d\tau$$

$$=J^{\alpha+p_1,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a))+J^{\alpha+p_2,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)$$

elde edilir. Bu da (3.4.2.1) eşitsizliğinin sağ kısmının ispatını tamamlar.

Uyarı 3.4.2.2: Teorem 3.4.2.1 de $\eta(x,y) = x - y$ alınırsa, (p_1, p_2) −konveks fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar elde edilir.

Şimdi, aşağıdaki lemma da genelleştirilmiş yeni kesirli integraller için önemli bir ifade verilecektir.

Lemma 3.4.2.3: $a < a+\eta(b,a)$ olmak üzere $a, b \in A$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$, $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ e göre açık inveks bir küme olsun. $a < b$ için F, f', $u \in L[a, a+\eta(b,a)]$ ve $u : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$, $(a, a+\eta(b,a))$ üzerinde artan ve pozitif monoton bir fonksiyon olsun. Eğer f ve u, (p_1, p_2) −preinveks fonksiyonlar ise $\alpha > 0$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha+q,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a) \right] \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \right. \\
&\left. -\frac{1}{2} \left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(F)(a+\eta(b,a)) + J^{\alpha+q,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(F)(a) \right] \right\} \qquad (3.4.2.7) \\
&= \frac{(\eta(b,a))^{\alpha}}{2^{p_1+p_2}\Gamma(\alpha)} \int_a^b G(y) F'(y) dy
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$F'(y) = f'(y) - f'(a+b-y)$$

ve

$$\begin{aligned}
G(y) = &\left[\int_0^{\frac{y-a}{\eta(b,a)}} s^{\alpha-1}(u(b) - u(a+(1-s)\eta(b,a)))^k ds \right. \\
&\left. + \int_{\frac{y-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-s)^{\alpha-1}(u(a+(1-s)\eta(b,a)) - u(a))^k ds \right] \qquad (3.4.2.8)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilmiştir.

İspat: İlk olarak,

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\tau} s^{\alpha-1}(u(b) - u(sa+(1-s)b))^k ds \right] f'(a+\tau\eta(b,a)) d\tau$$

integralinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\tau} s^{\alpha-1}(u(b) - u(sa+(1-s)b))^k ds \right] f'(a+\tau\eta(b,a)) d\tau \qquad (3.4.2.9) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta(b,a)) f(b) - \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha,k}_{a^+,u}(\tilde{f})(a+\eta(b,a))
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde,

$$\int_0^1 \left[\int_0^\tau s^{\alpha-1}(u(b)-u(sa+(1-s)b))^k ds\right] f'(a+(1-\tau)\,\eta\,(b,a))d\tau$$

integralinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$I_2 = \int_0^1 \left[\int_0^\tau s^{\alpha-1}(u(b)-u(sa+(1-s)b))^k ds\right] f'(a+(1-\tau)\,\eta\,(b,a))d\tau$$

$$= -\frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)(a+\eta\,(b,a))f(a) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha,k}_{a^+,u}(f)(a+\eta\,(b,a)) \tag{3.4.2.10}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\int_0^1 \left[\int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-1}(u(sa+(1-s)b)-u(a))^k ds\right] f'(a\tau+(1-\tau)\,\eta\,(b,a))d\tau$$

integrali

$$I_3 = \int_0^1 \left[\int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-1}(u(sa+(1-s)b)-u(a))^k ds\right] f'(a\tau+(1-\tau)\,\eta\,(b,a))d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha+q,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)f(a) - \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha+q,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(f)(a), \tag{3.4.2.11}$$

ve son olarak

$$\int_0^1 \left[\int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-1}(u((a+(1-s)\,\eta\,(b,a))-u(a))^k ds\right] f'(a+\tau\eta\,(b,a))d\tau$$

integrali

$$I_4 = \int_0^1 \left[\int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-1}(u((a+(1-s)\,\eta\,(b,a))-u(a))^k ds\right] f'(a+\tau\eta\,(b,a))d\tau$$

$$= -\frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)f(b) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(\tilde{f})(a) \tag{3.4.2.12}$$

olarak elde edilir. (3.4.2.9), (3.4.2.10), (3.4.2.11) ve (3.4.2.12) ifadeleri aynı anda gözönüne alınırsa,

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} \left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(1)((a+\eta\,(b,a))) + J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(1)(a)\right][f(a)+f(b)] \tag{3.4.2.13}$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{\eta\,(b,a)^{\alpha+1}} \left[J^{\alpha,k}_{a^+,u}(F)((a+\eta\,(b,a))) + J^{\alpha,k}_{(a+\eta(b,a))^-,u}(F)(a)\right]$$

eşitliği elde edilir.

(3.4.2.13) eşitliğinin her iki yanı $\dfrac{\eta\left(b,a\right)^{\alpha+1}}{2^{p_1+p_2}\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa,

$$\left\{\left[J_{a^+,u}^{\alpha,k}(1)((a+\eta\left(b,a\right)))+J_{(a+\eta(b,a))^-,u}^{\alpha,k}(1)(a)\right]\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[J_{a^+,u}^{\alpha,k}(F)((a+\eta\left(b,a\right)))+J_{(a+\eta(b,a))^-,u}^{\alpha,k}(F)(a)\right]\right\}$$

$$=\frac{\eta\left(b,a\right)^{\alpha+1}}{2^{p_1+p_2}\Gamma(\alpha)}$$

$$\times\left\{\int_0^1\left[\int_0^\tau s^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-s)\,\eta\left(b,a\right)))^k ds\right]\right. \tag{3.4.2.14}$$

$$\times\left[f'(a+\tau\eta\left(b,a\right))-f'(a\tau+(1-\tau)b)\right]d\tau$$

$$+\int_0^1\left[\int_\tau^1(1-s)^{\alpha-1}(u(a+(1-s)\,\eta\left(b,a\right))-u(a))^k ds\right]$$

$$\times\left[f'(a+\tau\eta\left(b,a\right))-f'(a\tau+(1-\tau)b)\right]d\tau\}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki (3.4.2.13) eşitsizliğinde $y=a+\tau\eta\left(b,a\right)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$G(y)=\left[\int_0^{\frac{y-a}{\eta(b,a)}}s^{\alpha-1}(u(b)-u(a+(1-s)\,\eta\left(b,a\right)))^k ds\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{y-a}{\eta(b,a)}}^1(1-s)^{\alpha-1}(u(a+(1-s)\,\eta\left(b,a\right))-u(a))^k ds\right] \tag{3.4.2.15}$$

ve

$$\left[J_{a^+,u}^{\alpha,k}(1)((a+\eta\left(b,a\right)))+J_{(a+\eta(b,a))^-,u}^{\alpha,k}(1)(a)\right]\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[J_{a^+,u}^{\alpha,k}(F)((a+\eta\left(b,a\right)))+J_{(a+\eta(b,a))^-,u}^{\alpha,k}(F)(a)\right] \tag{3.4.2.16}$$

$$=\frac{\eta\left(b,a\right)^{\alpha}}{2^{p_1+p_2}\Gamma(\alpha)}\int_a^b G(y)F'(y)dy$$

elde edilir. Bu da lemmanın ispatını tamamlar.

Uyarı 3.4.2.4: Lemma 3.4.2.3 de $\eta(x,y) = x - y$ seçilirse, (p_1, p_2) −konveks fonksiyonlar için elde edilen sonuçları verir.

4 Sonuç ve Öneriler

4.1 Sonuçlar

Üçüncü bölüm bulgular kısmında; (3.1) $\varphi-$Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Kesirli (Fractional) İntegraller İçin Bazı Eşitsizlikler alt başlıklı çalışma, Some Integral Inequalities For Functions Whose Second Derivatives Are $\varphi-$Convex By Using Fractional Integrals adı altında "Konuralp Journal of Mathematics" adlı dergide basılmıştır. Basım bilgileri 9(2): 243-258 (2015) şeklindedir. (3.2) Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler alt başlıklı çalışma, On the Hadamard's type Inequalities for Convex Functions via Conformable Fractional Integrals, adı altında "Journal of Inequalities and Special Functions" adlı dergide basılmıştır. Basım bilgileri , vol. 9(3): 1–10 (2018) şeklindedir. (3.3) İkinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Caputo $k-$Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler alt başlıklı çalışma, Hermite–Hadamard Type Inequalities Via Caputo $k-$Fractional Derivatives For The $s-$Convex Function In The Second Sense adı altında yayına gönderilmiştir. Son olarak (3.4) $(p_1, p_2)-$Preinveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler alt başlıklı çalışma, Some Fractional Integral Inequalities For (p_1, p_2)-preinvex Functions adı altında yayına gönderilmiştir.

4.2 Öneriler

Üçüncü bölüm altında bulunan çalışmalardan hareketle açık problemler verilebilir. Yani, (3.1) kısmının son teoreminde bazı farklı türden konveks fonksiyonlar için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak ve kesirli integrallerden yararlanılarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir. (3.2) kısmın da ise integral içinde farklı fonksiyonlar alınarak, bazı farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni bir lemma elde edilip bu lemmadan hareketle uyumlu kesirli integrallerden yararlanılarak, Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., 2015. On Conformable Fractional Calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279 (2015) 57–66.

Abu Hammad, M., and Khalil, R., 2014. Conformable Fractional Heat Differential Equations, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 94 (2), 215-221.

Abu Hammad, M. and Khalil, R., 2014. Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations, International Journal of Differential Equations and Applications, 13(3), 177-183.

Almeida, R., Guzowska, M. and Odzijewicz, T., 2016. A Remark On Local Fractional Calculus and Ordinary Derivatives, arXiv preprint arXiv:1612.00214.

Anastassiou G. A., 2009. Fractional Differentiation Inequalities, Springer Science-Businness Media, LLC, Dordrecht, the Netherlands.

Anastassiou G.A., 2009. On Right Fractional Calculus, Chaos, Solitons and Fractals, 42 (1), 365-376.

Anderson D. R., Ulness D. J., 2015. Newly Defined Conformable Derivatives, Advances in Dynamical Systems and Applications,10 (2), 109–137.

Anderson D. R., 2016. Taylor's Formula and Integral Inequalities For Conformable Fractional Derivatives, Contributions in Mathematics and Engineering, 25-43.

Antczak T., 2005. Mean value in invexity analysis, Nonlinear Analysis, 60 (8), 1473 -1484.

Akkurt A., Yildirim M.E. and Yildirim H., 2017. A New Generalized Fractional Derivative and Integral, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2), 248-259.

Barani, A., Ghazanfari, A.G. and Dragomir, S.S., 2012. Hermite- Hadamard Inequality For Functions Whose Derivatives Absolute Values Are Preinvex, Journal of Inequalities and Applications, 2012 (247), 1-9.

Bayraktar M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, ISBN 975-442-035-1.

Beckenbach, E. F., 1948. Convex Functions, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (5), 439-460.

Breckner W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen Fur Eine Klasse Verallgemeinerter Konvexer Funktionen in Topologischen Linearen Raumen. (German), Publ. Inst. Math., (Beograd) (N.S.), 23 (37), 13-20.

Caputo, M., 1967. Linear Model of Dissipation Whose Q is almost frequency independent-II, The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13(5), 529-539.

Carter, M., vanBrunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. Springer-Verlag,228, NewYork.

Dahmani Z., 2010. On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, Ann. Funct. Anal., 1(1), 51-58.

Dalir, M. and Bashour, M., 2010. Applications of fractional calculus. Applied Mathematical Sciences, 4(21), 1021–1032.

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense , Demonstration Math, 32 (4), 687-696.

Dragomir, S. S., 2015. Inequalities of Jensen type for φ-convex functions, Fasc. Math. 55(1), 35-52.

Dragomir, S.S. and Agarwal R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Applied Mathematics Letters, 11 (5), 91-95.

Dragomir, S. S. and Pearce C. E. M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University.

Farid, G., A, Javed, Rehman A. U., and Qureshi M. I., On Hadamard-type Inequalities for Differentiable functions via Caputo $k-$Fractional Derivatives, Pure Mathematics, 4 (1), 1-12.

Farid, G., 2016. Hadamard and Fejér-Hadamard inequalities for generalized fractional integrals involving special functions. Konuralp Journal of Mathematics, 4 (1),108–113.

Farid, G., Naqvi, S., and Rehman, A. U., 2017. A version of the Hadamard inequality for Caputo fractional derivatives and related results. RGMIA Research Report of Collection, 20 (59), 11 pp.

Farissi, A. E., 2010. Simple proof and refinement of Hermite-Hadamard inequality. Journal Mathematical Inequalities, 4 (3), 365–369.

Gorenflo, R. and Mainardi, F., Essentials of Fractional calculus, www.maphysto.dk /oldpages/events/LevyCAC2000/MainardiNotes/fm2k0a.ps.

Gorenflo, R. and Mainardi, F., 1997. Fractional calculus; integral and differential equations of fractional order, Springer Verlag, Wien, 223-276.

Goreno, R., 1997. Fractional calculus: Some numerical methods. (Eds. A. Carpinteri and F. Mainardi) Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. New York: Springer Verlag, 277–290.

Hadamard, J., 1893. Etude sur les propriétrés des functions entiéres et en particulier dune fonction considérée par Riemann. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 58, 171–215.

Hanson, M.A., 1981. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, J. Math. Anal. Appl,. 80, 545-550.

Hudzik, H. and Maligranda, L. 1994. Some remarks on $s-$convex functions, Aequationes Math., 48 (1), 100-111.

Hussain, S. and Bhatti, M. I., Hadamard-Type Inequalities for $s-$Convex Functions, Punjab University Journal of Mathematics, (ISSN 1016-2526) Vol. (0000) pp. 51-60.

Kamenova Ishteva, M., 2005. Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator, Department of Mathematics Universitat Karlshure (TH) Master Thesis, Bulgaria.

Katugampola, U. N., 2014. A new fractional derivative with classical properties, e-print arXiv:1410.6535.

Kavurmaci, H., Avci, M. and Özdemir, M. E., 2011. New inequalities of Hermite-

Hadamard's type for convex functions with applications, Journ. of Inequal. and Appl., 2011:86.

Khalil, R., Al horani, M.A., 2014. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational Apllied Mathematics, 264, 65-70.

Kırmacı, U.S., 2004. Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, Appl. Math. Comput. 147 (1), 137–146.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006. Theory and applications of fractional diferential equations. North-Holland Mathematics Studies New York-London: Elsevier, pp. 204.

Leibniz, G., W., 1849. Letter from Hanover, Germany to G.F.A. L'Hospital, September 30, 1695, Leibniz Mathematische Schriften, Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, p.301-302.

Leibniz, G., W. 1849. Letter from Hanover, Germany to Johann Bernoulli, December 28, 1695, Leibniz Mathematische Schriften, Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, p.226.

Leibniz, G. W., 1849. Letter from Hanover, Germany to John Wallis, May 28, 1697, Leibniz Mathematische Schriften, Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, p.25.

Loverro, A. 2004. Fractional calculus: History, definitions and applications for the engineer. Notre Dame, IN: Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame.

Mainardi, F. 1997. Fractional Calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. A. Carpinteri &F. Mainardi (Eds.), Fractals and fractional calculus in continuum mechanics (pp. 291–348). Wien: Springer Verlag.

Mihesan, V. G., 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex, Cluj-Napoca, Romania.

Miller, K. S. and Ross, B. 1993. An introduction to fractional calculus and fractional diferential equations. Hoboken, NJ: John Wiley And Sons.

Mitrinovic', D. S. and Lackovicé, I. B. 1985. Hermite and convexity. Aequationes Mathematicae, 28, 229–232.

Mitrinović D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mohan S. R. and Neogy S. K., 1995. On invex sets and preinvex functions, J. Math. Anal. Appl. 189, 901-908.

Noor M. A. and Noor K. I., 2006. Some characterizations of strongly preinvex functions, J. Math. Anal. Appl. 316, 697-706.

Noor, M. A., 2007. "On Hadamard integral inequalities invoving two log-preinvex functions," J. Inequal. Pure Appl. Math., 8 (3), 1-6. Article 75.

Noor, M. A., 1994. Variational-like inequalities, Optimization, 30, 323-330.

Noor, M. A., 2005. Invex equilibrium problems, J. Math. Anal. Appl. 302, 463-475.

Noor, M. Aslam, 2007. Hermite-Hadamard integral inequalities for log- preinvex functions, J. Math. Anal. Approx. Theory, 2. 126-131.

Noor, M. A., Awan M. U. and Noor K. I., 2017. Some new bounds of the quadrature formula of Gauss-Jacobi Type via (p, q)-preinvex functions, Appl. Math. Inf. Sci Lett. 5(2), 51-56.

Işcan, I., Bekar, K. and Numan, S., 2014. Hermite-Hadamard an Simpson type inequalities for differentiable quasi-geometrically convex functions, Turkish J. of Anal. and Number Theory, 2 (2), 42-46.

Işcan, I., 2013. New estimates on generalization of some integral inequalities for s-convex functions and their applications, Int. J. Pure Appl. Math., 86 (4), 727-746.

Işcan, I., 2013. Generalization of different type integral inequalities via fractional integrals for functions whose second derivatives absolute value are quasi-convex, Konuralp Journal of Mathematics, 1 (2), 67-79.

Işcan, I., On generalization of different type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals presented.

Işcan, I., 2013. "Hermite-Hadamard's Inequalities for Preinvex Function via Fractional Integrals and Related Fractional Inequalities American Journal of Mathematical Analysis, 1 (3), 33-38.

Iyiola, O.S. and Nwaeze, E.R., 2016. Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach, Progr. Fract. Differ. Appl., 2(2), 115-122.

Özdemir, M. E., Avic, M. and Kavurmaci, H., Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex and s-concave functions via fractional integrals, arXiv:1202.0380v1[math.CA].

Park, J., 2014. Some new Hermite-Hadamard-like type inequalities on geometrically convex functions, Inter. J. of Math. Anal., 8(16),793-802.

Park, J., 2015. On Some Integral Inequalities for Twice Differentiable Quasi-Convex and Convex Functions via Fractional Integrals, Applied Mathematical Sciences, Vol. 9(62), 3057-3069.

Pearce, C.E.M. and Pečarič, J., 2000. Inequalities for diffrentiable mapping with application to special means and quadrature formula, Appl. Math. Lett., 13, 51-55.

Pečarić J.E., Proschan F.and Tong Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Boston.

Pini, R., 1991. Invexity and generalized Convexity, Optimization 22, 513-525.

Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations to Methods of Their Solution, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA.

Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev, O.I., 1993. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, ISBN 2881248640.

Sarikaya, M. Z. and Ogunmez, H., 2012. On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, Abstract and applied analysis, (2010)10 pages.

Sarikaya, M.Z., Set, E., Yaldız H., Başak, N., 2013. Hermite–Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Math. Comput. Modell. 57 (9) 2403–2407.

Sarikaya, M.Z. Akkurt, A., Budak, H., Yıldırım, M.E. and Yıldırım, H., 2016. Hermite-Hadamard's inequalities for conformable fractional integrals(RGMIA) Research Report Colletion, 19, Article.

Sarıkaya, M.Z., Budak H., Some Generalized Integral Inequalities Via Fractional Integrals(Submitted).

Set, E., 2012. New inequalities of Ostrowski type for mapping whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals, Comput. Math. Appl., 63, 1147-1154.

Set, E., Sarikaya, M. Z. and Özdemir, M. E., 2010. Some Ostrowski's type Inequalities for functions whose second derivatives are s-convex in the second sense, arXiv: 1006.24 88v1 [math. CA] 12.

Set, E., Özdemir, M. E., Sarikaya M. Z., Karako, F., 2015. Hermite-Hadamard type inequalities for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals, Khayyam J. Math., 1(1), 62-70.

Shantanu, D. 2011. Functional fractional calculus. Berlin Heidelberg: Springer Science and Business Media.

Tunc, M., 2011. On some new inequalities for convex functions, Turk. J. Math., 35, 1-7.

Tunc, M. and Yildirim, H., 2012. On MT-Convexity, arXiv: 1205.5453 [math. CA].

Tunc M.¸, Göv E. and Şanal U., 2015. On tgs-convex function and their inequalities. Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform., 30 (5), 679–691.

Toader, Gh., 1988. On a generalization of the convexity, Mathematica, 30(53), 83-87.

Yang, X.M., and Li, D., 2001. On properties of preinvex functions, J. Math. Anal. Appl. 256. 229-241.

Yildirim, H., Kirtay, Z., 2014. Ostrowski Inequality for Generalized Fractional Integral and Related Inequalities, Malaya Journal of Matematik, 2(3), 322–329.

Yildirim M.E., Akkurt A. and Yildirim H., 2018. On the Hadamard's type Inequalities for Convex Functions via Conformable Fractional Integrals, Journal of Inequalities and Special Functions, 9 (3), 1–10.

Yildirim M.E., Akkurt A. and Yildirim H., 2016. Some Integral Inequalities For Functions Whose Second Derivatives Are $\varphi-$Convex By Using Fractional Integrals, Konuralp Journal of Mathematics, 4 (2), 1-9.

Yildirim M.E., Akkurt A. and Yildirim H., 2018. Hermite–Hadamard Type Inequalities Via Caputo $k-$Fractional Derivatives For The $s-$Convex Function In The Second Sense, Asian Research Journal of Mathematics (In review).

Yildirim M.E., Akkurt A. and Yildirim H., 2018. Some Fractional Integral Inequalities For (p, q)-preinvex Functions, (In review).

Weir, T. and Mond, B., 1998. Preinvex functions in multiple objective optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 136. 29-38.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı, soyadı	: Merve Esra YILDIRIM
Uyruğu	: T.C.
Doğum yeri ve tarihi	: 21.04.1988- Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	:
e-posta	: mesra@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Doktora	Ankara ÜNİVERSİTESİ/ Matematik Bölümü	2014-2015
Yüksek Lisans	Ankara ÜNİVERSİTESİ/ Matematik Bölümü	2014
Lisans	Ankara ÜNİVERSİTESİ/ Matematik Bölümü	2012
Lise	Kongre Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015-2018	SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2018. On the Hadamard's Type Inequalities for Convex Functions via Comformable Fractional Integrals. Journal of Inequalities and Special Functions, vol. 9, no. 3, pp. 1–10.
2. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2016. On Some Integral Inequalities for Twice Diferentiable Convex and Quasi Convex Functions via k-Fractional Integrals. British Journal of Mathematics & Computer Science, 16(6), 1-11., Doi: 10.9734/BJMCS/2016/26309 (Yayın No: 2818151).
3. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2017. On Some Integral Inequalities for Conformable Fractional Integrals. Asian Journal of Mathematics and Computer Research, 15(3), 205-212. (Yayın No: 4084458).
4. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2016. Some Integral Inequalities For Functions Whoose Second Derivatives Are φ-Convex By Using Fractional Integrals. Konuralp Journal of Mathematics (Yayın No: 2893390).
5. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2016. On Hermite Hadamard Inequalities for Differentiable Preinvex Functions via Fractional Integrals. British Journal of Mathematics & Computer Science, Doi: 10.9734/BJMCS/2016/26518 (Yayın No: 2836644).
6. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2016. On Some Integral Inequalities For Generalized Fractional Integral, Advances in Inequalities and Applications, 2016(17) (Yayın No: 2859555).
7. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2017. A New Generalized Fractional Derivative And Integral, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2), 248-259. (Yayın No: 4084339).
8. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2016. On some integral inequalities for (k,h)-Riemann Liouville fractional integral, New Trends in Mathematical Science, 4 (1), 138-146., Doi: 10.20852/ntmsci.2016217824 (Yayın No: 2726724).
9. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2016. Hermite Hadamard type inequalities for coordinated (α, m)-Convex Functions via Fractional Integrals. Contemporary Analysis and Applied Mathematics, 4(1), 48-63., Doi: 10.18532/caam.69005 (Yayın No: 2592344).
10. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2018. Non-Isotropic Potential Theoretic Inequality. Cumhuriyet Science Journal, 9(2), 325-338. (Kontrol No: 4305397).

11. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2016. Generalized Qi's Integral Inequality, Cumhuriyet Science Journal, 37(1), 12-19., Doi: 10.17776/csj.10671 (Kontrol No: 2726623).
12. Aykol Yüce C., Yıldırım M.E. 2014. On the Boundedness of The Maximal Operator and Riesz Potential in the Modified Morrey spaces, Communications Faculty Of Science University.

Tebliğler

1. Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2018. The Generalized Hermite-Hadamard Type Inequalities for Caputo k-Fractional Derivative, International Conference on Mathematics and Mathematics Educations (ICMME-2018) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:4305350).
2. Yıldırım M.E., Durna N., Kilinç S., Yıldırım H., 2018. On Minkowski and Inverse Minkowski Inequalities Via Generalized Fractional Integrals, International Conference on Mathematics and Mathematics Educations (ICMME-2018) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:4305348).
3. Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2018. Some Ostrowski Type Fractional Integral Inequalities For s-Godunova-Levin Functions Via Generalized k-Fractional Integrals, 4th. International Symposium on Multidisciplinary Studies (ISMS) Paris-France, 27-28 April 2018 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:4305337).
4. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2017. On Generalized (k,s)-Fractional Calculus, 2. International Science Symposium Science Festival (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3614816).
5. Yıldırım M.E., Durna N., Akkurt A., Yıldırım H., 2017. Some Hermite-Hadamard Typre Inequalities Via Midpoind Formula For s-Convex Functions, 2. International Science Symposium Science Festival (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3614819).
6. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2017. The Midpoint Type Inequalities for φ -Convex Functions Via Fractional Integral Operators, 2. nternational Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3511729).
7. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2017. Some inequalities involving \left(\alpha ,k\right) -gamma\ and\ \left(\alpha ,k\right) -beta functions for conformable

fractional. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3510601).

8. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2017. A new Generalized fractional derivative and integral, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3510605).
9. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2016. On Some Integral Inequalities for Convex Functions via conformable Fractional Integrals. Xth International Statistics Days Conference – ISDC'2016 (IGS 2016) (Tam Metin Bildiri/)(Yayın No:3149449).
10. Akkurt A., Yıldırım M.E., Yıldırım H., 2016. On Feng Qi type Integral Inequalities for Conformable Fractional Integrals. 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics (IFSCOM2016) (Özet Bildiri/)(Yayın No:3149316).
11. Yıldırım M.E., Akkurt A., Yıldırım H., 2016.Non Isotropic Potential Theoretic Inequality, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016) (Özet Bildiri/)(Yayın No:3149197).

Hobiler

Tenis, Satranç, Fotoğraf Çekme, Yüzme, Kitap Okuma.