



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ



**ASAL *-HALKALARDA
GENELLEŞTİRİLMİŞ $^{*-\alpha}$ -TÜREVLER**

Ahmet Oğuz BALCI

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

Not: Tez kapağı yüksek lisans tezlerinde “Turkuaz”, doktora tezlerinde “Mavi”dir.

(Tez basımı aşamasında bu sayfa basılmayacaktır. Tez dış kapak örneğidir)

T.C.
ANAkkALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL *-HALKALARDA
GENELLEŞTİRİLMİŞ *- α -TÜREVLER

Ahmet Oğuz BALCI

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduėu Tarih: 28/06/2018

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Neşet AYDIN

ANAkkALE

Ahmet Oğuz BALCI tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve 28/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Asal *-Halkalarda Genelleştirilmiş *- α -Türevler**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Ali ERDOĞAN

.....

Başkan

Prof. Dr. Neşet AYDIN

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Selin TÜRKMEN

.....

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:.....

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Ahmet Oğuz BALCI

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, bu süreçte ilgi ve önerileri daima benimle olan Selin TÜRKMEN'e, Didem CAMCI'ya, tüm zorluklarda yanımda olan Ayşe AYRAN'a, Murat ÇELİK'e, hayatımın her döneminde bana sonsuz destek sunan sevgili aileme, çalışmalarımda daima yanımda olan Aşkın Tuğçe AKBAŞ'a şükranlarımı sunmayı borç bilirim.

Ahmet Oğuz BALCI
Çanakkale, Haziran 2018



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\subset$	Altkümesidir
$\not\subset$	Altkümesi değildir
$\Rightarrow$	Gerektirir
$\emptyset$	Boş küme
$\forall$	Her
$>$	Büyüktür

ÖZET

ASAL $*$ -HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ $*$ - α -TÜREVLER

Ahmet Oğuz BALCI

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Neşet AYDIN

28/06/2018, 76

Bu tezde asal $*$ -halka ve $*$ -asal halka üzerinde, bir (sol) $*$ - α -türev ile belirlenen genelleştirilmiş bir (sol) $*$ - α -türev yardımı ile oluşturulan bazı koşullar altında halkanın değişmeli olup olmadığı incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: $*$ - α -türev, sol $*$ - α -türev, Genelleştirilmiş $*$ - α -türev, Genelleştirilmiş sol $*$ - α -türev, $*$ -Asal halka, Asal $*$ -halka.

ABSTRACT

GENERALIZED $\ast$ - α -DERIVATIONS ON PRIME $\ast$ -RINGS

Ahmet Oğuz BALCI

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and AppLied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematical Science

Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN

28/06/2018, 76

In this thesis, it is examined whether or not the $\ast$ -prime (prime- $\ast$) ring is commutativity under certain conditions created by a generalized (left) $\ast$ - α -derivation determined by a (left) $\ast$ - α -derivation on the ring.

Keywords: $\ast$ - α -derivation, left $\ast$ - α -derivation, Generalized $\ast$ - α -derivation, Generalized left $\ast$ - α -derivation, $\ast$ -Prime ring, Prime $\ast$ -ring.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU.....	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2	
GENEL BİLGİLER	2
BÖLÜM 3	
ASAL HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK	13
3.1. Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik.....	13
3.2. Herstein'in Türevler Üzerine Bir Notu	29
3.3. Asal Halkalarda Lie İdealler ve Türevler.....	34
BÖLÜM 4	
İNVOLÜSYONLU HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK	42
4.1. *-Asal halkalarda Türevler ve Değişmelilik	42
4.2. *-Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar	61
BÖLÜM 5	
GENELLEŞTİRİLMİŞ SOL *- α -TÜREVLER İLE ASAL *-HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK	65
KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ	I

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez içeriği ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölüm tezi okumaya yardımcı olacak bilgiler içermektedir.

Üçüncü bölüm Posner (1967), Herstein (1979) ve Bergen, Herstein Kerr (1980) tarafından asal halkalarda türevlerle ilgili yapılmış çalışmalar bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde Oukhtite ve Salhi (2006)'nin yaptıkları *-asal halkalarda türevlerle ilgili çalışmalar ve Rehman, Ansari ve Heatinger (2013) tarafından yapılan (genelleştirilmiş)-türevler üzerine *-halkalardaki çalışmaları incelenmiştir.

Beşinci bölümde *-halka üzerinde *-türevler ile ele alınan bazı sonuçlar, beşinci bölümde ${}^*\alpha$ -türevler yardımıyla genellenmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. G boştan farklı bir küme ve

$$*: G \times G \rightarrow G$$

$$(k, l) \rightarrow k * l$$

ikili işlem olmak üzere.

- I) Her $k, l, m \in G$ için $k * (l * m) = (k * l) * m$
- II) Her $k \in G$ için $k * e = e * k$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.
- III) Her $k \in G$ için $k * t = t * k = e$ olacak şekilde $t \in G$ vardır.
- IV) Her $k, l \in G$ için $k * l = l * k$

Koşullarından ilk üçünü sağlayan G kümesine $*$ işlemi ile bir **Grup** denir. Son koşuluda sağlayan gruba **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.2. G grubunun boştan farklı bir altkümesi $*$ işlemine göre kendi başına grup oluyorsa bu kümeye G grubunun **alt grubu** denir.

Tanım 2.3. Bir grubun kendisi ve $\{e\}$ dışındaki alt gruplarına **öz altgrup** denir

Teorem 2.4. Bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamaz. Bu teorem **Brauer Trick** olarak adlandırılır.

İspat. G bir grup, L ile K bu grubun alt grupları ve $G = K \cup L$ olsun. Varsayalım ki $L \not\subset K$ ve $K \not\subset L$ olsun. O halde $x \in K/L$ ve $y \in L/K$ olacak şekilde iki eleman vardır. Ancak $k * l \in G = K \cup L$ dir. Bu $k * l \in K$ veya $k * l \in L$ anlamına gelir. Eğer $k * l \in K$ ise $k \in K$ olduğu için $k^{-1} * (k * l) = l \in K$ olur. Bu durum $l \notin K$ olmasıyla çelişir. O halde $k * l \in L$ dir. Buradan $l \in L$ olduğu için, $(k * l) * l^{-1} = k \in L$ bulunur. Bu da $k \notin L$ olmasıyla çelişir. Bu kabul de yanlıştır. O zaman $K \subset L$ veya $L \subset K$ olur. Eğer $K \subset L$ ise $G = K \cup L = L$, eğer $L \subset K$ ise $G = K \cup L = K$ olur. Sonuç olarak $G = K$ veya $G = L$ dir.

Tanım 2.5. R boştan farklı bir küme ve “+” ve “*” R üzerinde iki işlem olsun.

- I) $(R, +)$ değişmeli grup
- II) Her $k, l, m \in R$ için $(k * l) * m = k * (l * m)$
- III) Her $k, l, m \in R$ için

$$k * (l + m) = k * l + k * m$$

ve

$$(k + l) * m = k * m + l * m$$

koşullarını sağlayan R kümesi bu iki işlem ile bir **halka**’dır ve $(R, +, *)$ şeklinde gösterilir.

R halkasına

IV) Her $k, l \in R$ için $k * l = l * k$ ise **değişmeli halka**

V) Her $k \in R$ için $k * 1_R = 1_R * k = k$ olacak şekilde $1_R \in R$ ise **birimli halka** denir.

Tanım 2.6. R halkanın bir altkümesi R kümesini halka yapan işlemlerle kendi başına halka oluyorsa bu küme R halkasının bir **althalkasıdır**.

Tanım 2.7. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \odot, \odot)$ iki halka olmak üzere bir $f: R \rightarrow S$ dönüşümü her $k, l \in R$ için $f(k + l) = f(k) \odot f(l)$ ve $f(k \cdot l) = f(k) \odot f(l)$ ise f dönüşümü **halka homomorfizması** adlandırılır.

Tanım 2.8. Bir homomorfizmasına örten ise bu homomorfizmaya **epimorfizma** adı verilir.

Tanım 2.9. R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olmak üzere

$$\ker f = \{k \in R \mid f(k) = 0_S\}$$

ile tanımlanan küme f homomorfizmasının **çekirdeği**dir.

Tanım 2.10. R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olmak üzere

$$\text{Im}(f) = f(R) = \{f(k) \mid k \in R\}$$

ile tanımlanan küme f homomorfizmasının **görüntüsü**dür.

Tanım 2.11. R bir halka ve $0 \neq k \in R$ olmak üzere

$k \cdot l = 0$ koşulunu sağlayan $0 \neq l \in R$ var ise k elemanı **sol sıfır bölen** adını alır.

$m \cdot k = 0$ koşulunu sağlayan $0 \neq m \in R$ var ise k elemanı **sağ sıfır bölen** adını alır.

Bir eleman hem sol hem sağ sıfır bölen ise o elemana **sıfır bölen** denir.

Tanım 2.12. Bir halka sıfır bölen bulundurmuyor ise o halka **sıfır bölensiz halka** adını alır.

Tanım 2.13. A kümesi R halkasının boştan farklı bir altkümesi için

$$C_R(A) = \{k \in R \mid k \cdot l = l \cdot k, \forall l \in A\}$$

ile tanımlanan küme A kümesinin **merkezileştiricisi**dir.

Tanım 2.14. R bir halka olsun.

$$Z = Z(R) = \{k \in R \mid k \cdot l = l \cdot k, \forall l \in R\}$$

ile tanımlanan küme R halkasının **merkezi**dir.

Uyarı 2.15. Bir halkanın merkezi o halkanın althalkasıdır.

Tanım 2.16. I , R halkasının bir althalkası olmak üzere her $k \in R$ ve her $a \in I$ için $a \cdot k \in I$ oluyorsa I , R halkasının **sağ ideali**, $k \cdot a \in I$ oluyorsa I , R halkasının **sol ideali** adı verilir. Bir althalka eğer hem sağ hem sol ideal ise o althalkaya ideal denir.

Tanım 2.17. R bir halka, I ve J halkanın idealleri olmak üzere

$$IJ = \{\sum_{i=sonlu} x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J\}$$

$$I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ ve } x \in J\}$$

şekildeki gibidir.

Lemma 2.18. İki idealin kesişimi ve iki idealin çarpımı yine bir idealdir.

İspat. K ve L idealleri R halkasının iki ideali olsun. O halde $0_R \in K$ ve $0_R \in L$ dir. Buradan $0_R \in K \cap L$ sonucuna ulaşılır. Yani iki idealin kesişimi boş kümeden farklıdır. Her $a, b \in K \cap L$ için $a, b \in K$ ve $a, b \in L$ dir. O zaman $a - b \in K$ ve $a - b \in L$ olur. Yani $a - b \in K \cap L$ dir. Ayrıca $(a \cdot r), (r \cdot a) \in K$ ve $(a \cdot r), (r \cdot a) \in L$ olduğundan $(a \cdot r), (r \cdot a) \in K \cap L$ olur. Yani $K \cap L$ idealdir.

K ve L, R halkasının iki ideali olmak üzere $x \in KL$ ve $r \in R$ olsun

$$xr = \left(\sum_{i=sonlu} x_i y_i \right) r = \sum_{i=sonlu} x_i y_i r$$

şeklindedir. L ideal ve $y_i \in L$ olduğundan

$$x = \sum_{i=sonlu} x_i y_i$$

olur. Bu da $KLR \subset KL$ anlamına gelir yani KL idealdir.

Tanım 2.19. R bir halka olsun. $x \in R$ için $x^k = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan büyük bir x tamsayısı var ise x elemanına **nilpotent eleman** adı verilir. Bu şekildeki k tamsayılarının en küçüğü x elemanı için **nilpotentlik indeksi**dir.

Tanım 2.20. I kümesi R halkasının bir ideali olmak üzere $I^{k-1} \neq (0)$ iken $I^k = (0)$ koşulunu sağlayan bir k tamsayısı varsa bu ideal **nilpotent ideal** adını alır.

Tanım 2.21. Bir idealin her elemanı nilpotent eleman ise o ideale **nil ideal** adı verilir.

Tanım 2.22. I, J ve P, R halkasının üç ideali ve $P \neq R$ olsun. Eğer

$$IJ \subset P \text{ iken } I \subset P \text{ veya } J \subset P$$

oluyorsa P ideale **asal ideal** denir.

Tanım 2.23. Bir halkada (0) ideali asal ideal ise o halka **asal halka** adını alır.

Not. 2.24. R bir asal halka olsun. Bu durumda $k, l \in R$ için $kRl = (0)$ iken $k = 0$ veya $l = 0$ dir.

Lemma 2.25. R bir asal halka ve I onun sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere eğer $aIb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olur.

İspat. $aIb = (0)$ olsun. $x \in I, r \in R$ olmak üzere I bir ideal olduğundan $xr \in I$ ve $rx \in I$ dır. O zaman her $x \in I$ ve $r \in R$ için $0 = arxb$ olur. Yani her $x \in I$ için $(0) = aRxb$ dır. Burada R halkasının asal olması kullanılırsa $a = 0$ veya her $x \in I$ için $xb = 0$ olur.

Varsayalım ki $a \neq 0$ olsun. O zaman her $x \in I$ için $xb = 0$ dır. Burada x yerine xr yazılırsa her $x \in I$ ve $r \in R$ için $0 = xrb$ bulunur. Yani her $x \in I$ için $(0) = xRb$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa her $x \in I$ için $x = 0$ veya $b = 0$ olur. Yani $I = (0)$ veya $b = 0$ dır. $I \neq (0)$ olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

Tanım 2.26. Sıfır idealinden başka nilpotent ideal bulundurmeyen halkaya *yarıasal halka* adı verilir.

Not 2.27. Yarıasal bir R halkasında $x \in R$ için $xRx = (0)$ iken $x = 0$ dır.

Sonuç 2.28. Asal halkalar aynı zamanda yarıasal halkalardır.

Tanım 2.29. R herhangi bir halka olsun. Her $x \in R$ için $kx = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan büyük en az bir k tamsayı varsa bu tamsayılardan en küçüğü R halkasının *karakteristiği* diye anılır ve $\text{char}R = k$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.30. R bir halka ve $x \in R$ olmak üzere eğer $0 < n \in \mathbb{Z}(R)$ için $nx = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa bu halkaya *n-burulmasız(torsion free)* halka adı verilir.

Uyarı 2.31. R halkası n -burulmasız ise $\text{char}R \neq n$ dir.

Lemma 2.32. Karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka 2-burulmasız bir halkadır.

İspat. Varsayalım ki R asal halka, $\text{char}R \neq 2$ ve bir $x_0 \in R$ için $2x_0 = 0$ olsun. Bu durumda her $r, s \in R$ için $0 = 2x_0rs = x_0r(2s)$ olur. Bu da her $s \in R$ için $x_0R(2s) = (0)$ demektir. R halkasının asallığı kullanılırsa her $s \in R$ $x_0 = 0$ veya $2s = 0$ elde edilir. R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu düşünülürse $x_0 = 0$ bulunur. Yani R halkası 2-burulmasız halkadır.

Tanım 2.33. Bir R halkası üzerinde

$$[k, l] = kl - lk$$

biçimindeki işleme *Lie komütatör* adı verilir. Bir Lie komütatör dönüşümü her $k, l, m \in R$ için

- $[k + l, m] = [k, m] + [l, m]$
- $[k, l + m] = [k, l] + [k, m]$
- $[k, k] = 0$

koşullarını sağlar.

Lemma 2.34. I, R asal halkasının bir ideali ve A, R halkasının bir altgrubu olmak üzere

$$[A, I] = \sum_{i=sonlu} [x_i, y_i]$$

şeklindedir.

Lemma 2.35. I, R asal halkasının bir ideali ve A, R halkasının bir altgrubu olmak üzere $[A, I] = (0)$ ise $I = (0)$ veya $A \subset Z(R)$ olur.

İspat. $x \in I, a \in R$ ve $r \in R$ olsun. I ideal olduğundan $xr \in I$ olur. Hipotez kullanılırsa her $x \in I, a \in R$ ve $r \in R$ için

$$0 = [a, xr] = x[a, r] + [a, x]r = x[a, r]$$

elde edilir. I ideal olduğundan bu ifadede $s \in R$ için x yerine xs yazılırsa her $x \in I, a \in R$ ve $s, r \in R$ için $0 = xs[a, r]$ elde edilir. Yani her $x \in I, a \in R$ ve $r \in R$ için $(0) = xR[a, r]$ bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Tanım 2.36. U, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer

- $(U, +)$ değişmeli bir grup ve
- $[U, U] \subset U$

oluyorsa U kümesine R halkasının bir **Lie althalkası** denir.

Tanım 2.37. U, R halkasının boştan farklı bir altkümesi olmak üzere

- $(U, +)$ değişmeli grup
- $[U, R] \subset U$

oluyorsa bu kümeye R kümesinin **Lie ideali** denir.

Sonuç. 2.38. Her ideal ve her halka aynı zamanda halkanın bir Lie idealidir. Lie idealler İdeal olmayabilirler.

Lemma 2.39. Her $k, l, m \in R$ için $[k, [l, m]] + [l, [m, k]] + [m, [k, l]] = 0$ dır. Bu eşitliğe **Jacobi özdeşliği** denir.

Lemma 2.40. U Lie ideal ise $[U, U]$ kümesi de Lie idealdir.

İspat. $k, l \in U$ ve $r \in R$ olsun. Jacobi özdeşliğinden her $k, l \in U$ ve $r \in R$ için

$$0 = [[k, l], r] + [[l, r], k] + [[r, k], l]$$

bulunur. $[l, r], [r, k], 0 \in U$ olduğundan $[[l, r], k] \in [U, U]$ ve $[[r, k], l] \in [U, U]$ elde edilir.

Buradan her $k, l \in U$ ve $r \in R$ için $[[k, l], r] \in [U, U]$ olur. Yani

$$[[U, U], R] \subset [U, U]$$

dir. Sonuç olarak $[U, U]$ kümesi de bir Lie idealdir.

Tanım 2.41. R halkası üzerinde

$$(\cdot, \cdot): R \times R \rightarrow R, (k, l) = kl + lk$$

şeklindeki dönüşüm **Jordan komütatör** adını alır. Jordan komütatör dönüşümü her $k, l, m \in R$ için

- $(k + l, m) = (k, m) + (l, m)$
- $(k, l + m) = (k, l) + (k, m)$
- $(k, l) = (l, k)$

koşullarını sağlar.

Tanım 2.42. M kümesi R halkası üzerinde bir toplamsal değişmeli grup olsun.

$$*: R \times M \rightarrow M$$

$$*(r, m) = r * m$$

şeklinde tanımlanmış dış işlem her $r, s \in R$ ve her $k, l \in M$ için

- $r * (k + l) = r * k + r * l$
- $(r + s) * k = r * k + s * k$
- $(r \cdot s) * k = r * (s * k)$

koşulları sağlanıyorsa ise M grubuna **sol R -modül** adı verilir.

Tanım 2.43. M kümesi R halkası üzerinde bir toplamsal değişmeli grup olsun.

$$*: M \times R \rightarrow M$$

$$*(m, r) = m * r$$

şeklinde tanımlanmış dış işlem her $r, s \in R$ ve her $k, l \in M$ için

- $(k + l) * r = k * r + l * r$
- $k * (r + s) = k * r + k * s$
- $k * (r \cdot s) = (k * s) * r$

koşulları sağlanıyorsa ise M grubuna **sağ R -modül** adı verilir.

Tanım 2.44. R bir halka, K ve M birer sağ R -modül olmak üzere $f: M \rightarrow K$ toplamsal dönüşümü eğer her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $f(m * r) = f(m) \cdot r$ oluyorsa f dönüşümü **sağ R -modül homomorfizması** diye adlandırılır.

Tanım 2.45. K ve M , iki sol- R modülü olmak üzere $f: M \rightarrow K$ toplamsal dönüşümü eğer her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $f(r * m) = r \cdot f(m)$ oluyorsa f dönüşümü **sol R -modül homomorfizması** diye adlandırılır.

Tanım 2.46. U, R asal halkasında sıfırdan farklı bir ideal ve $g: U \rightarrow R$ bir sağ R -modül homomorfizması olsun.

$$\mathcal{M} = \{(U; g): g: U \rightarrow R \text{ sağ } R - \text{modül homomorfizması}\}$$

kümesi ve $\mathcal{M}$ kümesi üzerinde

$(U; g) \sim (V; h) \Leftrightarrow$ sıfırdan farklı $\mathcal{M} \subseteq U \cap V$ koşulunu sağlayan $\mathcal{M}$ ideali üzerinde $g = h$ dir” şeklindeki bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı ile $\mathcal{M}$ kümesi denklik sınıflarına ayrılır. $(\widetilde{g}, \widetilde{U})$, (g, U) elemanının denklik sınıfıdır ve $\tilde{g}$ şeklinde gösterilir. Bu denklik sınıflarının kümesi

$$Q = \{\tilde{g} = (\widetilde{g}, \widetilde{U}) | (\widetilde{g}, \widetilde{U}) \in \mathcal{M}\}$$

şeklindedir. Bu küme ise

$$+: Q \times Q \rightarrow Q, \tilde{g} + \tilde{h} = (\widetilde{U \cap V}, \widetilde{g + h})$$

ve

$$*: Q \times Q \rightarrow Q, \tilde{g} * \tilde{h} = (\widetilde{UV}, \widetilde{gh})$$

işlemleri ile bir halkadır. Bu halka ise **Martindale Kesirler Halkası** adını alır. Martindale kesirler halkası birimlidir.

Tanım 2.47. Martindale kesirler halkasının merkezine **genelleştirilmiş merkez** şeklinde isimlendirilir. Ve bu merkez $\mathcal{C}$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.48. $\mathcal{C}$ bir cisimdir.

Tanım 2.49. $S = R \cdot \mathcal{C}$ kümesine R halkasının merkezi kapanışı denir. Üstelik S , R halkasını içeren bir asal halkadır.

Tanım 2.50. t , R halkası üzerinde toplamsal bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm her $k, l \in R$ için

$$t(kl) = kt(l)$$

oluyorsa R halkası üzerinde bir **sağ merkezleyici**dir.

Lemma 2.51. R bir asal halka olsun. $k, l \in R$ için $k \in Z(R)$ ve $kl \in Z(R)$ ise $k = 0$ veya $l \in Z(R)$ olur.

İspat. $k, l \in R$ için $k \in Z(R)$ ve $kl \in Z(R)$ olsun. Her $r \in R$ için $[k, r] = 0$ ve $[kl, r] = 0$ olur. Her $r \in R$ için

$$0 = [kl, r] = k[l, r] + [k, r]l = k[l, r]$$

elde edilir. Bu eşitlikte $s \in R$ için r yerine sr yazılır ve aynı eşitlik kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = k[l, sr] = ks[l, r] + k[l, s]r = ks[l, r]$$

olur. Yani her $r \in R$ için $(0) = kR[l, r]$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa $k = 0$ veya $l \in Z(R)$ elde edilir.

Tanım 2.52. R halkası üzerinde

$$\begin{aligned} *: R &\rightarrow R \\ *(k + l) &= *(k) + *(l) \\ *(kl) &= *(l) * (k) \\ *(* (k)) &= k \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $*$ dönüşüme **involüsyon** $(*)$ **dönüşümü** denir ve bu dönüşüm özel olarak her $k \in R$ için $*(k) = k^*$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.53. Bir R halkasının üzerinde bir involüsyon tanımlı ise o halkaya **involüsyonlu halka** veya **$*$ -halka** denir.

Tanım 2.54. Asal bir R halkası üzerinde bir involüsyon tanımlı ise o R halkasına **asal $*$ -halka** denir.

Tanım 2.55. R bir involüsyonlu halka ve her $k, l \in R$ için $(0) = kRl = kRl^*$ veya $(0) = kRl = k^*Rl$ iken $k = 0$ veya $l = 0$ oluyorsa R halkası **$*$ -asal halka** adını alır.

Tanım 2.56. t , R halkası üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$t(k + l) = t(k) + t(l)$$

ve

$$t(k \cdot l) = k^* \cdot t(l)$$

oluyorsa, bu dönüşüme R üzerinde **sağ $*$ -merkezleyici** denir.

Tanım 2.57. d , R üzerinde toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $k, l \in R$ için

$$d(kl) = d(k)l + kd(l)$$

oluyorsa, d dönüşümüne R üzerinde **türev** dönüşümü denir.

Tanım 2.58. R bir halka, $k \in R$ ve $r \in R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_k: R &\rightarrow R \\ I_k(r) &= [k, r] = kr - rk \end{aligned}$$

şeklindeki dönüşüm k **ile belirli iç türev** dönüşümüdür. Bu iç türev I_k ile gösterilir.

Tanım 2.59. d , R üzerinde bir türev ve f , R halkası üzerinde toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $k, l \in R$ için

$$f(kl) = f(k)l + kd(l)$$

koşulunu sağlayan f dönüşümüne R üzerinde **d türevi ile belirlenen genelleştirilmiş türev** denir.

Tanım 2.60. d , involüsyonlu R halkası üzerinde toplamsal bir dönüşüm olmak üzere her $k, l \in R$ için

$$d(kl) = d(k)l^* + kd(l)$$

oluyorsa, d dönüşümü R üzerinde bir ***-türev**dir.

Tanım 2.61. d , involüsyonlu R halkası üzerinde bir *-türev ve f , R üzerinde dönüşüm olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$f(k + l) = f(k) + f(l)$$

$$f(kl) = f(k)l^* + kd(l)$$

koşulunu sağlayan f dönüşümüne **d *-türevi ile belirlenen genelleştirilmiş *-türev** adı verilir.

Tanım 2.62. d ve α involüsyonlu R halkası üzerinde toplamsal dönüşümler olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$d(kl) = d(k)l^* + \alpha(k)d(l)$$

oluyorsa d , dönüşümü R üzerinde bir ***- α -türev** adını alır.

Tanım 2.63. R bir *-halka, d bir *- α -türev ve $f: R \rightarrow R$ ve $\alpha: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümler olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

$$f(kl) = f(k)l^* + \alpha(k)d(l)$$

oluyorsa f dönüşümüne **d *- α -türevi ile belirlenen genelleştirilmiş *- α -türev** denir.

Tanım 2.64. d , R halkası üzerinde bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$d(kl) = kd(l) + ld(k)$$

oluyorsa bu dönüşüm R üzerinde bir **sol türev** adını alır.

Tanım 2.65. d , R halkası üzerinde bir sol türev ve f , R üzerinde herhangi dönüşüm olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$f(kl) = f(k) + f(l)$$

$$f(kl) = f(k)l + d(l)k$$

koşulunu sağlayan f dönüşümüne R üzerinde **d sol türevi ile belirlenen genelleştirilmiş sol türev** denir.

Tanım 2.66. d , involüsyonlu R halkası üzerinde herhangi toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$d(kl) = l^*d(k) + kd(l)$$

oluyorsa bu dönüşüme R halkası üzerinde **sol *-türev** denir.

Tanım 2.67. d , involüsyonlu R halkası üzerinde bir sol $*$ -türev ve f aynı halka üzerinde herhangi bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $k, l \in R$ için

$$f(kl) = k^*f(l) + ld(k)$$

koşulunu sağlayan f dönüşümüne R üzerinde **d sol $*$ -türevi ile belirlenen genelleştirilmiş sol $*$ -türev** denir.

Tanım 2.68. İnvölüsyonlu R halkası üzerinde d ve α toplamsal dönüşümleri her $k, l \in R$ için

$$d(kl) = k^*d(l) + \alpha(l)d(k)$$

özellikliğini sağlıyorsa d dönüşümü R üzerinde **sol $*$ - α -türev** adını alır.

Tanım 2.69. R bir $*$ -halka, d bir sol $*$ - α -türev ve $f: R \rightarrow R$ ve $\alpha: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümlerinde her $k, l \in R$ için

$$f(kl) = k^*f(l) + \alpha(l)d(k)$$

özellikleri sağlanıyorsa f dönüşümüne **d sol $*$ - α -türevi ile belirlenen genelleştirilmiş sol $*$ - α -türev** denir.

Lemma 2.70. R bir asal halka ve $(0) \neq I$ R halkasının bir ideali olsun. R halkası üzerinde d türevi eğer $d(I) = (0)$ koşulunu sağlıyor ise $d = 0$ dır.

İspat. Hipotezden her $k \in I$ için $d(k) = 0$ dır. Bu eşitlikte $r \in R$ için k yerine kr yazılıp düzenlenirse her $r \in R$ ve her $k \in I$ için

$$0 = d(kr) = kd(r) + d(k)r = kd(r)$$

elde edilir. Burada $s \in R$ için k yerine ks yazıldığında her $k \in I$ ve her $r, s \in R$ için

$$0 = ksd(r)$$

bulunur. Bu da her her $r \in R$ için $(0) = IRd(r)$ demektir. Halkanın asallığı kullanıldığında $I = (0)$ veya $d = 0$ demektir. $I \neq (0)$ olduğundan istenilen elde edilir.

Tanım 2.71. $Sa_* = \{k \in R: k^* = \pm k\}$ şeklinde tanımlanan kümeye **simetrik ve anti-simetrik elemanlar kümesi** denir.

Not 2.72. Her $k, l \in R$ için

$$\begin{aligned} [k, l]^* &= (kl - lk)^* \\ &= (kl)^* - (lk)^* \\ &= l^*k^* - k^*l^* \\ &= [l^*, k^*] \\ &= -[k^*, l^*] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $k, l \in R$ için $[l^*, k^*] = [k, l]^*$ dır.

Lemma 2.73. (Herstein, 1969, s.4) R 2-burulmasız yarıasal bir halka ve $(0) \neq U$, R halkasının bir Lie ideali ve althalkası ise $U \subset Z(R)$ veya U , R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir.

Lemma 2.74. (Herstein, 1970, s. 561) R 2-burulmasız yarıasal bir halka ve U , R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $[U, U] \subset Z(R)$ ise $U \subset Z(R)$ dir.

Lemma 2.75. (Herstein, 1976, s. 9) R 2-burulmasız bir yarıasal halka ve $k \in R$ olmak üzere her $m \in R$ için $[k, [k, m]] = 0$ ise $k \in Z(R)$ dir.

Sonuç 2.76. (Herstein, 1976, s. 23) R bir asal halka, $k, l \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $krl = lrk$ olsun. O halde $k = 0$ veya $l = \lambda \cdot k$ koşulunu sağlayan en az bir $\lambda \in C$ vardır.



BÖLÜM 3

ASAL HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK

3.1. Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik

Üçüncü bölümün ilk kısmında E.C. Posner'in 1957'de yapmış olduğu “*Derivations in Prime Rings*” isimli makalesi detaylı incelenmiştir.

Lemma 3.1.1. R asal bir halka ve $x \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $xd(r) = 0$ (veya $d(r)x = 0$) ise $d = 0$ veya $x = 0$ dir.

İspat. $x \in R$ olmak üzere hipotezde r yerine rs yazılırsa her $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= xd(rs) \\ &= x(d(r)s + rd(s)) \\ &= xd(r)s + xrd(s) \\ &= xrd(s) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da her $s \in R$ için

$$xRd(s) = (0)$$

demektir. Bulunan eşitlikte halkanın asal olmasından yararlanılarak $x = 0$ veya her $s \in R$ için $d(s) = 0$ olur. Bu da

$$d = 0 \text{ veya } x = 0$$

anlamına gelir. Diğer taraftan,

$x \in R$ olmak üzere hipotezde r yerine rs yazılırsa her $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(rs)x \\ &= (d(r)s + rd(s))x \\ &= d(r)sx + rd(s)x \\ &= d(r)sx \end{aligned}$$

bulunur. Bu da her $r \in R$ için

$$d(r)Rx = (0)$$

demektir. Bulunan eşitlikte halkanın asal olmasından yararlanılarak $x = 0$ veya her $r \in R$ için $d(r) = 0$ olur. Bu da

$$d = 0 \text{ veya } x = 0$$

anlamına gelir.

Lemma 3.1.2. R asal bir halka ve $p, q, r \in R$ olsun. Her $a \in R$ için, $paqar = 0$ oluyorsa p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

İspat. Hipotezde $b \in R$ için a yerine $a + b$ yazıldığında her $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= p(a + b)q(a + b)r \\ &= paqar + paqbr + pbqar + pbqbr \\ &= paqbr + pbqar \end{aligned}$$

elde edilir.

Varsayalım ki $pa = 0$ olsun. Bu da her $b \in R$ için, $pbqar = 0$ demektir. Bu ise

$$pRqar = (0)$$

anlamına gelir. R halkası asal olduğu için $a \in R$ için $p = 0$ veya $qar = 0$ olur. Buradan da

$$pa = 0 \text{ iken } p = 0 \text{ veya } qar = 0$$

sonucuna ulaşılır. $t \in R$ için $pa = 0$ olduğundan $pat = 0$ olur. Yukarıdaki ifade kullanılarak her $t \in R$ için $p = 0$ veya $qatr = 0$ sonucuna ulaşılır. Yani $a \in R$ için

$$p = 0 \text{ veya } qaRr = (0)$$

dir. Halkanın asal olması göz önüne alınırsa $a \in R$ için

$$p = 0 \text{ veya } r = 0 \text{ veya } qa = 0$$

elde edilir. Bu da $a \in R$ için

$$pa = 0 \text{ iken } p = 0 \text{ veya } r = 0 \text{ veya } qa = 0$$

demektir. Son ifadede a yerine $aqar$ yazıldığında, her $a \in R$ için

$$paqar = 0 \text{ iken } qaqar = 0 \text{ veya } p = 0 \text{ veya } r = 0$$

sonucuna ulaşılır. Hipotezde $paqar = 0$ olduğundan her $a \in R$ için $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqar = 0$ olur. Eğer $p = 0$ veya $r = 0$ olursa ispat biter.

Varsayalım ki $p \neq 0$ ve $r \neq 0$ olsun. O zaman her $a \in R$ için

$$qaqar = 0$$

dır. Bu eşitlikte a yerine $a + b$ yazılır ve düzenlendiğinde her $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= q(a + b)q(a + b)r \\ &= qaqar + qaqbr + qbqar + qbqbr \\ &= qaqbr + qbqar \end{aligned}$$

elde edilir.

Varsayalım ki $a \in R$ için $ar = 0$ olsun. Bu durumda her $b \in R$ için $qaqbr = 0$ olur.

Yani $a \in R$ için $qaqRr = (0)$ dır. R halkasının asallığından yararlanılırsa $a \in R$ için

$$r = 0 \text{ veya } qaq = 0$$

elde edilir. $r \neq 0$ olduğundan $a \in R$ için $qaq = 0$ dır. Yani $a \in R$ için eğer

$$ar = 0 \text{ ise } qaq = 0$$

olur. Son ifadede $t \in R$ için a yerine ta düşünülürse her $t \in R$ için

$$tar = 0 \text{ ise } qtaq = 0$$

bulunur. $a \in R$ için $ar = 0$ olduğundan her $t \in R$ için $tar = 0$ dır. Bu durum, yukarıdaki ifade ile birleştirilirse her $t \in R$ için $qtaq = 0$ elde edilir. O halde $a \in R$ için

$$qRa q = (0)$$

dır. Halkanın asal olmasından $a \in R$ için $q = 0$ veya $aq = 0$ elde edilir. $q \neq 0$ olduğundan $a \in R$ için

$$ar = 0 \text{ ise } aq = 0$$

olur. Son ifadede a yerine $qaqa$ düşünüldüğünde her $a \in R$ için

$$qaqar = 0 \text{ ise } qaqaq = 0$$

elde edilir. Her $a \in R$ için $ar = 0$ olduğundan $qaqar = 0$ dır. O halde her $a \in R$ için

$$qaqaq = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıda $b \in R$ için a yerine $a + b$ yazıldığında her $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= q(a + b)q(a + b)q \\ &= qaqaq + qaqbq + qbqaq + qbqbq \\ &= qaqbq + qbqaq \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte b yerine $bqaq$ yazılırsa $qaqbqaq + qbqaqaq = 0$ olur. Her $a \in R$ için $qaqaq = 0$ olduğundan her $a, b \in R$ için $qaqbqaq = 0$ dır. Bu da her $a \in R$ için

$$qaqRqaq = (0)$$

demektir. Halkanın asal olması yardımıyla her $a \in R$ için $qaq = 0$ olur. Sonuç olarak $qRq = (0)$ dır. Yine halkanın asal olmasından $q = 0$ elde edilir.

Teorem 3.1.3. d ve g karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkası üzerinde tanımlı iki türev olsun. dg yine bir türev ise $d = 0$ veya $g = 0$ olur.

İspat. d ve g fonksiyonlarının ikisinin de türev olmasından dolayı her $k, l \in R$ için

$$\begin{aligned} (dg)(kl) &= d(g(kl)) \\ &= d(g(k)l + kg(l)) \\ &= d(g(k)l) + d(kg(l)) \\ &= d(g(k))l + g(k)d(l) + d(k)g(l) + kd(g(l)) \\ &= (dg)(k)l + g(k)d(l) + d(k)g(l) + k(dg)(l) \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $k, l \in R$ için

$$(dg)(kl) = (dg)(k)l + g(k)d(l) + d(k)g(l) + k(dg)(l)$$

olur. Öte yandan dg dönüşümünün türev dönüşümü olmasından her $k, l \in R$ için

$$(dg)(kl) = (dg)(k)l + k(dg)(l)$$

eşitliği elde edilir. Üstteki son iki eşitliğin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları birbirine eşitlenerek gerekli kısaltmalar yapılırsa her $k, l \in R$ için

$$(dg)(k)l - (dg)(k)l + g(k)d(l) + d(k)g(l) + k(dg)(l) - k(dg)(l) = 0$$

olur. O halde her $k, l \in R$ için

$$g(k)d(l) + d(k)g(l) = 0 \quad (3.1)$$

dır. Son eşitlikte $m \in R$ için k yerine $kd(m)$ yazılır ve bu eşitlik tekrar kullanılarak düzenlenirse her $k, l, m \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= g(kd(m))d(l) + d(kd(m))g(l) \\ &= g(k)d(m)d(l) + kg(d(m))d(l) + d(k)d(m)g(l) + kd(d(m))g(l) \\ &= g(k)d(m)d(l) + d(k)d(m)g(l) + k(g(d(m))d(l) + d(d(m))g(l)) \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.1) eşitliği kullanılırsa $k(g(d(m))d(l) + d(d(m))g(l)) = 0$ olduğundan her $k, l, m \in R$ için

$$g(k)d(m)d(l) + d(k)d(m)g(l) = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.1) numaralı eşitlikte k yerine m yazılır ve yeniden düzenlendiğinde her $l, m \in R$ için $d(m)g(l) = -g(m)d(l)$ olur. Bulunan bu eşitlik (3.2) numaralı eşitlikte yerine yazıldığında her $k, l, m \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= g(k)d(m)d(l) - d(k)g(m)d(l) \\ &= (g(k)d(m) - d(k)g(m))d(l) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte *Lemma 3.1.1.* kullanıldığında her $k, l, m \in R$ için

$$g(k)d(m) - d(k)g(m) = 0 \text{ veya } d(l) = 0$$

olur. Bu durumda her $k, m \in R$ için $g(k)d(m) - d(k)g(m) = 0$ veya $d = 0$ sonucuna ulaşılır.

Varsayalım ki $d \neq 0$ olsun, o zaman her $k, m \in R$ için

$$g(k)d(m) - d(k)g(m) = 0 \quad (3.3)$$

dır. (3.1)'de l yerine m yazılıp elde edilen eşitlik (3.3) numaralı eşitlik ile taraf tarafa toplandığında her $k, m \in R$ için

$$2g(k)d(m) = 0$$

bulunur. Halkanın karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $k, m \in R$ için

$$g(k)d(m) = 0$$

elde edilir. *Lemma 3.1.1.* kullanıldığında ise

$$g = 0 \text{ veya } d = 0$$

olur. $d \neq 0$ olduğundan istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Lemma 3.1.4. d , R asal halkası üzerinde bir türev olmak üzere her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ ise $d = 0$ veya R halkası değişmelidir.

İspat. Hipotezde $b \in R$ için a yerine $a + b$ yazılıp düzenlenir ve elde edilen ifadede hipotez kullanılırsa her $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b)d(a + b) - d(a + b)(a + b) \\ &= ad(a) + ad(b) + bd(a) + bd(b) - d(a)a - d(a)b - d(b)a - d(b)b \\ &= (ad(a) - d(a)a) + (bd(b) - d(b)b) + ad(b) + bd(a) - d(a)b - d(b)a \\ &= ad(b) + bd(a) - d(a)b - d(b)a \end{aligned}$$

olur. Buradan da her $a, b \in R$ için

$$ad(b) - d(a)b = d(b)a - bd(a)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin her iki tarafına $d(ab)$ eklenip türev özellikleri kullanıldığında her $a, x \in R$ için

$$\begin{aligned} ad(b) - d(a)b + d(ab) &= d(b)a - bd(a) + d(ab) \\ ad(b) - d(a)b + d(a)b + ad(b) &= d(b)a - bd(a) + d(ab) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa her $a, b \in R$ için

$$2ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab) \quad (3.4)$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $x \in R$ için b yerine ax yazılırsa her $a, x \in R$ için

$$2ad(ax) = d(ax)a - axd(a) + d(aax)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade türev özellikleri ile düzenlendiğinde her $a, x \in R$ için

$$\begin{aligned} 2ad(a)x + 2a^2d(x) &= d(a)xa + ad(x)a - axd(a) + ad(a)x + d(a)ax + a^2d(x) \\ 2ad(a)x + 2a^2d(x) &= d(a)xa + ad(x)a - axd(a) + 2ad(a)x + a^2d(x) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani her $a, x \in R$ için

$$a^2d(x) = d(a)xa + ad(x)a - axd(a) \quad (3.5)$$

dır. (3.4) eşitliğinde $x \in R$ için b yerine xa yazılırsa her $a, x \in R$ için

$$2ad(xa) = d(xa)a - xad(a) + d(axa)$$

bulunur. Son eşitlik türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, x \in R$ için

$$2ad(x)a + 2axd(a) = d(x)a^2 + xd(a)a - xad(a) + d(a)xa + ad(x)a + axd(a)$$

$$2ad(x)a + 2axd(a) = d(x)a^2 + xd(a)a - xd(a)a + d(a)xa + ad(x)a + axd(a)$$

$$ad(x)a + axd(a) = d(x)a^2 + d(a)xa$$

olur. Bu da her $a, x \in R$ için

$$d(x)a^2 = ad(x)a + axd(a) - d(a)xa \quad (3.6)$$

demektir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, her $a, x \in R$ için

$$d(x)a^2 + a^2d(x) = 2ad(x)a \quad (3.7)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıp tekrar düzenlendiğinde her $x, a \in R$ için

$$d(x)aa - ad(x)a = ad(x)a - aad(x)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin sol tarafı sağdan, eşitliğin sağ tarafı soldan a parantezine alınırsa her $a, x \in R$ için

$$(d(x)a - ad(x))a = a(d(x)a - ad(x))$$

olur. Bu eşitlikte a yerine $a + d(x)$ yazılır ve türev özellikleri kullanılırsa her $x, a \in R$ için

$$d(x)a^2 + d(x)ad(x) - ad(x)a - ad(x)^2 = ad(x)a + d(x)^2a - a^2d(x) - d(x)ad(x)$$

bulunur. Bulunan eşitlik (3.7) ifadesi kullanılarak düzenlendiğinde her $a, x \in R$ için

$$2ad(x)a + d(x)ad(x) - ad(x)^2 = 2ad(x) + d(x)^2a - d(x)ad(x)$$

$$d(x)ad(x) - ad(x)^2 = d(x)^2a - d(x)ad(x)$$

elde edilir. Buradan Lie komütatör yardımıyla her $a, x \in R$ için

$$[d(x), [d(x), a]] = 0$$

şeklinde gösterilir. $I_r: R \rightarrow R$, $I_r(x) = [r, x]$ olmak üzere I_r dönüşümü R halkasında r elemanı ile belirli iç türevdir. Yukarıdaki eşitlik iç türev tanımı yardımı ile düzenlendiğinde her $a, x \in R$ için

$$(I_{d(x)}I_{d(x)})(a) = 0$$

olur.

Varsayalım ki R halkası karakteristiği ikiden farklı bir halka olsun. Sıfır dönüşümü türev dönüşümü olduğundan *Teorem 3.1.3.* kullanılırsa $I_{d(x)} = 0$ sonucuna ulaşılır. Yani her $a, x \in R$ için

$$0 = [d(x), a] = -[a, d(x)]$$

$$0 = [a, d(x)] = I_a(d(x)) = I_a d(x)$$

dır. Tekrar *Teorem 3.1.3.* kullanıldığında $I_a = 0$ veya $d = 0$ bulunur. O halde R halkasının karakteristiği ikiden farklı ise $d = 0$ veya R halkası değişmelidir.

Varsayalım ki R halkasının karakteristiği iki olsun. Bu ise her $r \in R$ için $0 = 2r = r + r$ demektir. Yani her $r \in R$ için

$$r = -r \tag{3.8}$$

bulunur. Öte yandan (3.7) eşitliğinden her $a, x \in R$ için

$$d(x)a^2 + a^2d(x) = 2ad(x)a$$

$$d(x)a^2 + a^2d(x) = 0$$

dır. Bu eşitlikte (3.8) eşitliği ile düşünüldüğünde her $a, x \in R$ için

$$d(x)a^2 = a^2d(x) \tag{3.9}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x \in R$ için $d(x)$ halkadaki karesel elemanlarla değişmelidir.

Varsayalım ki $e \in R$ halkadaki karesel elemanlarla değişmeli elemanlardan biri olsun. Her $x \in R$ için

$$ex^2 = x^2e \tag{3.10}$$

olur. (3.10) eşitliğinde $y \in R$ için x yerine $x + y$ yazılıp (3.10) eşitliği yardımıyla düzenlenirse her $x, y \in R$ için

$$e(x + y)^2 = (x + y)^2e$$

$$ex^2 + exy + eyx + ey^2 = x^2e + xye + yxe + y^2e$$

elde edilir. Yani her $x, y \in R$ için

$$e(xy + yx) = (xy + yx)e \tag{3.11}$$

bulunur. (3.11) eşitliğinde y yerine e yazıldığında her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} e(xe + ex) &= (xe + ex)e \\ exe + e^2x &= xe^2 + exe \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında her $x \in R$ için

$$e^2x = xe^2 \quad (3.12)$$

olur. (3.11) eşitliğinde y yerine xe yazılarak (3.10) eşitliği kullanıldığında her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} e(x^2e + xex) &= (x^2e + xex)e \\ e(x^2e + xex) &= (ex^2 + xex)e \\ exex &= xexe \end{aligned}$$

elde edilir. $(xe + ex)^2$ elemanı (3.11), (3.12) eşitlikleri ve R halkasının karakteristiğinin iki olması düşünülerek düzenlenirse her $x \in R$ için

$$(xe + ex)^2 = xexe + ex^2e + xe^2x + exex = 2xexe + 2x^2e^2 = 0$$

bulunur. Yani her $x \in R$ için

$$(xe + ex)^2 = 0 \quad (3.13)$$

dır.

Varsayalım ki $xy = 0$ olsun. O halde (3.11) eşitliği kabule göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} (xy + yx)e &= e(xy + yx) \\ yxe &= eyx \end{aligned}$$

olur. O halde $xy = 0$ olduğunda $yxe = eyx$ demektir. Yani x elemanı ile sağdan çarpıldığında sıfır sonucunu veren halkadaki bir y elemanı $yxe = eyx$ eşitliğini sağlar. Burada $xy = 0$ kabulünü sağdan x elemanı ile çarptığımızda $0 = xyx = x(yx)$ sonucuna ulaşırız. Yani yx , x ile sağdan çarpıldığında sıfır sonucunu veren bir elemandır. O halde (3.10) ve (3.8) eşitlikleri yardımıyla $xy = 0$ iken,

$$\begin{aligned} eyxx &= yxxe \\ eyx^2 &= yx^2e = yex^2 \\ eyx^2 &= yex^2 \\ (ey + ye)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifade gereğince

$$xy = 0 \text{ iken } (ey + ye)x^2 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yani $a \in R$ için $axy = 0$ olacağından her $a \in R$

$$axy = 0 \text{ iken } (ey + ye)axax = 0$$

bulunur. *Lemma 3.1.1.* kullanılırsa $x = 0$ veya $(ey + ye) = 0$ bulunur. Sonuç olarak

$$xy = 0 \text{ ise } x = 0 \text{ veya } ey + ye = 0$$

dır.

Varsayalım ki $x \neq 0$ olsun

$$xy = 0 \text{ ise } ey = ye$$

elde edilir. $b \in R$ için $x(yb) = 0$ olacağı için, $e(yb) = (yb)e$ eşitliğine ulaşılır. Bu ifade,

(3.8) eşitliği yardımıyla düzenlenirse her $b \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= eyb + ybe = yeb + ybe \\ &= y(eb + be) = y(eb - be) \\ &= y[e, b] = yI_e(b) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte *Lemma 3.1.1.* kullanıldığında

$$xy = 0 \text{ iken } x = 0 \text{ veya } y = 0 \text{ veya } e \in Z(R)$$

sonucuna ulaşılır. (3.13) eşitliği, yukarıdaki ifade kullanılıp düzenlendiğinde

$$0 = (xe + ex)^2 = (xe + ex)(xe + ex)$$

elde edilir ve buradan her $x \in R$ için $(xe + ex) = 0$ veya $e \in Z(R)$ yazılır.

Kabul edelim ki $e \notin Z(R)$ olsun. O halde her $x \in R$ için $(xe + ex) = 0$ dır. Bu durumda (3.8) eşitliği göz önüne alınırsa her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= xe + ex \\ &= xe - ex = [e, x] \\ &= I_e(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $e \in Z(R)$ dir. Bu $e \notin Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde $e \in Z(R)$ dır. Yani karesel elemanlarla değişmeli olan elemanlar halkanın merkezindedir.

(3.9) eşitliğinden her $x \in R$ için

$$d(x) \in Z(R) \tag{3.14}$$

elde edilir.

Varsayalım ki $b \in R$ için $d(b) = 0$ olsun. (3.14) ifadesinden $d(ab) \in Z(R)$ dir. Buradan $d(ab) = d(a)b + ad(b) = d(a)b$ olacağından her $a \in R$ için

$$d(a)b \in Z(R) \tag{3.15}$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) ifadelerinden yararlanıldığında her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [d(a)b, r] \\ &= d(a)[b, r] + [d(a), r]b \\ &= d(a)[b, r] \\ &= d(a)I_b(r) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifadede *Lemma 3.1.1* kullanılırsa her $a \in R$ için $d(a) = 0$ veya $b \in Z(R)$ dir. Yani her $b \in R$ için

$$d(b) = 0 \text{ ise } d = 0 \text{ veya } b \in Z(R) \quad (3.16)$$

olur. (3.15) ifadesinden her $c \in R$ için

$$\begin{aligned} d(c^2) &= d(c)c + cd(c) \\ &= d(c)c + d(c)c \\ &= 2d(c)c \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan eşitlikte (3.16) ifadesi kullanılırsa her $c \in R$ için

$$d \neq 0 \text{ iken } c^2 \in Z(R)$$

elde edilir. Her $x \in R$ için $[c^2, x] = 0$ olur. Burada R halkasının karesel elemanlarıyla değişmeli olan elemanlarının merkezde olması kullanıldığında her $x \in R$ için $x \in Z(R)$ bulunur. Yani $d \neq 0$ iken halka değişmelidir.

Lemma 3.1.5. A bir Lie halkası, $d \in A$ ve I , A Lie halkasının bir ideali olsun. Her $a, x \in I$ için $dx \cdot x = 0$ iken $(da \cdot x)x = 0$ dır.

Teorem 3.1.6. d , R asal halkasında tanımlı sıfırdan farklı bir türev olmak üzere her $a \in R$ için $[d(a), a] \in Z(R)$ iken R halkası değişmelidir.

İspat. A kümesi R halkası üzerinde tanımlı türevlerin bir kümesi olsun. A kümesi fonksiyonlardaki toplama ve bileşke işlemlerine göre bir Lie halkadır. I , R halkasında tanımlı iç türevlerden oluşan küme olsun. I kümesi, A Lie halkasının bir idealidir. Bu durumda $d \in A$ ve $I_a \in I$ olur. Keyfi $x, y \in R$ için $[d, I_a]$ ve $[I_x, I_y]$ elemanları incelenirse her $x, y, a \in R$ için

$$\begin{aligned} [d, I_a](y) &= [dI_a - I_a d](y) \\ &= dI_a(y) - I_a d(y) = d[a, y] - [a, d(y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [d(a), y] + [a, d(y)] - [a, d(y)] \\
&= [d(a), y] = I_{d(a)}(y)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak her $a \in R$ için

$$[d, I_a] = I_{d(a)} \quad (3.17)$$

elde edilir. Diğer yandan her $x, y, a \in R$ için

$$\begin{aligned}
[I_x, I_y](a) &= I_x I_y(a) - I_y I_x(a) \\
&= I_x(ya - ay) - I_y(xa - ax) \\
&= I_x(ya) - I_x(ay) - I_y(xa) + I_y(ax) \\
&= xya - yax - xay + ayx - yxa + xay + yax - axy \\
&= xya - yxa + ayx - axy \\
&= [x, y]a - a[x, y] \\
&= [[x, y], a] = I_{[x, y]}(a)
\end{aligned}$$

olur. Yani her $x, y \in R$ için

$$[I_x, I_y] = I_{[x, y]} \quad (3.18)$$

dır. O halde önce (3.17) sonra (3.18) eşitlikleri ve hipotezden yararlanılırsa her $a \in R$ için

$$[[d, I_a], I_a] = [I_{d(a)}, I_a] = I_{[d(a), a]} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yani her $a \in R$ için $[[d, I_a], I_a] = 0$ dır. Burada *Lemma 3.1.5.* kullanıldığında her $x, a \in R$ için

$$[[[d, I_x], I_a], I_a] = 0 \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) eşitliği (3.17) ve (3.18) ifadelerinden yararlanılarak düzenlenirse her $x, a \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [[[d, I_x], I_a], I_a] \\
&= [[I_{d(x)}, I_a], I_a] \\
&= [I_{[d(x), a]}, I_a] \\
&= I_{[[d(x), a], a]}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak her $x, a \in R$ için

$$[[d(x), a], a] \in Z(R)$$

dir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri yardımı ile düzenlenirse her $x, a \in R$ için

$$\begin{aligned} [[d(x), a], a] &= [d(x)a - ad(x), a] \\ &= [d(x)a, a] - [ad(x), a] \\ &= d(x)a^2 - ad(x)a - ad(x)a + a^2d(x) \\ &= d(x)a^2 - 2ad(x)a + a^2d(x) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da her $x, a \in R$ için

$$d(x)a^2 - 2ad(x)a + a^2d(x) \in Z(R)$$

demektir. $d(x)a^2 - 2ad(x)a + a^2d(x)$ elemanı R halkasının merkezinde olduğu için her $x, a \in R$ için $[d(x)a^2 - 2ad(x)a + a^2d(x), a] = 0$ olur. O halde her $x, a \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [d(x)a^2 - 2ad(x)a + a^2d(x), a] \\ &= d(x)a^3 - 2ad(x)a^2 + a^2d(x)a - ad(x)a^2 + 2a^2d(x)a - a^3d(x) \\ &= d(x)a^3 - 3ad(x)a^2 + 3a^2d(x)a - a^3d(x) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Yani her $x, a \in R$ için

$$d(x)a^3 - 3ad(x)a^2 + 3a^2d(x)a - a^3d(x) = 0 \quad (3.20)$$

olduğu görülür.

Varsayalım ki R halkasının karakteristiği üç olsun. O zaman (3.20) ifadesi tekrar düzenlenerek her $a, x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)a^3 - a^3d(x) \\ &= [d(x), a^3] \\ &= I_{a^3}(d(x)) \\ &= I_{a^3}d(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her $x \in R$ için

$$I_{a^3}d = 0$$

demektir. Sıfır dönüşümü bir türev olduğundan *Teorem 3.1.3.* kullanılırsa her $a \in R$ için $I_{a^3} = 0$ veya $d = 0$ olur. O halde her $a \in R$ için $d = 0$ veya $a^3 \in Z(R)$ dir. $d \neq 0$ olduğundan her $a \in R$ için

$$a^3 \in Z(R)$$

olur. Burada $b \in R$ için a yerine $a + b$ düşünülürse $(a + b)^3 \in Z(R)$ elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde ise her $a, b \in R$ için

$$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + aba + ab^2 + ba^2 + bab + b^2a + b^3 \in Z(R)$$

bulunur. Burada a^3 ve b^3 halkanın merkezinde ve merkez toplamaya kapalı olduğundan her $a, b \in R$ için

$$a^2b + aba + ab^2 + ba^2 + bab + b^2a \in Z(R) \quad (3.21)$$

demektir. Son ifadede a yerinde $-a$ yazılırsa her $a, b \in R$ için

$$a^2b + aba - ab^2 + ba^2 - bab - b^2a \in Z(R) \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.21) ve (3.22) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa her $a, b \in R$ için $2a^2b + 2aba + 2ba^2 \in Z(R)$ olur. R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan her $a, b \in R$ için

$$a^2b + aba + ba^2 \in Z(R)$$

olur. Bu ifadede b yerine ab yazılıp, soldan a parantezine alınır her $a, b \in R$ için

$$a^3b + a^2ba + aba^2 = a(a^2b + aba + ba^2) \in Z(R)$$

elde edilir. Yani $a(a^2 + aba + ba^2) \in Z(R)$ ve $a^2b + aba + ba^2 \in Z(R)$ dir. Burada *Lemma 2.51.* gereğince her $a, b \in R$ için $a^2b + aba + ba^2 = 0$ veya $a \in Z(R)$ bulunur. R halkasının karakteristiği üç olduğu için $a \in Z(R)$ veya $ba^2 - 2aba + a^2b = 0$ dır. O halde her $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= ba^2 - aba - aba + a^2b \\ &= [b, a]a - a[b, a] \\ &= [[b, a], a] \\ &= I_a I_a(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her $a \in R$ için $I_a I_a = 0$ anlamına gelir. Sıfır dönüşümü türev olduğundan *Teorem 3.1.3.* gereğince her $a \in R$ için $a \in Z(R)$ bulunur. Yani R halkası değişmelidir.

Varsayalım ki R halkasının karakteristiği üçten farklı olsun. (3.20) ifadesinden her $x, a \in R$ için

$$a^3d(x) - d(x)a^3 = 3(ad(x)a^2 - a^2d(x)a) \quad (3.23)$$

olur. Son eşitlikte x yerine a yazılıp, hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $a \in R$ için

$$\begin{aligned} a^3d(a) - d(a)a^3 &= 3a(d(a)a - ad(a))a \\ &= 3(ad(a) - d(a)a)a^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $a \in R$ için

$$a^3d(a) - d(a)a^3 = 3(ad(a) - d(a)a)a^2 \quad (3.24)$$

dır. Öte yandan her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a \in Z(R)$ olduğundan her $a \in R$ için

$$(ad(a) - d(a)a)a = a(ad(a) - d(a)a) \quad (3.25)$$

sonucu bulunur. (3.25) eşitliğinin iki tarafı da açılırsa

$$(ad(a) - d(a)a)a = ad(a)a - d(a)a^2$$

$$a(ad(a) - d(a)a) = a^2d(a) - ad(a)a$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp, (3.25) kullanılarak düzenlendiğinde her $a \in R$ için

$$(ad(a) - d(a)a)a + a(ad(a) - d(a)a) = ad(a)a - d(a)a^2 + a^2d(a) - ad(a)a$$

$$(ad(a) - d(a)a)a + (ad(a) - d(a)a)a = -d(a)a^2 + a^2d(a)$$

$$2(ad(a) - d(a)a)a = a^2d(a) - d(a)a^2$$

olur. Yani her $a \in R$ için

$$2(ad(a) - d(a)a)a = a^2d(a) - d(a)a^2 \quad (3.26)$$

dir. Öte yandan (3.23) eşitliğinde x yerine $d(x)$ yazılarak düzenlenirse her $a, x \in R$ için

$$3ad^2(x)a^2 + a^3d^2(x) - 3a^2d^2(x)a - d^2(x)a^3 = 0 \quad (3.27)$$

bulunur. (3.23) eşitliğinde x yerine $ad(x)$ düşünüldüğünde her $a, x \in R$ için

$$0 = a(3ad^2(x)a^2 + a^3d^2(x) - 3a^2d^2(x)a - d^2(x)a^3) + 3ad(a)d(x)a^2 \\ + a^3d(a)d(x) - 3a^2d(a)d(x)a - d(a)d(x)a^3$$

elde edilir. (3.27) eşitliğinden yararlanılırsa her $a, x \in R$ için

$$3ad(a)d(x)a^2 + a^3d(a)d(x) - 3a^2d(a)d(x)a - d(a)d(x)a^3 = 0 \quad (3.28)$$

olur. (3.23) eşitliği soldan $d(a)$ ile çarpıldığında her $a, x \in R$ için

$$3d(a)ad(x)a^2 + d(a)a^3d(x) - 3d(a)a^2d(x)a - d(a)d(x)a^3 = 0 \quad (3.29)$$

sonucuna ulaşılır. (3.28) ve (3.29) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa her $a, x \in R$ için

$$3[a, d(a)]d(x)a^2 + [a^3, d(a)]d(x) - 3[a^2, d(a)]d(x)a = 0$$

olduğu görülür. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında her $a, x \in R$ için

$$(ad(a) - d(a)a)(xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax)) = 0$$

bulunur. Son eşitlik soldan r ile çarpılıp, hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $a, x, r \in R$ için

$$[a, d(a)]r(xa^2 - a^2x - 2a[x, a]) = 0$$

elde edilir. Yani her $a, x \in R$ için

$$[a, d(a)]R(xa^2 - a^2x - 2a[x, a]) = (0)$$

dır. R halkasının asal halka olması her $a, x \in R$ için $[a, d(a)] = 0$ veya $xa^2 - a^2x - 2a[x, a] = 0$ olmasını gerektirir.

$[a, d(a)] \neq 0$ olacak biçimde en az bir $a \in R$ için $[a, d(a)] \neq 0$ olsun. Bu şartı sağlayan $a \in R$ ve her $x \in R$ için

$$xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax) = 0 \tag{3.30}$$

bulunur. Bu eşitlik tekrar düzenlenirse her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax) \\ &= xa^2 + a^2x - axa - axa \\ &= a[a, x] - a[a, x] \\ &= [[a, x]a] \\ &= I_a I_a(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $[a, d(a)] \neq 0$ koşulunu sağlayan $a \in R$ için $I_a I_a = 0$ olur.

Kabul edelim ki R halkasının karakteristiği ikiden farklı olsun. *Teorem 3.1.3.* kullanılırsa $[a, d(a)] \neq 0$ koşulunu sağlayan $a \in R$ için $a \in Z(R)$ olur. Bu da kabul ile çelişir. Yani R halkasının karakteristiği ikiden farklı ise her $a \in R$ için $[a, d(a)] = 0$ dir. Son ifadede *Lemma 3.1.4.* gereğince her $a \in R$ için $a \in Z(R)$ dir. Yani R halkası değişmelidir.

Varsayalım ki R halkasının karakteristiği iki olsun. (3.30) eşitliği bu kabule göre düzenlendiğinde $[a, d(a)] \neq 0$ koşulunu sağlayan $a \in R$ ve her $x \in R$ için

$$[x, a^2] = 0$$

elde edilir. Yani $[a, d(a)] \neq 0$ koşulunu sağlayan a elemanları için $a^2 \in Z(R)$ dir.

Kabul edelim ki $[a, d(a)] \neq 0$ koşulunu sağlayan a elemanları için $a^2 = 0$ olsun. O halde R halkasının karakteristiğinin iki olması kullanılarak

$$0 = d(a^2) = ad(a) + d(a)a = ad(a) - d(a)a$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. O zaman $a^2 \neq 0$ elde edilir.

Varsayalım ki bir $y \in R$ için $ya = 0$ olsun. Son ifade sağdan $t \in R$ için at ile çarpılarak $ya^2t = 0$ bulunur. $a^2 \in Z(R)$ olduğu için her $t \in R$ için $yta^2 = 0$ olur. O halde $yRa^2 = (0)$ dir. R halkasının asal halka olması kullanılırsa $y = 0$ ya da $a^2 = 0$ olur. $a^2 \neq 0$ olduğu için $y = 0$ olur. Sonuç olarak

$$ya = 0 \text{ iken } y = 0$$

dır. Yani a elemanı sağ sıfır bölen değildir. Benzer işlemler yapılırsa a elemanının sol sıfır bölen de olmadığı görülür. $ad(a) - d(a)a \neq 0$ olan $a \in R$ için $0 \neq a^2 \in Z(R)$ olduğu için a yerine axa yazıldığında her $x \in R$ için $(axa)d(axa) - d(axa)(axa) \neq 0$ olursa $0 \neq (axa)^2 \in Z(R)$ bulunur. $(axa)^2 = (axa)(axa) = axa^2xa = (ax^2a)a^2$ olduğundan $(ax^2a)a^2 \in Z(R)$ yazılır. Lemma 2.51. kullanılırsa $a^2 \neq 0$ olduğu için $ax^2a \in Z(R)$ elde edilir. $(axa)^2 \in Z(R)$ ifadesi $ax^2a \in Z(R)$ olması yardımıyla düzenlenirse her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} (axa)^2 &= (axa)(axa) = axa^2xa \\ &= (ax^2a)a^2 = a(ax^2a)a \\ &= (a^2x^2)a^2 \in Z(R) \end{aligned}$$

elde edilir. $a^2 \neq 0$ olduğundan Lemma 2.51. gereğince her $x \in R$ için $a^2x^2 \in Z(R)$ bulunur. $a^2 \neq 0$ olduğu için Lemma 2.51. tekrar kullanıldığında her $x \in R$ için $x^2 \in Z(R)$ sonucuna varılır. O halde

$$x^2 \notin Z(R) \text{ iken } [x, d(x)] = 0 \text{ ve } [axa, d(axa)] = 0$$

dır. $[axa, d(axa)] = 0$ ifadesi $a^2 \in Z(R)$ ve $[x, d(x)] = 0$ ifadeleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$((ad(a) + d(a)a)ax^2 + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a)a = 0$$

olur. a sol sıfır bölen olmadığı için

$$(ad(a) + d(a)a)ax^2 + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a = 0$$

bulunur. Son eşitlik, $ad(a) + d(a)a \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2(ad(a) + d(a)a) + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a \\ &= ax^2ad(a) + 2ax^2d(a)a + d(a)x^2a^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan R halkasının karakteristiğinin iki olması kullanılarak

$$ax^2ad(a) + d(a)x^2a^2 = 0$$

elde edilir. O halde $a^2 \in Z(R)$ olduğundan

$$a[x^2, ad(a)] = 0$$

dir. a sağ sıfır bölen olmadığı için $[x^2, ad(a)] = 0$ olur. Bu durumda

$$x^2 \notin Z(R) \text{ olduğunda } [x^2, ad(a)] = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yani her $x \in R$ için $x^2 \in Z(R)$ ya da $[x^2, ad(a)] = 0$ dir.

Varsayalım ki $x \in R$ için $x^2 \in Z(R)$ olsun. Bu da

$$[x^2, ad(a)] = x^2 ad(a) - ad(a)x^2 = x^2 ad(a) - x^2 ad(a) = 0$$

olmasını gerektirir. O zaman her $x \in R$ için

$$[x^2, ad(a)] = 0$$

bulunur. *Lemma 3.1.4.* ün ispatında gösterildiği gibi her elemanın karesiyle değişmeli olan elemanlar halkanın merkezinde olduğu için $ad(a) \in Z(R)$ dir. Bu sebeple

$$0 = [a, ad(a)] = aad(a) - ad(a)a = a(ad(a) - d(a)a)$$

olur. Yani $a[a, d(a)] = 0$ dir. a sağ sıfır bölen olmadığı için her $a \in R$ için $[a, d(a)] = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ifadede *Lemma 3.1.4.* kullanıldığında istenilen sonuç elde edilmiş olur.

3.2. Herstein'in Türevler Üzerine Bir Notu

Bu bölümde I.N. Herstein (1979) tarafından yapılan “A Note on Derivations II” adlı çalışma incelenmiştir.

Teorem 3.2.1 R bir asal halka, $0 \neq d$ türev ve $a \in R$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0$ iken

i. R karakteristiği ikiden farklı bir halka ise $a \in Z(R)$ dir.

ii. R karakteristiği iki olan bir halka ise $a^2 \in Z(R)$ dir. Üstelik $a \notin Z(R)$ ise $\lambda \in C$ olmak üzere $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ şeklindedir.

İspat. Varsayalım ki $a \notin Z(R)$ olsun. Hipotezde x yerine $y \in R$ için xy yazılırsa her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a, d(xy)] \\ &= [a, xd(y) + d(x)y] \\ &= [a, x]d(y) + x[a, d(y)] + [a, d(x)]y + d(x)[a, y] \\ &= [a, x]d(y) + d(x)[a, y] \end{aligned}$$

olur. Yani her $x, y \in R$ için

$$[a, x]d(y) + d(x)[a, y] = 0 \tag{3.31}$$

dir.

Kabul edelim ki $[a, y] = 0$ olsun. O zaman yukarıdaki eşitlikten her $x \in R$ için

$$[a, x]d(y) = 0$$

bulunur. Bulunan ifadede x yerine $r \in R$ için xr yazılır ve aynı ifade kullanılırsa her $x, r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a, xr]d(y) \\ &= [a, x]rd(y) + x[a, r]d(y) \\ &= [a, x]rd(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x \in R$ için $(0) = [a, x]Rd(y)$ dir. Burada R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ veya $d(y) = 0$ bulunur. Bu durumda $a \in Z(R)$ veya $d(y) = 0$ dir. $a \in Z(R)$ olması $a \notin Z(R)$ olması ile çelişir. O halde $d(y) = 0$ olduğu görülür. Yani herhangi bir $y \in R$ için

$$[a, y] = 0 \text{ ise } d(y) = 0 \tag{3.32}$$

dir. Hipotezden her $r \in R$ için $[a, d(r)] = 0$ dir. Hipotezde (3.32) ifadesi kullanılırsa her $r \in R$ için

$$0 = d(d(r)) = d^2(r)$$

elde edilir. Yani $d^2 = 0$ dir.

Varsayalım ki R halkasının karakteristiği ikiden farklı olsun. Bu durumda *Teorem 3.1.3.* kullanılırsa sıfır dönüşümü türev olduğundan $d = 0$ dir. Bu ise $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $a \notin Z(R)$ iken R halkasının karakteristiği ikidir. Elde edilen ifadenin karşıt tersi ise R halkasının karakteristiği iki iken $a \in Z(R)$ dir. Bu da ispatın ilk kısmını bitirir.

Varsayalım ki R halkasının karakteristiği iki olsun. (3.31) eşitliğine dönülürse halkanın karakteristik iki olduğundan her $x, y \in R$ için

$$d(x)[a, y] - [a, x]d(y) = 0 \tag{3.33}$$

yazılır.

Kabul edelim ki $d(y) = 0$ olsun. (3.33) eşitliği bu kabul doğrultusunda düzenlenirse her $x \in R$ için

$$d(x)[a, y] = 0$$

bulunur. Bulunan ifadede *Lemma 3.1.1.* kullanıldığında $d = 0$ veya $[a, y] = 0$ elde edilir. $d \neq 0$ olduğundan $[a, y] = 0$ olur. Yani

$$d(y) = 0 \text{ iken } [a, y] = 0 \quad (3.34)$$

dır. (3.33) eşitliğinde $w \in R$ için x yerine xw yazılır ve aynı ifade yardımıyla düzenlenirse her $x, y, w \in R$ için

$$d(x)w[a, y] = [a, x]wd(y)$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine x düşünülürse her $x, w \in R$ için

$$d(x)w[a, x] = [a, x]wd(x)$$

olur. $a \notin Z(R)$ olduğu için, $[a, x] \neq 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in R$ vardır. Son eşitlikte x yerine x_0 yazılır ve bulunan ifade *Sonuç 2.76.* kullanılarak düzenlenirse

$$d(x_0) = \lambda(x_0)[a, x_0] \text{ olacak şekilde } \lambda(x_0) \in C \text{ vardır}$$

sonucuna ulaşılır. $\lambda(x_0) = 0$ iken $d(x_0) = 0$ olur. Burada (3.34) ifadesi kullanılırsa $[a, x_0] = 0$ olduğu görülür. Yani $\lambda(x_0) = 0$ iken $[a, x_0] = 0$ dır. Bu da $a \in Z(R)$ anlamına gelir. $a \notin Z(R)$ olduğundan $\lambda(x_0) \neq 0$ olur. O halde her $x \in R$ için $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ olarak yazılır. Hipotezden her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a, d(x)] \\ &= [a, \lambda(x)[a, x]] \\ &= [a, \lambda(x)][a, x] + \lambda(x)[a, [a, x]] \end{aligned}$$

dir. $\lambda(x) \in C$ olduğu için $0 = \lambda(x)[a, [a, x]]$ bulunur. Bu ifade soldan $\lambda(x)^{-1}$ ile çarpılırsa her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a, [a, x]] \\ &= [a, ax - xa] \\ &= a^2x - 2axa - xa^2 \end{aligned}$$

olur. Halkanın karakteristiğinin iki olması kullanıldığında her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= a^2x - xa^2 \\ &= [a^2, x] \end{aligned}$$

bulunur. Yani $a^2 \in Z(R)$ dir. Diğer taraftan $d(x) = \lambda(x)[a, x]$ eşitliğinde x yerine xy düşünüldüğünde $d(xy) = \lambda(xy)[a, xy]$ elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında her $x, y \in R$ için

$$(\lambda(x) + \lambda(xy))[a, x]y = (\lambda(xy) + \lambda(y))x[a, y]$$

olur. $\mu = \lambda(x) + \lambda(xy)$ ve $\nu = \lambda(xy) + \lambda(y)$ kabul edilsin. Her $x, y \in R$ için

$$\nu x[a, y] = \mu[a, x]y$$

yazılır. R halkasının karakteristiğinin iki olması kullanıldığında her $x, y \in R$ için $\mu[a, x]y + \nu x[a, y] = 0$ sonucuna ulaşılır. O halde $[a, [a, x]] = 0$ olduğundan her $x, y \in R$ için

$$(\mu + \nu)[a, x][a, y] = 0$$

dır. Son eşitlik $q \in Q$ ile soldan çarpılır ve $\mu + \nu \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= q(\mu + \nu)[a, x][a, y] \\ &= (\mu + \nu)q[a, x][a, y] \end{aligned}$$

bulunur. O halde her $x, y \in R$ için $(0) = (\mu + \nu)Q[a, x][a, y]$ dır. Q halkası asal olduğundan her $x, y \in R$ için $[a, x][a, y] = 0$ veya $\mu + \nu = 0$ dır.

Varsayalım ki $\mu + \nu \neq 0$ olsun. O zaman her $x, y \in R$ için $[a, x][a, y] = 0$ olur. Bu eşitlikte $r \in R$ için x yerine xr yazılıp aynı eşitlik yardımıyla düzenlenirse her $x, y, r \in R$

$$\begin{aligned} 0 &= [a, xr][a, y] \\ &= [a, x]r[a, y] + x[a, r][a, y] \\ &= [a, x]r[a, y] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani her $x, y \in R$ için

$$[a, x]R[a, y] = (0)$$

dır. R halkası asal olduğundan her $x, y \in R$ için $[a, x] = 0$ ya da $[a, y] = 0$ dır. Yani $a \in Z(R)$ dir. Bu ise $a \notin Z(R)$ olması ile çelişir. O halde

$$\mu + \nu = 0$$

dır. Bu ifade halkanın karakteristiğinin iki olması kullanılıp düzenlenirse her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \mu + \nu \\ &= \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(xy) + \lambda(y) \\ &= \lambda(x) + 2\lambda(xy) + \lambda(y) \\ &= \lambda(x) + \lambda(y) \end{aligned}$$

olur. Elde edilen ifadede karakteristiğinin iki olması kullanılırsa her $x, y \in R$ için

$$\lambda(x) = \lambda(y)$$

bulunur. Sonuç olarak her $x, y \in R$ için

$$[a, x][a, y] \neq 0 \text{ iken } \lambda(x) = \lambda(y)$$

dir.

Varsayalım ki $[a, x] \neq 0$ olsun. O halde her $w \in R$ için $[a, x][a, w] = 0$ dır. Bu eşitlik $r \in R$ için w yerine rw yazılarak düzenlendiğinde her $w, r \in R$ için

$$0 = [a, x][a, rw]$$

$$\begin{aligned}
&= [a, x]r[a, w] + [a, x][a, r]w \\
&= [a, x]r[a, w]
\end{aligned}$$

olur. Yani her $w \in R$ için

$$[a, x]R[a, w] = (0)$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa her $w \in R$ için $[a, x] = 0$ ya da $[a, w] = 0$ elde edilir. $[a, x] \neq 0$ olduğu için her $w \in R$ için $[a, w] = 0$ dır. O halde $a \in Z(R)$ olur. Bu ise $a \notin Z(R)$ olması ile çelişir. Yani $\lambda(x) = \lambda(w)$ olur.

$[a, y] \neq 0$ olsun. Yukarıda uygulanan benzer işlemlerle $[a, y] \neq 0$ iken $\lambda(w) = \lambda(y)$ bulunur. O halde λ , a ile değişmeli olmayan elemanlardan bağımsızdır. Bu sebeple $d(x) = \lambda[a, x]$ olarak yazılır.

Varsayalım ki her $x, y, z \in R$ için $[a, x][a, z][a, y] = 0$ olsun. Halkanın karakteristiğinin iki olması kullanılırsa her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [a, x](az - za)[a, y] \\
&= [a, x]az[a, y] + [a, x]za[a, y] \\
&= (ax - xa)az[a, y] + [a, x]za[a, y] \\
&= (axa - xaa)[a, y] + [a, x]za[a, y]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik $a^2 \in Z(R)$ olması düşünülerek düzenlenirse her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= (axa - xa^2)z[a, y] + [a, x]za[a, y] \\
&= (axa - a^2x)z[a, y] + [a, x]za[a, y] \\
&= (axa - aax)z[a, y] + [a, x]za[a, y] \\
&= a(xa - ax)z[a, y] + [a, x]za[a, y] \\
&= a[a, x]z[a, y] + [a, x]za[a, y]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine x yazılırsa her $x, z \in R$ için

$$0 = a[a, x]z[a, y] + [a, x]za[a, y]$$

olur. Bu ifade *Sonuç 2.76.* yardımıyla düzenlenirse her $x \in R$ için

“ $[a, x]a = \mu[a, x]$ koşulunu sağlayan en az bir $\mu \in C$ vardır”

sonucu bulunur. Bu eşitlik her $x \in R$ için $[a, x](a - \mu) = 0$ şeklinde yazılabilir. Burada $r \in R$ için x yerine xr yazıldığında her $x, r \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [a, xr](a - \mu) \\
&= [a, x]r(a - \mu) + r[a, x](a - \mu) \\
&= [a, x]r(a - \mu)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her $x \in R$ için

$$[a, x]R(a - \mu) = (0)$$

demektir. Son eşitliği soldan $q \in C$ ile çarpıp elde edilen eşitlik, q 'nın özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde her $q \in C$ için

$$\begin{aligned}(0) &= q[a, x]R(a - \mu) \\ &= [a, x]Rq(a - \mu)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(0) = [a, x]RC(a - \mu)$ yazılır. RC asal halka olduğu için her $x \in R$ için $a \in Z(R)$ veya $a = \mu \in C$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Yani istenilen sonuç elde edilmiş olur.

3.3. Asal Halkalarda Lie İdealler ve Türevler

Bu bölümde J. Bergen, I.N. Herstein ve J.W.Kerr (1980) tarafından yapılmış olan “*Lie Ideals and Derivations of Prime Rings*” adlı çalışma incelenmiştir.

Bölüm 3.3. boyunca R bir asal halka, $\text{char} R \neq 2$, A kümesi R kümesinin bir altkümesi olmak üzere $C_R(A) = \{x \in R \mid [x, a] = 0, \forall a \in A\}$ ve U , R halkasının Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 3.3.1. $U \not\subset Z(R)$ olmak üzere R halkasının öyle bir M ideali vardır ki $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ koşullarını sağlar.

İspat. $U \not\subset Z(R)$ olduğundan Lemma 2.74 kullanılırsa $[U, U] \neq (0)$ bulunur. $T(U) = \{x \in R \mid [x, R] \subset U\}$ kümesi tanımlansın. Kümenin tanımı kullanılarak $[T(U), R] \subset U \subset T(U)$ elde edilir. Yani $T(U)$, R halkasının Lie idealidir.

Kabul edelim ki $x, y \in T(U)$ ve $r \in R$ olsun. $T(U)$ kümesinin tanımından $[x, R] \subset U$ ve $[y, R] \subset U$ olur. $[xy, r]$ ifadesi incelendiğinde;

$$\begin{aligned}[xy, r] &= xyr - rxy \\ &= xyr - yrx + yrx - rxy \\ &= [x, yr] + [y, rx]\end{aligned}$$

elde edilir. $[x, yr] \in T(U)$ ve $[y, rx] \in T(U)$ olduğundan $[xy, r] \in T(U)$ dur. Yani $T(U)$, R halkasının althalkasıdır. Sonuç olarak $T(U)$, R halkasının hem Lie ideali hem de althalkasıdır. T_0 kümesi $T(U)$ halkasının $[U, U]$ ile üretilen althalkası olsun. Buradan

$$[[U, U], U] \subset [U, U] \subset T_0$$

olur. T_0 , $T(U)$ halkasının althalkası olduğu için R halkasının da althalkasıdır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}[T_0, R] &= \left[\sum [U, U], R \right] \\ &= \sum [[U, U], R] \\ &= \sum [[U, R], U] + \sum [U, [R, U]]\end{aligned}$$

$$= \sum [U, U] \subset T_0$$

elde edilir. Yani T_0 , R halkasının Lie idealidir. Sonuç olarak T_0 , R halkasının hem Lie ideali hem de alt halkasıdır. *Lemma 2.73.* gereğince $T_0 \subset Z(R)$ veya T_0 , R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar sonucuna ulaşılır.

Varsayalım ki $T_0 \subset Z(R)$ olsun. $[U, U] \subset T_0 \subset Z(R)$ olduğundan $[U, U] \subset Z(R)$ olur. *Lemma 2.74.* yardımıyla $U \subset Z(R)$ çelişkisine ulaşılır. Böylece $T_0 \not\subset Z(R)$ dir. Yani T_0 , R halkasının sıfırdan farklı bir ideal kapsar. Bu ideal M olsun. O halde $M \subset T_0$ olur. Bir başka deyişle

$$[M, R] \subset [T_0, R] \subset [T(U), R] \subset U$$

dir. Yani $[M, R] \subset U$ dir.

Kabul edelim ki $[M, R] = (0)$ olsun. O zaman $M \subset Z(R)$ olur. M ideal olduğu için her $m \in M$ ve her $r \in R$ için $mr \in M$ dir. $M \subset Z(R)$ olması kullanılırsa her $m \in M$ ve her $r, s \in R$ için

$$mrs = smr = msr$$

yazılır. Buradan her $m \in M$ ve her $r, s \in R$ için $m[s, r] = 0$ elde edilir. Bu da $M[R, R] = (0)$ demektir. $T_0 = \sum [U, U] \subset [U, U] \subset [R, R]$ olduğu için $T_0 \subset [R, R]$ olur. Burada $M \subset T_0$ ve $T_0 \subset [R, R]$ kullanılırsa

$$M^2 = MM \subset MT_0 \subset M[R, R] = (0)$$

bulunur. R asal halka olduğu için $M = (0)$ çelişkisi doğar. Yani $[M, R] \neq (0)$ sonucuna ulaşılır.

Varsayalım ki $[M, R] \subset Z(R)$ olsun. O halde $[M, [M, R]] = (0)$ dır. Burada *Lemma 2.75.* kullanıldığında $M \subset Z(R)$ bulunur. Her $m \in M$ ve her $r, s \in R$ için $M \subset Z(R)$ olması kullanılarak

$$mrs = rms = msr$$

elde edilir. Yani her $m \in M$ ve her $r, s \in R$ için

$$m[r, s] = 0$$

dir. Bu eşitlikte $x \in R$ için m yerine mx yazılırsa her $m \in M$ ve her $r, s, x \in R$ için

$$mx[r, s] = 0$$

elde edilir. Bu da her $m \in M$ ve her $r, s \in R$ için

$$mR[r, s] = (0)$$

demektir. Burada R halkasının asal olması kullanıldığında $M = (0)$ veya $R \subset Z(R)$ bulunur. Yani $M \neq (0)$ olduğu için $R \subset Z(R)$ olur. Buradan $U \subset R \subset$

$Z(R)$ sonucuna ulaşılır. Yani $U \subset Z(R)$ dir. Bu da bir çelişkidir dolayısıyla $[M, R] \not\subset Z(R)$ olur.

Lemma 3.3.2. $U \not\subset Z(R)$ ise $C_R(U) = Z(R)$ dir.

İspat. $x, y \in C_R(U)$ ve $u \in U$ olsun. $[xy, u]$ ifadesi hipotez ve Lie komütatör özelliklerinden yararlanılarak düzenlendiğinde

$$[xy, u] = x[y, u] + [x, u]y = 0 + 0 = 0$$

elde edilir. Yani $xy \in C_R(U)$ bulunur. $C_R(U)$ kümesi R halkasının bir althalkasıdır. Diğer taraftan $x \in C_R(U)$, $u \in U$ ve $r \in R$ için $[[x, r], u]$ elemanı Jacobi özdeşliği, hipotez, Lie komütatör özellikleri ve $[x, r] \in C_R(U)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x \in C_R(U)$, her $r \in R$ ve her $u \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [[x, r], u] + [[r, u], x] + [[u, x], r] \\ &= [[x, r], u] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x \in C_R(U)$ ve $r \in R$ için $[x, r] \in C_R(U)$ olur. Bu ise $C_R(U)$, R halkasının Lie ideali olması demektir. $C_R(U)$, R halkasının hem Lie ideali hem de althalkasıdır. *Lemma 2.73* gereğince $C_R(U) \subset Z(R)$ veya $C_R(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Eğer $C_R(U) \subset Z(R)$ ise ispat bitmiş olur.

Kabul edelim ki $C_R(U) \not\subset Z(R)$ olsun. O zaman $C_R(U)$ R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Bu ideal M olsun. O zaman $M \subset C_R(U)$ dur. O halde

$$[M, U] \subset [C_R(U), U] = (0)$$

dur. Bu ise $[M, U] = (0)$ demektir. *Lemma 2.35.* den yararlanılırsa $M = (0)$ veya $U \subset Z(R)$ bulunur. Bu da çelişkidir. Dolayısıyla $C_R(U) \subset Z(R)$ dir.

Lemma 3.3.3. $C_R(U) = C_R[U, U]$ dir.

İspat. U Lie ideal olduğundan $[U, U] \subset U$ dur. *Lemma 2.40.* dan $[U, U]$ kümesi R halkasının Lie idealidir. Eğer $[U, U] \not\subset Z(R)$ ise $U \not\subset Z(R)$ olur. *Lemma 3.3.2.* den yararlanılırsa $C_R[U, U] = Z(R)$ ve $C_R(U) = Z(R)$ elde edilir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Kabul edelim ki $[U, U] \subset Z(R)$ olsun. O zaman $C_R([U, U]) = R$ dir. $u \in U$ ve $x \in R$ olmak üzere $[u, x] = a$ ve $[u, [u, x]] = k$ olsun. Yani $k = [u, [u, x]] = [u, a]$ olur. Buradan

$$a = [u, x] \in [U, R] \subset U$$

$$k = [u, [u, x]] = [u, a] \subset [U, U]$$

elde edilir. Yani $a \in U$ ve $k \in [U, U]$ dur. Burada ku elemanı incelenirse

$$\begin{aligned}
ku &= [u, [u, x]]u = u[u, [u, x]] \\
&= u[u, ux - xu] \\
&= u(u(ux - xu) - (ux - xu)u) \\
&= u^2(ux - xu) - u(ux - xu)u \\
&= u(u^2x - uxu) - (u^2x - uxu)u \\
&= u(u(ux) - (ux)u) - (u(ux) - (ux)u)u \\
&= u[u, ux] - [u, ux]u \\
&= [u, [u, ux]] \in [U, U] \subset Z(R)
\end{aligned}$$

olur. Yani $ku \in Z(R)$ dir. Burada *Lemma 2.51.* kullanılarak her $u \in U$ için $k = 0$ veya $u \in Z(R)$ elde edilir. Yani $k = 0$ veya $U \subset Z(R)$ dır. $U \subset Z(R)$ olursa $C_R(U) = R$ bulunur. O halde ispat biter.

Kabul edelim ki $U \not\subset Z(R)$ olsun. O zaman $k = 0$ olur. Yani her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $[u, [u, x]] = 0$ olur. Yani her $x \in R$ için $I_u I_u(x) = 0$ elde edilir. Sıfır dönüşümü bir türev olduğundan *Teorem 3.1.3.* kullanılarak her $u \in U$ için $I_u = 0$ elde edilir. Bu da $U \subset Z(R)$ demektir. Yani $C_R(U) = R$ dir. O halde $C_R(U) = C_R([U, U])$ olur.

Lemma 3.3.4. $U \not\subset Z(R)$ ve $aUb = (0)$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

İspat. $U \not\subset Z(R)$ olduğu için *Lemma 3.3.1.* gereğince R halkasının $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ koşullarını sağlayan bir M ideali vardır. $u \in U$, $m \in M$ ve $y \in R$ olsun. M ideal olduğundan $mau \in M$ dır. Her $u \in U$, $m \in M$ ve $y \in R$ için

$$[mau, y] \in [M, R] \subset U$$

olur $[U, R] \subset U$ olması kullanılarak hipotezden her $u \in U$, $m \in M$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= a[mau, y]b \\
&= a([ma, y]u + ma[u, y])b \\
&= a[ma, y]ub + ama[u, y]b \\
&= a[ma, y]ub \\
&= a(may - yma)ub \\
&= amayub - aymaub \\
&= amayub
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $aMaRUb = (0)$ dır. R halkasının asal olması kullanılırsa $aMa = (0)$ veya $Ub = (0)$ bulunur. M, R halkasının sıfırdan farklı ideali olduğu için burada *Lemma 2.25.* yardımıyla $a = 0$ veya $Ub = (0)$ sonucuna ulaşılır.

Varsayalım ki $a \neq 0$ olsun. O zaman $Ub = (0)$ dır. $r \in R$ ve $u \in U$ için $[u, r] \in U$

olur. O halde her $r \in R$ ve $u \in U$ için

$$0 = [u, r]b = urb - rub = urb$$

dir. Bu da her $u \in U$ için $(0) = uRb$ demektir. R halkası asal olduğundan her $u \in U$ için $u = 0$ veya $b = 0$ olduğu görülür. Yani $U = (0)$ veya $b = 0$ dir. U sıfırdan farklı bir Lie ideal olduğu için istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Lemma 3.3.5. d , R halkası üzerinde sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $d(U) = (0)$ ise $U \subset Z(R)$ olur.

İspat. $u \in U$ ve $r \in R$ için U Lie ideal olduğundan $[u, x] \in U$ olur. Bu durum hipotez ile birlikte kullanılırsa her $u \in U$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d([u, x]) \\ &= [d(u), x] + [u, d(x)] \\ &= [u, d(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade *Teorem 3.2.1.* yardımıyla düzenlendiğinde her $u \in U$ için $u \in Z(R)$ bulunur. Yani $U \subset Z(R)$ olur.

Lemma 3.3.6. d , R üzerinde sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $d(U) \subset Z(R)$ ise $U \subset Z(R)$ olur.

İspat. Varsayalım ki $[U, U] \subset Z(R)$ olsun. O zaman $C_R([U, U]) = R$ dir. *Lemma 3.3.3.* gereğince $R = C_R([U, U]) = C_R(U)$ olur. Bu da $C_R(U) = R$ demektir. Yani $U \subset Z(R)$ dir. Sonuç olarak $[U, U] \subset Z(R)$ iken $U \subset Z(R)$ elde edilir. Bu önermenin karşıt tersi de doğru olduğundan $U \not\subset Z(R)$ iken $[U, U] \not\subset Z(R)$ olur.

Varsayalım ki $U \not\subset Z(R)$ olsun. O zaman $[U, U] \not\subset Z(R)$ olur. *Lemma 2.40.* dan $[U, U]$ Lie idealdir. $a, b \in U$ için $d(a) \in Z(R)$ ve $d(b) \in Z(R)$ olduğu düşünülerek $d([a, b])$ elemanı incelenirse her $a, b \in U$ için

$$d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] = 0$$

bulunur. Yani $d([U, U]) = 0$ dir. Burada *Lemma 3.3.5.* kullanılarak $[U, U] \subset Z(R)$ elde edilir. Bu da $[U, U] \not\subset Z(R)$ olması ile çelişir. O halde $U \subset Z(R)$ dir.

Lemma 3.3.7. d , R üzerinde sıfırdan farklı bir türev ve $U \not\subset Z(R)$ olmak üzere $t \in R$ için $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise $t = 0$ dir.

İspat. $u \in U$ ve $r \in R$ olsun. U Lie ideal olduğu için $[u, r] \in U$ olur. Benzer şekilde $[u, [u, r]] \in [U, [U, R]] \subset [U, U] \subset U$ olur. Yine U kümesinin bir Lie ideal olması kullanılırsa $[u, ru] \in U$ olur. Yani her $u \in U$ ve $r \in R$ için

$$[u, ru] = [u, r]u + r[u, u] = [u, r]u$$

olur. O halde her $u \in U$ ve her $r \in R$ için $[u, r]u \in U$ dur. Burada hipotezden her $u \in U$ ve her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= td([u, r]u) \\ &= td([u, r])u + t[u, r]d(u) \\ &= t[u, r]d(u) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik $v \in U$ için r yerine $d(v)r$ yazılarak hipotez yardımıyla düzenlendiğinde her $u, v \in U$ ve her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= t[u, d(v)r]d(u) \\ &= t[u, d(v)]rd(u) + td(v)[u, r]d(u) \\ &= t[u, d(v)]rd(u) \\ &= t(ud(v) - d(v)u)rd(u) \\ &= tud(v)rd(u) - td(v)urd(u) \\ &= tud(v)rd(u) \end{aligned}$$

olur. Özetle her $u, v \in U$ ve her $r \in R$ için $0 = tud(v)rd(u)$ dur. Bu da her $u, v \in U$ için $(0) = tud(v)Rd(u)$ demektir. R halkasının asal olması kullanılarak her $u, v \in U$ için $tud(v) = 0$ veya $d(u) = 0$ elde edilir.

$K = \{u \in U \mid tud(U) = (0)\}$ ve $L = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. Bu iki küme U grubunun altgrupları olduğundan Teorem 2.4. yardımıyla $K = R$ veya $L = R$ elde edilir. Lemma 3.3.5. gereğince $L = R$ olamaz. Bu da her $u \in U$ için $tud(U) = (0)$ anlamına gelir. Yani her $u \in U$ için $tUd(u) = (0)$ dır. Burada Lemma 3.3.4. kullanılırsa her $u \in U$ için $d(u) = 0$ veya $t = 0$ bulunur. Bu ise $t = 0$ veya $d(U) = (0)$ demektir. Lemma 3.3.5. den $d(U) \neq (0)$ olacağı için istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.8. d, R üzerinde sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $d^2(U) = 0$ ise $U \subset Z(R)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $U \not\subset Z(R)$ olsun. Lemma 2.74. ün karşıt ters önermesinden yararlanılarak $[U, U] \not\subset Z(R)$ elde edilir. Yani istenilen sonuca ulaşılması için $[U, U] \subset Z(R)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Lemma 3.3.1. kullanılırsa R halkasının $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir M ideali vardır. M bir ideal olduğu için aynı zamanda Lie idealdir. Yani $[M, R] \subset M$ olur. Yukarıdaki koşul ile birlikte $[M, R] \subset U \cap M$ sonucuna ulaşılır.

Kabul edelim ki $m \in [M, R] \subset U$ ve $u, x \in U$ için $v = [u, x] \in [U, U] \subset U$ olsun. U

Lie ideal olduğu için $[d(u), u] \in [R, U] \subset U$ ve $[u, d(u)] \in [U, R] \subset U$ olur. $w = d(v)$ elemanı bu koşullar altında incelenirse U kümesi toplama işlemine kapalı olduğundan her $u, x \in U$ için

$$w = d(v) = d([u, x]) = [d(u), x] + [u, d(x)] \in U$$

elde edilir. Bu elemanın d altındaki görüntüsü hipotez yardımıyla incelenirse her $w \in d([U, U])$ için

$$d(w) = d(d(v)) = d^2(v) = 0$$

bulunur. M, R halkasının bir ideali olduğundan $m \in M$ $mr \in M$ dir. O halde $r \in R$ için $[mw, r] \in [M, R] \subset U$ olur. Bu da her $r \in R$ için $[mw, r] \in U$ demektir. Bu elemanın d türevi altındaki görüntüsü hipotez yardımıyla düzenlenirse her $r \in R$, her $m \in [M, R]$ ve her $w \in d([U, U])$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d^2([mw, r]) \\ &= d^2(m[w, r] + [m, r]w) \\ &= d(d(m[w, r]) + d([m, r]w)) \\ &= d(d(m)[w, r] + md([w, r]) + d([m, r])w + [m, r]d(w)) \\ &= d(d(m)[w, r] + md([w, r]) + d([m, r])w) \\ &= d^2(m)[w, r] + d(m)d([w, r]) + d(m)d([w, r]) + md^2([w, r]) + d^2([m, r])w \\ &\quad + d([m, r])d(w) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik $0 = d(w) = d^2([m, r]) = d^2(m) = d^2([w, r])$ olması kullanılarak her $r \in R$, her $m \in [M, R]$ ve her $w \in d([U, U])$ için

$$0 = 2d(m)d([w, r])$$

bulunur. R asal halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan her $r \in R$, her $m \in [M, R]$ ve her $w \in d([U, U])$ için

$$0 = d(m)d([w, r])$$

dir. $m \in [M, R]$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ olduğundan Lemma 3.3.7. yardımıyla her $w \in d([U, U])$ ve her $r \in R$

$$0 = d([w, r])$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde her $r \in R$ ve her $v \in [U, U]$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d([d(v), r]) \\ &= [d(d(v)), r] + [d(v), d(r)] \\ &= [d^2(v), r] + [d(v), d(r)] \\ &= [d(v), d(r)] \end{aligned}$$

olur. Yani her $r \in R$ için $(0) = [d(v), d(r)]$ dir. Teorem 3.2.1. uygulanarak her $v \in$

$[U, U]$ için $d(v) \in Z(R)$ bulunur. $[U, U]$, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $d([U, U]) \subset Z(R)$ olması düşünülürse *Lemma 3.3.6.* kullanılarak $[U, U] \subset Z(R)$ sonucuna ulaşılır.



BÖLÜM 4

İNVOLÜSYONLU HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK

4.1. *-Asal halkalarda Türevler ve Değişmelilik

Bu bölümde Oukhtite ve Salhi (2006) tarafından yapılmış olan “*Derivations and Commutativity of *-Prime Rings*” adlı çalışma incelenmiştir.

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe R , karakteristiği ikiden farklı bir *-asal halkadır.

Lemma 4.1.1. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir *-ideali ve $a, b \in R$ için $alb = alb^* = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olur.

İspat. $a, b \in R$ için $alb = alb^* = (0)$ olsun. Bu durumda her $x \in I$ için $axb = axb^* = 0$ dır. $r \in R$ için x yerine xr yazılırsa her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$0 = axrb = axrb^*$$

bulunur. Yani her $x \in I$ için

$$(0) = axRb = axRb^*$$

dır. R halkasının *-asal halka olması kullanılarak her $x \in I$ için $ax = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. $b = 0$ olursa ispat biter.

Varsayalım ki $b \neq 0$ olsun. O halde her $x \in I$ için

$$ax = 0 \tag{4.1}$$

dır. (4.1) numaralı eşitlikte $r \in R$ için x yerine rx yazılırsa her $x \in R$ ve $r \in R$ için

$$arx = 0 \tag{4.2}$$

olur. I bir *-ideal olduğu için yine (4.1) numaralı eşitlikte $r \in R$ için x yerine rx^* yazılırsa her $x \in R$ ve $r \in R$ için

$$arx^* = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) numaralı eşitlikler birlikte kullanıldığında her $x \in R$ ve $r \in R$ için

$$0 = arx = arx^*$$

bulunur. Bu da her $x \in I$ için

$$(0) = aRx = aRx^*$$

demektir. R halkası $*$ -asal halka olduğundan her $x \in I$ için $a = 0$ veya $x = 0$ dır. Yani $a = 0$ veya $I = (0)$ dır. $I \neq (0)$ olduğu için istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 4.1.2. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d sıfırdan farklı $*$ ile değişmeli bir türev olsun. Eğer her $x \in I$ için $[x, R]Id(x) = (0)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Her $x \in I$ için I bir $*$ -ideal olduğundan $t = x - x^* \in I$ olur. t elemanının $*$ altından görüntüsü incelenirse

$$\begin{aligned} (t)^* &= (x - x^*)^* \\ &= x^* - (x^*)^* \\ &= x^* - x \\ &= -(x - x^*) \\ &= -t \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $t \in Sa_*$ olur. Öte yandan hipotezden yararlanılırsa $t \in I$ olduğundan

$$[t, R]Id(t) = (0) \tag{4.4}$$

dır. Bu eşitlikte $(t)^* = -t$ olduğu kullanıldığında

$$[-t, R^*]Id(t) = (0)$$

olur. Not 2.72. gereğince

$$[t, R]^*Id(t) = (0) \tag{4.5}$$

bulunur. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri birlikte kullanılarak $(0) = [t, R]Id(t) = [t, R]^*Id(t)$ elde edilir. Lemma 4.1.1. yardımıyla $d(t) = 0$ veya $[t, R] = (0)$ olduğu görülür.

Varsayalım ki $[t, R] = (0)$ olsun. O halde her $x \in I$ için $[x - x^*, R] = (0)$ dır. Yani her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [x - x^*, r] \\ &= [x, r] - [x^*, r] \end{aligned}$$

olur. Yani her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[x, r] = [x^*, r]$$

dır. Bu ifade hipotez ve son eşitlik yardımıyla düzenlendiğinde her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$(0) = [x, r]Id(x) = [x, r]^*Id(x)$$

elde edilir. Son eşitlikte *Lemma 4.1.1.* kullanılırsa her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $[x, r] = 0$ veya $d(x) = 0$ bulunur. Sonuç olarak eğer $[t, R] = (0)$ ise her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ dır.

Kabul edelim ki $d(t) = 0$ olsun. Her $x \in I$ için $d(x - x^*) = 0$ dır. Yani her $x \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(x - x^*) \\ &= d(x) - d(x^*) \end{aligned}$$

olur. Bu ise her $x \in I$ için

$$d(x) = d(x^*)$$

demektir. Burada hipotezden ve d dönüşümünün $*$ ile değişmeli olmasından yararlanılırsa her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} (0) &= [x, r]Id(x) \\ &= [x, r]Id(x^*) \\ &= [x, r]I(d(x))^* \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenli yazılırsa her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$(0) = [x, r]Id(x) = [x, r]I(d(x))^*$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte *Lemma 4.1.1.* kullanılarak her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $[x, r] = 0$ veya $d(x) = 0$ bulunur. Dolayısıyla eğer $d(t) = 0$ ise her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ dır. Yani her iki durumda da aynı sonuç elde edildiğinden her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ olur. $A = \{x \in I \mid x \in Z(R)\}$ ve $B = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. Bu iki kümenin I grubunun altgrupları olduğu açıktır ve $A \cup B = I$ dır. *Teorem 2.4* gereğince $A = I$ veya $B = I$ olur.

Varsayalım ki $B = I$ olsun. O halde her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Bu eşitlikte $r \in R$ için x yerine xr düşünülerek her $x \in I$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(xr) \\ &= xd(r) + d(x)r \\ &= xd(r) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her $r \in R$ için $(0) = Id(r)$ demektir. Bu eşitlik $s \in R$ için soldan ayrı ayrı s ve s^* ile çarpılırsa her $s, r \in R$ için

$$(0) = sId(r) = s^*Id(r)$$

olur. *Lemma 4.1.1* kullanılırsa her $s, r \in R$ için $s = 0$ veya $d(r) = 0$ elde edilir. Yani $R = (0)$ veya $d = 0$ dır. Bu da çelişkidir. O halde $A = I$ olur. Yani her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ dir.

Bu da $I \subset Z(R)$ demektir. Buradan her $x \in I$ ve her $r, s \in R$ için

$$0 = [xr, s] = [x, s]r + x[r, s] = x[r, s]$$

olur. Bu eşitlik soldan $t \in R$ ile çarpılırsa her $r, s, t \in R$ için

$$0 = tI[r, s]$$

elde edilir. Bu eşitlikte t yerine t^* yazılırsa her $r, s, t \in R$ için

$$0 = t^*I[r, s]$$

olur. Son iki eşitlikte *Lemma 4.1.1.* kullanıldığında ise $t = 0$ veya $r \in Z(R)$ bulunur. Bu durumda istenilen elde edilmiş olur.

Lemma 4.1.3. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d sıfırdan farklı $*$ ile değişmeli bir türev olsun. Eğer her $x \in I$ için $[x, d(x)] = 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Her $x, y \in I$ için hipotezde x yerine $x + y$ yazılarak hipotez yardımıyla düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [x + y, d(x + y)] \\ &= [x + y, d(x) + d(y)] \\ &= [x, d(x)] + [x, d(y)] + [y, d(x)] + [y, d(y)] \\ &= [x, d(y)] + [y, d(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x, y \in I$ için

$$0 = [x, d(y)] + [y, d(x)] \quad (4.6)$$

dır. (4.6) numaralı eşitlikte y yerine yx yazılıp, hipotez yardımı ile düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [x, d(yx)] + [yx, d(x)] \\ &= [x, yd(x)] + [x, d(y)x] + [yx, d(x)] \\ &= [x, y]d(x) + y[x, d(x)] + [x, d(y)]x + d(y)[x, x] + y[x, d(x)] + [y, d(x)]x \\ &= [x, y]d(x) + ([x, d(y)] + [y, d(x)])x \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte (4.6) eşitliği kullanılarak tekrar düzenleme yapılırsa her $x, y \in I$ için

$$[x, y]d(x) = 0$$

bulunur. $r \in R$ için y yerine ry düşünüldüğünde her $r \in R$ ve her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [x, ry]d(x) \\ &= r[x, y]d(x) + [x, r]yd(x) \\ &= [x, r]yd(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x \in I$ için $[x, r]Id(x) = (0)$ sonucuna ulaşılır. Burada *Lemma 4.1.2.* kullanıldığında her $x \in I$ için $[x, r] = 0$ veya $d(x) = 0$ olur.

$A = \{x \in I \mid [x, R] = (0)\}$ ve $B = \{x \in I \mid d(x) = (0)\}$ kümeleri tanımlansın. Bu kümeler I kümesinin altgruplarıdır. *Teorem 2.4.* gereğince $A = I$ veya $B = I$ dır.

Varsayalım ki $B = I$ olsun. Yani her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Bu eşitlikte $r \in R$ için x yerine xr yazılıp aynı eşitlik yardımıyla düzenlendiğinde her $r \in R$ ve her $x \in I$ için

$$0 = d(xr) = xd(r) + d(x)r = xd(r)$$

elde edilir. Yani her $x \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = xd(r) \tag{4.7}$$

olur. (4.7) numaralı eşitlik soldan $s \in R$ ile çarpılırsa her $r, s \in R$ ve her $x \in I$ için

$$sxd(r) = 0 \tag{4.8}$$

bulunur. (4.7) numaralı eşitlik soldan $s^* \in R$ ile çarpıldığında her $r, s \in R$ ve her $x \in I$ için

$$s^*xd(r) = 0 \tag{4.9}$$

olur. (4.8) ve (4.9) numaralı eşitlikler birlikte kullanılarak her $s, r \in R$ için

$$(0) = sId(r) = s^*Id(r)$$

sonucuna ulaşılır. Burada *Lemma 4.1.1.* kullanılırsa her $s, r \in R$ için $s = 0$ veya $d(r) = 0$ olur. Bu ise $R = (0)$ veya $d = 0$ demektir. Bu çelişki $B \neq I$ olmasını gerektirir. Yani her $x \in I$ için $[x, R] = (0)$ dır. Bu ise $I \subset Z(R)$ anlamına gelir. Buradan her $x \in I$ ve her $r, s \in R$ için

$$0 = [xr, s] = [x, s]r + x[r, s] = x[r, s]$$

olur. Bu eşitlik soldan $t \in R$ ile çarpılırsa her $r, s, t \in R$ için

$$0 = tI[r, s]$$

elde edilir. Bu eşitlikte t yerine t^* yazılırsa her $r, s, t \in R$ için

$$0 = t^*I[r, s]$$

olur. Son iki eşitlikte *Lemma 4.1.1.* kullanıldığında ise $t = 0$ veya $r \in Z(R)$ bulunur. Bu durumda istenilen elde edilmiş olur.

Önerme 4.1.4. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere eğer $d(I) = (0)$ ise $d = 0$ olur.

İspat. Hipotezden her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Bu eşitlik $r \in R$ için x yerine xr yazılıp türev özellikleri ve yine aynı hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $r \in R$ ve her $x \in I$ için

$$0 = d(xr) = xd(r) + d(x)r = xd(r)$$

olur. Yani her $r \in R$ ve her $x \in I$ için

$$xd(r) = 0$$

dir. Bu ifade $s \in R$ için soldan önce s ile sonra s^* ile çarpılırsa her $r, s \in R$ ve her $x \in I$ için

$$0 = sxd(r) = s^*xd(r)$$

elde edilir. Bu da her $r, s \in R$ için

$$(0) = sId(r) = s^*Id(r)$$

demektir. *Lemma 4.1.1.* gereğince her $r, s \in R$ için $s = 0$ veya $d(r) = 0$ olur. O halde $R = (0)$ veya $d = 0$ dır. R sıfırdan farklı bir halka olduğundan istenilen elde edilir.

Lemma 4.1.5. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali, d bir türev ve $*d = \pm d*$ olmak üzere her $x \in I$ için $d^2(I) = (0)$ ise $d = 0$ dır.

İspat. Hipotezden her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ dır. Bu eşitlikte $y \in I$ için x yerine xr yazılıp hipotez yardımıyla düzenleme yapılırsa her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(xy) \\ &= d(d(xy)) \\ &= d(xd(y) + d(x)y) \\ &= d(xd(y)) + d(d(x)y) \\ &= xd(d(y)) + d(x)d(y) + d(x)d(y) + d(d(x))y \\ &= xd^2(y) + 2d(x)d(y) + d^2(x)y \\ &= 2d(x)d(y) \end{aligned}$$

elde edilir. R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan her $x, y \in I$ için

$$d(x)d(y) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte $z \in I$ için x yerine xz yazılıp düzenlendiğinde her $x, y, z \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(xz)d(y) \\ &= xd(z)d(y) + d(x)zd(y) \\ &= d(x)zd(y) \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x, y \in I$ için

$$d(x)Id(y) = (0) \quad (4.10)$$

dır. Bu eşitlikte y yerine y^* yazılıp $d * = \pm * d$ olması kullanılarak $x, y \in I$ için

$$d(x)I(d(y))^* = (0) \quad (4.11)$$

bulunur. (4.10) ve (4.11) eşitlikleri birlikte düşünülürse her $x, y \in I$ için

$$(0) = d(x)I(d(y))^* = d(x)Id(y)$$

olur. *Lemma 4.1.1.* yardımıyla her $x, y \in I$ için $d(x) = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir. Yani $d(I) = (0)$ dır. Burada *Önerme 4.1.4.* kullanılarak istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Lemma 4.1.6. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d_1 ve d_2 , $* d_1 = \pm d_1 *$ ve $* d_2 = \pm d_2 *$ koşulunu sağlayan iki türev olmak üzere $d_2(I) \subset I$ ve $d_1 d_2(I) = (0)$ ise bu iki türevden en az biri sıfırdır.

İspat. Hipotezden her $x, y \in I$ için $d_1 d_2(xy) = 0$ dır. Bu eşitlik düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 d_2(xy) \\ &= d_1(d_2(xy)) \\ &= d_1(xd_2(y) + d_2(x)y) \\ &= d_1(xd_2(y)) + d_1(d_2(x)y) \\ &= xd_1(d_2(y)) + d_1(x)d_2(y) + d_1(d_2(x))y + d_2(x)d_1(y) \\ &= d_1(x)d_2(y) + d_2(x)d_1(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x \in I$ için $d_2(x) \in I$ olduğundan son eşitlikte x yerine $d_2(x)$ yazılıp aynı eşitlik yardımıyla her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(d_2(x))d_2(y) + d_2(d_2(x))d_1(y) \\ &= d_2^2(x)d_1(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede $z \in I$ için y yerine yz yazıldığında her $x, y, z \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d_2^2(x)d_1(yz) \\ &= d_2^2(x)y d_1(z) + d_2^2(x)d_1(y)z \\ &= d_2^2(x)y d_1(z) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani her $x, z \in I$ için

$$d_2^2(x)Id_1(z) = (0) \quad (4.12)$$

dır. (4.12)'de z yerine z^* yazılır ve $*d_1 = \pm d_1*$ olması kullanılırsa her $x, z \in I$ için

$$d_2^2(x)I(d_1(z))^* = (0) \quad (4.13)$$

olur. (4.12) ve (4.13) eşitlikleri birlikte kullanılarak her $x, z \in I$ için

$$(0) = d_2^2(x)I(d_1(z))^* = d_2^2(x)Id_1(z)$$

bulunur. Burada *Lemma 4.1.1.* yardımıyla her $x, z \in I$ için $d_2^2(x) = 0$ veya $d_1(z) = 0$ elde edilir.

Eğer her $z \in I$ için $d_1(z) = 0$ olursa *Önerme 4.1.4.*'den $d_1 = 0$ olur.

Varsayalım ki $d_1(z) \neq 0$ olsun. O halde her $x \in I$ için $d_2^2(x) = 0$ olur. Burada *Lemma 4.1.5.* kullanılarak istenilen elde edilmiş olur.

Lemma 4.1.7. I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d sıfırdan farklı $*$ ile değişmeli bir türev olsun. Eğer her $a \in I \cap Sa_*(R)$ için $[d(I), a] \subset Z(R)$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat. Hipotezden $[d(a^2), a] \in Z(R)$ dir. Bu ifade $[a, a] = 0$ ve $[d(a), a] \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} [d(a^2), a] &= [ad(a) + d(a)a, a] \\ &= [ad(a), a] + [d(a)a, a] \\ &= a[d(a), a] + [a, a]d(a) + d(a)[a, a] + [d(a), a]a \\ &= a[d(a), a] + [d(a), a]a \\ &= 2a[d(a), a] \end{aligned}$$

olur. Yani $2a[d(a), a] \in Z(R)$ dir. R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan $a[d(a), a] \in Z(R)$ dir. Bu ise her $r \in R$ için $[r, a[d(a), a]] = 0$ demektir. Bu ifade Lie komütatör özellikleri ve bu eşitlik kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [r, a[d(a), a]] \\ &= a[r, [d(a), a]] + [r, a][d(a), a] \\ &= [r, a][d(a), a] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade sağdan R ile çarpılıp hipotez kullanıldığında her $r \in R$ için

$$(0) = [r, a]R[d(a), a] \quad (4.14)$$

bulunur. $a \in Sa_*$ olduğu için $a = \pm a^*$ dır. (4.14) numaralı eşitlikte r yerine r^* yazılır ve $a = \pm a^*$ düşünülürse her $r \in R$ için $(0) = [r^*, a^*]R[d(a), a]$ olur. Not 2.72. gereğince her $r \in R$ için

$$(0) = [r, a]^*R[d(a), a] \quad (4.15)$$

bulunur. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri birlikte kullanılırsa her $r \in R$ için

$$(0) = [r, a]R[d(a), a] = [r, a]^*R[d(a), a]$$

yazılır. R halkası $*$ -asal olduğundan her $r \in R$ için $[r, a] = 0$ veya $[d(a), a] = 0$ olur. Her iki durumda da çıkan sonuç $[d(a), a] = 0$ dır. Diğer taraftan hipotezden $b \in R$ için $[a, b] \in I$ olduğundan her $b \in I$ için $[d([a, b]), a] \in Z(R)$ olduğu görülür. Lie komütatör özellikleri ve hipotez kullanılarak her $b \in I$ için

$$\begin{aligned} [d([a, b]), a] &= [[d(a), b] + [a, d(b)], a] \\ &= [[d(a), b], a] + [[a, d(b)], a] \\ &= [[d(a), b], a] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $b \in I$ için $[[d(a), b], a] \in Z(R)$ dir. Son eşitlikte b yerine ab yazılarak $[d(a), a] = 0$ ve $[a, a] = 0$ olması kullanılırsa her $b \in I$ için

$$\begin{aligned} [[d(a), ab], a] &= [a[d(a), b], a] + [[d(a), a]b, a] \\ &= [a, a][d(a), b] + a[[d(a), b], a] \\ &= a[[d(a), b], a] \end{aligned}$$

olur. Yani her $b \in I$ için $a[[d(a), b], a] \in Z(R)$ dir. Bu ifade soldan $r \in R$ ile çarpılıp önce $a[[d(a), b], a] \in Z(R)$ sonra $[[d(a), b], a] \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$ra[[d(a), b], a] = a[[d(a), b], a]r = ar[[d(a), b], a]$$

bulunur. Yani her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[a, r][[d(a), b], a] = 0$$

dir. Bu eşitlikte $s \in R$ için r yerine rs yazılıp düzenlendiğinde her $b \in I$ ve her $r, s \in R$ için

$$0 = [a, rs][[d(a), b], a]$$

$$\begin{aligned}
&= [a, r]s[d(a), b, a] + r[a, s][d(a), b, a] \\
&= [a, r]s[d(a), b, a]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[a, r]R[d(a), b, a] = (0) \quad (4.16)$$

demektir. (4.16) ifadesinde r yerine r^* yazılıp $a \in Sa_*$ olması kullanılırsa her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[a, r]^*R[d(a), b, a] = (0) \quad (4.17)$$

olur. (4.16) ve (4.17) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde her $b \in I$, her $r \in R$ için

$$(0) = [a, r]R[d(a), b, a] = [a, r]^*R[d(a), b, a]$$

yazılır. R halkası $*$ -asal olduğundan her $b \in I$ ve her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ veya $[d(a), b, a] = 0$ dır. Bu her $b \in I$ için $a \in Z(R)$ veya $[d(a), b, a] = 0$ anlamına gelir. Eğer $a \in Z(R)$ olursa ispat biter.

Varsayalım ki $a \notin Z(R)$ olsun. Her $b \in I$ için $[d(a), b, a] = 0$ olur. Bu ifade Jacobi özdeşliğine göre açılıp, $[d(a), b, a] = 0$ ve $[a, d(a)] \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $b \in I$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [d(a), b, a] + [b, a, d(a)] + [a, d(a), b] \\
&= [b, a, d(a)]
\end{aligned}$$

bulunur. Yani I_k , k ile belirli iç türev olmak üzere her $b \in I$ için $(I_{d(a)}I_a)(b) = 0$ dır. Burada $a \in Sa_*$ olduğundan iki durum vardır. $a = a^*$ veya $a = -a^*$ olması. Bu iki durum göz önüne alınarak önce $r \in R$ için $(I_a(r))^*$ incelenirse her $r \in R$ için

$$(I_a(r))^* = [a, r]^* = [r^*, a^*] = [r^*, a] = I_a(r^*)$$

veya her $r \in R$ için

$$(I_a(r))^* = [a, r]^* = [r^*, a^*] = [r^*, -a] = -I_a(r^*)$$

olur. Sonra bu iki durum göz önüne alınarak $(I_{d(a)}(r))^*$ incelenirse her $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
(I_{d(a)}(r))^* &= [d(a), r]^* = [r^*, (d(a))^*] \\
&= [r^*, d(a^*)] = [r^*, d(a)] \\
&= I_{d(a)}(r^*)
\end{aligned}$$

veya her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} (I_{d(a)}(r))^* &= [d(a), r]^* = [r^*, (d(a))^*] \\ &= [r^*, d(a^*)] = [r^*, d(-a)] \\ &= -I_{d(a)}(r^*) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $*I_a = \pm I_a *$ ve $*I_{d(a)} = \pm I_{d(a)} *$ olur. Hipotezden $I_{d(a)}(I) = [d(a), I] \subset I$ olduğu için *Lemma 4.1.6.* yardımıyla $a \in Z(R)$ veya $d(a) \in Z(R)$ elde edilir. $a \in Z(R)$ durumu çelişkidir. O halde $d(a) \in Z(R)$ dir. Diğer taraftan $b \in I$ için hipotezden $[d(ab), a] \in Z(R)$ elde edilir. $[a, a] = 0$ ve $d(a) \in Z(R)$ olması kullanılarak her $b \in I$ için

$$\begin{aligned} [d(ab), a] &= [ad(b), a] + [d(a)b, a] \\ &= a[d(b), a] + [a, a]d(b) + d(a)[b, a] + [d(a), a]b \\ &= a[d(b), a] + d(a)[b, a] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $b \in I$ için $a[d(b), a] + d(a)[b, a] \in Z(R)$ dır. Son ifade $[d(a), a] = 0$, $[a, a] = 0$ eşitlikleri kullanılarak düzenlendiğinde her $b \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a[d(b), a] + d(a)[b, a], a] \\ &= [a[d(b), a], a] + [d(a)[b, a], a] \\ &= a[[d(b), a], a] + [a, a][d(b), a] + d(a)[[b, a], a] + [d(a), a][b, a] \\ &= d(a)[[b, a], a] \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik soldan R ile çarpılır ve $d(a) \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $b \in I$ için

$$d(a)R[[b, a], a] = (0)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $a \in Sa_*$ ve $d ** d$ olması kullanılırsa her $b \in I$ için

$$(d(a))^* R[[b, a], a] = (0)$$

elde edilir. Son iki eşitlik birlikte düşünüldüğünde her $b \in R$ için

$$(0) = d(a)R[[b, a], a] = (d(a))^* R[[b, a], a]$$

yazılır. R halkasının $*$ -asal olmasından her $b \in R$ için $d(a) = 0$ veya $[[b, a], a] = 0$ elde edilir.

Varsayalım ki her $b \in R$ için $[[b, a], a] = 0$ olsun. Bu da $(I_a I_a)(b) = 0$ anlamına gelir. $*I_a = \pm I_a *$ olduğundan *Lemma 4.1.5.* den $I_a = 0$ bulunur. O halde $a \in Z(R)$ dir. Bu da çelişkidir. O halde $d(a) = 0$ olur. Hipotezden her $b \in I$ için $[d(ab), a] \in Z(R)$ dir. Bu ifade $[a, a] = 0$ ve $d(a) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $b \in I$ için

$$\begin{aligned} [d(ab), a] &= [ad(b), a] + [d(a)b, a] \\ &= a[d(b), a] + [a, a]d(b) \\ &= a[d(b), a] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $b \in I$ için $a[d(b), a] \in Z(R)$ dir. Son eşitlik soldan $r \in R$ ile çarpılıp, bu eşitlik ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$ra[d(b), a] = a[d(b), a]r = ar[d(b), a]$$

bulunur. Yani her $b \in I$ ve her $r \in R$ için $0 = [r, a][d(b), a]$ olur. Bu eşitlik sağdan R ile çarpılıp, hipotezden yararlanılarak düzenlendiğinde her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[r, a]R[d(b), a] = (0)$$

elde edilir. Son eşitlikte r yerine r^* yazılır ve $a \in Sa_*$ olması kullanılırsa her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[r, a]^*R[d(b), a] = (0)$$

olur. Son iki eşitlik birlikte kullanılırsa her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$(0) = [r, a]R[d(b), a] = [r, a]^*R[d(b), a]$$

yazılır. R halkası $*$ -asal olduğundan her $b \in I$, her $r \in R$ için $[r, a] = 0$ veya $[d(b), a] = 0$ olur. Yani $a \in Z(R)$ veya her $b \in I$ için $[d(b), a] = 0$ dır. $a \notin Z(R)$ olduğundan $b \in I$ için $[d(b), a] = 0$ olur. Bu eşitlikte $c \in I$ için b yerine $b[c, a]$ yazılır ve $d(a) = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse her $b, c \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [d(b[c, a]), a] \\ &= [bd([c, a]), a] + [d(b)[c, a], a] \\ &= b[d([c, a]), a] + [b, a]d([c, a]) + d(b)[[c, a], a] + [d(b), a][c, a] \\ &= [b, a]d([c, a]) + d(b)[[c, a], a] \\ &= [b, a][d(c), a] + [b, a][c, d(a)] + d(b)[[c, a], a] \\ &= d(b)[[c, a], a] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $b, c \in I$ için $d(b)[[c, a], a] = 0$ dır. Son eşitlikte $x \in I$ için b yerine bx yazılıp, türev ve Lie komütatör özellikleri ile son eşitlik kullanılarak düzenlendiğinde her $b, c, x \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(bx)[[c, a], a] \\ &= d(b)x[[c, a], a] + bd(x)[[c, a], a] \\ &= d(b)x[[c, a], a] \end{aligned}$$

olur. Yani her $b, c \in I$ için

$$d(b)I[[c, a], a] = (0)$$

dir. Bu eşitlikte b yerine b^* yazılır ve $*d = d*$ olması kullanıldığında her $b, c \in I$ için

$$(d(b))^*I[[c, a], a] = (0)$$

sonucuna ulaşılır. Son iki eşitlik birlikte kullanılırsa her $b, c \in I$ için

$$(0) = d(b)I[[c, a], a] = (d(b))^* I[[c, a], a]$$

bulunur. Burada R halkasının $*$ -asal olması kullanıldığında her $b, c \in I$ için $d(b) = 0$ veya $[[c, a], a] = 0$ elde edilir.

Varsayalım ki her $b \in R$ için $d(b) = 0$ olsun. Bu eşitlikte $r \in R$ için b yerine br yazılıp, türev özellikleri ve aynı eşitlik kullanılarak düzenlenirse her $b \in I$ ve her $r \in R$ için

$$0 = d(br) = bd(r) + d(b)r = bd(r)$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikte $s \in R$ için b yerine sb yazıldığında her $b \in I$ ve her $r, s \in R$ için

$$sbd(r) = 0$$

olur. Yani her $r, s \in R$ için

$$sId(r) = (0)$$

dır. Bu eşitlikte s yerine s^* yazıldığında her $r, s \in R$ için

$$s^*Id(r) = (0)$$

bulunur. Son iki eşitlikten

$$(0) = sId(r) = s^*Id(r)$$

sonucuna ulaşılır. *Lemma 4.1.1.* gereğince $R = (0)$ veya $d = 0$ dır. Bu bir çelişkidir.

O halde her $c \in R$ için $[[c, a], a] = 0$ olur. Yani $(I_a I_a)(c) = 0$ dır. Burada $I_a * = \pm * I_a$ olması kullanılırsa *Lemma 4.1.5.*'den $I_a = 0$ yani $a \in Z(R)$ olur. Bu çelişki ispatı bitirir.

Teorem 4.1.8. R karakterisitiği ikiden farklı bir $*$ -asal halka, I kümesi R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d , R halkasının sıfırdan farklı $*$ ile değişmeli bir türevi olmak üzere her $x \in I$ için $[x, d(x)] \in Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Hipotez $y \in I$ için x yerine $x + y$ yazılarak türev ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} [x + y, d(x + y)] &= [x, d(x + y)] + [y, d(x + y)] \\ &= [x, d(x) + d(y)] + [y, d(x) + d(y)] \\ &= [x, d(x)] + [x, d(y)] + [y, d(x)] + [y, d(y)] \end{aligned}$$

olur. Her $x, y \in I$ için $[x, d(x)] \in Z(R)$, $[y, d(y)] \in Z(R)$ olduğundan $[x, d(y)] + [y, d(x)] \in Z(R)$ dir. Son ifade y yerine x^2 yazılarak türev, Lie komütatör özellikleri ve hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $x \in I$ için

$$\begin{aligned} [x, d(x^2)] + [x^2, d(x)] &= [x, xd(x)] + [x, d(x)x] + [x^2, d(x)] \\ &= x[x, d(x)] + [x, x]d(x) + [x, d(x)]x + d(x)[x, x] + x[x, d(x)] + [x, d(x)]x \\ &= x[x, d(x)] + [x, d(x)]x + x[x, d(x)] + [x, d(x)]x \end{aligned}$$

$$= 2(2x[x, d(x)]) \in Z(R)$$

sonucu elde edilir. R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x \in I$ için $x[x, d(x)] \in Z(R)$ elde edilir. Bu ifade soldan $r \in R$ ile çarpılıp $x[x, d(x)] \in Z(R)$ ve hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$rx[x, d(x)] = x[x, d(x)]r = xr[x, d(x)]$$

elde edilir. Yani her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$[r, x][x, d(x)] = 0$$

dır. Bu eşitlikte r yerine $d(x)$ yazılırsa her $x \in I$ için

$$[x, d(x)]^2 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitlik soldan R ile çarpılıp hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $x \in I$ için

$$[x, d(x)]R[x, d(x)] = (0) \quad (4.18)$$

bulunur. (4.18) eşitliği sağdan $[x, d(x)]^*$ ile çarpılırsa her $x \in I$ için

$$[x, d(x)]R[x, d(x)][x, d(x)]^* = (0) \quad (4.19)$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x \in I$ için

$$([x, d(x)][x, d(x)]^*)^* = [x, d(x)][x, d(x)]^*$$

olduğundan bu eşitlik (4.18) numaralı eşitlikte yerine yazıldığında her $x \in I$ için

$$[x, d(x)]R([x, d(x)][x, d(x)]^*)^* = (0) \quad (4.20)$$

bulunur. (4.19) ve (4.20) numaralı eşitlikler birlikte kullanılırsa her $x \in I$ için

$$(0) = [x, d(x)]R[x, d(x)][x, d(x)]^* = [x, d(x)]R([x, d(x)][x, d(x)]^*)^*$$

yazılır. R halkasının *-asal halka olması kullanıldığında her $x \in I$ için

$$[x, d(x)][x, d(x)]^* = 0 \text{ veya } [x, d(x)] = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yani her $x \in I$ için $[x, d(x)][x, d(x)]^* = 0$ dır. Bu eşitlik soldan R ile çarpılıp hipotez kullanılarak düzenlenirse her $x \in I$ için

$$[x, d(x)]R[x, d(x)]^* = (0)$$

dır. Bu ifade (4.18) numaralı eşitlik ile birlikte kullanıldığında her $x \in I$ için

$$(0) = [x, d(x)]R[x, d(x)] = [x, d(x)]R[x, d(x)]^*$$

yazılır. R halkasının $*$ -asal halka olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$0 = [x, d(x)]$$

sonucuna varılır. Burada *Lemma 4.1.3.* kullanıldığında istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.9. R karakteristiği ikiden farklı bir $*$ -asal halka, I kümesi R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d_1, d_2 , R üzerinde $*$ ile değişmeli birer türev olmak üzere her $x \in I$ için $d_1(x)x - xd_2(x) \in Z(R)$ ise $d_2 = 0$ veya R halkası değişmelidir.

İspat. Eğer $I \cap Z(R) = (0)$ ise her $x \in I$ için $d_1(x)x - xd_2(x) \in I \cap Z(R)$ olur. Buradan da her $x \in I$ için $d_1(x)x = xd_2(x)$ elde edilir. Bu eşitlikte $y \in I$ için x yerine $x + y$ yazılıp, türev özellikleri ve yine aynı eşitlik kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$d_1(x+y)(x+y) = (x+y)d_2(x+y)$$

$$(d_1(x) + d_1(y))(x+y) = (x+y)(d_2(x) + d_2(y))$$

$$d_1(x)x + d_1(x)y + d_1(y)x + d_1(y)y = xd_2(x) + xd_2(y) + yd_2(x) + yd_2(y)$$

$$d_1(x)y + d_1(y)x = xd_2(y) + yd_2(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine yx yazılıp aynı eşitlik ve $d_1(x)x = xd_2(x)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$d_1(x)yx + d_1(yx)x = xd_2(yx) + yxd_2(x)$$

$$d_1(x)yx + yd_1(x)x + d_1(y)xx = xyd_2(x) + xd_2(y)x + yxd_2(x)$$

$$d_1(x)yx + yxd_2(x) + d_1(y)xx = xyd_2(x) + xd_2(y)x + yxd_2(x)$$

$$d_1(x)yx + d_1(y)xx = xyd_2(x) + xd_2(y)x$$

$$(d_1(x)y + d_1(y)x)x = x(yd_2(x) + d_2(y)x)$$

$$(xd_2(y) + yd_2(x))x = x(yd_2(x) + d_2(y)x)$$

$$xd_2(y)x + yd_2(x)x = xyd_2(x) + xd_2(y)x$$

$$yd_2(x)x = xyd_2(x)$$

dır. Yani her $x, y \in I$ için

$$[yd_2(x), x] = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte $r \in R$ için y yerine ry yazılırsa

$$0 = [ryd_2(x), x]$$

$$= r[yd_2(x), x] + [r, x]yd_2(x)$$

$$= [r, x]yd_2(x)$$

bulunur. Yani her $x \in I$ için

$$[R, x]Id_2(x) = (0)$$

dır. *Lemma 4.1.2.* den $d_2 = 0$ veya R değişmelidir.

Varsayalım ki $I \cap Z(R) \neq (0)$ olsun. $c \in I \cap Z(R)$ olmak üzere $t = c - c^*$ olarak alınırsa, $t \in I \cap Z(R)$ olacağından

$$t^* = (c - c^*)^* = c^* - c = -(c - c^*) = -t$$

bulunur. Hipotezde $y \in I$ için x yerine $x + y$ yazılıp, türev özellikleri ve hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$d_1(x + y)(x + y) - (x + y)d_2(x + y) \in Z(R)$$

$$(d_1(x) + d_1(y))(x + y) - (x + y)(d_2(x) + d_2(y)) \in Z(R)$$

olur. Yani her $x, y \in I$ için

$$d_1(x)y + d_1(y)x - xd_2(y) - yd_2(x) \in Z(R) \quad (4.21)$$

dır. (4.21) numaralı eşitlikte y yerine c yazılır ve $d_2(c) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x \in I$ için

$$d_1(x)c + d_1(c)x - xd_2(c) - cd_2(x) \in Z(R)$$

$$cd_1(x) + d_1(c)x - d_2(c)x - cd_2(x) \in Z(R)$$

elde edilir. Yani her $x \in I$ için $Z(R)$

$$c(d_1(x) - d_2(x)) + (d_1(c) - d_2(c))x \in Z(R) \quad (4.22)$$

sonucuna varılır. (4.21) numaralı eşitlikte y yerine c^2 yazılıp, (4.22) numaralı eşitlik ve $c(d_1(c) - d_2(c))x \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $x \in I$ ve her $r \in R$ için

$$c(d_1(c) - d_2(c))R[x, r] = c(d_1(c) - d_2(c))R[x, r]^* = (0)$$

elde edilir. Burada R halkasının $*$ -asal olması kullanılırsa $I \subset Z(R)$ veya $c(d_1(c) - d_2(c)) = 0$ bulunur. Yani R değişmeli veya $c((d_1 - d_2)(c)) = 0$ dır. Bu eşitlik $c \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$[c, ((d_1 - d_2)(c))] = 0$$

bulunur. İki türevin farkı bir türev olduğundan *Lemma 4.1.3.* kullanılırsa $d_1 = d_2$ veya R halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır. Eğer $d_1 = d_2$ ise hipotezden yararlanılarak her $x \in I$ için

$$d_1(x)x - xd_1(x) \in Z(R)$$

yazılır. Yani $[d_1(x), x] \in Z(R)$ olur. Burada *Teorem 4.1.8.* kullanılırsa R halkasının değişmeli olduğu sonucuna ulaşılır

Teorem 4.1.10. R karakterisitiği ikiden farklı bir $*$ -asal halka, sıfırdan farklı I kümesi, R halkasındaki bir $*$ -ideal ve d , R üzerinde sıfırdan farklı $*$ ile değişmeli bir türev olmak üzere her $x \in I$ için $[ad(x), x] = 0$ ise $a \in Z(R)$ veya R halkası değişmelidir.

İspat. Hipotezde $y \in I$ için x yerine $x + y$ yazılıp, Lie komütatör ve türev özellikleri ile hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [ad(x + y), x + y] = [ad(x + y), x] + [ad(x + y), y] \\ &= [ad(x), x] + [ad(y), x] + [ad(x), y] + [ad(y), y] \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x, y \in I$ için

$$[ad(y), x] + [ad(x), y] = 0 \quad (4.23)$$

dir. Bu eşitlikte y yerine yx yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [ad(yx), x] + [ad(x), yx] \\ &= [ad(y)x, x] + [ayd(y)x, x] + [ad(x), yx] + [ad(x), yx] \\ &= [ad(y), x]x + ay[d(x), x] + [ad(x), y]x + [ay, x]d(x) \end{aligned}$$

olur. Burada (4.23) eşitliğinden yararlanılarak her $x, y \in I$ için

$$ay[d(x), x] + a[y, x]d(x) + [a, x]yd(x) = 0 \quad (4.24)$$

bulunur. (4.24) numaralı eşitlikte y yerine ay yazılıp, türev ve Lie komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= a^2y[d(x), x] + a[ay, x]d(x) + [a, x]ayd(x) \\ &= a^2y[d(x), x] + a^2[y, x]d(x) + a[a, x]yd(x) + [a, x]ayd(x) \\ &= a(ay[d(x), x] + a[y, x]d(x) + [a, x]yd(x)) + [a, x]ayd(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (4.24) numaralı eşitlikten yararlanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$[a, x]ayd(x) = 0$$

bulunur. Yani her $x \in I$ için

$$[a, x]aId(x) = (0) \quad (4.25)$$

dır. $x \in Sa_*$ ise o (4.25) numaralı eşitlik, $*d = \pm d*$ olduğundan her $x \in I$ için

$$(0) = [a, x]aId(x) = [a, x]aI(d(x))^*$$

olur. Bu ifade *Lemma 4.1.1.* yardımı ile düzenlendiğinde her $x \in I \cap Sa_*$ için $[a, x]a = 0$ veya $d(x) = 0$ bulunur. I idealinin bir y elemanı için $y + y^* \in I \cap Sa_*$ olduğundan her $y \in I$ için $[a, y + y^*]a = 0$ veya $d(y + y^*) = 0$ bulunur. Eğer $y \in I$ için $d(y + y^*) = 0$ ise o zaman $d(y) = -d(y^*)$ olur. O halde (4.25) numaralı eşitlik göz önüne alınarak her $y \in I$ için

$$(0) = [a, y]aId(y) = [a, y]aId(y)^*$$

elde edilir. *Lemma 4.1.1.* uygulanarak her $y \in I$ için $[a, y]a = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan eğer $y \in I$ için $[a, y + y^*]a = 0$ ise o zaman $[a, y]a = -[a, y^*]a$ olur. $a \in Sa_*$ olduğundan (4.25) numaralı eşitlik göz önüne alınarak her $y \in I$ için

$$(0) = [a, y]aId(y) = ([a, y]a)^*Id(y)$$

elde edilir. *Lemma 4.1.1.* uygulanarak yine her $y \in I$ için $[a, y]a = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir. Her iki durumda da her $y \in I$ için

$$[a, y]a = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

dır. $A = \{y \in I \mid [a, y]a = 0\}$ ve $B = \{y \in I \mid d(y) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. $A \cup B = I$ olur. Bu iki küme I grubunun iki alt grubu olduğundan ve bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $A = I$ veya $B = I$ sonucu elde edilir.

Varsayalım ki $B = I$ olsun. O halde her $y \in I$ için $d(y) = 0$ dır. Bu ifadede $r \in R$ için y yerine ry yazılıp türev özellikleri ve yine aynı eşitlik kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ ve her $y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(ry) \\ &= rd(y) + d(r)y \\ &= d(r)y \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $r \in R$ için $0 = d(r)I$ dır. Burada *Lemma 4.1.1.* kullanılırsa $R = (0)$ veya $d = 0$ bulunur. Bu da çelişkidir. O halde $B \neq I$ dır. Yani $A = I$ olur. Bu her $y \in I$ için $[a, y]a = 0$ demektir. Bu eşitlikte $x \in I$ için y yerine xy yazılıp düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a, xy]a \\ &= [a, x]ya + x[a, y]a \\ &= [a, x]ya \end{aligned}$$

olur. Yani her $x \in I$ için $[a, x]Ia = (0)$ olur. $a \in Sa_*$ olduğu için her $x \in I$ için

$$(0) = [a, x]Ia = [a, x]Ia^*$$

dir. Bu eşitlikte *Lemma 4.1.1.* kullanılırsa $a = 0$ veya $[a, x] = 0$ bulunur. Yani her $x \in I$ için $[a, x] = 0$ dır. Hipoteze geri dönecek olursa her $x \in I$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [ad(x), x] \\
&= a[d(x), x] + [a, x]d(x) \\
&= a[d(x), x]
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik soldan r ile çarpılır ve $a \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$aR[d(x), x] = (0)$$

elde edilir. Son eşitlikte $a \in Sa_*$ olması kullanıldığında her $x \in I$ için

$$(0) = aR[d(x), x] = a^*R[d(x), x]$$

sonucuna ulaşılır. Burada R halkasının $*$ -asal olması kullanılırsa her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ veya $a \in Z(R)$ elde edilir. Eğer $a \in Z(R)$ ise ispat biter.

Varsayalım ki $a \notin Z(R)$ olsun. O zaman her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ dır. Bu eşitlikte *Lemma 4.1.3.* kullanıldığında istenilen elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.11. R karakteristiği ikiden farklı bir $*$ -asal halka, I kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d , R üzerinde sıfırdan farklı $*$ ile değişmeli bir türev olsun. Eğer $d(I) \subset I$ ve $[d(I), d(I)] \subset Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. $k \in d(I) \cap Sa_*$ olsun. O halde $k \in I \cap Sa_*$ olur. Hipotezden $[d(I), k] \subset Z(R)$ olur. Bu ifade *Lemma 4.1.7.* gereğince düzenlenirse $k \in Z(R)$ elde edilir. Yani $d(I) \cap Sa_* \subset Z(R)$ dır. Her $x \in I$ için

$$d(x - x^*) = d(x) - d(x^*) = -(d(x) - d(x^*))^*$$

olduğu için $d(x - x^*) \in d(I) \cap Sa_* \subset Z(R)$ dir. Her $x \in I$ için

$$d(x + x^*) = d(x) + d(x^*) = -(d(x) + d(x^*))^*$$

olduğundan $d(x + x^*) \in d(I) \cap Sa_* \subset Z(R)$ dir. O halde her $x \in I$ için

$$\begin{aligned}
&d(x - x^*) + d(x + x^*) \\
&= d(x) - d(x^*) + d(x) + d(x^*) \\
&= 2d(x) \in Z(R)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifadede R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanıldığında her $x \in I$ için $d(x) \in Z(R)$ olur. Buradan özel olarak her $x \in I$ için $[x, d(x)] = 0$ sonucuna varılır. Bu eşitlikte *Lemma 4.1.3.* kullanılırsa istenilen elde edilir.

4.2. *-Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar

Bu bölümde Rehman, Ansari ve Haetinge tarafından (2013) tarafından yapılan “A note on homomorphisms and anti-homomorphisms on *-ring” adlı çalışma incelenmiştir.

Bu bölümde aksi söylenmedikçe kullanılan x, y, z elemanları kullanılan R halkasından keyfi olarak seçilmiştir.

Teorem 4.2.1. R bir asal *-halka olmak üzere f , R halkasında tanımlı bir genelleştirilmiş *-türev olsun;

- i. f homomorfizma ise R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ *-merkezleyicidir.
- ii. f anti-homomorfizma ise R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ *-merkezleyicidir.

İspat.

i. $f(xyz)$ önce f dönüşümünün türev özellikleri sonra da homomorfizma olması kullanılarak açılırsa

$$\begin{aligned} f(x(yz)) &= x^*f(yz) + yzd(x) \\ &= x^*f(y)f(z) + yzd(x) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $f(xyz)$ önce f dönüşümünün homomorfizma olması sonra ise türev özellikleri kullanılarak açılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} f((xy)z) &= f(xy)f(z) \\ &= x^*f(y)f(z) + yd(x)f(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki eşitliğin sağ tarafları birbirine eşitlendiğinde

$$yzd(x) = yd(x)f(z)$$

olur. Buradan da

$$y(zd(x) - d(x)f(z)) = 0 \tag{4.26}$$

sonucuna ulaşılır. (4.26) eşitliğinde $r \in R$ için y yerine yr yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= yr(zd(x) - d(x)f(z)) \\ &= yr(zd(x) - d(x)f(z)) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$yR(zd(x) - d(x)f(z)) = (0)$$

dır. Son eşitlikte R halkasının asal olması kullanılırsa $y = 0$ veya $zd(x) - d(x)f(z) = 0$ olur. Bu da $R = (0)$ veya $zd(x) - d(x)f(z) = 0$ demektir. R halkası sıfırdan farklı olduğundan

$$zd(x) - d(x)f(z) = 0 \quad (4.27)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$zd(x) = d(x)f(z) \quad (4.28)$$

dır. (4.27) eşitliğinde $y \in R$ için x yerine xy yazılıp düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= zd(xy) - d(xy)f(z) \\ &= z(x^*d(y) + yd(x)) - (x^*d(y) + yd(x))f(z) \\ &= zx^*d(y) + zyd(x) - x^*d(y)f(z) - yd(x)f(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik (4.28) eşitliği kullanılıp düzenlenirse

$$zx^*d(y) + zyd(x) - x^*zd(y) - yzd(x) = 0$$

sonucuna varılır. Bu ise

$$[z, x^*]d(y) + [z, y]d(x) = 0 \quad (4.29)$$

demektir. Son eşitlikte z yerine x^* yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [x^*, x^*]d(y) + [x^*, y]d(x) \\ &= [x^*, y]d(x) \end{aligned}$$

bulunur. $z \in R$ için y yerine yz yazılıp komütatör özellikleri kullanılıp düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= [x^*, yz]d(x) \\ &= [x^*, y]zd(x) + y[x^*, z]d(x) \\ &= [x^*, y]zd(x) \end{aligned}$$

olur. Bu da

$$[x^*, y]Rd(x) = (0)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılırsa her $x, y \in R$ için $[x^*, y] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir.

$$A = \{x \in R \mid [x^*, y] = 0, \forall y \in R\} \text{ ve } B = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$$

kümeleri tanımlansın. A ve B kümeleri R grubunun altgruplarıdır. *Teorem 2.4.* gereğince $A = R$ veya $B = R$ dir.

Varsayalım ki $A = R$ olsun. O halde her $x, y \in R$ için $[x^*, y] = 0$ olur. x yerine x^* yazılır ve $*$ dönüşümünün özelliği kullanılırsa $0 = [(x^*)^*, y] = [x, y]$ elde edilir. Buradan da $x \in Z(R)$ bulunur. Yani R halkası değişmelidir. Eğer $B = R$ ise her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olur. Yani $d = 0$ dir. O halde $d = 0$ veya R halkası değişmelidir. $d = 0$ ise

$$f(xy) = x^*f(y) + yd(x) = x^*f(y)$$

olur. Yani R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

ii. $f(xy)$, f dönüşümünün anti-homomorfizma özelliği kullanılıp açılırsa $f(y)f(x)$ olur. $f(xy)$, f dönüşümünün sol $*$ -türev özelliği kullanılıp açıldığında ise $x^*f(y) + yd(x)$ olur. Bu iki ifade birbirine eşit olduğundan

$$f(y)f(x) = x^*f(y) + yd(x)$$

bulunur. Son eşitlikte y yerine xy yazılır, türev ve anti-homomorfizma özellikleri kullanılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} f(xy)f(x) &= x^*f(xy) + xyd(x) \\ (x^*f(y) + yd(x))f(x) &= x^*f(y)f(x) + xyd(x) \\ x^*f(y)f(x) + yd(x)f(x) &= x^*f(y)f(x) + xyd(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$yd(x)f(x) = xyd(x) \tag{4.30}$$

dir. (4.30) numaralı eşitlikte y yerine zy yazılıp düzenlendiğinde

$$zyd(x)f(x) = xzyd(x)$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitlik (4.30) eşitliğinden yararlanılarak düzenlenirse

$$zxyd(x) = xzyd(x)$$

$$[z, x]yd(x) = 0$$

bulunur. O halde her $x, z \in R$ için $[z, x]Rd(x) = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x, z \in R$ için $[z, x] = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. Yani

$$x \in Z(R) \text{ veya } d(x) = 0 \tag{4.31}$$

dır. $A = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ ve $B = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. Bu iki küme R grubunun altgruplarıdır *Teorem 2.4*. $R = A$ veya $R = B$ dir. $R = A$ olsun. O halde halka değişmelidir.

Varsayalım ki $R = B$ olsun. O halde $d = 0$ olur. Sonuç olarak $d = 0$ veya R halkası değişmeli demektir. $d = 0$ ise

$$f(xy) = x^*f(y) + yd(x) = x^*f(y)$$

olur. Yani R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ *-merkezleyicidir.



BÖLÜM 5

GENELLEŞTİRİLMİŞ SOL $\ast$ - α -TÜREVLER İLE ASAL $\ast$ -HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK

Bu bölümde daha önce asal halkalarda türevler ve $\ast$ -türevler için yapılmış bazı çalışmalar sol $\ast$ - α -türevler için genellenmiştir.

Bundan sonra aksi söylenmediği takdirde x, y, z, r, s elemanları kullanılacak olan R halkasından seçilmiş keyfi elemanlardır.

Teorem 5.1. R bir asal $\ast$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir örten halka homomorfizması, $f: R \rightarrow R$ dönüşümü, d sol $\ast$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol $\ast$ - α -türev ve her $x \in R$ için $\alpha(x^\ast) = (\alpha(x))^\ast$ olmak üzere;

- i. f bir halka homomorfizması ise f sağ $\ast$ -merkezleyici veya R halkası değişmelidir.
- ii. f bir halka anti-homomorfizması ise f sağ $\ast$ -merkezleyici veya R halkası değişmelidir.

İspat. i. Kabul edelim ki f bir homomorfizma olsun. $f(xyz)$, sırasıyla f dönüşümünün bir genelleştirilmiş sol $\ast$ - α -türev ve halka homomorfizması olması kullanılarak açıldığında

$$\begin{aligned} f(x(yz)) &= x^\ast f(yz) + \alpha(yz)d(x) \\ &= x^\ast f(y)f(z) + \alpha(y)\alpha(z)d(x) \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $f(xyz)$ sırasıyla f dönüşümünün bir halka homomorfizması ve bir genelleştirilmiş sol $\ast$ - α -türev olması kullanılıp açılırsa

$$\begin{aligned} f((xy)z) &= f(xy)f(z) \\ &= x^\ast f(y)f(z) + \alpha(y)d(x)f(z) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu iki eşitlik birlikte kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha(y)\alpha(z)d(x) = \alpha(y)d(x)f(z)$$

olur. Bu ise

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(y)\alpha(z)d(x) - \alpha(y)d(x)f(z) \\ &= \alpha(y)(\alpha(z)d(x) - d(x)f(z)) \\ &= \alpha(y)(\alpha(z)d(x) - d(x)f(z)) \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $r \in R$ için y yerine yr yazılıp düzenlendiğinde

$$0 = \alpha(yr)(\alpha(z)d(x) - d(x)f(z))$$

$$= \alpha(y)\alpha(r)(\alpha(z)d(x) - d(x)f(z))$$

elde edilir. α örten bir fonksiyon olduğundan

$$(0) = \alpha(y)R(\alpha(z)d(x) - d(x)f(z)) \quad (5.1)$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanılırsa $\alpha(y) = 0$ veya $\alpha(z)d(x) - d(x)f(z) = 0$ olur. Bu ise

$$\alpha = 0 \text{ veya } \alpha(z)d(x) - d(x)f(z) = 0$$

demektir. α örten bir fonksiyon olduğundan $\alpha = 0$ olması durumunda R sıfır halkası olur. Bu sebeple $\alpha \neq 0$ dır. O halde

$$\alpha(z)d(x) = d(x)f(z) \quad (5.2)$$

sonucuna ulaşılır. (5.2) numaralı eşitlikte x yerine xy yazılıp sol $*-\alpha$ -türev özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(z)d(xy) - d(xy)f(z) \\ &= \alpha(z)(x^*d(y) + \alpha(y)d(x)) - (x^*d(y) + \alpha(y)d(x))f(z) \\ &= \alpha(z)x^*d(y) + \alpha(z)\alpha(y)d(x) - x^*d(y)f(z) - \alpha(y)d(x)f(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik (5.2) eşitliği kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(z)x^*d(y) + \alpha(z)\alpha(y)d(x) - x^*\alpha(z)d(y) - \alpha(y)\alpha(z)d(x) \\ &= [\alpha(z), x^*]d(y) + [\alpha(z), \alpha(y)]d(x) \end{aligned}$$

olur. α dönüşümü örten olduğundan son ifadede $\alpha(z)$ yerine x^* yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [x^*, x^*]d(y) + [x^*, \alpha(y)]d(x) \\ &= [x^*, \alpha(y)]d(x) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Bu ifadede y yerine yz yazılır ve α dönüşümünün örten olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [x^*, \alpha(yz)]d(x) \\ &= [x^*, \alpha(y)\alpha(z)]d(x) \\ &= [x^*, \alpha(y)]\alpha(z)d(x) + \alpha(y)[x^*, \alpha(z)]d(x) \\ &= [x^*, \alpha(y)]\alpha(z)d(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$[x^*, \alpha(y)]Rd(x) = (0) \quad (5.3)$$

demektir. R halkasının asal olması kullanıldığında için $[x^*, \alpha(y)] = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. α örten bir fonksiyon olduğundan $[x^*, r] = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. $A = \{x \in R \mid [x^*, r] = 0, \forall r \in R\}$ ve $B = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B kümeleri R grubunun altgruplarıdır ve $A \cup B = R$ dir. *Teorem 2.4.* gereği $A = R$ veya $B = R$ dir.

Varsayalım ki $A = R$ olsun. Bu durumda her $x, r \in R$ için $[x^*, r] = 0$ olur. Burada x yerine x^* yazılır ve involüsyon dönüşümünün özellikleri kullanılırsa

$$0 = [(x^*)^*, r] = [x, r]$$

elde edilir. Bu ise $x \in Z(R)$ olması demektir. Yani R halkası değişmelidir.

Kabul edelim ki $B = R$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olur. Bu ise $d = 0$ olması demektir. Sonuç olarak f sağ $*$ merkezleyici veya R halkası değişmeli bulunur.

ii. $f(xy)$, f dönüşümünün anti-homomorfizma özelliği kullanılarak açılırsa $f(xy) = f(y)f(x)$ olur. $x, y \in R$ için $f(xy)$, f dönüşümünün genelleştirilmiş sol $*$ -türev özelliği kullanılıp açıldığında ise $f(xy) = x^*f(y) + \alpha(y)d(x)$ olur. Bu iki ifade birbirine eşit olduğundan

$$f(y)f(x) = x^*f(y) + \alpha(y)d(x)$$

bulunur. Son eşitlikte y yerine xy yazılır, türev ve anti-homomorfizma özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$f(xy)f(x) = x^*f(xy) + \alpha(xy)d(x)$$

$$(x^*f(y) + \alpha(y)d(x))f(x) = x^*f(y)f(x) + \alpha(xy)d(x)$$

$$x^*f(y)f(x) + \alpha(y)d(x)f(x) = x^*f(y)f(x) + \alpha(x)\alpha(y)d(x)$$

elde edilir. Yani

$$\alpha(y)d(x)f(x) = \alpha(x)\alpha(y)d(x)$$

olur. Bu eşitlik y yerine yz yazılıp, aynı ifade yardımıyla düzenlenirse

$$\alpha(yz)d(x)f(x) = \alpha(x)\alpha(yz)d(x)$$

$$\alpha(y)\alpha(z)d(x)f(x) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(z)d(x)$$

$$\alpha(y)\alpha(x)\alpha(z)d(x) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(z)d(x)$$

$$[\alpha(y), \alpha(x)]\alpha(z)d(x) = 0$$

bulunur. α fonksiyonunun örten olması düşünülürse

$$[\alpha(y), \alpha(x)]Rd(x) = (0)$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her

$$[\alpha(y), \alpha(x)] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

olur. α fonksiyonu örten olduğu için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ dır.

$A = \{x \in R \mid [x, r] = 0, \forall r \in R\}$ ve $B = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B kümeleri R grubunun altgruplarıdır ve $A \cup B = R$ dir. Bir grup iki öz altgrupunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından $A = R$ veya $B = R$ dir.

Varsayalım ki $A = R$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $x \in Z(R)$ olması demektir. Yani R halkası değişmelidir.

Kabul edelim ki $B = R$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olur. Bu ise $d = 0$ olması demektir. Sonuç olarak f sağ $*$ merkezleyici veya R halkası değişmeli bulunur.

Sonuç 5.2. Her d sol $*$ - α -türev kendisi ile belirli bir genelleştirilmiş sol $*$ - α -türev olduğundan

- i. d , dönüşümü homomorfizma ise R asal $*$ -halkası değişmeli veya $d = 0$ dır.
- ii. d , dönüşümü anti-homomorfizma ise R asal $*$ -halkası değişmeli veya $d = 0$ dır.

Lemma 5.3. R bir asal $*$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir epimorfizma, $0 \neq f$, R halkasının bir d sol $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol $*$ - α -türevi olmak üzere f bir homomorfizma veya anti-homomorfizma iken $f(R) \subset Z(R)$ ise R değişmelidir.

İspat. Kabul edelim ki f homomorfizma veya anti-homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* kullanılırsa R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici olur. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ dir. Diğer taraftan hipotez kullanılırsa $f(R) \subset Z(R)$ dir. Yani $0 = [r, f(x)]$ olur. Bu eşitlikte x yerine xy yazılıp f dönüşümünün sağ $*$ -merkezleyici olması ve yine aynı eşitlik kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [r, f(xy)] \\ &= [r, x^*f(y)] \\ &= x^*[r, f(y)] + [r, x^*]f(y) \\ &= [r, x^*]f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikte x yerine x^* yazılır, $z \in R$ için eşitlik sağdan z ile çarpılır ve hipotez kullanılarak düzenlenirse

$$0 = [r, (x^*)^*]f(y)z = [r, x]zf(y)$$

olur. Yani $[r, x]Rf(y) = (0)$ dır. R halkasının asal olması kullanılırsa $[R, x] = 0$ veya $f(R) = (0)$ elde edilir. Yani $x \in Z(R)$ veya $f = 0$ dır. $f \neq 0$ olduğu için R halkası değişmeli bulunur. Bu ise kabul ile çeliştiğinden R halkası değişmeli sonucuna varılır.

Teorem 5.4. R bir asal $*$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir epimorfizma, $0 \neq f: R \rightarrow R$, d sol $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol $*$ - α -türev ve f homomorfizma veya anti-homomorfizma olmak üzere her $x, y \in R$ için $f([x, y]) = 0$ iken R değişmelidir.

İspat. Kabul edelim ki f homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* kullanılırsa R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici olur. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Hipotezde f dönüşümün homomorfizma olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= f([x, y]) \\ &= f(xy - yx) \\ &= f(xy) - f(yx) \\ &= f(x)f(y) - f(y)f(x) \\ &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$0 = [f(x), f(y)] \quad (5.4)$$

dir. Bu eşitlikte x yerine x^*z yazılıp f dönüşümün sağ $*$ -merkezleyici olması ve hipotez kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x^*z), f(y)] \\ &= [(x^*)^*f(z), f(y)] \\ &= (x^*)^*[f(z), f(y)] + [(x^*)^*, f(y)]f(z) \\ &= [x, f(y)]f(z) \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte x yerine xr yazılır ve aynı eşitlik kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [xr, f(y)]f(z) \\ &= x[r, f(y)]f(z) + [x, f(y)]rf(z) \\ &= [x, f(y)]rf(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(0) = [x, f(y)]Rf(z)$$

dır. R halkasının asal olması kullanılırsa $[x, f(y)] = 0$ veya $f(z) = 0$ olur. Yani $f(y) \in Z(R)$ veya $f = 0$ dır. Her iki durumda da $f(R) \subset Z(R)$ dir. Burada *Lemma 5.3.* kullanıldığında R halkası değişmeli bulunur. Bu ise kabul ile çeliştiğinden R halkası değişmeli sonucuna varılır.

Kabul edelim ki f anti-homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* kullanılırsa R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici dir. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Hipotezde f dönüşümün anti-homomorfizma olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= f([x, y]) \\ &= f(xy - yx) \\ &= f(xy) - f(yx) \\ &= f(y)f(x) - f(x)f(y) \\ &= -[f(x), f(y)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $[f(x), f(y)] = 0$ dır. (5.4) ifadesinden sonraki basamaklar takip edilerek istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 5.5. R bir asal $*$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir epimorfizma, $0 \neq f: R \rightarrow R$, d sol $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol $*$ - α -türev ve f homomorfizma veya anti-homomorfizma olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $0 = [f(x), a]$ iken $a \in Z(R)$ veya R halkası değişmelidir.

İspat. Kabul edelim ki f homomorfizma veya anti-homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* gereğince R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici olur. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Diğer taraftan hipotezde x yerine xy yazılır ve hipotez kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x^*y), a] \\ &= [(x^*)^*f(y), a] \\ &= [xf(y), a] \\ &= x[f(y), a] + [x, a]f(y) \\ &= [x, a]f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte x yerine xr yazılıp aynı eşitlik kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= [xr, a]f(y) \\ &= x[r, a]f(y) + [x, a]rf(y) \\ &= [x, a]rf(y) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$(0) = [x, a]Rf(y)$$

dir. R halkasının asal olması kullanılırsa $[x, a] = 0$ veya $f(y) = 0$ dır. f sıfırdan farklı olduğundan $a \in Z(R)$ olur. Sonuç olarak $a \in Z(R)$ veya R halkası değişmelidir.

Teorem 5.6. R bir asal $*$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir epimorfizma, $0 \neq f: R \rightarrow R$ dönüşümü, bir d sol $*\text{-}\alpha$ -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol $*\text{-}\alpha$ -türev ve f homomorfizma veya anti-homomorfizma olmak üzere her $x, y \in R$ için $f([x, y]) \in Z(R)$ ise R değişmelidir.

İspat. Kabul edelim ki f homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* kullanılırsa R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici olur.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Hipotezde f dönüşümünün homomorfizma olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} f([x, y]) &= f(xy - yx) \\ &= f(xy) - f(yx) \\ &= f(x)f(y) - f(y)f(x) \\ &= [f(x), f(y)] \in Z(R) \end{aligned}$$

dir. Yani

$$[f(x), f(y)] \in Z(R) \tag{5.5}$$

olur. Bu ise $[f(x), f(y)], r] = 0$ demektir. Bu eşitlikte x yerine x^*z yazılıp, hipotez ve f dönüşümünün sağ $*$ -merkezleyici olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [[f(x^*z), f(y)], r] = [(x^*)^*f(z), f(y)], r] = [xf(z), f(y)], r] \\ &= [x[f(z), f(y)], r] + [x, f(y)]f(z), r] \\ &= [x, r][f(z), f(y)] + x[[f(z), f(y)], r] + [x, f(y)], r]f(z) + [x, f(y)][f(z), r] \\ &= [x, r][f(z), f(y)] + [x, f(y)], r]f(z) + [x, f(y)][f(z), r] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifade x yerine $f(y)$ ve r yerine $f(z)$ yazılır hipotez kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [f(y), f(z)][f(z), f(y)] + [[f(y), f(y)], f(z)]f(z) + [f(y), f(y)][f(z), f(z)] \\ &= [f(y), f(z)][f(z), f(y)] \\ &= -[f(y), f(z)][f(y), f(z)] \\ &= [f(y), f(z)][f(y), f(z)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan R ile çarpılıp $[f(y), f(z)] \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$(0) = [f(z), f(y)]R[f(z), f(y)]$$

bulunur. Burada R halkasının asal olması kullanılırsa

$$0 = [f(z), f(y)]$$

olur. Bu eşitlikte *Teorem 5.5.* kullanıldığında $f(z) \in Z(R)$ bulunur. Bulunan bu ifade de *Lemma 5.3.* kullanılırsa R halkası değişmeli bulunur. Bu ise kabul ile çeliştiğinden R halkası değişmeli sonucuna varılır.

Kabul edelim ki f anti-homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* gereğince R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici olur. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Hipotezde f dönüşümünün anti-homomorfizma olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} f([x, y]) &= f(xy - yx) \\ &= f(xy) - f(yx) \\ &= f(y)f(x) - f(x)f(y) \\ &= -[f(x), f(y)] \\ &= [f(x), f(y)] \in Z(R) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $[f(x), f(y)] \in Z(R)$ dir. (5.5) ifadesinden sonraki basamaklar izlenerek istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Teorem 5.7. R bir asal $*$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir epimorfizma, $0 \neq f: R \rightarrow R$, d sol $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sol $*$ - α -türev ve f homomorfizma veya anti-homomorfizma olmak üzere her $x, y \in R$ için $f((x, y)) = 0$ iken R değişmelidir.

İspat. f homomorfizma olsun. Bu durumda *Teorem 5.1.* gereğince R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ $*$ -merkezleyici olur. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Hipotezde f dönüşümünün homomorfizma olması kullanıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= f((x, y)) \\ &= f(xy + yx) \\ &= f(xy) + f(yx) \end{aligned}$$

$$= f(x)f(y) + f(y)f(x)$$

elde edilir. Yani

$$0 = f(x)f(y) + f(y)f(x) \quad (5.6)$$

bulunur. (5.6) numaralı eşitlik düzenlendiğinde

$$f(x)f(y) = -f(y)f(x) \quad (5.7)$$

sonucuna varılır. (5.6) numaralı eşitlik x yerine x^*z yazılır ve (5.7) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x^*z), f(y)) \\ &= ((x^*)^*f(z), f(y)) \\ &= xf(z)f(y) + f(y)xf(z) \\ &= -xf(y)f(z) + f(y)xf(z) \\ &= (f(y)x - x)f(z) \\ &= [f(y), x]f(z) \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte x yerine xr yazılır ve aynı eşitlikten yararlanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [f(y), xr]f(z) \\ &= [f(y), x]rf(z) + x[f(y), r]f(z) \\ &= [f(y), x]rf(z) \end{aligned}$$

olur. Yani $(0) = [f(y), x]Rf(z)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında $[f(y), x] = 0$ veya $f(z) = 0$ olur. Yani $f(R) \subset Z(R)$ dir. *Lemma 5.3.* kullanılırsa R halkası değişmeli bulunur. Bu ise kabul ile çeliştiğinden R halkası değişmeli sonucuna varılır.

Kabul edelim ki f anti-homomorfizma olsun. *Teorem 5.1.* kullanılırsa R halkası değişmeli veya f dönüşümü sağ *-merkezleyicidir.

Varsayalım ki R halkası değişmeli olmasın. O halde f dönüşümü sağ *-merkezleyici olur. Yani $f(xy) = x^*f(y)$ şeklindedir. Hipotezde f dönüşümün homomorfizma olması kullanıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= f((x, y)) \\ &= f(xy + yx) \\ &= f(xy) + f(yx) \\ &= f(y)f(x) + f(x)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.6) ifadesinden sonraki basamaklar izlenerek istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.8. R bir $*$ -asal halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir homomorfizma, $g: R \rightarrow R$ dönüşümü, bir t $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş $*$ - α -türev olmak üzere $g \neq 0$ ise R değişmelidir.

İspat. g dönüşümü, t $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş $*$ - α -türev olduğundan

$$\begin{aligned} g((xy)z) &= g(xy)z^* + \alpha(xy)t(z) \\ &= (g(x)y^* + \alpha(x)t(y))z^* + \alpha(x)\alpha(y)t(z) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(x(yz)) &= g(x)(yz)^* + \alpha(x)t(yz) \\ &= g(x)z^*y^* + \alpha(x)(t(y)z^* + \alpha(y)t(z)) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki iki eşitlikte $(xy)z = x(yz)$ olması kullanıldığında

$$g(x)y^*z^* = g(x)z^*y^*$$

olur. Yani

$$g(x)[y^*, z^*] = 0$$

dır. Bu eşitlikte y yerine y^* ve z yerine z^* yazılırsa $g(x)[y, z] = 0$ bulunur. Son eşitlikte y yerine ry yazılır ve aynı eşitlik kullanılıp düzenlenerek

$$\begin{aligned} 0 &= g(x)[ry, z] \\ &= g(x)r[y, z] + g(x)[r, z]y \\ &= g(x)r[y, z] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$0 = g(x)r[y, z] \tag{5.8}$$

sonucuna ulaşılır. Yani

$$(0) = g(x)R[y, z] \tag{5.9}$$

dir. Son eşitlikte y yerine y^* ve z yerine $-z^*$ yazılıp düzenlendiğinde

$$(0) = g(x)R[y, z]^* \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.9) ve (5.10) eşitlikleri ile R halkasının $*$ -asal olması kullanıldığında $g(x) = 0$ veya $[y, z] = 0$ bulunur. Yani $g \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 5.9. R bir yarıasal $*$ -halka, $\alpha: R \rightarrow R$ bir homomorfizma, $g: R \rightarrow R$ dönüşümü, t $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş $*$ - α -türev ise $g(R) \subset Z(R)$ dir.

İspat. g dönüşümü, t $*$ - α -türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş $*$ - α -türev olduğundan (5.8) numaralı eşitlik soldan s ile çarpılırsa

$$0 = sg(x)r[y, z] \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.8) numaralı eşitlikte r yerine sr yazılıp düzenlenirse

$$0 = g(x)sr[y, z] \quad (5.12)$$

olur. (5.11) ve (5.12) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= sg(x)r[y, z] - g(x)sr[y, z] \\ &= [s, g(x)]r[y, z] \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte s yerine y ve z yerine $g(x)$ yazılıp düzenlendiğinde

$$(0) = [y, g(x)]R[y, g(x)]$$

sonucuna ulaşılır. R halkasının yarıasal olması kullanılırsa $(0) = [y, g(x)]$ olur. Bu da $g(x) \in Z(R)$ demektir. Sonuç olarak $g(R) \subset Z(R)$ dir.

KAYNAKLAR

- Bergin J., Herstein I. N., Kerr J.W., 1981. Lie Ideals and Derivations of Prime Rings. Journal of Algebra. 71: 259-267.
- Herstein I. N., 1969. Topics in Ring Theory. Univ. Of Chicago Press. Chicago.
- Herstein I. N., 1970. On Lie Structure of an Associative Ring. Journal of Algebra. 14: 561-571.
- Herstein I. N., 1976. Ring With Involution. Univ. Of Chicago Press. Chicago.
- Herstein I. N., 1979. A Note on Derivations II. Canad. Math. Bull. 22: 509-511.
- Oukhtite L., Salhi S., 2006. Derivations and Commutativity of σ -Prime Rings. Int. J. Contemp. Math. Sci. Vol. 1. 9: 439-448.
- Oukhtite L., Salhi S., 2007. Lie Ideals and Derivations of σ -Prime Rings. International Journal of Algebra Vol. 1. 1: 25-30.
- Posner E.C., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8: 1093-1100.
- Rehman N.U., Ansari A.Z., Heatinger C., 2013. A Note on Homomorphism and Anti-Homomorphism on $*$ -Rings. Thai Journal of Mathematics Vol.11. 3:741-750

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ahmet Oğuz BALCI

Doğum Yeri : Malatya

Doğum Tarihi : 19/08/1986

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

Balcı A.O., Aydın N., Türkmen S., *The Commutativity of a $\ast$ -Ring with Generalized Left $\ast$ - α -Derivation*, Advances in Pure Mathematics, Vol:8, No:2, 2018.

SINAVLAR

Ales : 89.7 / 2016

Yökdil : 56,25 / 2018

İŞ DENEYİMİ

Halk Eğitim Merkezi	Matematik Öğretmeni	2015
Çözüm Özel Öğretim Kurumu	Matematik Öğretmeni	2016
Sınav Dershanesi	Matematik Öğretmeni	2017
Doğru Seçenek Kpss	Matematik Öğretmeni	2018

İLETİŞİM

E-posta Adresi : a.oguz.balci@icloud.com

Telefon : 0 542 811 15 32