

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA FONKSİYON
DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI

Harun ARÇİN

Danışman
Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2018



© 2018 [Harun ARÇİN]

TEZ ONAYI

Harun ARCİN tarafından hazırlanan “**Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin Yakınsaklığı**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Selma ÖZÇAĞ
Hacettepe Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Salih AYTAR
Süleyman Demirel Üniversitesi

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Yasin TUNCER

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Harun ARÇİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1.GİRİŞ	1
2.KAYNAK ÖZETLERİ	3
3.TEMEL KAVRAMLAR	5
3.1.İstatistiksel Ve İdeal Yakınsaklık İle İlgili Temel Kavramlar	5
3.2.Eş Yakınsaklık	7
3.3.Asimetrik Metrik Uzayların (AMU) Topolojisi	9
3.4.Asimetrik Metrik Uzaylarda İdeal Yakınsaklık	14
3.5.Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin Yakınsaklığı	15
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	16
4.1.Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Ve Düzenli Yakınsaklığı İçin Bazı Sonuçlar	16
4.2.Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı ..	22
4.3.Asimetrik Metrik Uzaylarda Eş Yakınsaklık	27
5.SONUÇ VE ÖNERİLER	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	37

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA FONKSİYON DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI

Harun ARÇİN

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

Bu tez çalışmasında, fonksiyon dizileri için verilen noktasal yakınsaklık, düzgün yakınsaklık ve eş yakınsaklık kavramları metrik uzayların bir genellemesi olan, simetri özelliği taşımayan asimetric metrik uzaylarda bu kavramların bazı özellikleri ve birbirleriyle ilişkileri incelenmiştir.

Birinci bölümde, konunun amacı ve kapsamı hakkında bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ve literatür özetinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, konunun temelini oluşturan istatistiksel ve ideal yakınsaklık ile ilgili temel kavramlar ve metrik uzaylarda tanımlanmış olan eş yakınsaklık kavramı verilmiştir. Daha sonra, asimetric metrik uzayların topolojisinden bahsedilerek, asimetric metrik uzaylar ile ilgili bazı temel kavramlar hatırlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak asimetric metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin istatistiksel ve ideal anlamda noktasal ve düzgün yakınsaklığı kavramları tanımlanarak bu kavramlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca asimetric metrik uzaylarda fonksiyon dizileri için bir Cauchy kriteri verilerek, bir Cauchy dizisinin istatistiksel düzgün yakınsak olamayacağı bir örnekle gösterilmiştir. Daha sonra, asimetric metrik uzaylarda istatistiksel ve ideal eş yakınsaklık kavramları tanımlanarak, bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, Filipów ve Staniszewski nin 2014 yılındaki çalışmalarında metrik uzaylar için verdikleri ideal eş yakınsaklık ile ilgili olan bazı sonuçlar asimetric metrik uzaylarda verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asimetric metrik uzay; ileri(geri) düzgün yakınsaklık; ileri(geri) noktasal yakınsaklık; ileri(geri) düzgün Cauchy dizisi; ileri(geri) istatistiksel düzgün Cauchy dizisi; ileri(geri) istatistiksel düzgün yakınsaklık; ileri(geri) istatistiksel noktasal yakınsaklık; ileri(geri) ideal düzgün yakınsaklık; ileri(geri) ideal noktasal yakınsaklık; f -eş yakınsaklık; $ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - eş yakınsaklık

2018, 37 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CONVERGENCE SEQUENCES OF FUNCTIONS IN ASYMMETRIC METRIC SPACES

Harun ARÇIN

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

In this thesis, the concepts of pointwise convergence, uniform convergence and equal convergence for sequences of functions are introduced in asymmetric metric spaces which are the generalization of the metric spaces without symmetry. Then, some aspects and their relation to each other are examined.

In the first chapter, the aim and scope of the subject are presented.

In the second chapter, the historical background and the literature review of the subject are mentioned.

In the third chapter, some of basic concepts related with statistical and ideal convergence and equal convergence in metric spaces are recalled. Then the topology of asymmetric metric spaces are mentioned and some basic concepts of asymmetric metric spaces are presented.

In the fourth chapter, first, relationship between the notions of pointwise and uniform convergence of sequence of functions is observed by defining notions of pointwise and uniform convergence of sequence of functions in asymmetric metric spaces statistically and ideally. Also, it is shown with an example that a statistical uniform Cauchy sequence can not be statistical uniform convergent by given a Cauchy criterion for sequences of functions in asymmetric metric spaces. Furthermore, by defining notions of statistical and ideal equal convergence, some results are obtained. Finally, some results related with ideal equal convergence in asymmetric metric spaces which studied for metric spaces by Filipów and Staniszewski in 2014 are given.

Keywords: Asymmetric metric space; forward (backward) uniform convergence; forward (backward) pointwise convergence; forward (backward) uniform Cauchy sequence; forward (backward) statistical uniform Cauchy sequence; forward (backward) statistical uniform convergence; forward (backward) statistical pointwise convergence; forward (backward) ideal uniform convergence; forward (backward) ideal pointwise convergence; ff -equal convergence; $ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - equal convergence

2018, 37 pages

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma için beni yönlendiren, karŐılaŐtıĐım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aŐmamda yardımcı olan ve beni daima yreklendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN a ve yardımlarımı benden esirgemeyen Dr. Zeynep Hande TOYGANÖZÜ hocama teŐekkürlerimi ve sayĐılarımı sunarım.

Aynı zamanda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eŐime ve aileme sonsuz sevgi ve sayĐılarımı sunarım.

Harun ARİN
ISPARTA, 2018



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B^-(x, \varepsilon)$	Geri açık yuvar
$B^+(x, \varepsilon)$	İleri açık yuvar
$C(X, Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm ff -sürekli fonksiyonlar kümesi
$d(y, x)$	Herhangi bir asimetrik metrik
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	Bir \mathcal{I} idealinin dual filtresi
\mathcal{I}	Bir kümenin alt kümelerinin bir ideali
\mathcal{I}_f	Pozitif tamsayılar kümesinin bütün sonlu altkümelerinin ideali
\mathcal{I}_d	Sıfır yoğunluklu pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu ideal
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{P}	Asal sayılar kümesi
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
Y^X	X kümesinden Y kümesine tanımlı fonksiyonların uzayı
$\delta(A)$	A kümesinin doğal (asimptotik) yoğunluğu
$\bar{\rho}(f, g)$	Y^X üzerindeki düzgün metrik
τ_+	İleri açık yuvarlarla üretilen topoloji
τ_-	Geri açık yuvarlarla üretilen topoloji
$x_n \xrightarrow{f} x_0$	Bir (x_n) dizisinin x_0 a ileri yakınsaması
$x_n \xrightarrow{b} x_0$	Bir (x_n) dizisinin x_0 a geri yakınsaması
$(x_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}} x_0$	Bir (x_n) dizisinin x_0 a ileri ideal yakınsaması
$(x_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}} x_0$	Bir (x_n) dizisinin x_0 a geri ideal yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{p} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna noktasal yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{u} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{e} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna eş yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{f^{(b)-p}} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna ileri (geri) noktasal yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{f^{(b)-u}} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna ileri (geri) düzgün yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-p} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna geri ideal noktasal yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna ileri ideal noktasal yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-u} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna geri ideal düzgün yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-u} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna ileri ideal düzgün yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{f^{(b)-st-p}} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna ileri (geri) istatistiksel noktasal yakınsaması
$(f_n) \xrightarrow{f^{(b)-st-u}} f$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna ileri (geri) istatistiksel düzgün yakınsaması

1. GİRİŞ

Fonksiyon uzayları konusunda önemli bir yer tutan fonksiyon dizilerinin yakınsaklığı kavramında, bilinen noktasal ve düzgün yakınsaklık tiplerine ek olarak yeni yakınsaklık tipleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Düzgün yakınsaklıktan daha zayıf noktasal yakınsaklıktan daha güçlü bir yakınsaklık çeşidi olan eş yakınsaklık, ilk defa Császár ve Laczkovich (1975) tarafından tanımlanmıştır.

Bu tez çalışmasında kullanacağımız yakınsaklık tiplerinden istatistiksel yakınsaklık 60 yıldan fazla üzerinde çalışılmakta olan aktif çalışma alanlarından biridir. Klasik yakınsaklık kavramının bir genellemesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı, pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık, toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. Daha sonra bu kavramın devamında, doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümeler ailesinin bir ideal oluşturmasından yola çıkılarak, ideal yakınsaklık (\mathcal{I} -yakınsaklık) kavramı ve çeşitleri tanımlanmıştır (Kostyrko vd., 2000). \mathcal{I} -yakınsaklık kavramı klasik metrik uzaylardaki diziler için tanımlanmış olup istatistiksel yakınsaklıktan daha genel bir yakınsaklık tipidir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve onun genellemesi olarak verilen ideal yakınsaklık kavramlarıyla birlikte fonksiyon dizilerinin yakınsaklığının farklı tipleri de tanımlanmıştır. Çok sayıda matematikçi bu konu üzerinde çalışmıştır ve halen geniş bir uygulama alanı bularak çalışmalar devam etmektedir (Császár vd. 1979, Holá vd. 1988, Kolk 1999, Wilczyński 1999, Balcerzak vd. 2007, Gregoriades vd. 2008, Athanassiadou vd. 2013).

Simetri özelliği matematikte olduğu gibi bilgisayar bilimlerinde de önemli bir rol oynar. Ancak bir çok uygulamada genellikle eksik bilgiyle baş etmek, asimetrinin kaçınılmaz bir durum olarak karşımıza çıkmasına neden olur. Örneğin, bir uygulamada gerçel sayılar üzerinde en alt veya en üst sınırlar elde edebilir ya da her ikisi de elde edilemeyebilir. Kümeler üzerindeki her iki bilgi pozitif veya negatif olabilir ya da yukarıdan veya aşağıdan yaklaşık fonksiyonlarla değerlendirilebilir. Bu durumlarla uygun şekilde baş etmek istenirse asimetri aracının nasıl kullanılacağını öğrenmek gerekir. Bu bağlamda, matematiksel önemli bir araç, asimetric metrik uzayların topolojisi olarak ortaya çıkmaktadır.

Metrik uzayların bir genellemesi olan asimetric metrik uzaylar ilk olarak 1931 yılında W. A. Wilson tarafından simetri özelliğinden yoksun olarak, quasi-metrikler adı altında tanımlanmıştır. Bu uzaylarda simetri özelliğinin yokluğu, klasik analizde verilen yakınsaklık, kompaktlık ve tamlık gibi bazı kavramların tanımlanması ve çalışılmasında bazı problemlere neden olmaktadır.

Bu nedenle bu tür kavramlar asimetrik metrik uzaylarda, metrik uzaylardakinden farklı olarak tanımlanmış ve farklı özelliklere sahip olmuşlardır. Asimetrik metrik uzayların analizi çok doğal görünse bile, tutarlı bir teoremin eksikliği uzun zamandır dikkati çekmekte ve birçok soru açık problem olarak beklemektedir.

Bu tez çalışmasında, asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin noktasal yakınsaklığı, eş yakınsaklığı, düzgün yakınsaklığı, düzgün Cauchy dizisi tanımları istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramlarına uygun olarak verilmiş ve bu kavramların bazı özellikleri ve birbirleri ile olan ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca \mathbb{N} üzerinde tanımlanmış \mathcal{I} ve \mathcal{J} ideallerine bağlı olarak asimetrik metrik uzaylarda (f_n) fonksiyon dizileri için $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -eş yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu kavrama ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Klasik yakınsaklık kavramının bir genellemesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından tanımlanmış ve Fridy (1985,1993) tarafından geliştirilmiştir. İstatistiksel yakınsaklığın daha genel bir hali olan ideal yakınsaklık (\mathcal{I} -yakınsaklık) ise ilk olarak Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmıştır. İdeal kavramı kullanılarak, reel değerli fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün yakınsaklığı kavramları Balcerzak vd. (2007) ve Komisarski (2008) tarafından ideal noktasal ve ideal düzgün yakınsaklık kavramlarına genellenmiştir.

İlk olarak 1975 yılında Császár ve Laczkovich tarafından tanımlanan eş yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktan daha zayıf, noktasal yakınsaklıktan daha güçlü olan bir yakınsaklık tipidir. Yani bir fonksiyon dizisi düzgün yakınsak ise eş yakınsaktır, eş yakınsak ise noktasal yakınsaktır. Daha sonra, bu kavramın ideal versiyonları Filipów ve Szuca (2012) ile Das vd. (2014) tarafından verilerek, belirli özellikleri incelenmiştir. Filipów ve Staniszewski (2014) te \mathbb{N} üzerinde tanımlanmış \mathcal{I} ve \mathcal{J} ideallerine dayalı olarak tanımladıkları gerçel değerli fonksiyon dizilerinin ideal eş yakınsaklığının bazı özelliklerini araştırmışlardır.

Asimetrik metrik uzaylar ilk defa Wilson (1931) tarafından quasi-metrikler adıyla verilmiştir. Aynı yıl Niemytzki (1931) metriklenebilme üzerine çalışmalarda bulunmuştur. Kelly (1963) ve Patty (1967) bitopolojik uzaylarla ilgili yaptığı çalışmalarda asimetrik metrik uzaylara da değinmişlerdir. Reilly vd. (1982) ile Künzi (1983) quasi-pseudo metrik uzaylarda çalışmışlardır. Mennucci (2004) makalesinde asimetrik metrik uzaylar üzerinde çalışmalar yapmıştır. Collins ve Zimmer (2007) asimetrik metrik uzaylarda dizilerin yakınsaklığı kavramını çalışmışlardır.

Hem teorik hem de uygulamalı matematikte asimetrik metrik uzayların birçok güncel uygulamasını bulabiliriz. Örneğin, asimetrik metrik uzaylar konusunda, son zamanlarda Hamilton- Jacobi denklemlerinin varlık ve teklik problemi ile ilgili çalışmalar mevcuttur (Mennucci, 2004). Ayrıca, malzeme mühendisliği alanlarında ise yoğrulabilirlik için oran-bağımsız modeller (Mainik ve Mielke, 2005), ısıyla şekillendirilmiş alaşımlar (Mielke ve Roubíček, 2003), malzeme hataları için modeller (Rieger ve Zimmer, 2005) ve yerel enerji minimizasyonuna uygun durumlar için dereceli akış modelleri tasarlama (Chenchiah vd, 2009) gibi örnekler verilebilir.

Toyganözü nün (2015) asimetrik metrik uzaylarda kompaktlık isimli doktora tezinde asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün

yakınsaklığı kavramlarının tanımları verilmiş ve asimetric metrik uzaylarda Ascoli tipi teoremlerde eşsüekliliğin yerine exhaustiveness kavramı kullanılarak bir fonksiyon ailesinin kompakthđı karakterize edilmiştir. Asimetric yakınsaklık koşulu ortadan kalktığında bir ileri exhaustive fonksiyon dizisinin ileri noktasal limitinin sürekli ve tek olmayabileceği gösterilmiştir.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak, istatistiksel ve ideal yakınsaklık ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir. Daha sonra, düzgün yakınsaklıktan daha zayıf noktasal yakınsaklıktan daha güçlü olan eş yakınsaklık tanımı verilecektir. Ardından asimetrik metrik uzayların topolojisinden bahsedilip bu uzaylarda bazı yakınsaklık çeşitleri verilecektir.

3.1. İstatistiksel Ve İdeal Yakınsaklık İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1 A doğal sayıların bir altkümesi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \in A : k \leq n\}|$$

limitinin varolması durumunda bu limite A kümesinin "doğal (asimptotik) yoğunluğu" denir ve $d(A)$ ile gösterilir. Burada $|\{k \in A : k \leq n\}|$ ifadesi; A nın, n yi geçmeyen elemanlarının sayısı anlamındadır (Niven vd., 1991).

Örneğin \mathbb{N} nin her sonlu K alt kümesi için $d(K) = 0$ dır. Bir başka örnek $A = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$ kümesi için $|A(n)| \leq \sqrt{n}$ olduğu için $d(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ dır.

Tanım 3.1.2 Doğal (asimptotik) yoğunluğu 1 e eşit olan kümeye "istatistiksel yoğun küme" denir. Yani $d(A) = 1$ ise A , istatistiksel yoğun bir kümedir.

Tanım 3.1.3 Her $\varepsilon > 0$ ve $x = (x_k) \subset \mathbb{R}$ için,

$$d\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

ise x dizisi L ye "istatistiksel yakınsak" tır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast, 1951).

Tanım 3.1.4 A , 0 sayısını içermeyen doğal sayıların bir altkümesi olmak üzere

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h} |\{k \in A : n + 1 \leq k \leq n + h\}|$$

limitinin varolması durumunda bu limite A kümesinin "düzgün yoğunluğu" denir ve $u(A)$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Tanım 3.1.5 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ailesi için

(i) Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$ (toplamsallık)

(ii) Her $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$ (kalıtsallık)

koşulları sağlanıyorsa, \mathcal{I}, \mathbb{N} de bir "ideal" olarak adlandırılır (Jech, 1997). (ii) den dolayı $\emptyset \in \mathcal{I}$ olacağı açıktır. Eğer $\mathcal{I} \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise \mathcal{I} ideali "gerçek ideal" olarak tanımlanır. Her $x \in \mathbb{N}$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise \mathcal{I} ideali "uygun ideal" olarak adlandırılır. \mathbb{N} doğal sayılar kümesi yerine $X \neq \emptyset$ kümesi alınarak da benzer tanımlar verilebilir (Kuratowski, 1966).

Örnek 3.1.6

(a) \mathbb{N} pozitif tamsayılar kümesinin bütün sonlu altkümelerinin ideali:

$$\mathcal{I}_f = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sonlu}\}$$

olarak tanımlanır. \mathcal{I}_f ideali *Fin* şeklinde de gösterilir.

(b) \mathbb{N} pozitif tamsayılar kümesinin doğal yoğunluğu 0 olan altkümelerinin ideali:

$$\mathcal{I}_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

(c) \mathbb{N} pozitif tamsayılar kümesinin düzgün yoğunluğu 0 olan altkümelerinin ideali:

$$\mathcal{I}_u = \{A \subset \mathbb{N} : u(A) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Bu idealler arasında açıkça $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_u \subset \mathcal{I}_d$ kapsaması vardır. Sonuç olarak idealerin bütün sonlu kümeleri içerdiğini kabul ederiz. Yani; $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}$ dir (Kostyrko vd., 2000/01).

Tanım 3.1.7 Boş olmayan bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ailesi için $\emptyset \notin \mathcal{F}$, her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$, her bir $A \in \mathcal{F}$ ve $B \supset A$ için $B \in \mathcal{F}$ oluyorsa \mathcal{F} ailesine \mathbb{N} üzerinde bir "filtre" denir. $\mathbb{N} = X$ alınarak benzer tanım verilebilir (Kostyrko vd., 2000/01).

Tanım 3.1.8 \mathcal{I}, \mathbb{N} de bir gerçel ideal olsun

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{I} \ni M = \mathbb{N} \setminus A\}$$

ailesine " \mathcal{I} nin dual filtresi" denir (Kostyrko vd., 2000/01).

Tanım 3.1.9 \mathcal{I} , doğal sayılar kümesi üzerinde bir ideal ve (x_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa (x_n) dizisi $x \in \mathbb{R}$ ye "ideal yakınsak" (kısaca " \mathcal{I} -yakınsak") tır denir ve $(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ ile gösterilir (Kostyrko vd., 2000/01).

3.2. Eş Yakınsaklık

Klasik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin eş yakınsaklık kavramı ilk kez Császár ve Laczkovich (1975) tarafından verilmiştir. Aşağıda bu kavram ve onun noktasal ve düzgün yakınsaklık ile ilişkisi verilecektir.

Tanım 3.2.1 f fonksiyonu ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi X kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar olsun. $x \in X$ olmak üzere herhangi bir N doğal sayısı ve her $n > N$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$$

olacak şekilde pozitif gerçel sayıların sıfıra yakınsak bir $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna "eş yakınsak" tır denir ve kısaca $(f_n) \xrightarrow{e} f$ şeklinde gösterilir (Császár ve Laczkovich, 1975).

Eş yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktan daha zayıf, noktasal yakınsaklıktan ise daha güçlü bir yakınsaklıktır. Yani $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna eş yakınsaktır. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna eş yakınsak ise $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$(f_n) \xrightarrow{u} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{e} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{p} f$$

Ancak bu önermelerin tersleri doğru değildir.

Örnek 3.2.2 $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $x \in [0,1)$ için $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna $[0,1)$ aralığında eş yakınsaktır (R. Das ve N. Papanastassiou, 2003-2004).

Filipów ve Szuca (2012) ile Das vd. (2014) ideal eş yakınsaklık tanımını \mathbb{N} üzerindeki ideal yardımıyla birbirinden biraz farklı bir şekilde aşağıdaki gibi verdiler.

Bu tezde aksi belirtilmedikçe \mathcal{I} ve \mathcal{J} idealleri \mathbb{N} doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanmış gerçek bir ideal olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.3 X boş olmayan bir küme, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \rightarrow 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna " \mathcal{I} - eş yakınsak" tır denir (Filipów ve Szuca , 2012). Bu kısaca \mathcal{I} -eş- $\lim f_n = f$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4 X boş olmayan bir küme, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gerçel değerli fonksiyonların dizisi, f fonksiyonu X üzerinde tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna " \mathcal{I} - eş yakınsak" tır denir (Das vd., 2014). f fonksiyonuna $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin " \mathcal{I} -eş limiti" denir.

İdeal eş yakınsaklığın bu iki tanımı arasındaki tek fark : (ε_n) dizisinin birincisinde klasik anlamda sıfıra yakınsak, diğerinde ise sıfıra \mathcal{I} -yakınsak olmasıdır. Dolayısıyla Filipów ve Szuca (2012) tarafından verilen tanım Das vd., (2014) tarafından verilen tanımı kapsar.

Filipów ve Staniszewski (2014) yukarıdaki iki tanımı genelleyen bir ideal eş yakınsaklık tanımı vermişlerdir.

Tanım 3.2.5 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonların dizisi ve f fonksiyonu bir X kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar olsun. Her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna " $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - eş yakınsak" tır denir ve kısaca $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ şeklinde gösterilir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Yukarıdaki tanımda $\mathcal{I} = \mathcal{J} = Fin$ alınırsa, Császár ve Laczkovich (1975) tarafından verilen eş yakınsaklık tanımı elde edilir ve $(f_n) \xrightarrow{(Fin, Fin)-e} f$ yerine $(f_n) \xrightarrow{e} f$ yazılır.

Tanım 3.2.5 te verilen ideal eş yakınsaklık tanımına göre Das vd. (2014) nin ideal eş yakınsaklık tanımı $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ -eş yakınsaklığa ve Filipów ve Szuca (2012) nin ideal eş yakınsaklık tanımı (\mathcal{I}, Fin) -eş yakınsaklığa denktir.

3.3. Asimetrik Metrik Uzayların Topolojisi

Metrik uzayların bir genellemesi olan asimetrik metrik uzaylar, metrik uzaylardaki simetri özelliğinden yoksundur. Bu bölümde, asimetrik metrik uzayların bazı temel özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.3.1 X bir küme olsun.

- (i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (ii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna asimetrik metrik ve (X, d) ikilisine "asimetrik metrik uzay" denir (Cobzaş, 2013). Asimetrik metrik uzaylarda doğal olarak iki farklı topoloji ortaya çıkmıştır. İleri ve geri topoloji olmak üzere adlandırılan bu iki topolojiden dolayı bu tip uzaylar "bitopolojik uzaylar" olarak ifade edilmiştir (Kelly, 1963).

Tanım 3.3.2 τ_+ "ileri topolojisi", $x \in X$, $\varepsilon > 0$ için

$$B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

ileri açık yuvarlar ile üretilen bir topolojidir.

Benzer şekilde τ_- "geri topolojisi", $x \in X$, $\varepsilon > 0$ için

$$B^-(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

geri açık yuvarlar ile üretilen bir topolojidir (Collins ve Zimmer, 2007).

Asimetrik metrik uzaylarda bir dizinin yakınsaklığı kavramı Collins ve Zimmer (2007) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.3 (X, d) asimetrik metrik uzayında, bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $x_0 \in X$ e "ileri (geri) yakınsak" olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) = 0 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0)$$

olmasıdır.

İleri yakınsaklık ve geri yakınsaklık sırasıyla, kısaca, $x_n \xrightarrow{f} x_0$ ve $x_n \xrightarrow{b} x_0$ şeklinde gösterilir (Collins ve Zimmer, 2007).

Yardımcı Teorem 3.3.4 (X, d) asimetrik metrik uzayında, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x_0 \in X$ e ileri yakınsak ve $y_0 \in X$ e geri yakınsak ise $x_0 = y_0$ dır (Collins ve Zimmer, 2007).

Sonuç 3.3.5 Eğer bir dizinin ileri yakınsaklığı geri yakınsaklığını gerektiriyorsa ileri limit tektir (Collins ve Zimmer, 2007).

Yardımcı Teorem 3.3.6 Kabul edelim ki, $c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(y, x) \leq c(x, y) d(x, y)$$

ifadesi

$$\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0 \ni y \in B^+(x, \varepsilon) \Rightarrow c(x, y) \leq C(x)$$

kısıtını sağlayacak şekilde x e bağlı herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda, ileri limitlerin varlığı geri limitlerin varlığını gerektirir ve böylece limitler tektir (Collins ve Zimmer, 2007).

Örnek 3.3.7 $\alpha > 0$ olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise} \\ \alpha(x - y), & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetric metriği $C := \max \left\{ \alpha, \frac{1}{\alpha} \right\}$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(y, x) \leq C d(x, y)$ ifadesini sağlar (Collins ve Zimmer, 2007). Bu durumu görmek için (i) $y \geq x$ ise: $d(y, x) = \alpha(y - x) \leq C(y - x)$ elde edilir. Böylece $\alpha \leq C$ bulunur. (ii) $y < x$ ise: $d(y, x) = x - y \leq C \alpha(x - y)$ elde edilir. Böylece $\frac{1}{\alpha} \leq C$ bulunur. (i) ve (ii) den elde edilen sonuçlara göre her $x, y \in \mathbb{R}$ için $C := \max \left\{ \alpha, \frac{1}{\alpha} \right\}$ dir.

Aşağıdaki örnekte C nin x e bağlı olduğu açıkça görülecektir.

Örnek 3.3.8

$$d(x, y) = \begin{cases} e^y - e^x, & y \geq x \text{ ise} \\ e^{-y} - e^{-x}, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir asimetric metriktir. τ_+ ve τ_- , \mathbb{R} üzerindeki alışılmış topolojilerdir.

Yardımcı Teorem 3.3.6 daki kabulün, $C(x) := \max \{e^x(e^x + \varepsilon), e^{-x}(e^{-x} + \varepsilon)\}$ alınarak sağlandığını görmek kolaydır (Collins ve Zimmer, 2007).

Öncelikle, $d(y, x)$ metriğini yazalım:

$$d(y, x) = \begin{cases} e^x - e^y, & x \geq y \text{ ise} \\ e^{-x} - e^{-y}, & x < y \text{ ise} \end{cases}$$

i) $y \geq x$ ise $d(y, x) \leq C d(x, y)$ için $e^{-x} - e^{-y} \leq C (e^y - e^x)$ elde ederiz. Buradan $e^{-x} e^{-y} \leq C$ olur. Burada C nin ne olduğunu bulmak için y yerine kendisinden küçük veya eşit olan x i yazalım:

$$e^{-x} e^{-y} \leq e^{-x} e^{-x} < e^{-x} (e^{-x} + \varepsilon)$$

olur. Bu durumda, $C = e^{-x} (e^{-x} + \varepsilon)$ olarak seçilebilir.

ii) $y < x$ ise $d(y, x) \leq C d(x, y)$ için $e^x - e^y \leq C (e^{-y} - e^{-x})$ elde ederiz. Buradan $e^x e^y \leq C$ burada sadece x e bağlı olan C nin ne olduğunu bulmak için y yerine kendisinden daha büyük olan x i yazarsak:

$$e^x e^y < e^x e^x < e^x (e^x + \varepsilon)$$

olur. Bu durumda, $C = e^x (e^x + \varepsilon)$ olarak seçilebilir.

Şimdi, ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmediği bir metrik örneği verelim. Bu metrik Sorgenfrey asimetrik metriği olarak bilinir.

Örnek 3.3.9

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetrik metriğini alalım. Burada τ_+ , \mathbb{R} üzerindeki alt limit topolojisi ve τ_- , \mathbb{R} üzerindeki üst limit topolojisidir yani $\varepsilon \leq 1$ için

$$B^+(x, \varepsilon) = [x, x + \varepsilon)$$

ve

$$B^-(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x]$$

şeklindedir. Bu metriğe göre, sabit $x \in \mathbb{R}$ için $x_k = x (1 + \frac{1}{k})$ şeklinde tanımlanan dizi, ileri yakınsak fakat geri yakınsak olmayan bir dizidir. Gerçekten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + \frac{x}{n} - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

olduğundan, dizi $x \in \mathbb{R}$ ye ileri yakınsaktır. Ancak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

olduğundan, dizi $x \in \mathbb{R}$ ye geri yakınsak değildir. Böylece bu metrikte ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez (Collins ve Zimmer, 2007).

Sıradaki örnek Yardımcı Teorem 3.3.6 nın tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.3.10 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ metriği $x \neq 0$ için $d(x, 0) = \frac{1}{|x|}$ ve $d(0, x) = \frac{1}{|x|^2}$ olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, 0) + d(0, y), & y \neq x \text{ ise} \\ 0, & y = x \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilsin.

Sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer bir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $x_k \xrightarrow{f} x$ oluyorsa $k \geq N$ için $x_k = x$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $x_k \xrightarrow{b} x$ dır. Benzer şekilde $x = 0$ ise $|x_k| \longrightarrow \infty$ iken $x_k \xrightarrow{f} x$ e yakınsadığında da $x_k \xrightarrow{b} x$ e yakınsar. Böylece ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirir. $x = 0$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda $B^+(0, \varepsilon) = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^n : |y| > \sqrt{1/\varepsilon}\}$ olduğundan $y \in B^+(0, \varepsilon)$ ise $|y|$ yukarıdan sınırlı değildir ve

$$\frac{d(y, 0)}{d(0, y)} = \frac{\frac{1}{|y|}}{\frac{1}{|y|^2}} = |y|$$

Böylece her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $d(y, x) \leq c(x, y) d(x, y)$ kısıtını sağlayan herhangi bir c fonksiyonu, 0 m herhangi bir ileri yuvarında sınırlı değildir (Collins ve Zimmer, 2007).

Asimetrik metrik uzaylarda, dört çeşit süreklilik tanımı vardır.

Tanım 3.3.11 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$y \in B^+(x, \delta) \implies f(y) \in B^+(f(x), \varepsilon) \quad (f(y) \in B^-(f(x), \varepsilon))$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcutsa f fonksiyonu $x \in X$ de " $ff - süreklili$ ($fb - süreklili$)" dir denir (Collins ve Zimmer, 2007). Benzer şekilde $bb - süreklilik$ ve $bf - süreklilik$ tanımları da verilebilir.

Tanım 3.3.12 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun $x \in X$ de " $ff - süreklili$ " olabilmesi için gerek ve yeter koşul $x_n \xrightarrow{f} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{f} f(x)$ olmasıdır (Collins ve Zimmer, 2007).

Diğer üç tip süreklilik tanımı da benzer şekilde ifade edilir.

Fonksiyon dizileri ile ilgili çalışmalarda eşsüreklilik kavramının önemli bir yeri vardır. Aşağıda asimetrik metrik uzaylarda eşsüreklilik tanımı verilecektir. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar ve $\mathcal{G} = \{f : f : X \longrightarrow Y\}$ fonksiyonların kümesi olsun.

Tanım 3.3.13 Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in \mathcal{G}$ için $d_X(x, y) < \delta$ iken $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ($d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$) olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa \mathcal{G} kümesi $x \in X$ noktasında "ileri eşsüreklili (geri eşsüreklili)" dir denir (Colins ve Zimmer, 2007). Eğer \mathcal{G} ailesi her $x \in X$ için ileri eşsüreklili (geri eşsüreklili) ise \mathcal{G} ailesi X üzerinde ileri eşsüreklili (geri eşsüreklili) dir.

Aşağıda tanımı verilecek olan İleri (geri) Cauchy dizileri "sol (sağ) K-Cauchy dizileri" olarak da adlandırılır (Reilly vd., 1982; Kelly, 1963).

Tanım 3.3.14 (X, d) bir asimetrik metrik uzay ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $m \geq n \geq N$ için

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (d(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcutsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine "ileri (geri) Cauchy dizisi" denir (Colins ve Zimmer, 2007).

3.4. Asimetrik Metrik Uzaylarda İdeal Yakınsaklık

Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda diziler için ideal yakınsaklık kavramı verilecektir.

Tanım 3.4.1 \mathcal{I} bir ideal ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gerçel sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I})$$

oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in \mathbb{R}$ ye "ileri (geri) ideal yakınsak" tır (kısaca " $f\mathcal{I}(b\mathcal{I})$ -yakınsak" tır) denir ve $(x_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}} x$ ($(x_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}} x$) şeklinde gösterilir (Das vd., 2013).

Tanım 3.4.2 \mathcal{I} bir ideal ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ var olacak şekilde $(x_n)_{n \in M}$ alt dizisi x e klasik anlamda ileri (geri) yakınsak oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x e " $f\mathcal{I}^*(b\mathcal{I}^*)$ -yakınsak" tır denir (Das vd. , 2013).

3.5. Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin Yakınsaklığı

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin yakınsaklığı ile ilgili bazı kavramlardan bahsedilecektir. X ten Y ye fonksiyonların uzayı Y^X ve X ten Y ye tüm f –süreklili fonksiyonların kümesi $C(X, Y)$ olmak üzere Y^X üzerindeki düzgün metrik $\bar{\rho}(f, g) := \sup \{\bar{d}(f(x), g(x)) : x \in X\}$ ile verilir. Burada $\bar{d}(x, y) := \min \{d(x, y), 1\}$ dir.

Tanım 3.5.1 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna "ileri (geri) noktasal yakınsak" olması için gerek ve yeter koşul her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olacak şekilde $\forall n \geq n_0$ için

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$$

olmasıdır. Kısaca $(f_n) \xrightarrow{f(b)-p} f$ şeklinde gösterilir (Toyganözü, 2015).

Bu şu şekilde formülize edilebilir:

$$(\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \quad d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$$

Tanım 3.5.2 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olsun. Eğer her bir $x \in X$, her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in M$ için

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$$

olacak şekilde istatistiksel yoğun bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcutsa yani $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ise $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x \in X$ te f fonksiyonuna "ileri (geri) istatistiksel (kısaca st) noktasal yakınsak" tır denir. Kısaca $(f_n) \xrightarrow{f(b)-st-p} f$ şeklinde gösterilir (Toyganözü, 2015).

Bu şu şekilde formülize edilebilir:

$$(\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M \ni \delta(M) = 1) (\forall n \in M) \quad d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \\ (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Ve Düzgün Yakınsaklığı İçin Bazı Sonuçlar

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar ve bir Cauchy kriteri verilecektir.

İlk olarak, Bölüm 3.5 te asimetrik metrik uzaylarda verilen noktasal yakınsaklık kavramı ile ilgili ileri noktasal yakınsak olan ancak geri noktasal yakınsak olmayan bir fonksiyon dizisi örneği verilecektir.

Örnek 4.1.1 $X = Y = \mathbb{R}^+$ üzerinde

$$d_Y(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

asimetrik metriği verilsin. $f_n : X \rightarrow Y$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

ile tanımlansın. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin $f(x) = 0$ fonksiyonuna ileri noktasal yakınsak olduğunu gösterelim. $f(x) = 0$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \frac{x}{n}$ olduğundan $d_Y(f(x), f_n(x)) = \frac{x}{n}$ dir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(x), f_n(x)) = 0$$

dır. Yani $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna ileri noktasal yakınsar. Şimdi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin $f(x) = 0$ fonksiyonuna geri noktasal yakınsaklığını inceleyelim. Verilen metriğe göre $d_Y(f_n(x), f(x)) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f_n(x), f(x)) = 1 \neq 0$$

dır. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna geri noktasal yakınsak değildir.

Tanım 4.1.2 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X üzerinde tanımlı olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna "ileri (geri) düzgün yakınsak" olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olmasıdır. Kısaca $(f_n) \xrightarrow{f(b)-u} f$ şeklinde gösterilir. Bu şöyle formülize edilebilir:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon)$$

Metrik uzaylarda olduğu gibi düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.1.3 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X üzerinde tanımlı olsun. Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri (geri) düzgün yakınsak ise ileri (geri) noktasal yakınsaktır. Yani,

$$(f_n) \xrightarrow{f(b)-u} f \implies (f_n) \xrightarrow{f(b)-p} f$$

tir.

Teorem 4.1.4 Y^X üzerindeki bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $f \in Y^X$ fonksiyonuna ileri (geri) düzgün yakınsak ve $g \in Y^X$ fonksiyonuna geri (ileri) düzgün yakınsak ise $f = g$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_1$ için $\bar{\rho}(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Aynı zamanda $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_2$ için $\bar{\rho}(f_n, g) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. O zaman $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, $\bar{\rho}(f, g) \leq \bar{\rho}(f, f_n) + \bar{\rho}(f_n, g) < \varepsilon$. ε keyfi olduğundan $\bar{\rho}(f, g) = 0$ o halde $\forall x \in X$ için $f = g$ dir. ■

Tanım 4.1.5 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi Y^X üzerinde tanımlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $m \geq n \geq N$ için

$$\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_m, f_n) < \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcut oluyorsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine X üzerinde "ileri (geri) düzgün Cauchy dizisi" denir.

Tanım 4.1.6 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X üzerinde tanımlı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in M$ için

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon)$$

olacak şekilde istatistiksel yoğun $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcutsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x \in X$ te f fonksiyonuna "ileri (geri) istatistiksel düzgün yakınsak" tır denir. Kısaca $(f_n) \xrightarrow{f(b)-st-u} f$ şeklinde gösterilir. Bu şöyle formülize edilebilir:

$$(\forall \varepsilon > 0) \exists M \ni \delta(M) = 1 (\forall n \in M) \bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon (\bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon)$$

Asimetrik metrik uzaylarda yukarıda verilen tanımı aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

$$(f_n) \xrightarrow{f-st-u} f \iff \sup_{x \in X} \{\bar{d}(f(x), f_n(x))\} \xrightarrow{f-st-p} 0$$

ve

$$(f_n) \xrightarrow{b-st-u} f \iff \sup_{x \in X} \{\bar{d}(f_n(x), f(x))\} \xrightarrow{b-st-p} 0$$

Metrik uzaylarda olduğu gibi asimetrik metrik uzaylarda da fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklıkları klasik anlamdaki yakınsaklıklarından daha geneldir. Metrik uzaylarda fonksiyon dizileri için verilen bazı sonuçlar aşağıdaki gibi asimetrik metrik uzaylar için de verilebilir.

Sonuç 4.1.7 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X üzerinde tanımlı olsun.

(1) Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri (geri) noktasal yakınsak ise ileri (geri) st-noktasal yakınsaktır. Yani,

$$(f_n) \xrightarrow{f(b)-p} f \implies (f_n) \xrightarrow{f(b)-st-p} f$$

(2) Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri (geri) düzgün yakınsak ise ileri (geri) st-düzgün yakınsaktır. Yani,

$$(f_n) \xrightarrow{f(b)-u} f \implies (f_n) \xrightarrow{f(b)-st-u} f$$

Sonuç 4.1.8 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X üzerinde tanımlı olsun.

$$(f_n) \xrightarrow{f(b)-st-u} f \implies (f_n) \xrightarrow{f(b)-st-p} f$$

Aşağıdaki örnek Sonuç 4.1.7 (2) ifadesinin tersinin metrik uzaylarda olduğu gibi asimetrik metrik uzaylarda genel olarak doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.9 $X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

asimetrik metriği verilsin. $f_n : X \longrightarrow Y$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x, & n = k^2 \text{ ise} \\ \frac{x}{n}, & n \neq k^2 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin $f(x) = 0$ fonksiyonuna ileri istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim. $n = 1, 4, 9, \dots$ için $f_n(x) = 2x$ olduğundan $d(f(x), f_n(x)) = 2x$ ve asimetrik metriğe göre $n = 2, 3, 5, \dots$ için $f_n(x) = \frac{x}{n}$ olduğundan $d(f(x), f_n(x)) = \frac{x}{n}$ dir. Yani her $\varepsilon > 0$ için ve doğal sayılar kümesinde istatistiksel yoğun $M = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ve } k \in \mathbb{N}, n \neq k^2\}$ kümesinden seçilen her n için

$$\sup_{x \in X} \{\bar{d}(f(x), f_n(x))\} = \sup_{x \in X} \frac{x}{n}$$

olduğundan $(n \longrightarrow \infty)$ için limiti 0 dır. Dolayısıyla $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna ileri istatistiksel yakınsaktır. Ayrıca Sonuç 4.1.8 den dolayı ileri istatistiksel noktasal yakınsaktır. Fakat açıkça görüyoruz ki ileri istatistiksel yakınsamaz. Geri istatistiksel yakınsaklığı inceleyelim:

$$\sup_{x \in X} \{\bar{d}(f_n(x), f(x))\} = 1$$

dir. Bu durumda $n \longrightarrow \infty$ için limiti 1 dir. $1 \neq 0$ olduğundan geri istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 4.1.10 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzay ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ olsun. Y de ileri istatistiksel yakınsaklık, geri istatistiksel yakınsaklığı gerektirsin. Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna ileri istatistiksel yakınsak ise bu durumda f fonksiyonu da $x_0 \in X$ te f -süreklidir.

İspat. $x \in X$ te $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in M$ için

$$\bar{p}(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde istatistiksel yoğun bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur. Y de ileri düzgün istatistiksel yakınsaklık, geri düzgün istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden aynı zamanda her $n \in M$ için

$$\bar{\rho}(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

de yazılabilir. Sonuç 4.1.8. den $\forall n_0 \in M$ için

$$d_Y(f(x), f_{n_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } d_Y(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

elde edilir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için f_n , X üzerinde ff – sürekli olduğundan $n_0 \in M$ olmak üzere f_{n_0} fonksiyonu da X te ff –sürekli olur. Dolayısıyla bir $\eta > 0$ mevcuttur öyleki $d_X(x_0, x) < \eta$ olduğunda,

$$d_Y(f_{n_0}(x_0), f_{n_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Böylece $d_X(x_0, x) < \eta$ ise

$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq d_Y(f(x_0), f_{n_0}(x_0)) + d_Y(f_{n_0}(x_0), f_{n_0}(x)) + d_Y(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon$$

elde ederiz. Bundan dolayı, f fonksiyonu $x_0 \in X$ te ff –süreklidir. ■

Sonuç 4.1.11 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzay ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ olsun. Y de ileri düzgün istatistiksel yakınsaklık, geri düzgün istatistiksel yakınsaklığı gerektirsin. Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna $D \subset X$ üzerinde ileri düzgün istatistiksel yakınsak ise bu durumda f fonksiyonu $D \subset X$ üzerinde ff –süreklidir.

Tanım 4.1.12 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi Y^X üzerinde tanımlı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve herhangi bir $m(\varepsilon) \in M$ için

$$\bar{\rho}(f_{m(\varepsilon)}, f_n) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_n, f_{m(\varepsilon)}) < \varepsilon)$$

olacak şekilde istatistiksel yoğun bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcutsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisine "ileri (geri) istatistiksel düzgün Cauchy dizisi" denir.

Teorem 4.1.13 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. Y de ileri düzgün istatistiksel yakınsaklık, geri düzgün istatistiksel yakınsaklığı gerektirsin.

Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y^X$ fonksiyon dizisi ileri düzgün istatistiksel yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ ve herhangi bir $m(\varepsilon) \in M$ için

$$\bar{\rho}(f_{m(\varepsilon)}, f_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde istatistiksel yoğun bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri düzgün istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in M$ için

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde istatistiksel yoğun bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur. Y de ileri düzgün istatistiksel yakınsaklık, geri düzgün istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in M$ için

$$\bar{\rho}(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $m(\varepsilon) \in M$ için

$$\bar{\rho}(f_{m(\varepsilon)}, f_n) \leq \bar{\rho}(f_{m(\varepsilon)}, f) + \bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ileri istatistiksel düzgün Cauchy dizisidir. ■

Metrik uzaylarda Y tam ise Teorem 4.1.13 ün tersi de doğrudur. Yani st- düzgün Cauchy dizisi st-düzgün yakınsaktır. Ancak, asimetric metrik uzaylarda bu doğru olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.1.14 $X = Y = \mathbb{R}_0^+$ ve Y^X üzerinde,

$$d(x, y) = \begin{cases} e^y - e^x, & y \geq x \text{ ise} \\ x - y, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

asimetric metriği verilsin. \mathbb{P} asal sayılar kümesi olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi

$$f_n : X \longrightarrow Y, x \longmapsto \begin{cases} x + \frac{1}{n}, & n \notin \mathbb{P} \\ 2, & n \in \mathbb{P} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Yani $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = 2$, $f_3(x) = 2$, $f_4(x) = x + \frac{1}{4}$, \dots olsun.

$M = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ ve } m \notin \mathbb{P}\}$ alınırsa, $\delta(\mathbb{P}) = 0$ ve $M = \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ olduğundan $\delta(M) = 1$ olur. Şimdi, $m = m(\varepsilon) \in M$ ve $n \geq m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\bar{\rho}(f_{m(\varepsilon)}, f_n) = x + \frac{1}{m} - (x + \frac{1}{n}) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu yüzden $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir ileri istatistiksel düzgün Cauchy dizisidir. Bu dizi $f(x) = x$ fonksiyonuna ileri istatistiksel noktasal yakınsaktır fakat ileri istatistiksel düzgün yakınsak değildir. Bunun sağlanması için

$$\bar{\rho}(f, f_n) = e^{x+\frac{1}{n}} - e^x = e^x(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$

ifadesinin ε dan küçük kalması gerekir. Bu nedenle her $\varepsilon > 0$ için $n = \frac{1}{\ln\left(\frac{\varepsilon}{e^x} + 1\right)}$ olarak seçilmelidir. Bu ise n nin x e ve ε na bağlı olduğunu gösterir. Yani $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi istatistiksel düzgün yakınsak değildir.

4.2. Asimetrik Metrik Uzaylarda Fonksiyon Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı

Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin ideal yakınsaklığı ile ilgili kavramlar tanımlanarak bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 4.2.1 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzay ve \mathcal{I} bir uygun ideal olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_Y(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}(\{n \in \mathbb{N} : d_Y(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I})$$

oluyorsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna "ileri (geri) ideal noktasal yakınsak" tır denir ve kısaca $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$ ($(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-p} f$) şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.2 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzay ve \mathcal{I} bir uygun ideal olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_Y(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon, \text{ her } x \in X \text{ için}\} \in \mathcal{I}$$

$$\{n \in \mathbb{N} : d_Y(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon, \text{ her } x \in X \text{ için}\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna "ileri (geri) ideal düzgün yakınsak"tır denir ve kısaca $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-u} f$ ($(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-u} f$) şeklinde gösterilir.

$\mathcal{I} = Fin$ alınırsa klasik anlamda noktasal ve düzgün yakınsaklıklar elde edilir. Yani $(f_n) \xrightarrow{fFin} f$ yerine $(f_n) \xrightarrow{f-p} f$ ve $(f_n) \xrightarrow{fFin-u} f$ yerine $(f_n) \xrightarrow{f-u} f$ yazılır.

Klasik anlamda fonksiyon dizileri için noktasal ve düzgün yakınsaklık kavramları ile ilgili olarak verilen bazı sonuçlar aşağıdaki gibi asimetric metrik uzaylarda ideal noktasal ve ideal düzgün yakınsaklık için de verilebilir.

Sonuç 4.2.3 (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzay ve \mathcal{I} bir uygun ideal olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olsun.

(i)

$$(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-u} f \iff \sup_{x \in X} \{\bar{d}(f(x), f_n(x))\} \xrightarrow{\mathcal{I}} 0.$$

$$(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-u} f \iff \sup_{x \in X} \{\bar{d}(f_n(x), f(x))\} \xrightarrow{\mathcal{I}} 0.$$

(ii)

$$(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-u} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$$

$$(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-u} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-p} f$$

Aşağıdaki teoremler ile asimetric metrik uzaylar üzerinde tanımlanmış fonksiyon dizileri için belli koşul altında ileri düzgün \mathcal{I} -yakınsaklığın ff - sürekliliği ve fb - sürekliliği koruduğu söylenebilir.

Teorem 4.2.4 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bir uygun ideal olsun. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olarak verilsin. Y asimetric metrik uzayında ileri \mathcal{I} -yakınsaklık geri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirsin. Eğer bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna ileri düzgün \mathcal{I} yakınsak ise $f \in C(X, Y)$ dir.

İspat. f fonksiyonunun ff -sürekli olduğunu göstereceğiz. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, f fonksiyonuna ileri düzgün \mathcal{I} -yakınsak olduğundan

$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathcal{I}, \forall n \notin M$ ve $\forall x \in X$ için

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$$

yazabiliriz. Buradan, özel olarak $x_0 \in X$ için

$$d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) < \varepsilon/3$$

yazabiliriz. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna ileri düzgün \mathcal{I} yakınsak olduğundan ve Y de ileri \mathcal{I} -yakınsaklık geri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirdiğinden her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $K \in \mathcal{I}$ vardır öyle ki her $n \notin K$ olduğunda,

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$$

olur. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ff -sürekli olduğundan $d(x_0, x) < \delta$ iken

$$d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) < \varepsilon/3$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. \mathcal{I} , uygun ideal olduğundan $M \cup K \notin \mathcal{I}$ dir. Böylece, $\forall n \notin M \cup K$ ve $d(x_0, x) < \delta$ için

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_0), f(x)) &\leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olup, f fonksiyonu ff -sürekli, yani $x_0 \in X$ te $f \in C(X, Y)$ dir. ■

Teorem 4.2.5 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bir uygun ideal olsun. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. Y asimetric metrik uzayında geri \mathcal{I} -yakınsaklık ileri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirsin. Eğer fb -sürekli bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna ileri düzgün \mathcal{I} -yakınsak ise f fonksiyonu fb -sürekli dir.

İspat. Teorem 4.2.4 ün ispatına benzerdir. ■

Eğer Teorem 4.2.4 te ileri \mathcal{I} -yakınsaklığın geri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirmesi koşulu ortadan kaldırılsa, aşağıdaki örnekte de görülebileceği üzere bir ileri sürekli fonksiyon dizisinin ileri düzgün \mathcal{I} -yakınsadığı f fonksiyonu ileri sürekli olmayabilir. Hatta bu limit fonksiyonu tek olmayabilir.

Örnek 4.2.6 $X = [0, 1]$ Öklid metriği ile donatılmış ve $Y \subset \mathbb{R}^2$ kümesi

$$Y := \{(y_1, y_2) : y_1 = 0 \text{ ve } y_2 \in (0, 1]\} \cup \{(-1, 0)\} \cup \{(1, 0)\}$$

olsun. Y üzerindeki asimetrik metrik Sorgenfrey metriği olarak seçilsin ve $y_2 > 0$ olmak üzere (y_1, y_2) için

$$d((y_1, y_2), (\mp 1, 0)) = d((\mp 1, 0), (\mp 1, 0)) = 1, \quad d((\mp 1, 0), (y_1, y_2)) = y_2.$$

olacak şekilde genişletilsin. Y bir asimetrik uzay ve Hausdorff tur.

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \longrightarrow \begin{cases} (-1, 0) & x = 0 \text{ ise} \\ (1, 0) & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun.

$$f_n : X \longrightarrow Y, \quad x \longrightarrow \begin{cases} (1, 0) & n = k^2 \text{ ise} \\ (0, \frac{1}{n}) & n \neq k^2 \text{ ise} \end{cases}$$

$n = k^2$ için kümeye K dersek $K \in \mathcal{I}$ dır. Eğer $n \notin K$ alırsak

$$d_Y(f(x), f_n(x)) = d_Y((\mp 1, 0), (0, \frac{1}{n})) = y_2 = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Bu örnekte $d_Y((0, \frac{1}{n}), (\mp 1, 0)) = 1$ olduğundan Y üzerindeki bu metrikte ileri \mathcal{I} -yakınsaklık geri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirmez. Böylece $f \notin C(X, Y)$ dir.

Ayrıca bu limit fonksiyonu tek değildir, bu örnek için

$$\tilde{f} : X \longrightarrow Y, \quad x \longrightarrow (1, 0)$$

sürekli olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi \tilde{f} fonksiyonuna ileri düzgün \mathcal{I} -yakınsar.

Aşağıdaki teoremden asimetrik metrik uzaylarda belli koşul altında, Y^X üzerinde alınan ileri eş sürekli $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin ileri ideal noktasal yakınsadığı f fonksiyonunun ff - sürekli olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.2.7 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bir uygun ideal, (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere Y asimetrik metrik uzayında ileri \mathcal{I} -yakınsaklık geri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi Y^X üzerinde ileri eş sürekli ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olmak üzere $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$ ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde ff - sürekli dir.

İspat. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ileri eş sürekliliğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x \in B^+(x_0, \delta)$ için $d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Ayrıca $x \in B^+(x_0, \delta)$ için $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$ olduğundan,

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} : d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) \geq \varepsilon/3\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$D_2 = \{n \in \mathbb{N} : d_Y(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon/3\} \in \mathcal{I}$$

elde ederiz. Ayrıca $D = D_1 \cup D_2 \in \mathcal{I}$ dir. Dolayısıyla $n \notin D$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ için (Y, d_Y) asimetric metrik uzayında ileri \mathcal{I} -yakınsaklık geri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirdiğinden

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$$

elde ederiz. Bu durumda $x \in B^+(x_0, \delta)$ ve $n \notin D$ için

$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise f fonksiyonunun f -sürekliliğini verir. ■

Teorem 4.2.8 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bir uygun ideal, (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olmak üzere Y asimetric metrik uzayında geri \mathcal{I} -yakınsaklık ileri \mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi Y^X üzerinde geri eş sürekliliği ve f fonksiyonu Y^X te tanımlı olmak üzere $(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-p} f$ ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde f -süreklidir.

İspat. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi geri eş sürekliliğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x \in B^+(x_0, \delta)$ için $d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $(f_n) \xrightarrow{b\mathcal{I}-p} f$ olduğundan,

$$D' = \{n \in \mathbb{N} : d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) \geq \varepsilon/3\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$D'' = \{n \in \mathbb{N} : d_Y(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon/3\} \in \mathcal{I}$$

elde ederiz. Ayrıca $D^* = D' \cup D'' \in \mathcal{I}$ dir ve $D^* \neq \mathbb{N}$ olduğundan $n \notin D^*$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ için (Y, d_Y) asimetric metrik uzayında geri \mathcal{I} -yakınsaklık ileri

\mathcal{I} -yakınsaklığı gerektirdiğinden

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$$

elde ederiz. $x \in B^+(x_0, \delta)$ ve $n \notin D^*$ için

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

elde ederiz. O halde f fonksiyonu fb - süreklidir. ■

4.3. Asimetrik Metrik Uzaylarda Eş Yakınsaklık

Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin eş yakınsaklığı ile ilgili kavramlar tanımlanarak bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 4.3.1 (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) < \varepsilon_n \quad (d_{\mathbb{R}}(f_n(x), f(x)) < \varepsilon_n)$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların $\varepsilon_n \xrightarrow{f} 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna " ff -eş (bf -eş) yakınsak" tır denir ve $(f_n) \xrightarrow{ff-e} f$ ($(f_n) \xrightarrow{bf-e} f$) şeklinde gösterilir.

Bu tanımın benzeri, diğer iki tip eş yakınsaklık (fb -eş yakınsaklık ve bb -eş yakınsaklık) için de verilebilir.

Metrik uzaylarda olduğu gibi asimetrik metrik uzaylarda da aşağıdaki gerektirmeler verilebilir.

$$(f_n) \xrightarrow{f-u} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{ff-e} f$$

$$(f_n) \xrightarrow{ff-e} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{f-p} f.$$

Tanım 4.3.2 (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetric metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. \mathcal{I} bir ideal ve her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_Y(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I} \quad (\{n \in \mathbb{N} : d_Y(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I})$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $\varepsilon_n \xrightarrow{f} 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna " f - \mathcal{I} -eş (f - \mathcal{I} -eş) yakınsak"tır denir. $(f_n) \xrightarrow{f, \mathcal{I}-e} f$ $((f_n) \xrightarrow{b, \mathcal{I}-e} f)$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımın benzeri, diğer iki tip eş yakınsaklık (f - \mathcal{I} -eş yakınsaklık ve b - \mathcal{I} -eş yakınsaklık) için de verilebilir.

Tanım 4.3.3 (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetric metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. \mathcal{I} bir ideal ve her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I} \quad (\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I})$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f, \mathcal{I}} 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna " f - \mathcal{I} -eş (f - \mathcal{I} -eş) yakınsak"tır denir. $(f_n) \xrightarrow{f, \mathcal{I}-e} f$ $((f_n) \xrightarrow{b, \mathcal{I}-e} f)$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımın benzeri, diğer iki tip eş yakınsaklık (f - \mathcal{I} -eş yakınsaklık ve b - \mathcal{I} -eş yakınsaklık) için de verilebilir.

İdeal eş yakınsaklığın bu iki tanımı arasındaki tek fark : (ε_n) dizisinin birinde klasik anlamda ileri yakınsak, diğerinde ise ileri \mathcal{I} -yakınsak olmasıdır. Dolayısıyla Tanım 4.3.3, Tanım 4.3.2 yi kapsar.

Aşağıda asimetric metrik uzaylarda yukarıdaki iki tanımı genelleleyen bir ideal eş yakınsaklık tanımı verilecektir.

Tanım 4.3.4 (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetric metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. \mathcal{I} ile \mathcal{J} birer ideal ve her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I} \quad (\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I})$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{J}} 0$ dizisi varsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna " $ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - eş ($bf(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - eş) yakınsak"tır denir ve $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ $((f_n) \xrightarrow{bf(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f)$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımın benzeri, diğer iki tip eş yakınsaklık ($fb(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - eş yakınsaklık ve $bb(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - eş yakınsaklık) için de verilebilir.

$\mathcal{I} = \mathcal{J} = \mathcal{I}_f$ alınırsa $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_f)-e} f$ elde edilir ve $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_f)-e} f$ in yerine $(f_n) \xrightarrow{ff-e} f$ şeklinde bir gösterim de kullanılabilir.

Teorem 4.3.5 $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{J}_0$ ve $\mathcal{J}_1, \mathbb{N}$ üzerinde tanımlı birer ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzayları verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun.

(a) Eğer $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_1$ ise

$$(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_0, \mathcal{J})-e} f \implies (f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_1, \mathcal{J})-e} f$$

tir.

(b) Eğer $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1$ ise

$$(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J}_0)-e} f \implies (f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J}_1)-e} f$$

tir.

İspat. Tanımdan açıktır. ■

Örnek 4.3.6 $\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_u,$ ve $\mathcal{I}_d, \mathbb{N}$ üzerinde tanımlı birer ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun.

$$(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_u)-e} f \implies (f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_u)-e} f$$

olduğunu gösterelim.

$(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_u)-e} f$ olduğundan her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_f$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}_u} 0$ dizisi vardır. $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_d$ olduğu için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_d$$

yazılabilir. Böylece $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_u)-e} f$ bulunur.

Örnek 4.3.7 $\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_u$, ve $\mathcal{I}_d, \mathbb{N}$ üzerinde tanımlı birer ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun.

$$(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_u)-e} f \implies (f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_d)-e} f$$

olduğunu gösterelim.

$(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_u)-e} f$ olduğundan her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_f$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}_u} 0$ dizisi vardır. $\mathcal{I}_u \subset \mathcal{I}_d$ olduğu için $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}_d} 0$ yazılabilir. Böylece $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}_f, \mathcal{I}_d)-e} f$ dir.

Teorem 4.3.8 \mathcal{I} ve \mathcal{J} , \mathbb{N} üzerinde tanımlı birer ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(a) Her $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ oluyorsa $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I})-e} f$ dir.

(b) $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$

İspat. (a) \implies (b) $M \in \mathcal{J}$ olsun. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in M \text{ ise} \\ 0, & n \notin M \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. O zaman $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ olur. Gerçekten, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varepsilon_n = \begin{cases} n + 1, & n \in M \text{ ise} \\ \frac{1}{n^2 + 1}, & n \notin M \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{J}} 0$ dır ve her $x \in X$ için $\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ dir. Varsayımdan dolayı $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I})-e} f$ elde ederiz. $(\eta_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}} 0$ olsun öyleki her $x \in X$ için $\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$. Bu durumda $N = \{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(0, \eta_n) \geq 1\} \in \mathcal{I}$ ve $M \setminus N \subseteq \{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$ olur. $N \in \mathcal{I}$ ve $(M \setminus N) \in \mathcal{I}$ olduğundan $N \cup (M \setminus N) = (M \cup N) \in \mathcal{I}$ ve $M \subset (M \cup N)$ ise $M \in \mathcal{I}$ dir.

(b) \implies (a) Teorem 4.3.5 (b) den; $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ ise her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{J}} 0$ dizisi vardır, yani her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(0, \varepsilon_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ olacak şekilde $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}} 0$ dizisi vardır. Böylece $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I})-e} f$ olur. ■

Sonuç 4.3.9 \mathcal{I} bir ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonların dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. Eğer $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I}_f)-e} f$ ise bu durumda $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I})-e} f$ olur.

İspat. $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I}_f)-e} f$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f} 0$ dizisi vardır. $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}$ olduğundan $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}} 0$ yazılabileceğinden $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{I})-e} f$ olur. ■

Teorem 4.3.10 \mathcal{I} ve \mathcal{J} , \mathbb{N} üzerinde tanımlı birer ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(a) \mathbb{R}^X te tanımlı her $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi için $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ oluyorsa $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$ dir.

(b) $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$

İspat. (a) \implies (b) $K \in \mathcal{J}$ olsun. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in K \text{ ise} \\ 0, & n \notin K \text{ ise} \end{cases}$$

ve $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ dir. Kabulden, $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$ dir. $x \in X$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olmak üzere, $K = \{n : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ elde edilir.

(b) \implies (a) $(f_n) \xrightarrow{ff(\mathcal{I}, \mathcal{J})-e} f$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $K_X = \{n : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $(\varepsilon_n) \xrightarrow{f\mathcal{J}} 0$ dizisi mevcuttur. $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ alalım. Bu durumda $M_\varepsilon = \{n : d_{\mathbb{R}}(0, \varepsilon_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ dir. $\{n : d_{\mathbb{R}}(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon\} \subseteq K_X \cup M_\varepsilon$ elde edilir ve böylece $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-p} f$ dir. ■

Teorem 4.3.11 \mathcal{I} bir ideal olmak üzere (X, d_X) ve $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ asimetrik metrik uzaylar verilsin. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonların dizisi ve f fonksiyonu \mathbb{R}^X te tanımlı olsun. Eğer $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-u} f$ ise bu durumda $(f_n) \xrightarrow{ff\mathcal{I}-e} f$ olur.

İspat. $(f_n) \xrightarrow{f\mathcal{I}-u} f$ olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sup_{x \in X} \{\bar{d}(f(x), f_n(x))\} \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$ dir.

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in A \text{ ise} \\ \sup_{x \in X} \{\bar{d}(f(x), f_n(x))\} + \frac{1}{n}, & n \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\varepsilon_n \xrightarrow{f\mathcal{I}} 0$ ve bütün $n \notin A$ için $\bar{d}(f(x), f_n(x)) < \varepsilon_n$ olup $(f_n) \xrightarrow{ff\mathcal{I}-e} f$ ifadesini gerektirir. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, özgün olarak, asimetric metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin noktasal, düzgün ve eş yakınsaklık tanımları daha genel olan istatistiksel ve ideal yakınsaklık türlerinde tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Metrik uzaylardaki sonuçtan farklı olarak asimetric metrik uzaylarda bir istatistiksel düzgün Cauchy dizisinin istatistiksel düzgün yakınsak olmayacağı gösterilmiştir. Asimetric metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinin ileri düzgün \mathcal{I} -yakınsaklığının belli koşul altında sürekliliği koruduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bu uzaylarda bir ileri eş sürekli fonksiyonlar dizisinin ileri ideal noktasal yakınsadığı fonksiyonun, belli koşul altında ff -sürekli olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra, Filipów ve Staniszewski nin 2014 yılındaki çalışmalarında metrik uzaylar için tanımlanan $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -eş yakınsaklık kavramı asimetric metrik uzaylarda tanımlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Athanassiadou, E., Boccutto, A., Papanastassiou, N., 2013. Modes of (α) - convergence of sequences of functions. *Comment. Math.* 53(1), 83 – 94.
- Balcerzak, M., Dems, K., Komisarski A., 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions, *J. Math. Anal. Appl.* 328, 715 – 729.
- Chenchiach, I., Rieger, M.O., Zimmer, J., 2009. Gradient flows in asymmetric metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications* 71(11), 5820 – 5834.
- Cobzaş, S., 2013. *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, *Frontiers in Mathematics*, Springer (Basel).
- Collins J., Zimmer J., 2007. An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem, *Topology and its Applications* 154, 2312 – 2322.
- Császár Á., Laczkovich M., 1975. Discrete and equal convergence, *Studia Sci. Math. Hungar.* 10(3 – 4), 463 – 472.
- Császár, Á., Laczkovich, M., 1979. Some remarks on discrete Baire classes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 33(1 – 2), 51 – 70.
- Das P., Dutta S., Pal S.K., 2014. On \mathcal{I} and \mathcal{I}^* -equal convergence and an Egoroff-type theorem, *Mat. Vesnik.* 66(2), 165 – 177.
- Das, P., Chandra, D., 2013. Spaces not distinguishing pointwise and \mathcal{I} -quasinormal convergence, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 54(1), 83 – 96.
- Das, P., Papanastassiou, N., 2003/04. Some types of convergence of sequences of real valued functions, *Real Anal. Exchange.* Vol 29, No 1 pp. 43 – 58.
- Filipów, R., Szuca, P., 2012. Three kinds of convergence and the associated \mathcal{I} -Baire classes, *J. Math. Anal. Appl.* 391(1), 1 – 9.
- Filipów, R., Staniszewski, M., 2014. On ideal equal convergence, *Cent. Eur. J. Math.* 12(6), 896 – 910.
- Freedman, A. R., Sember, I. J., 1981. Densities and summability, *Pacific J. Math.*, 95, 293 – 305.
- Gregoriades, V., Papanastassiou, N., 2008. The notion of exhaustiveness and Ascoli-type theorems. *Topology Appl.* 155(10), 1111 – 1128.
- Hernández-Hernández, F., Hrušák, M., 2007. Cardinal invariants of analytic \mathcal{P} -ideals, *Canad. J. Math.* 59(3), 575 – 595.

- Holá, L., Šalát, T., 1988. Graph convergence, uniform, quasi-uniform and continuous convergence and some characterizations of compactness. *Acta Math. Univ. Comenian.* 54/55, 121 – 132.
- Jech, T., 1997. Set theory. Second edition. *Perspectives in Mathematical Logic.* Springer-Verlag, Berlin.
- Kelly, J.C., 1963. Bitopological spaces. *Proc. London Math. Soc.* 3(13), 71 – 89.
- Kolk, E., 1999. Convergence-preserving function sequences and uniform convergence. *J. Math. Anal. Appl.* 238(2), 599 – 603.
- Komisarski, A. 2008. Pointwise \mathcal{I} -convergence and \mathcal{I} -convergence in measure of sequences of functions. *J. Math. Anal. Appl.* 340 (2), 770 – 779.
- Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczyński, W., 2000/01. \mathcal{I} -convergence, *Real Anal. Exchange.* 26(2), 669 – 685.
- Kuratowski, C., 1966. *Topology Volume 1* PWN, Warszawa.
- Künzi, H.P.A., 1983. A note on sequentially compact quasi-pseudometric spaces. *Monatsh. Math.* 95(3), 219 – 220.
- Mačaj, M., Sleziak, M., 2010/11. $\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$ -convergence, *Real Anal. Exchange.* 36(1), 177 – 193.
- Mainik, A., Mielke, A., 2005. Existence results for energetic models for rate-independent systems. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 22(1), 73 – 99.
- Mennucci, A., 2004. On asymmetric distances, Technical report, Scuola Normale Superiore, Pisa.
- Mielke, A., Roubíček, T., 2003. A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys. *Multiscale Model. Simul.* 1(4), 571 – 597.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. *An Introduction to the Theory of Numbers.* John Wiley&Sons, 529 s., New York.
- Patty, C.W., 1967. Bitopological spaces. *Duke Math. J.* 34, 387 – 391.
- Reilly, I.L., Subrahmanyam, P.V., Vamanamurthy, M.K., 1982. Cauchy sequences in quasipseudometric spaces. *Monatsh. Math.* 93(2), 127 – 140.
- Rieger, M.O., Zimmer, J., 2005. Young measure flow as a model for damage, Preprint 11/05, Bath Institute for Complex Systems, Bath, UK.

Šerstnev, A. N., 1963. On the notion of a random normed space. Doklady Akademii Nauk SSSR, 149(2), 280 – 283.

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloquium Mathematicum, 2, 73 – 74.

Todorčević, S., 1996. Analytic gaps, Fund. Math. 150(1), 55 – 56.

Toyganözü, Z. H., Pehlivan, S., 2015. Some results on exhaustiveness in asymmetric metric spaces. Filomat 29(1), 183 – 192.

Toyganözü, Z. H., 2015. Asimetrik metrik uzaylarda kompaklık, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 45s, Isparta.

Wilczyński, W., 2003. Density topology and pointwise convergence. Appl. Gen. Topol. 4(2), 509 – 512.

Wilson, W. A., 1931. On quasi-metric spaces, Amer.J.Math. 53(3), 675 – 684.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Harun ARÇİN
Doğum Yeri ve Yılı : Isparta, 1983
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : harunarcin@hotmail.com
Çalıştığı kurumlar : MEB, Matematik Öğretmeni
2008-2009: Konya Bozkır EML
2009-2013: Sinop Durağan Lisesi
2013-2018: Ağlasun Ş. B. Yeşil ÇPAL
2018- : Çeltikçi ÇPAL



Eğitim Durumu

Lise : Antalya Aksu Anadolu Öğretmen Lisesi, 2001
Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, 2008