



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KIL FOLİKÜLÜ ŞEKLİNİN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM
YÖNTEMİ KULLANILARAK TASARLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Shireen Yonis Muhyaldeen KURDI

DANIŞMAN

Doç. Dr. Halis BİLGİL

AKSARAY, 2018

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342633 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Shireen Younis Muhyaldeen KURDI", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "KİL FOLİKÜLÜ ŞEKLİNİN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM YÖNTEMİ KULLANILARAK TASARLANMASI" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN

Trakya Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE

Aksaray Üniversitesi

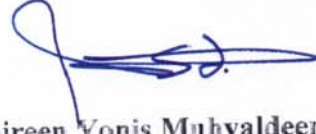
Teslim Tarihi: 29.12.2017

Savunma Tarihi: 25.01.2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanımında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

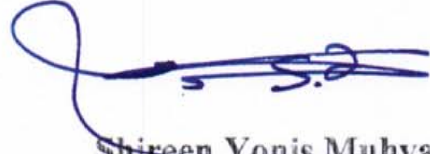


Shireen Yonis Muhyaldeen KURDI

TEŐEKKÜR

Türkiye’de eğitim alma fırsatını bana sundukları için Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitimim boyunca bana yardım eden Fen Bilimleri Enstitüsü personeline en derin Őükranlarımı sunarım.

Çalışmalarında bana devamlı destek olduğu için danışmanım Matematik Bölüm Başkanı Doç. Dr. Halis BİLGİL’e ve Matematik bölümündeki tüm öğretim üyelerine destek ve yardımlarından ötürü Őükranlarımı sunarım.



Shireen Yonis Muhyaldeen KURDI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Kıl Folikülünün Kısa Tarihçesi	1
1.2 Kısmi Diferansiyel Denklem	5
1.3 Fourier dizisi	7
1.4 Lagrange polinomu	7
1.5 Tezin Amacı	8
1.6 Tezin Planı	8
2. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM YÖNTEMİ (KDD)	9
2.1 KDD Yöntemine Giriş	9
2.2 Uygun Çözüm	11
2.3 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi	12
2.4 Kısmi Diferansiyel Denklem Yöntemine Örnekler.....	16
3. KIL FOLİKÜLÜNÜN TASARLANMASI	25
3.1 Kısmi Diferansiyel Denklem Yöntemi Kullanılarak Kıl Folikülünün Parametrik Olarak Tasarlanması	25
3.2 Kıl Folikülü Fonksiyonu	31
4.SONUÇ	35
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	40

ÖZET

KIL FOLİKÜLÜ ŞEKLİNİN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM YÖNTEMİ KULLANILARAK TASARLANMASI

Bu tez çalışmasında kıl kökünün şekil modellemesi için bir teknik sunulmaktadır. Bu şekil çizme tekniği, dört periyodik sınır koşullarının bir kümesine ve bir eliptik kısmi diferansiyel denklemin (KDD) kullanımına dayanmaktadır. Kısmi türevli denklemler kullanarak yapılan geometrik modelleme, düzgün yapısı nedeniyle, sınır koşullarına sahip kısmi diferansiyel denklemlerin ayrılabilir çözümleri analitik olarak çözüldü. Seçilen her sınır koşulu bir sınır eğrisi oluşturur ve bu işlem, MATLAB programı kullanılarak, kıl follükülünün üretilen KDD tabanlı görünüm şekli elde edildi. Kıl follükülünün yarıçapı ve yüksekliği ile ilgili veriler ve daha sonra, elde ettiğimiz iki denklemin kıl follükülünün tasarımında doğru yapısal özelliklere sahip olduğunu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Kısmi Diferansiyel Denklem Yöntemi, Kıl Kökü, Analitik Çözüm, Modellerme

ABSTRACT

DESIGNING THE SHAPE OF HAIR FOLLICLE USING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION METHOD

In this thesis the work presents a technique for shape modeling of hair follicle. The technique of sketching this shape is based on a set of four periodic boundary conditions and on the use of an elliptic partial differential equation (PDE). Geometric modeling using partial differential equations has been acknowledged because of its smooth nature, partial differential equations with boundary conditions are solved by separation of variables analytically. Every chosen boundary condition creates a boundary curve and this process can be obtained by utilizing MATLAB, the shape of the generated PDE-based representation of hair follicle, is designed. The data, regarding the radius and height from the hair follicle and we will see later that the two equations we obtained has a correct structural properties in designing hair follicle.

Keywords: Partial Differential Equation Method, Hair Follicle, Analytical Solition, Modelling

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Kıl Döngüsünün Gizemi.....	4
Şekil 1.2: Büyüme fazı (anajen)	4
Şekil 1.3: Bulge aktivasyonu hipotezi ve Şekil (B) Kıl folikülü ön belirleme hipotezi.....	5
Şekil 2.1: Kısmi diferansiyel denklem yüzey	8
Şekil 2.2: Diferansiyel denklem yüzeyi (İki simetrik sınır şartı).....	19
Şekil 2.3: Düşük diferansiyel tanımlaması, koni ve yarım elipsoid birleştirir	21
Şekil 2.4: Saç follikülünün bir parçası.....	22
Şekil 2.5: Birden fazla PDE kullanarak saç folikülü tanımlayınız	22
Şekil 3.1: Kıl Folikülü	25
Şekil 3.2: (a) Üç boyutlu yarıküre. (b) İki boyutlu yarıküre.....	26
Şekil 3.3: Birinci Yamaya Ait Sınır Eğrileri	27
Şekil 3.4: İkinci Yamanın Sınırı	28
Şekil 3.5: (a) Kıl folikülü (b) birinci yama (c) ikinci yama ve sınır eğrileri kombinasyonu (d) saç folikülü.....	29
Şekil 3.6: x, y düzleminde iki kısmi diferansiyel denklemin grafikleri.....	30

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1: Langrange polinomu için noktalar.	30
Çizelge 3.1: İki Diferansiyel Denklem için Kıl Folikülünün Yarıçap ve Yükseklik Verileri.	30



1. GİRİŞ

1.1 Kıl Folikülünün Kısa Tarihçesi

Kıl oluşumu memelilerin derisinde bulunan kıl folikülünden başlar. Kıl oluşumunun dört evresi vardır. Bunlar büyüme (anajen), reset (katajen), duraklama (telojen) ve eksojen evreleridir. Genellikle kılların % 85-90'ı büyüme, %1-2'si katajen ve %10-14'ü ise duraklama evresindedir. Büyüme evresinde kıl ayda yaklaşık bir santimetre büyür çünkü kıl hızlı biçimde bölünmektedir. Saç kılı ise iki ila yedi yıl boyunca büyüme evresinde kalır. Bu süre genetik mekanizmalar tarafından belirlenmektedir. Büyüme evresi tamamlandıktan sonra reset evresi başlar. Bu evre iki ila üç hafta sürmekte ve aktif olarak kıl büyümesi görülmemektedir. Daha sonra kan akışı yoluyla kıl büyümekte ve duraklama evresine girmektedir. Eksojen evresi ise kılın kopma noktasına gelene kadar folikül içerisinde uç noktaya geldiği evredir. Dökülen saçlar tamamen keratinize ve ölüdür. İnsan saçından günde ortalama 50-100 tel saç dökülmektedir ve bu evre yaklaşık üç ay sürmektedir (Panteleyev ve Jahoda, 2001).

Bulge activation hipotezine göre kıl folikülünün gelişiminde yer alan büyüme evresini kontrol eden hücreler mekanizmaları bulunmaktadır. Hipoteze göre, büyüme aşamasındaki aktivasyon iki adımlı bir süreçtir. Birinci aşamada kıl kökleri harekete geçer ve bunun sonucunda meydana gelen şişkinlik (bulge) içerisinde yer alan hücreler çoğalarak dış kök kılıfını oluştururlar. Yükselen kıl folikülü tabakasının oluşumu ise kıl kökü hücrelerinin ve iç kök kılıfının harekete geçmesi ile gerçekleşmektedir. Bulge activation hipotezine göre, büyüme evresinin ilk olayı şişkinlik içerisindeki kök hücrelerin aktivasyonudur. Tüm kıl folikülü tabakalarının ve kıl gövdesinin yukarı doğru büyümesi ile kıl folikülünün aşağı doğru büyümesinin ve iç kök kılıfının kaynağı, şişkinliğin (bulge) içerisindeki hücrelerin çoğalmasındır. Kıl düz bir yapıya sahiptir, ancak sosyal fonksiyonu da bulunmaktadır. Kıl gövdesi, saç kökü içerisindeki canlı hücrelerin bölünerek büyümesi sonucunda ortaya çıkar. Bu hücreler kıl folikülünün de temelini oluştururlar. Bu hücreler kıl büyümesini düzenleyen hormonları sağlayan kan damarları tarafından desteklenirler (Panteleyev ve Jahoda, 2001).

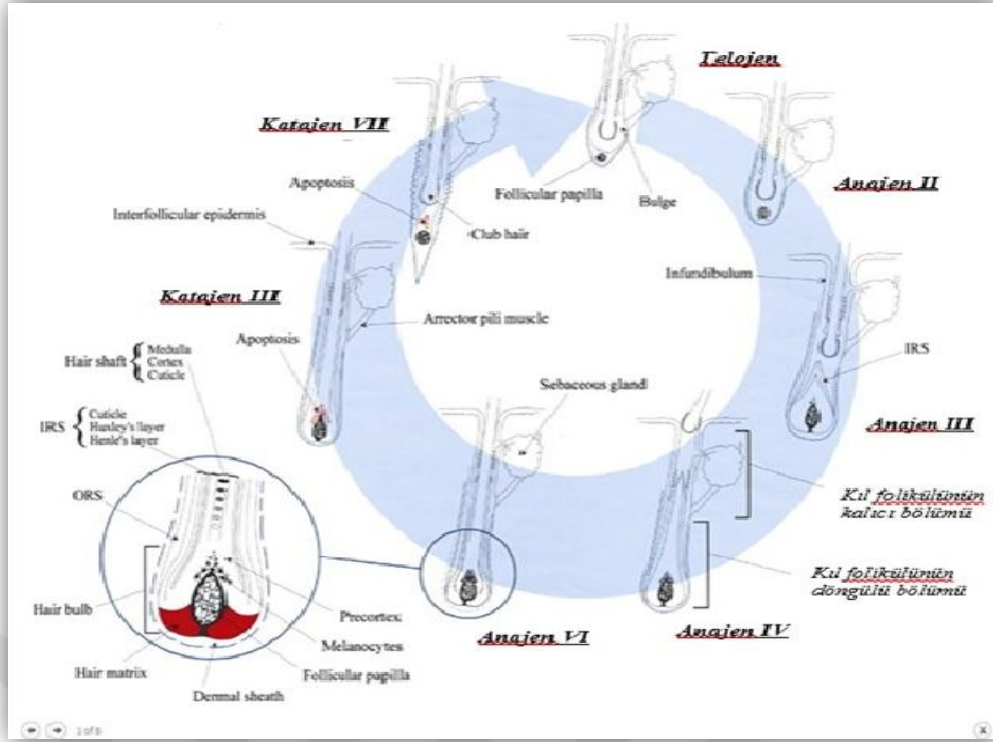
Memeli hücreleri kendilerini yenileme yeteneğine sahip değildir. Memelilerdeki gelişmemiş kök hücreleri fetüs oluşumunun yalnızca kısıtlı bir döneminde işlev görürler (Pera vd., 2000). Bundan dolayı, memelilerde bulunan birçok hücre yaşlanma ve ölüm sürecine girer. Ancak sinir dokusu, hematopoietik sistem, bazı epitel yapılar ve erkek üreme hücreleri gibi bazı sistemler kendi kök hücre yenileme mekanizmalarına sahiptirler. Bazı durumlarda kadınlarda bulunan rahim içine benzer şekilde, belirli düzenleyici hormonlara bağlı olarak gelişme ve gerileme döngüleri bulunmaktadır. En aktif memeli organ yapısı olmasından dolayı, kıl folikülü kendini yenileme, çok uzun süre hayatta kalabilme, hızlı gelişim gösterme ve başlangıç konumuna gerileyebilme kabiliyetine sahiptir. Son yıllarda, kıl folikülünün moleküler yapısının gözlemlenmesi ve morfojenezi hakkında ışık tutan çalışmalar yapılmaktadır (Kratochwil vd., 1996; Gat vd., 1998; St-Jacques vd., 1998; Botchkarev vd., 1999). Yakın zamanda yapılan çalışmalarda, kıl folikülü döngüsünün farklı evrelerindeki genetik kodlar, çeşitli sitokinler ve düzenleyici unsurlara dair tanımlamalara yer verilmiştir. Kıl folikülünün epitel ve mezenkim bölgelerinde yer alan yüzen fazla yapısal protein ve düzenleyici faktör bulunmaktadır (Stenn vd., 1994a; Stenn vd 1994b; Stenn vd 1996; Stenn ve Paus, 2001; Jiyar ve Ahmed, 2016). Bunlar ciddi miktarda döngüsel değişimler gösteren sofistike bir ifade (expresyon) modeli oluştururlar. Şu ana dek bu verileri bir araya getirmek için sistematik bir teşebbüs gerçekleştirilmemiştir. Bu nedenle, kıl folikülünün oldukça karmaşık olmasından ve kıl folikülünün döngüsel dönüşümüne dair temel hücresel yapılara dair bilgilerimizin çok ilkel düzeyde olmasından dolayı, kıl folikülünün temel düzenleyicilerini tanımlamaya yarayacak gen ifadeleri ve transgenik veriler büyük ölçüde eksik ve açıklanmaktan uzak haldedir. Ancak günümüzde kıl folikülü oluşumuna dair moleküler mekanizmalara dair bilgi dağarcığımız kıl döngüsüne dair bilgi dağarcığımızdan fazladır (Philpott ve Paus, 1998; McElwee ve Hoffmann, 2000). Bunun nedeni ise muhtemelen kıl folikülünü oluşturan moleküler mekanizmaların çok daha basit hücresel kinetiklere sahip olmasıdır (Chase, 1951; Holbrook ve Minami, 1991).

Pek çok araştırmacı kıl folikülü döngüsünün hücresel dinamiklerinin ne anlama geldiğini ortaya çıkarmaya çalışmıştır (Starile, 1965; Chapman, 1971; Ito, 1986; Tezuka vd., 1991; Reynolds ve Jahoda, 1991; Jahoda vd., 1992; Reynolds ve Jahoda, 1993; Kulesa vd., 2000; Oshima vd., 2001). Ancak bu araştırmacıların büyük bir

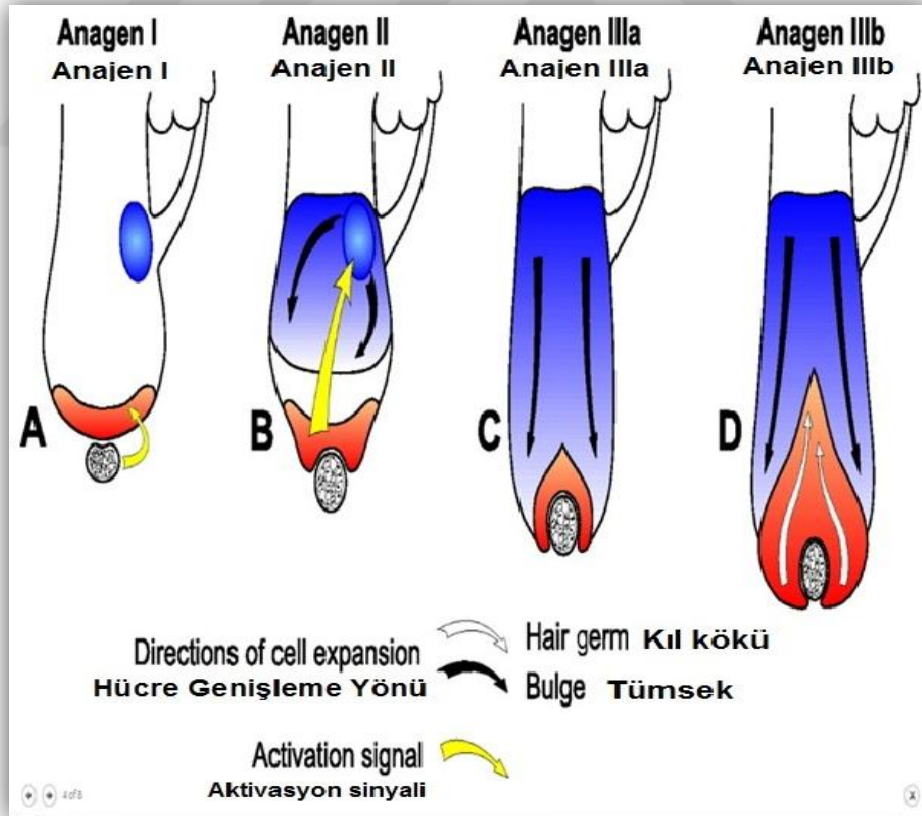
bölümü özel kıl folikülü yapılarına ya da kıl folikülü biyolojisinin kısıtlı alanlarına odaklanmış ve kıl folikülünün işlevine dair kapsamlı bir çerçeve çizememişlerdir. Bulge aktivasyonu hipotezi ilk olarak Sun v.d. (1991) tarafından yayımlanmış ve bu hipotez kıl folikülünün kinetiğine dair ilk ve tek modeli ortaya koymasından dolayı çok ilgi çekmiştir. Modern çalışmalar kıl folikülünün ve erken morfojenizin moleküler açıdan kontrolüne dikkat çekmiştir (Kratochwil vd., 1996; Gat vd., 1998; St-Jacques vd., 1998; Botchkarev vd., 1999).

Norhayati v.d. (2011) tarafından kısmi diferansiyel denklem kullanımına dayalı tıbbi amaçlı kullanılan hapların modellenmesi için bir teknik üzerinde çalışılmıştır. Çalışmada söz konusu hapi üretebilmek amacıyla parametrelerin sayısını artırmak suretiyle kısmi diferansiyel denklemin daha yüksek boyutlu alanlara daha geniş bir formülasyonla uygulanmıştır. Ayrıca, üretilen hap bağımsız değişkenler tarafından tanımlanmış olan bölge değiştirilerek düzenlenebilmektedir. Kısmi diferansiyel denklem kullanılarak yüzey oluşturma yöntemi ile şekil değiştirme tekniklerine bir başka örnek ise Castro G ve Ugail (2007) tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada açıklanmış olan metodolojilerin verimliliği çeşitli örnekler üzerinden test edilmiş ve sonuçlar diğer metodolojiler ile karşılaştırılarak burada önerilen yöntemler içerisinde en hızlı sonuç veren yöntem ortaya konmuştur.

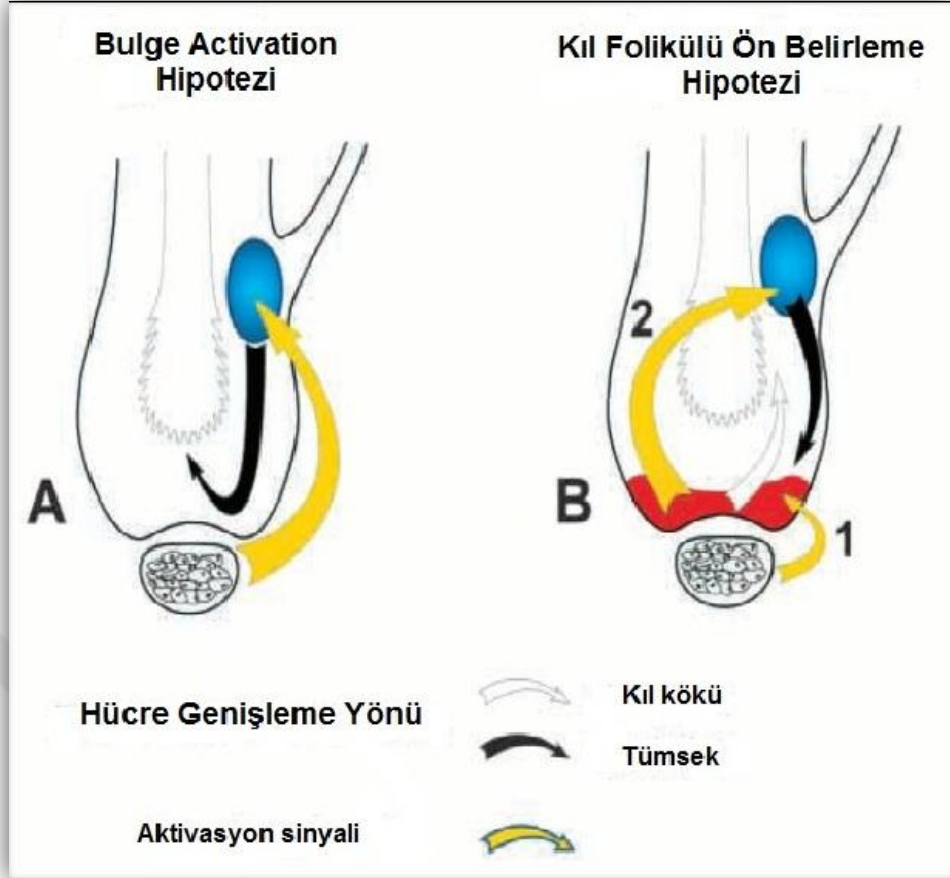
Bu çalışmada, çeşitli kıl folikülü hücre popülasyonları ile kıl folikülü döngüsü esnasında gerçekleşen temel hücresel işlemler arasındaki etkileşimin ortaya konması amaçlanmaktadır. Çalışmada ortaya konan model, mevcut kıl folikülü önbelirleme hipotezinin kıl folikülü döngüsü ile kök hücre kullanımının zamanlamasını içeren bazı değişiklikler ile geliştirilmesidir.



Şekil 1.1: Kıl Döngüsünün Mekanizması (Panteleyev vd., 2001).



Şekil 1.2: Büyüme Fazı (Anajen) (Panteleyev vd., 2001).



Şekil 1.3: (A) Bulge aktivasyonu hipotezi ve (B) kıl folikülü ön belirleme hipotezi (Panteleyev vd., 2001).

1.2 Kısmi Diferansiyel Denklem

Pek çok matematiksel modelleme formülasyonunda, kısmi türevler fiziksel miktarları temsil eder. Bu türevler genellikle birden fazla bağımsız değişken içerir. Uzayı temsil eden değişkenler genellikle x, y, \dots ve zamanı temsil eden değişken t şeklinde gösterilir. Bu şekilde yapılan formülasyonlar, söz konusu problemde ortaya konan bağımsız değişkenlerin bazı işlevlerinin gerçekleştiği bir veya birden fazla bağımlı değişkene sahiptir. Sonuçta ortaya çıkan denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. Bu denklemler başlangıç ya da sınır koşulları ile birlikte fiziksel olayları temsil ederler (Kells, 1947).

Adi diferansiyel denklemlerin aksine, $u = u(x, t)$ yada $u = u(x, y, t)$ eşitliğindeki gibi bir bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişkene bağlı olmalıdır. Ancak, Kısmi diferansiyel denklemlerin ısı denklemi, dalga yayılımı ve potansiyel denklem gibi fiziksel olayların bazılarını yönlendirdiğinden ve bu olayların zaman değişkeni t 'ye bağlı olacağı bir gerçektir. Bağımlı değişken u 'nun başlangıç sırasındaki ilk

değerini sağlaması gerekmektedir. Bu koşullara başlangıç koşulları adı verilir ve bu probleme başlangıç değer problemi adı verilir. Bir kısmi diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek analitik açıdan kolay değildir. Önceden belirlenmiş bazı koşulları yerine getirecek belirli bir çözüm bulunması gereklidir. Sınırlı bir D bölgesindeki gerçek bir olaya dair matematiksel problem, yönetici bir kısmi diferansiyel denklem tarafından yönetilmesi durumunda, bağımlı değişkenin sınırlı D bölgesi içerisinde tanımlanması gereklidir. Sınırlı verilere “sınır koşulları” ve probleme de “sınır değer problemi” adı verilir. Bilinmeyen fonksiyonu ve tüm kısmi türevleri cebirsel olarak lineer form arz ediyor ise, lineer kısmi diferansiyel denklemden söz etmek mümkündür. Başlangıç ve sınır koşulları gibi koşullara tabi olan bir kısmi diferansiyel denklem ise başlangıç sınır değer problemi olarak adlandırılır. Sınır koşulları üç türden oluşmaktadır. Birincisi Dirichlet koşullarıdır. Bu koşul probleme konu olan D bölgesinin her bir ∂D sınırında tanımlanmış u bilinmeyen fonksiyonunun değeri olarak tarif edilir. Bu durumda, $0 < x < L$ iken L uzunluğu örnek verilecek olursa, a ve b sabit olmak üzere sınır koşulları $u(0) = a$, $u(L) = b$ şeklinde tanımlanır. Dikdörtgen bir düzlem için, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0,y)$, $u(x,0)$ ve $u(x,b)$ sınır koşulları tanımlanmalıdır. ∂D sınırında her bir noktada bulunan bağımlı değişkenin sınır koşulları sıfır ise homojen olmama durumu söz konusudur.

İkinci sınır koşulu ise Neumann koşulları olarak adlandırılmaktadır. Bu koşul, ∂D sınırının her bir noktasında tanımlı bilinmeyen fonksiyonun normal türevlerinin değerleridir. L uzunluğu için Neumann sınır koşulları $u_x(0, t) = a$, $u_x(L, t) = b$ şeklindedir. Son olarak Robin koşulu ya da karışık sınır koşulu olarak adlandırılan koşul ve ∂D sınırının her bir noktasındaki bilinmeyen fonksiyonun ve normal türevlerinin lineer kombinasyonunun değerleridir.

Kısmi diferansiyel denklemleri çözenin birçok yöntemi vardır. Bu yöntemler arasında tümlevsel dönüşüm, özdeğer genişletme, değişkenlerin ayrılması gibi yöntemler yer almaktadır. İkinci adım aşağıdaki gibi şekillendirilmiştir:

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z_x, z_y) \quad (1.1)$$

Burada A , B ve C tüm türevleri sürekli olan x ve y sürekli fonksiyonlarını, f ise belirtilen değişkenlerin çokterimli fonksiyonunu temsil etmektedir. Yukarıdaki kısmi

diferansiyel denklem üç kategoriye ayrılmaktadır:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC > 0 & \text{ ise} & \text{hiperbolik} \\ B^2 - 4AC = 0 & \text{ ise} & \text{parabolik} \\ B^2 - 4AC < 0 & \text{ ise} & \text{eliptik} \end{aligned}$$

1.3 Fourier Dizisi

Belki de en önemli ortogonal fonksiyon kümesi, n bir tamsayı olmak üzere $\sin(nx)$ ve $\cos(nx)$ 'e dayalı olan fonksiyonlardır. Belirli bir $f(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki gibi bir trigonometrik fonksiyonlar dizisine genişletilebileceğini varsayalım:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.2)$$

Bu fonksiyon $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında eşit oranda yakınsaktır ve bu diziye $f(x)$ fonksiyonunun Fourier genişlemesi adı verilir. Katsayılara ise Fourier katsayıları adı verilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.4 Lagrange Polinomu

Lagrange polinomu, eşit aralıklı olmayan verilerde, yani x değerlerinin eşit aralıklarla dağılmadığı durumda, interpolasyon polinomunu elde etmenin belki de en basit yöntemidir. x değerlerinin eşit aralıklı olarak dağılmadığı veriler genellikle deneysel gözlemlerin sonucu olarak ortaya çıkarlar (Curtis ve Patrick, 1984). Aşağıdaki tabloda sunulduğu üzere sırasıyla x ve $f(x)$ değerlerine ilişkin veriler bulunmaktadır.

Aşağıdaki çizelgede eşit oranlı bir Δx söz konusu değildir ve x 'in değerleri belirli bir sıraya göre dizilmemiştir. X değerleri birbirinden farklıdır. Bu dört çift veri ile üçüncü dereceden bir polinom (kübik) geçirilir ve bu veri için Lagrange polinomu aşağıdaki şekilde oluşturulur:

x	$f(x)$
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
x_4	f_4

Çizelge 1.1: Langrange polinomu için noktalar.

$$P_3(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} f_2$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} f_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} f_4$$

Yukarıdaki $P_3(x)$ formülünden anlaşıldığı üzere formül dört terimden oluşmaktadır. Ayrıca, her bir terim üçüncü derece x 'tir ve bu dört terimin toplamı da aynı zamanda üçüncü derece x 'tir. Her bir terimin payı her bir terimden bir x_i atılarak $(x-x_i)$ formunun lineer faktörlerinin sonucudur. Atılan değer ise, payda yer alan her bir faktördeki x kaldırılarak paydayı oluşturmak amacıyla kullanılır. Sonra terimlerin her biri paydaki faktörlerden atılan x_i 'e karşılık gelen f_i ile çarpılır.

1.5 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, kıl folikülünün şeklini oluşturan kısmi diferansiyel denklemi çözmek amacıyla MATLAB 2010 kullanılarak uygun sınır koşulları altında kıl şeklinin üç boyutlu koordinat sisteminde tasarlanmasıdır. Çalışmada, yarıçap (r) ve yükseklik (h) sayısal değerlerini elde etmek amacıyla bu sınır değer problemi çözülerek iki boyutlu r ve h koordinatlarında kıl şeklinin temsili gösteren şekillere yer verilmiştir. Ayrıca kıl şekline dair çözümler de ortaya verilecektir.

1.6 Tezin Planı

Bu amaç doğrultusunda, çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, altı başlık altında çalışmanın girişi yer almaktadır. İkinci bölümde, kısmi diferansiyel denklem ele alınmıştır ve bu bölüm dört alt başlıktan oluşmaktadır. Üçüncü bölüm ise kıl folikülünün tasarlanmasını içermektedir ve üç alt başlıktan oluşmaktadır. Son bölüm ise sonuç ve tartışmaya ayrılmıştır.

2. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM YÖNTEMİ

2.1 KDD Yöntemine Giriş

Bloor ve Wilson (1989), kısmi diferansiyel denklem (KDD) yöntemini ilk ortaya atan araştırmacılar olup Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) ile şekiller oluşturma alanında önemli rol oynamışlardır. Kısmi diferansiyel denklem şekilleri genellenerek bilhassa optimizasyon ve tasarım analizlerinde şekilleri açıklamaya yönelik olarak genişletilmiştir (González vd., 2008; Ahmat vd., 2011).

Kısmi diferansiyel denklem yöntemi ile sonlu bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde $v \in [0,1]$ ve $w \in [0,1]$ olmak üzere, v parametreleri ile eliptik kısmi diferansiyel denklem kullanılarak parametrik forma sahip bir yüzey elde edebiliriz. İki boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki forma sahiptir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right)^{2\beta} X(v, w) = 0 \quad (2.1)$$

Burada, $X(v, w)$ fonksiyonu incelenen Ω bölgesinde üç boyutlu uzaydaki yüzeyi tanımlarken, α parametresi v ve w yönlerindeki yüzeyin göreceli düzlüğünü kontrol eder (Ugail, 2003). Burada α ve β değerleri 1'e eşit ya da 1'den büyük olmak durumundadır (Ugail, 2006). α ve β 1'e eşit olduğu durumda, (2.1) denklemi biharmonik denkleme indirgenir ve denklem şöyle oluşur:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right)^2 X(v, w) = 0$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial v^4} + 2 \frac{\partial^4 X}{\partial v^2 \partial w^2} + \frac{\partial^4 X}{\partial w^4} = 0$$

Vektör formatında, yukarıdaki denklem $\nabla^4 X = 0$ şeklinde yazılabilir. $X(v, w)$ fonksiyonu vektör formunda üç boyutlu koordinat sisteminde şu şekilde gösterilebilir:

$$\underline{X}(v, w) = (i\underline{X}_x(v, w) + j\underline{X}_y(v, w) + k\underline{X}_z(v, w)). \quad (2.2)$$

Ayrıca noktaya (v, w) planındaki bir noktayı üç boyutlu uzayda bir noktaya eşler, yani $R^2 \rightarrow E^3$ ve burada E Öklid uzayıdır.

2.2 Uygun Çözüm:

Bu bölümde kısmi diferansiyel denkleme (2.1) çözüm bulmak hedeflenmektedir. $\alpha = \beta = 1$ iken periyodik sınır koşulları altında kısmi diferansiyel denklem (2.1) çözülerek düzgün bir yüzey yaması elde edilebilmektedir. Bu yüzeyin elde edilmesi kısmi diferansiyel denklem yöntemi ile gerçekleştirilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, bu biharmonik denklem dördüncü dereceden olduğu için, Ω içerisinde $\underline{X}(v, w)$ fonksiyonunun ve normal türevlerin nasıl davrandığını göstermesi bakımından dört sınır koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır.

Kullanılan sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

1- Dirichlet sınır koşulu

$$\underline{X}(0, w) = q_1(w) \quad (2.3)$$

$$\underline{X}(1, w) = q_2(w) \quad (2.4)$$

2- Neumann sınır koşulu

$$\frac{\partial X}{\partial v}(0, w) = q_3(w) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v}(1, w) = q_4(w) \quad (2.6)$$

Eliptik kısmi diferansiyel denklem dört sınır koşuluna bağlıdır ve bu koşullar $\partial\Omega$ içerisinde değişkenlik gösteren $\underline{X}(v, w)$ ve $\frac{\partial X}{\partial v}$ normal türevleri ile ilişkilidir. Sınır koşullarına sahip bir kısmi diferansiyel denklem tümlevsel dönüşüm değişkenlerin ayrımı ve sonlu eleman yöntemi gibi çeşitli yöntemler kullanılarak elde

edilebilmektedir. Denklemler (2.3) ve (2.4) sırasıyla birinci ve ikinci sınır koşulunu temsil etmektedir ve bu koşullar $v = 0$ ve $v = 1$ olmak üzere yüzey yamasının kenarlarını vermektedir. Denklemler (2.5) ve (2.6) ise sırasıyla üçüncü ve dördüncü sınır koşullarını temsil etmekte olup ilgili yüzey sınırına ait normal türevlerin değerlerini vermektedir. Yüzeyin formu türevlerin koşulları tarafından belirlenmektedir. Burada, vektör türevinin yönü eğrinin türevindeki her bir nokta ile sınır eğrisi üzerindeki eşdeğer nokta arasındaki fark ile hesaplanmaktadır. Vektör türevi ve boyutu değiştirilerek yüzey form oluşturulabilmektedir.

2.3 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

Değişkenlerine ayırma yöntemi yalnızca değişkenler ve kısmi türevleri lineer olarak bulunabiliyorsa kullanılmaktadır. Değişkenlerine ayırma yöntemi fen bilimleri alanındaki araştırmalarda sıklıkla başvurulan bir yöntemdir ve homojen sınır koşullarına sahip kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde en yaygın kullanılan yöntemlerden biridir.

Kolaylık sağlamak bakımından aşağıdaki gibi yazılan bir biharmonik denklemi çözmek için:

$$\frac{\partial^4 X}{\partial v^4} + 2 \frac{\partial^4 X}{\partial v^2 \partial w^2} + \frac{\partial^4 X}{\partial w^4} = 0 \quad (2.7)$$

Şu şekilde ilerlemek mümkündür:

Denklem (2.7) lineer ve homojen olduğundan dolayı, denklemin çözümü için değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılabilir.

$$X(v, w) = \emptyset(v)\psi(w) \quad (2.8)$$

olsun Denklem (2.7) ve (2.8)'den:

$$\emptyset^{(4)}(v)\psi(w) + 2 \emptyset^{(2)}(v)\psi^{(2)}(w) + \emptyset(v)\psi^{(4)}(w) = 0 \quad (2.9)$$

elde edilir Denklem (2.9), $\emptyset(v)\psi(w)$ ile bölüldüğünde:

$$\frac{\emptyset^{(4)}(v)}{\emptyset(v)} + 2 \frac{\emptyset^{(2)}(v)}{\emptyset(v)} \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} + \frac{\psi^{(4)}(w)}{\psi(w)} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\emptyset^{(4)}(v)}{\emptyset(v)} + 2 \frac{\emptyset^{(2)}(v)}{\emptyset(v)} \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} = - \frac{\psi^{(4)}(w)}{\psi(w)} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Şimdi v ile ilgili olarak diferansiyel denklem (2.10)'dan

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\varnothing^{(4)}(v)}{\varnothing(v)} + 2 \frac{\varnothing^{(2)}(v) \psi^{(2)}(w)}{\varnothing(v) \psi(w)} \right) = - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\psi^{(4)}(w)}{\psi(w)}$$

veya

$$\frac{\varnothing(v)\varnothing^{(5)}(v) - \varnothing^{(4)}(v)\varnothing^{(1)}(v)}{\varnothing^{(2)}(v)} + 2 \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} \left(\frac{\varnothing^{(3)}(v)\varnothing(v) - \varnothing^{(2)}(v)\varnothing^{(1)}(v)}{\varnothing^{(2)}(v)} \right) = 0$$

$$\varnothing(v)\varnothing^{(5)}(v) - \varnothing^{(4)}(v)\varnothing^{(1)}(v) + 2 \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} \varnothing^{(3)}(v)\varnothing(v) - \varnothing^{(2)}(v)\varnothing^{(1)}(v) = 0$$

elde edilir.

Sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\frac{\varnothing(v)\varnothing^{(5)}(v) - \varnothing^{(4)}(v)\varnothing^{(1)}(v)}{\varnothing(v)\varnothing^{(3)}(v) - \varnothing^{(2)}(v)\varnothing^{(1)}(v)} = -2 \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} \quad (2.11)$$

sonucuna ulaşılır. Burada şunu belirtmek gerekir; denklem (2.11)'in sağ ve sol yanları sırasıyla v ve w 'nin fonksiyonlarıdır. İki fonksiyonun eşitliği için ortak değer sabit olmak zorundadır.

Yani

$$\frac{\varnothing(v)\varnothing^{(5)}(v) - \varnothing^{(4)}(v)\varnothing^{(1)}(v)}{\varnothing(v)\varnothing^{(3)}(v) - \varnothing^{(2)}(v)\varnothing^{(1)}(v)} = -2 \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} = K \quad (2.12)$$

Birinci durumda, k sabitinin pozitif ($k > 0$) olduğunu ve $k = 2\lambda^2$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, denklem (2.12)'den

$$-2 \frac{\psi^{(2)}(w)}{\psi(w)} = 2\lambda^2$$

veya

$$\psi^{(2)}(w) + \lambda^2 \psi(w) = 0 \text{ elde edilir.} \quad (2.13)$$

olarak yazılır. Homojen lineer denklem (2.13)'ün kökleri ($i\lambda$) ve ($-i\lambda$) şeklindedir ve (2.13)'ün çözümü,

$$\psi(w) = a_1 \cos \lambda w + a_2 \sin \lambda w \quad (2.14)$$

olarak bulunur.

Denklem (2.14)'ten

$$\frac{\psi^{(4)}(w)}{\psi(w)} = \lambda^4 \text{ elde edilir.} \quad (2.15)$$

Dolayısıyla, denklem (2.10) ve (2.15)'ten

$$\frac{\phi^{(4)}(v)}{\phi(v)} + 2 \frac{\phi^{(2)}(v)}{\phi(v)}(-\lambda^2) = -\lambda^4$$

veya

$$\phi^{(4)}(v) - 2\lambda^2 \phi^{(2)}(v) + \lambda^4 \phi(v) = 0 \quad (2.16)$$

elde edilir.

Denklem (2.16) dördüncü dereceden homojen lineer diferansiyel denklemdir. Aşağıdaki ebirsel eşitlikten kökler belirlenebilir

$$m^4 - 2\lambda^2 m^2 + \lambda^4 = 0$$

veya

$$(m^2 - \lambda^2)^2 = 0$$

Dolayısıyla kökler $(-\lambda), (-\lambda), (\lambda), (\lambda)$ ve denklem (2.16)'nın çözümü

$$\phi(v) = (b_1 + b_2 v)e^{\lambda v} + (b_3 + b_4 v)e^{-\lambda v} \quad (2.17)$$

olarak bulunur.

Denklem (2.14) ve (2.17)'den

$$\phi(v)\psi(w) = [(b_1 + b_2 v)e^{\lambda v} + (b_3 + b_4 v)e^{-\lambda v}][a_1 \cos \lambda w + a_2 \sin \lambda w]$$

veya

$$\begin{aligned} \phi(v)\psi(w) &= [(a_1 b_1 + a_1 v) e^{\lambda v} + (a_1 b_3 + a_1 b_4 v) e^{-\lambda v}] \cos \lambda w \\ &+ [(a_2 b_1 + a_2 b_2 v) e^{\lambda v} + (a_2 b_3 + a_2 b_4 v) e^{-\lambda v}] \sin \lambda w \end{aligned} \quad (2.18)$$

olur. Dolayısıyla, lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini toplama prensibine göre, denklem (2.17) ve denklem (2.18) sonuçları,

$$\begin{aligned} X_n(v, w) &= \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{n1} + a_{n3} v) e^{\lambda n v} + (a_{n2} + a_{n4} v) e^{-\lambda n v}] \cos \lambda w \\ &+ [(b_{n1} + a_{n3} v) e^{\lambda n v} + (b_{n2} + b_{n4} v) e^{-\lambda n v}] \sin \lambda w \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklindedir.

Eğer k sabiti negatif ise ($k < 0$), çözümün sinüs – kosinüs bölümü $\emptyset(v)$ ile gider ve $k = 0$ durumunda, denklem (2.12)'den $\psi(w) = 0$ elde edilir, bunun çözümü de $\psi(w) = A_1 + A_2 v$ şeklinde olur. Ayrıca denklem (2.16)'dan

$$\emptyset(v) = a_{0+} + a_{01}v + a_{02} \frac{v^2}{2} + a_{03} \frac{v^3}{3}$$

veya

$$\emptyset(v) = B_0 + B_1v + B_2 \frac{v^2}{2} + B_3 \frac{v^3}{3} \quad (2.20)$$

elde edilir.

Burada A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 , ve B_3 sabitlerdir.

Bu nedenle, çözüm üç türden oluşmaktadır. Herhangi bir uygulama için, uygun çözüm türü kullanılır; bu durumdaki biharmonik kısmi diferansiyel denklem için uygun çözüm ise k sabiti > 0 durumunda denklem (2.19)'da verilmiştir. Dolayısıyla, sınır koşulları altında (2.1)'in çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\underline{X}(v, w) = \underline{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\underline{A}_n(v) \cos(nw) + \underline{B}_n(v) \sin(nw)] \quad (2.21)$$

Burada,

$$\underline{A}_0 = \sum_{m=1}^4 a_{0m} v^{m-1} \quad (2.22)$$

$$\underline{A}_n = (a_{n1} + a_{n3} v) e^{anv} + (a_{n2} + a_{n4} v) e^{-anv} \quad (2.23)$$

$$\underline{B}_n = (b_{n1} + b_{n3} v) e^{anv} + (b_{n2} + b_{n4} v) e^{-anv}, \quad (2.24)$$

Denklem (2.21) yerine (2.22), (2.23) ve (2.24) konularak

$$\underline{X}(v, w) = \sum_{m=1}^4 a_{0m} v^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{n1} + a_{n3} v) e^{anv} + (a_{n2} + a_{n4} v) e^{-anv}] \cos(w) + \quad (2.26)$$

$$[(b_{n1} + b_{n3} v) e^{anv} + (b_{n2} + b_{n4} v) e^{-anv}] \sin(w)$$

elde edilir.

$n = 1$ için,

$$\underline{X}(v, w) = \sum_{m=1}^4 a_{0m} v^{m-1} + \sum [(a_{11} + a_{13} v) e^{av} + (a_{12} + a_{14} v) e^{-av}] \cos(w) +$$

$$[(b_{11} + b_{13} v) e^{av} + (b_{12} + b_{14} v) e^{-av}] \sin(nw)$$

elde edilir. x, y ve z bileşenlerine göre, denklem (2.21),

$$X_x(v, w) = \underline{A}_{0x} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underline{A}_{nx}(v) \cos(nw) + \underline{B}_{nx}(v) \sin(nw)]$$

$$X_y(v, w) = \underline{A}_{0y} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underline{A}_{ny}(v) \cos(nw) + \underline{B}_{ny}(v) \sin(nw)]$$

$$X_z(v, w) = \underline{A}_{0z} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underline{A}_{nz}(v) \cos(nw) + \underline{B}_{nz}(v) \sin(nw)]$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.2) üç boyutlu vektör formunda yazılırsa,

$$\underline{X}(v, w) = X_x(v, w)i + X_y(v, w)j + X_z(v, w)k$$

$X(v, w)$ 'in v ve w bağımsız değişkenleri ile ilgili olarak normal türevleri üç boyutlu vektör formunda yazılabilir:

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial X_x}{\partial v}i + \frac{\partial X_y}{\partial v}j + \frac{\partial X_z}{\partial v}k$$

ve

$$\frac{\partial X}{\partial w} = \frac{\partial X_x}{\partial w}i + \frac{\partial X_y}{\partial w}j + \frac{\partial X_z}{\partial w}k$$

Denklem (2.21)'de bulunan ve denklem (2.22)'de tanımlanan ilk terim A_0 üçüncü dereceden polinom iken ikinci terim yarıçap vektörünü tanımlar. Denklem (2.22)-(2.24) de verilen $(a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}, b_{n4})$ vektör değerli sabitler zorlanan sınır koşulları tarafından belirlenir. A_0 kübik polinomundaki u , yüzeyin omurgasını oluşturur ve kalan terimler omurgaya göre yüzeyin bir noktasının simetrilerini belirler.

Yukarıdan da anlaşılacağı gibi biharmonik denklemin çözümü için sınır koşullarının belirlenmesi gerekmektedir. Belirlenen sınır koşullarına göre çözümler türetilir.

2.4 Kısmi Diferansiyel Denklem Yöntemine Örnekler

Bu kısımda sınır eğrileri ile oluşturulan birtakım kısmi diferansiyel denklem yöntemi örnekleri verilecektir. P_{11} ve P_{12} sırasıyla $u = 0$ ve $u = 1$ de yüzey sınırları üzerindeki sınır koşullarını ifade eder. d_{11} ve d_{12} ise sınır koşullarının türevlerini ifade ederler. Türev sınır koşulları yüzeyin şeklini belirlemek için hayati önem taşırlar (Norhayati, 2014). Türev eğrilerinin pozisyonları ve boyutları değiştirilerek yüzey şekli değiştirilebilir. Sınır koşulları yeniden boyutlandırılabilir ve ilgili pozisyonel eğrilere dikey olarak döndürülebilir. aşağıdaki örneklere

bakıldığında, verilen sınır koşullarına göre kısmi diferensiyel denkleminin çözüm yüzeyi kolayca tahmin edilebilir. Böylece denilebilir ki KDD yöntemi kompleks geometrilerin yüzeylerini kolayca türetebilir. Matematiksel olarak konuyla ilgili derin bilgiye sahip olma gerekliliği olmadan bu tür hesaplamaların kolayca yapılabilmesi bu yöntemi en kullanışlı yapan tarafıdır. En önemli iş problemi dizayn etmek olup, denklemin çözümü (2.21) verildiği için sadece dizayn edilen sınır koşullarının çözümde yerine konulması gerekmektedir.

r_c genişlik ve z_c yükseklik olmak üzere üst yarım kürede tanımlanan her bir sınır eğrisi,

$$r_c = R \cos(\psi_i)$$

ve

$$z_c = R \sin(\psi_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\psi_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ve R yarıçapı temsil eder. Genel olarak sınır eğrilerinin her bir noktasının koordinatları,

$$(x_0 + r_c \cos(w), y_0 + r_c \sin(w), z_0 + z_c)$$

şeklinde belirlenir. Burada $w \in [0, 2\pi]$ ve x_0, y_0 ve z_0 kürenin koordinatlarını ifade eder.

Örnek 2.1

Uygulanan aşağıdaki sınır koşullarına göre Kısmi diferansiyel denklem yüzeyinin çizelim. $R = 3.5$ için özel olarak tüm sınır eğrilerinin koordinatlarını

$$P_{11} = (x_0 + 3.5 \cos(w), y_0 + 3.5 \sin(w), z_0),$$

$$P_{12} = (x_0 + 0 \cos(w), y_0 + 0 \sin(w), z_0 + 2),$$

$$d_{11} = (x_0 + 1 \cos(w), y_0 + 1 \sin(w), z_0 + 1.7),$$

$$d_{12} = (x_0 + 0.1 \cos(w), y_0 + 0.1 \sin(w), z_0 + 0.1),$$

şeklinde alalım. Bunlar ayrıca,

$$X_x(0, w) = x_0 + 3.5 \cos(w)$$

$$X_y(0, w) = y_0 + 3.5 \sin(w)$$

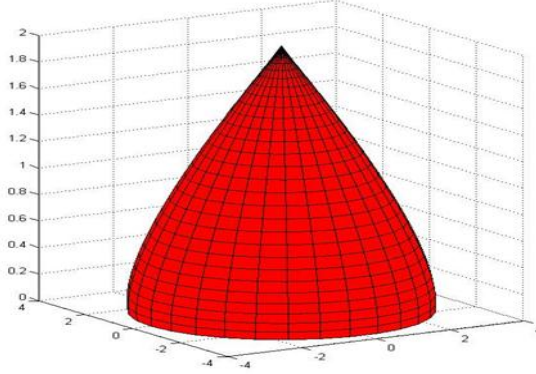
$$X_z(0, w) = 0$$

$$X_x(1, w) = x_0$$

$$X_y(1, w) = y_0$$

$$X_z(1, w) = 2$$

olarak da ifade edilebilir. Burada orijin merkez olarak seçildi yani $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ alındı. P_{11} eğrisi tüm yüzeylerin kesiştiği ortak yüzey olarak seçildi. Kısmi diferansiyel denklem yönteminde sadece belirlenen nesnenin yüzeyini oluşturmakta kullanılır. Bu sınır koşullarına göre biharmonik denklem değişkenlerine ayrılarak çözülür ve elde edilen yüzey çizdirilir. Belirlenen sınır koşullarına göre yüzeyin elde edilmesi detaylı olarak Nurhayati (2014) tarafından gösterildi. Şekil 2.1’de KDD yöntemi kullanılarak yukarıdaki sınır koşulları altında çizilen yüzey görülmektedir.



Şekil 2.1: Kısmi diferansiyel denklem yüzey

Bir kısmi diferansiyel denklem tarafından çizilen bu yüzeyin ve dört sınır şartlarını kullandığını görülmektedir.

Örnek 2.2

Kısmi diferansiyel denklem yüzeyinin tanımlanmasına bir başka örnek verildi. Bu yüzey, iki kısmi diferansiyel denklem kullandığımız sınır eğrileri tarafından taslaklandırılmış olup bu kısmi diferansiyel denklemlerin her biri, bu sınır eğrilerinden biri ile dört sınır koşuluna sahiptir; Kısmi diferansiyel denklemin

çözümü olarak bu yüzeyi, çizmek için bazı sınır şartları kullanılmıştır:

KDD'nin ilk bölümü için:

$$P_{11} = (x_0 + 3.5 \cos(w), y_0 + 3.5 \sin(w), z_0)$$

$$P_{12} = (x_0 + 0 \cos(w), y_0 + 0 \sin(w), z_0 + 0.6)$$

$$d_{11} = (x_0 + 0.4 \cos(w), y_0 + 0.4 \sin(w), z_0 + 1.7)$$

$$d_{12} = (x_0 + 0.001 \cos(w), y_0 + 0.001 \sin(w), z_0 + 0.001)$$

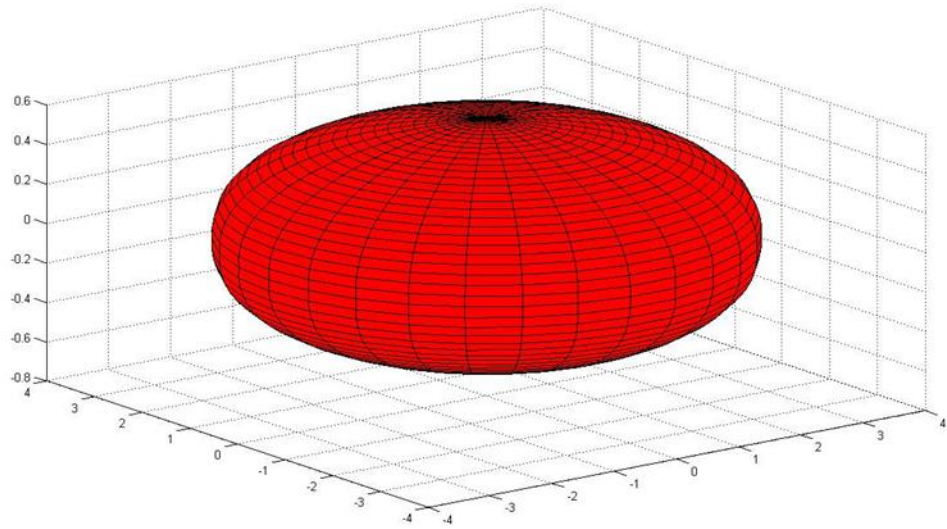
Kısmi diferansiyel denklemin ikincisi, Şekil 2.2' de gösterildiği gibi xy-düzlemine simetriktir. KDD'nin ikinci bölümü için:

$$P_{21} = (x_0 + 3.5 \cos(w), y_0 + 3.5 \sin(w), z_0),$$

$$P_{22} = (x_0 + 0 \cos(w), y_0 + 0 \sin(w), z_0 - 1.6),$$

$$d_{21} = (x_0 + 0.4 \cos(w), y_0 + 0.4 \sin(w), z_0 - 1.7),$$

$$d_{22} = (x_0 + 0.001 \cos(w), y_0 + 0.001 \sin(w), z_0 - 0.001),$$



Şekil 2.2: Diferansiyel denklem yüzeyi (İki simetrik sınır şartı).

Örnek 2.3

Bu örnek, Şekil (2.3) 'de gösterildiği gibi yarım elipsoidli bir koninin geometrik kısmi diferansiyel denklemini göstermektedir. Bu örnekte, yarım elipsoidli bir koni için üretilen yüzey, uygun sınır koşullarına sahip iki kısmi diferansiyel denkleme ihtiyaç duyar ve böylece önce bir koni olan yüzeyin üst kısmını tasvir eder ve daha sonra yarı elipsoid olan alt yüzeyi tasvir ederiz.

Burada kullanılan sınır koşulları aşağıdaki koordinatlara sahiptir

İlk PDE için:

$$P_{11} = (x_0 + 3.5 \cos(w), y_0 + 3.5 \sin(w), z_0)$$

$$P_{12} = (x_0 + 0 \cos(w), y_0 + 0 \sin(w), z_0 + 5)$$

$$d_{11} = (x_0 + 1 \cos(w), y_0 + 1 \sin(w), z_0 + 1.7)$$

$$d_{12} = (x_0 + 0.1 \cos(w), y_0 + 0.1 \sin(w), z_0 + 0.1)$$

ve ikinci PDE için:

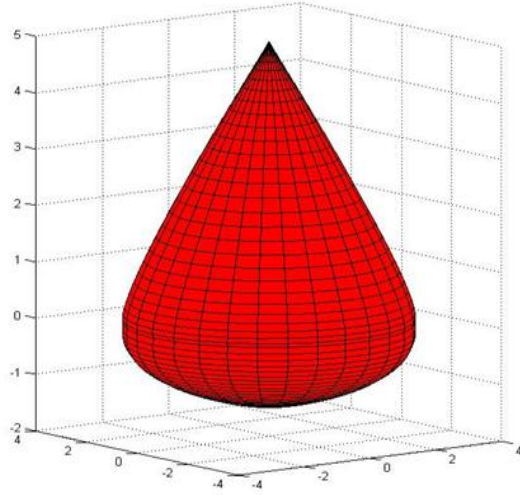
$$P_{21} = (x_0 + 3.5 \cos(w), y_0 + 3.5 \sin(w), z_0),$$

$$P_{22} = (x_0 + 0 \cos(w), y_0 + 0 \sin(w), z_0 - 1.5),$$

$$d_{21} = (x_0 + 1 \cos(w), y_0 + 1 \sin(w), z_0 - 3.7),$$

$$d_{22} = (x_0 + 0.1 \cos(w), y_0 + 0.1 \sin(w), z_0 - 0.1),$$

alınırsa çözüm yüzeyi,



Şekil 2.3: Düşük diferansiyel tanımlaması, koni ve yarım elipsoid birleştirir.

olarak bulunur. Tablonun merkezinin başlangıç noktası olarak alındığı ve iki kısmi türevli diferansiyel denklemin aynı P_{11} ve P_{21} (sadece 7 sınır koşulunda kullanıldığı) olmak üzere iki sınır koşulunun birleştirildiği unutulmamalıdır.

Örnek 2.4

Şekil 2.4'de gösterildiği gibi saç kökünün bir bölümünün tarifi düşünüldüğünde, saç kökünün bu kısmı için uygun dört sınır şartına sahip yalnızca bir kısmi diferansiyel denklem kullanılabilir.

Alyuvar için uygun olan sınır koşulları aşağıda verilmiştir:

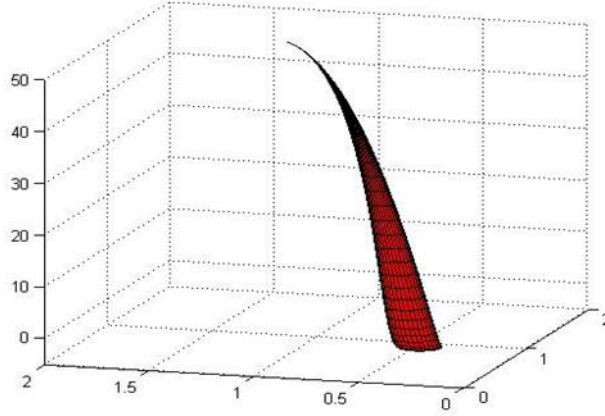
İlk KDD için:

$$P_{11} = (0.1 \cos(w), y_0 + 0.1 \sin(w), 0),$$

$$P_{12} = (1.2 \cos(w), y_0 + 1.2 \sin(w), z_0 + 50),$$

$$d_{11} = (0.1 \cos(w), y_0 + 0.1 \sin(w), 0.1),$$

$$d_{12} = (0.01 \cos(w), y_0 + 0.01 \sin(w), 0.1),$$



Şekil 2.4: Saç follikülünün bir parçası.

Örnek 2.5

Saç folikülü için başka bir örnek, önzileme örneklerinin aynısıdır, ancak yalnızca daha fazla açıklamak için sınır P_{12} nin merkezini 1.2'den 3'e değiştirip ve işlemi tekrarlarırsak, yalnızca merkez olan (x_0, y_0, z_0) , değiştirilirse Şekil 2.5 elde edilir.

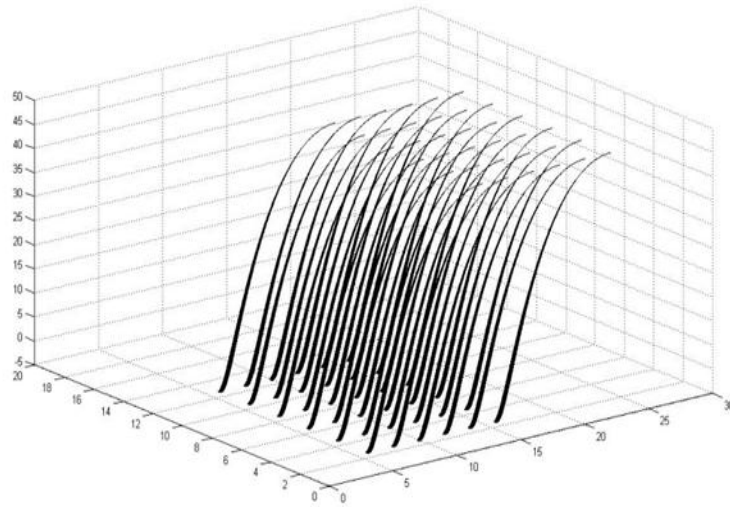
İlk KDD için:

$$P_{11} = (0.1 \cos(w), 0.1 \sin(w), 0),$$

$$P_{12} = (3 + 0 \cos(w), 3 + 0 \sin(w), 50),$$

$$d_{11} = (0.1 \cos(w), 0.1 \sin(w), 0.1),$$

$$d_{12} = (0.01 \cos(w), 0.01 \sin(w), 0.1),$$

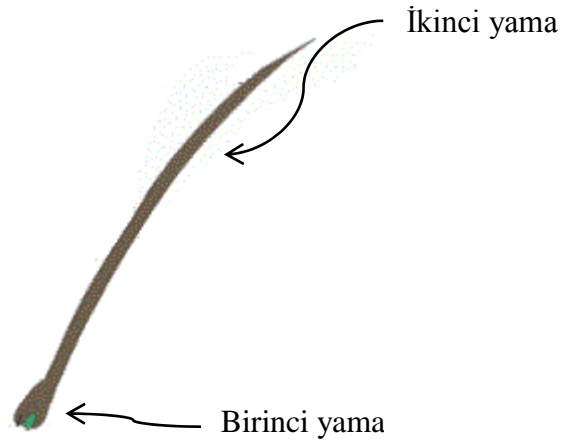


Şekil 2.5: Birden fazla PDE kullanarak saç folikülü tanımlanması.

3. KIL FOLİKÜLÜNÜN TASARLANMASI

3.1 Kısmi Diferansiyel Denklem Yöntemi Kullanılarak Kıl Folikülünün Parametrik Olarak Tasarlanması

Bu bölümde, kıl folikülünün tasarlanmasında kısmi diferansiyel denklem yönteminin nasıl kullanıldığı ele alınmaktadır. Kıl folikülünün geometrik modeli için gerekli olan iki yamadan oluşan yüzeyi elde etmek için yedi adet eğime ihtiyaç duyulmaktadır. Her bir yüzey yaması için dört sınır eğrisi elde etmek için Matlab programı kullanılmış ve her bir yüzeyi çizmek için dört sınır eğrisi kullanılmıştır. Eğim $[0,2]$ aralığından noktalar belirlenerek oluşturulmuş ve final noktası eğimin düzgün biçimde kapatıldığını göstermiştir. Eğimlerin her biri belirli r (yarıçap) ve h (yükseklik) değerlerine sahip bir daireye sahiptir. Tasarlama sürecinin gerçekleştirilmesi birkaç adımdan oluşmaktadır. Önce birinci yama oluşturulur, sonra ikinci yamanın içbükey yüzeyi oluşturulur (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Kıl Folikülü.

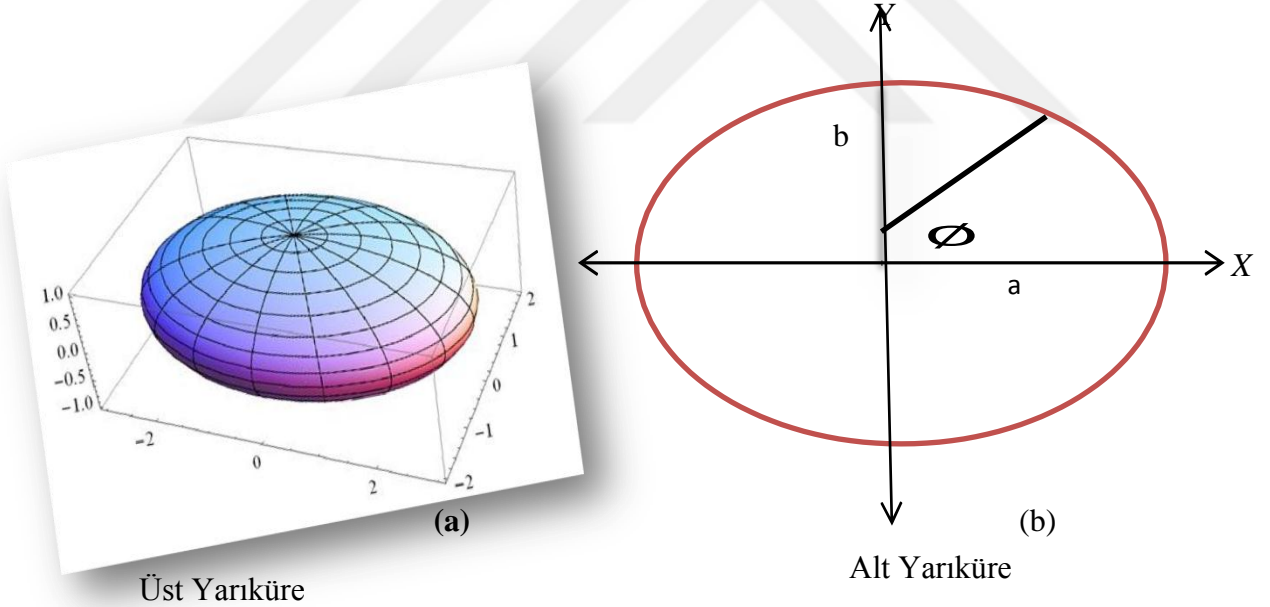
Yüzeyi elde etmek için dördüncü derece kısmi diferansiyel denklem (2.7) çözülmüştür. İkinci bölümde bahsedildiği üzere, (2.22), (2.23) ve (2.24) denklemlerinden elde edilen A_0, A_n ve B_m değerleri (2.21) denklemine eklenmiştir. Koordinat fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$r_i = a \cos(\varnothing) \text{ ve } h_i = b \sin(\varnothing) \quad (3.1)$$

Burada $\varnothing \in [0, \pi]$ ve a x-eksenindeki yarıküre yarıçapı ve b ise y-eksenindeki yarıküre yarıçapıdır. ∂D sınırındaki her bir nokta $(x, y, \text{ ve } z)$ şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r_i \cos(w) \\ y &= y_0 + r_i \sin(w) \\ z &= z_0 + h_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

Burada r_i ve h_i üst yarıkürenin yarıçapı ve yüksekliğidir ve $w \in [0, 2\pi]$.



Şekil 3.2: (a) Üç boyutlu yarıküre. (b) İki boyutlu yarıküre.

Ayrıca (x_0, y_0, z_0) yarıkürenin merkezidir. Burada kıl folikülünün birinci yaması $a=0.18\text{mm}$ ve $b=5\text{mm}$ şeklinde ayarlanarak sınır eğrisinden oluşturulmuştur. Birinci ve ikinci sınır koşulu (BC1 ve BC2) sırasıyla 2.3 ve 2.4 denklemlerinde verilmiş olup sınır eğrilerinin koordinatları şu şekildedir:

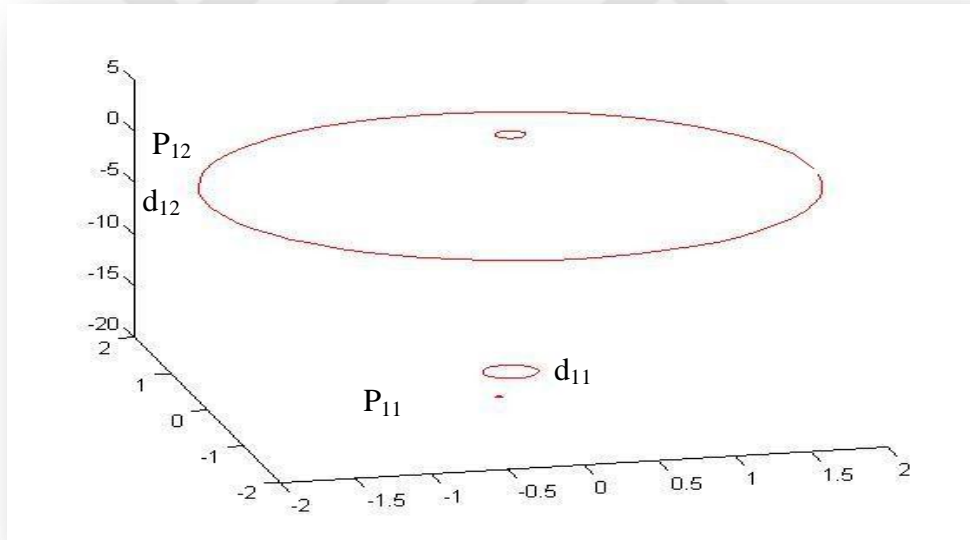
$$P_{11} = (x_0 + 0 \cos(w), y_0 + 0 \sin(w), z_0) \quad (3.3)$$

$$P_{12} = (-0.1 + 0.1 \cos(w), -0.1 + 0.1 \sin(w), z_0 + 5) \quad (3.4)$$

$$d_{11} = (x_0 + (-0.5) \cos(w), y_0 + (-0.5) \sin(w), z_0 + (-100)) \quad (3.5)$$

$$d_{12} = (x_0 + (-1) \cos(w), y_0 + (-1) \sin(w), z_0 + 100) \quad (3.6)$$

Burada, P_{11} birinci yama için ilk sınır koşulunu (BC1), P_{12} birinci yama için ikinci sınır koşulunu (BC2), d_{11} birinci yama için üçüncü sınır koşulunu (BC3) ve d_{12} birinci yama için dördüncü sınır koşulunu (BC1) temsil etmektedir. Birinci ve ikinci sınır koşulları alt ve üst, üçüncü ve dördüncü sınır koşulları ise şekillerin tamamını temsil etmektedir ve aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.3: Birinci Yamaya Ait Sınır Eğrileri.

Öncelikle, üst kısmı temsil eden ikinci yamayı oluşturmak amacıyla (3.4) denkleminde elde edilen ikinci sınır koşulundan başlanır ve sonra diğer nokta ile devam edilir çünkü kapatılacak bir yüzey elde edilmesi gereklidir (Şekil 3.4).

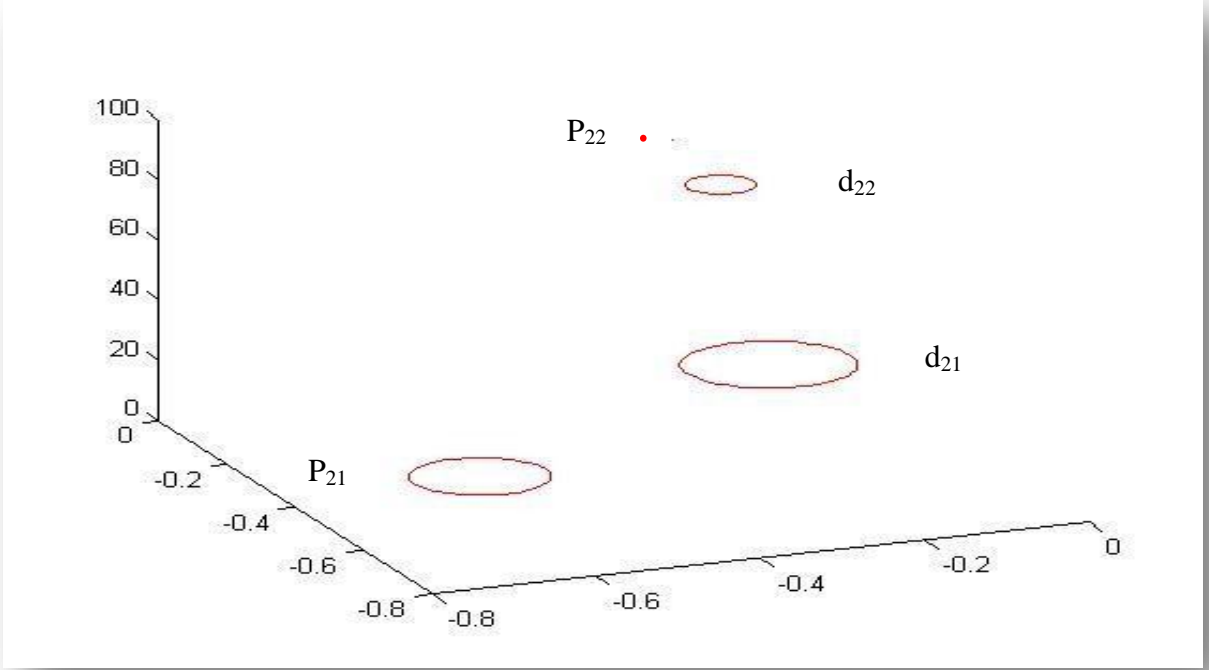
İkinci yama için aşağıdaki sınır koşulları kullanılmıştır:

$$P_{21} = (-0.1 + 0.1 \cos(w), -0.1 + 0.1 \sin(w), z_0 + 5) \quad (3.7)$$

$$P_{22} = (-0.7 \cos(w), + (-0.7) \sin(w), + z_0 + 100) \quad (3.8)$$

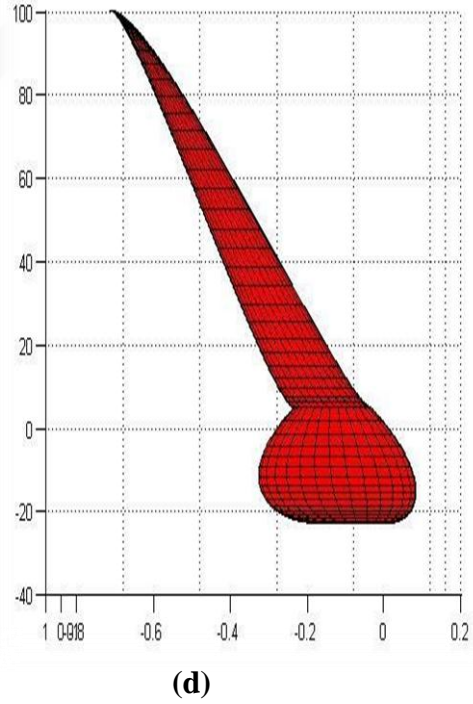
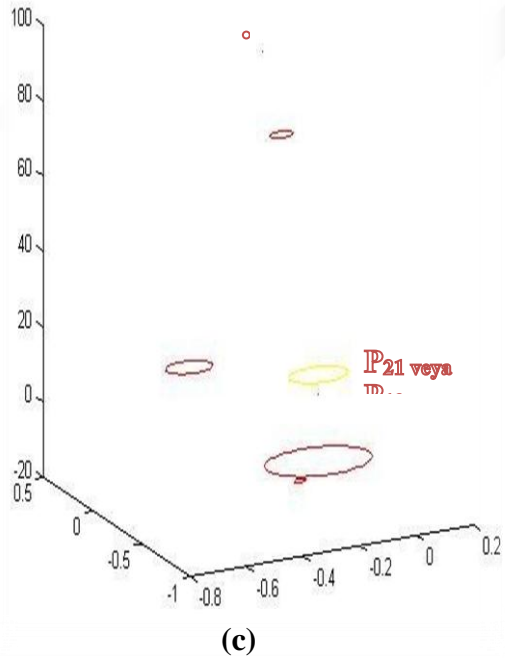
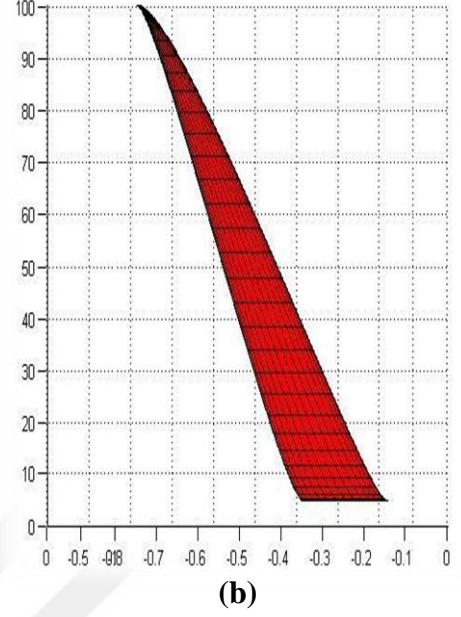
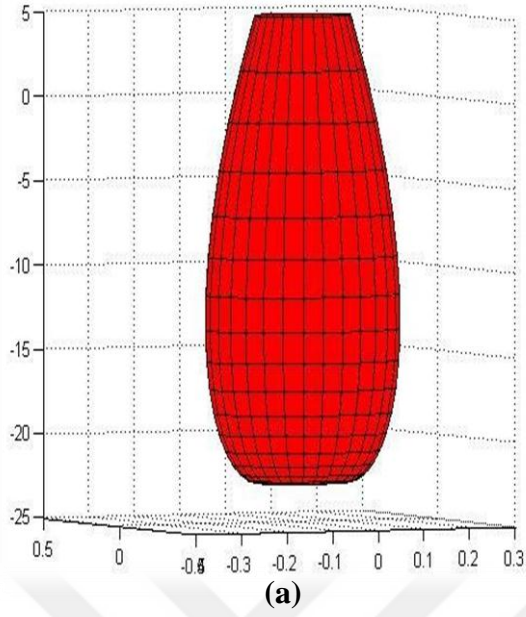
$$d_{21} = (-0.2 \cos(w), + (-0.2) \sin(w), + z_0 + (-1)) \quad (3.9)$$

$$d_{22} = ((-0.3) + (-0.1) \cos(w), -0.3 + (-0.1) \sin(w), z_0 + (-1)) \quad (3.10)$$



Şekil 3.4: İkinci Yamanın Sınırı

(3.3)-(3.10) denklemlerinin sınır koşulları kullanılarak Şekil 3.5.d'de sunulan saç folikülü çizilmiştir. İki yama sınırlardan birleştirilerek Şekil 3.5.c ve 3.5.d'de verilen saç folikülünün yüzeyi elde edilmiştir.



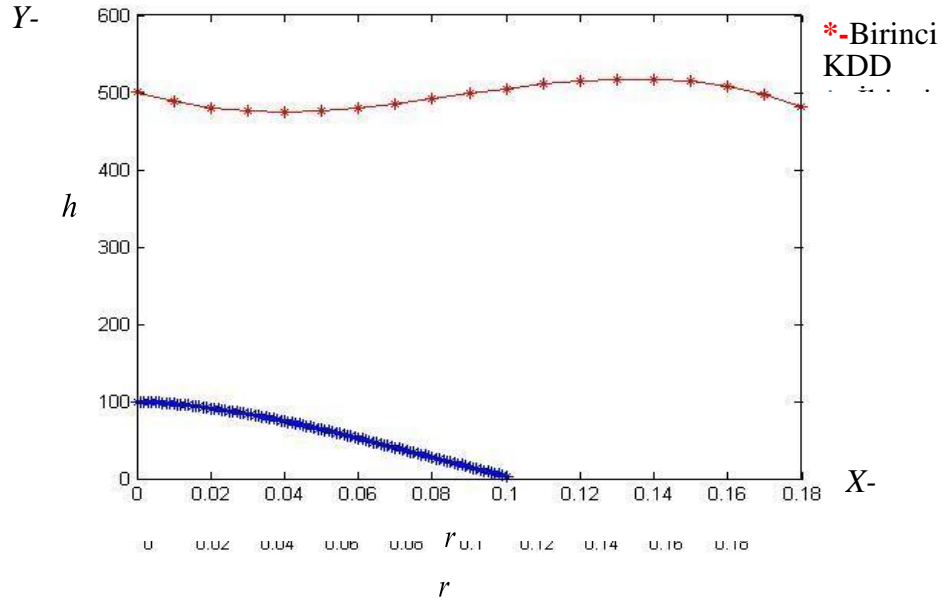
Şekil 3.5: (a) Kıl folikülü (b) birinci yama (b) saç folikülü (c) ikinci yama C sınır eğrileri kombinasyonu (d) saç folikülü.

İki kısmi diferansiyel denklem için kıl folikülünün boyutu belirlenmiş ve aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.1: İki Kısmi Diferansiyel Denklem için Kıl Folikülünün Yarıçap ve Yükseklik Verileri.

Sınır Eğrileri		
	r (yarıçap)	h (yükseklik)
Birinci KDD	0	0
	0.02	-20
	0.18	-18
	0.1	5
İkinci KDD	0.1	5
	0.08	29
	0.04	75
	0	100

Çizelge 3.1 de belirtilen yarıçap ve yüksekliğe bağlı olarak saç folikülünün 2 boyutlu olarak grafiği çizilmiş ve bu yarıçap ve yükseklik değerleri (3.3) den (3.10) a kadar tüm sınır koşulu denklemleri çözülerek elde edilmiştir.



Şekil 3.6: x, y düzleminde iki kısmi diferansiyel denklemin grafikleri.

3.2 Kıl Folikülü Fonksiyonu

Bir A kümesinden B kümesine bir f fonksiyonunda, A'daki her eleman B'de sadece tek (ve eşsiz) bir elemana denk düşer. A kümesine f 'nin tanım kümesi, B'ye ise f 'nin değer kümesi adı verilir.

Çizelge 3.1'de verilen sınır eğrilerinin yarıçap ve yüksekliklerine bağlı olarak, yarıçap x ve yükseklik y olarak alınırsa her bir KDD bulunabilir. Denklemdaki verileri (r yarıçapı ve h yüksekliği) değiştirmenin birçok yolu olmakla birlikte, en iyi ve kolay yol n 'nci dereceden Lagrange İnterpolasyonu'dur. Bölüm (1.4)'te belirtildiği üzere:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x)$$

ya da

$$P(x) = f(x_0) l_{n,0}(x) + f(x_1) l_{n,1}(x) \dots \dots \dots + f(x_n) l_{n,n}(x)$$

ve

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

şeklindedir. Varsayalım ki birinci ve ikinci saç folikülü denklemlerindeki her bir sınır eğrisinin r yarıçapı ve h yükseklik değerleri elimizde olsun (Çizelge 3.1). Burada tek biçim bir Δx olmamakla birlikte r değerlerinin belirli bir düzenle sıralanmış olması gereklidir. Değerlerin belirli aralıklarda olması gereklidir, ancak bu dört nokta ile üçüncü dereceden bir polinom (kübik) geçirilebilir.

Birinci KDD için aşağıdaki veriler mevcuttur

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & x_1 &= 0.02, & x_2 &= 0.18, & x_3 &= 0.1 \\ y_0 &= 0, & y_1 &= -20, & y_2 &= -18, & y_3 &= 5 \end{aligned}$$

$n = 3$ ve $k = 0$ için,

$$L_{3,0} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_{3,0} = \frac{(x - 0.02)(x - 0.18)(x - 0.1)}{(0 - 0.02)(0 - 0.18)(0 - 0.1)}$$

$$L_{3,0} = \frac{(x^2 - 0.18x - 0.02x + 0.0036)(x - 0.1)}{-0.02 \times -0.18 \times -0.1}$$

$$L_{3,0} = \frac{(x^2 - 0.2x + 0.0036)(x - 0.1)}{-0.00036}$$

$$L_{3,0} = \frac{x^3 - 0.1x^2 - 0.2x^2 + 0.02x + 0.0036x - 0.00036}{-0.00036}$$

$$L_{3,0} = \frac{x^3 - 0.3x^2 + 0.0236x - 0.00036}{0.00036}$$

$n = 3$ ve $k = 1$ için,

$$L_{3,1} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_{3,1} = \frac{(x - 0)(x - 0.18)(x - 0.1)}{(0.02 - 0)(0.02 - 0.18)(0 - 0.1)}$$

$$L_{3,1} = \frac{(x^2 - 0.18x)(x - 0.1)}{0.02 \times -0.16 \times -0.08}$$

$$L_{3,1} = \frac{x^3 - 0.1x^2 - 0.2x^2 - 0.18x^2 - 0.018x}{0.000256}$$

$$L_{3,1} = \frac{x^3 - 0.28x^2 + 0.018x}{0.000256}$$

$n = 3$ ve $k = 2$ için,

$$L_{3,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_{3,2} = \frac{(x - 0)(x - 0.02)(x - 0.1)}{(0.18 - 0)(0.18 - 0.02)(0.18 - 0.1)}$$

$$L_{3,2} = \frac{(x^2 - 0.02x)(x - 0.1)}{0.18 \times -0.16 \times -0.08}$$

$$L_{3,2} = \frac{x^3 - 0.1x^2 - 0.2x^2 + 0.002x}{0.0002304}$$

$$L_{3,2} = \frac{x^3 - 0.12x^2 + 0.002x}{0.0002304}$$

$n = 3$ ve $k = 3$ için,

$$L_{3,3} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$L_{3,3} = \frac{(x - 0)(x - 0.02)(x - 0.18)}{(0.1 - 0)(0.1 - 0.02)(0.1 - 0.18)}$$

$$L_{3,3} = \frac{(x^2 - 0.02x)(x - 0.1)}{0.1 \times -0.08 \times -0.08}$$

$$L_{3,3} = \frac{x^3 - 0.18x^2 - 0.02x^2 + 0.0036x}{-0.0064}$$

$$L_{3,3} = \frac{x^3 - 0.2x^2 + 0.0036x}{-0.0064}$$

elde edilir.

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x)$$

olduğundan dolayı

$$p(x) = f(x_0)L_{3,0} + f(x_1)L_{3,1} + f(x_2)L_{3,2} + f(x_3)L_{3,3}$$

Daha sonra tüm $L_{n,k}(x)$ ve $f(x_k)$ değerleri yukarıdaki denkleme yerleştirilerek şu sonuç elde edilmiştir:

$$p(x) = 0 \times \left(\frac{x^3 - 0.3x^2 + 0.0236x + 0.0036}{-0.0064} \right) +$$

$$(-20) \times \left(\frac{x^3 - 0.28x^2 + 0.018x}{0.000256} \right) +$$

$$(-0.18) \times \left(\frac{x^3 - 0.12x^2 + 0.002x}{0.002304} \right) +$$

$$(0.1) \times \left(\frac{x^3 - 0.2x^2 + 0.0036x}{0.0064} \right)$$

$$P(x) = -78125x^3 + 21875x^2 - 1406.25x$$

$$-7812.5x^3 + 937.5x^2 - 15625x$$

$$-15.625x^3 + 3.125x^2 - 0.05625x$$

$p(x)$ polinomu y 'yi temsil ettiğinden dolayı:

$$y = -85953.125x^3 - 22815.625x^2 + 1421.93125x \quad (3.11)$$

Bu birinci KDD'nin sınır eğrilerine dair fonksiyondur ve benzer şekilde ikinci KDD'nin sınır eğrilerine dair $p(x)$ fonksiyonunu bulmak mümkündür. Dolayısıyla Tablo 3.1'deki verilere dayanarak saç folikülünün ikinci KDD'si için:

$$L_{3,0} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_{3,0} = \frac{x^3 - 0.12x^2 + 0.0032x}{0.00012}$$

$$L_{3,1} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_{3,1} = \frac{x^3 - 0.14x^2 + 0.004x}{0.000064}$$

$$L_{3,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_{3,2} = \frac{x^3 - 0.18x^2 + 0.008x}{0.000096}$$

$$L_{3,3} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$L_{3,3} = \frac{x^3 - 0.2x^2 + 0.0036x}{-0.0064}$$

elde edilir. Birinci denklemden izlenen yolun aynısı izlenerek ikinci KDD'nin sınır eğrilerinin fonksiyonunu bulmak için:

$$y = 119932.2917x^3 - 13750x^2 + 3695.833333x + 100 \quad (3.12)$$

Bu denklemler ile kıl folikülünün yarıçapı ve yüksekliği belirlenebilir. (3.11) ve (3.12) denklemleri kıl folikülünün boyutlarının tahmin edilmesini ve gelecekte kıl folikülünün iki ve üç boyutlu olarak çiziminin gerçekleştirilmesini sağlayabilecektir.

4.1 SONUÇ

Bu çalışmada, kıl yüzeyini çizmek amacıyla kısmi diferansiyel denklem yöntemi kullanılmış ve bu amaç doğrultusunda iki farklı denklemden faydalanılmıştır. Söz konusu yöntem kapsamında her bir denklemde dört adet sınır koşulu kullanılmıştır. Daha önce tanımlandığı üzere, yarıçap ve yükseklik değerleri uygun denklemin bulunabilmesi amacıyla değerlendirilmiştir. Sonuç olarak, kıl folikülünü temsil eden denklemler belirlenmiştir. Sınır eğrileri kullanılarak, sınır değer probleminde belirtilen uygun koşullar altında sınır eğrilerinin yarıçap ve yükseklikleri belirlenmiştir.

Elde edilen sonuçların analizinden, analitik olarak çözülmesi zor olan karmaşık matematik problemlerini çözmek için kullanılan sayısal yöntemlerin istenildiği kadar yakınsak sonuçlar verebileceği görüldü. Kısmi diferansiyel denklem yönteminin saç folikülü yapısının fiziksel şeklini modellemek ve temsil etmek için iyi alternatiflerden olduğu gözlemlendi.

Kısmi diferansiyel denkleminin kullanılmasında seçilecek sınır koşullarının saç kökü şeklinin modellenmesi için çok önemli olduğu ve bu sınır şartlarının Biharmonik denklemin çözümünden esinlenilerek elde edilebileceği gösterildi. Ayrıca ayrılabilir çözüm yönteminin, çözümleri üstel ya da trigonometrik fonksiyonlar cinsinden verdiği için saç kökünün modellenmesi için uygun yöntem olarak seçilebileceği görüldü.

Normal saç folikülünün yarıçapı ile yüksekliği arasındaki bağıntıları oluşturan veriler tablo halinde verildi. Bu veriler yardımı ile Lagrange İnterpolasyon tekniği ile yarıçap ve yükseklik arasındaki polinomal denklem elde edildi.

İleriki çalışmalar olarak, bu tezde ele aldığımız yarı analitik bir çözüm yöntemi olarak da bilinen “ayrılabilir çözüm yöntemi” yerine; integral denklemleri, sonlu elemanlar ya da sonlu farklar gibi daha kuvvetli teorik ve nümerik yöntemler seçilebilir. Ayrıca kıl folikülünün ölmesi ya da renginin değişmesi ile ilgili ek

diferansiyel denklemler ya da şartlar oluşturup, probleme monte edilerek daha kompleks cözümler ve ilginç sonuçlar da bulunabilir. Saç folikülüne ait yarıçap uzunluğu ile yükseklik arasında kurulan polinomal denklem, daha fazla sayına nokta ele alınarak daha yüksek mertebeden olacak şekilde (ki bu hatayı minimize edecektir) elde edilebilir. Bunlara ek olarak hata analizleri yapılarak kullanılan metotların güvenilirliği ölçülebilir. Son olarak bu tez çalışması, nümerik yöntemlerin test edilemesi için bir kıyaslama olarak kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- Ahmat, N., Ugail, H., ve Castro G. G., 2011. Modelling the compaction Behaviour of cylindrical pharmaceutical tablets, *International journal of pharmaceutics*, 405, 113-121.
- Bloor, M. I. G. ve Wilson, M. J., 1989. Generating blend surfaces using partial differential equations, *Computer-Aided Design*, 21, 3,165-171
- Botchkarev, V. A. , Botchkareva, N. V., Roth W. , Nakamura M., Chen, L. H., Herzog W., Lindner, G., McMahan J. A. , Peters, C. ve Lauster, R., 1999. Noggin is a mesenchymally derived stimulator of hair-follicle induction, *Nat. Cell Biol.*, 1 , 158-164.
- Castro, G. ve Ugail, H., 2007. Shape morphing of complex geometries using partial differential equations, *Journal of Multimedia*, 2, 6, 15-25.
- Chapman, R. E., 1971. Cell migration in wool follicles of sheep. *Journal Cell Science*,9, 791-803.
- Chase, H. B., 1951. Critical stages of hair development and pigmentation in the mouse. *Physiol. Zool.* 24, 1-9.
- Curtis, F. G. ve Patrick, O.W., 1984. *Applied numerical analysis*, Addison Wesley Publishing Company Inc., ISBN 0-321-13304-8, New York, USA.
- Gat, U., DasGupta, R., Degenstein, L. ve Fuchs, E., 1998. De novo hair follicle morphogenesis and hair tumors in mice expressing a truncated β -catenin in skin, *Cell*, (95) , pp. 605-614
- González, C. G., Ugail, H., Willis, P. ve Palmer, I., 2008. A survey of partial differential equations in geometric design. *The Visual Computer*, 24, 231-225.
- Holbrook, K. A. ve Minami, S. I., 1991. Hair follicle embryogenesis in the human. Characterization of events in vivo and in vitro. *Ann. New York Acad. Sci.* 642,167-196.
- Ito, M., 1986. The innermost cell layer of the outer root sheath in anagen hair follicle: light and electron microscopic study. *Arch. Dermatol. Res.*, 279, 112-119.
- Jahoda, C. A., Mauger, A., Bard, S. ve Sengel, P., 1992. Changes in fibronectin, laminin and type IV collagen distribution relate to basement membrane restructuring during the rat vibrissa follicle hair growth cycle. *J. Anat.*181,47-60.

- Jiyar, J. ve Ahmed, M., 2016. Modeling the shape of red blood cell using PDE method, Mathematics Department, College of Sciences, University of Duhok.
- Kells L. M., 1947. Elementary Differential Equations, 3rd edition McGraw - Hill Book Company, Inc., New York.
- Kratochwil, K., Dull, M., Farinas, I., Galceran, J. ve Grosschedl, R., 1996. Lef1 expression is activated by BMP-4 and regulates inductive tissue interactions in tooth and hair development. *Genes Dev.* 10,1382-1394
- Kulesa, H., Turk, G. ve Hogan, B. L., 2000. Inhibition of Bmp signaling affects growth and differentiation in the anagen hair follicle. *EMBO J.* 19, 6664-6674.
- McElwee, K. ve Hoffmann, R., 2000. Growth factors in early hair follicle morphogenesis. *Eur. J. Dermatol.* 10, 341-350.
- Norhayati, A., 2014. Automatic shape optimization of pharmaceutical tablets using Partial Differential Equations, *Computers and Structures*, 130,1-9.
- Norhayati, A, Ugail H, ve González Castro G., 2011. Method of modelling the compaction behaviour of cylindrical pharmaceutical tablets. *Int. J. Pharm* 405,113–21.
- Oshima, H., Rochat, A., Kedzia, C., Kobayashi, K. ve Barrandon, Y. 2001. Morphogenesis and renewal of hair follicles from adult multipotent stem cells. *Cell* 104, 233-245.
- Panteleyev, A. A. ve Jahoda, C.A.M., 2001. Hair follicle predetermination. *Journal of Cell Science*, 114 (19), 3419-3431.
- Pera, M. F., Reubinoff, B. ve Trounson, A., 2000. Human embryonic stem cells. *J. Cell Sci.* 113, 5-10.
- Philpott, M. ve Paus, R., 1998. Principles of hair follicle morphogenesis. In *Molecular basis of epithelial appendage morphogenesis* (ed. C.-M. Chuong), pp. 75-110. Austin, Texas: RG Landes Company.
- Preedy, V. R. , 2012. Handbook of hair in health and disease. Wageningen academic publishers. The Netherland. ISBN: 978-90-8686
- Reynolds, A. J. ve Jahoda, C. A., 1991. Inductive properties of hair follicle cells. *Ann. New York Acad. Sci.* 642, 226-242.
- Reynolds, A. J. ve Jahoda, C. A. B., 1993. Hair fiber progenitor cells: developmental status and interactive potential. *Semin. Dev. Biol.* 4, 241-250.
- St-Jacques B. , Dassule H.R. , Karavanova I. , Botchkarev V.A. , Li J. , Danielian P.S., McMahon J.A. , Lewis P.M. , Paus R. ve McMahon A. P., 1998. Sonic

- hedgehog signaling is essential for hair development. *Curr. Biol.*, 8, pp. 1058-1068
- Straile, W. E., 1965. Root sheath-dermal papilla relationships and the control of hair growth. In *Biology of the skin and hair growth* (ed. A. G. Lyne and B. F. Short), pp. 35-57. New York: American Elsevier.
- Stenn, K. S., Prouty, S. M. ve Seiberg, M., 1994a. Molecules of the cycling hairfollicle–atabulatedreview.*J. Dermatol. Sci.*, 7, 109-S124.
- Stenn, K. S., Lawrence, L., Veis, D., Korsmeyer, S. ve Seiberg, M., 1994b. Expression of the bcl-2 proto-oncogene in the cycling adult mouse hair follicle. *J. Invest. Dermatol.* 103, 107-111.
- Stenn, K. S., Combates, N. J., Eilertsen, K. J., Gordon, J. S., Pardinas, J. R., Parimoo, S. ve Prouty, S. M., 1996. Hair follicle growth controls. *Dermatol. Clin.* 14, 543-558.
- Stenn, K. S. ve Paus, R., 2001. Controls of hair follicle cycling. *Physiol.Rev.* 81, 449-494.
- Sun, T.-T., Costrels, G. ve Laker, R. M., 1991. Hair follicular stem cells: the bulge-activation hypothesis. *J. Invest. Dermatology.* 96, 77S-78S.
- Tesuque, M., Ito, M., Ito, K. ve Sato, Y., 1990. Cell kinetic study of human and mouse hair tissues using anti-bromodeoxyuridine monoclonal antibody.*J. Dermatology. Sci.* 1, 335-346.
- Tezuka, M., Ito, M., Ito, K., Tazawa, T. ve Sato, Y., 1991. Investigation of germinative cells in generating and renewal anagen hair apparatus in mice using anti-bromodeoxyuridine monoclonal antibody. *J. Dermatol. Sci.* 2, 434-443.
- Ugail, H., 2006. Method of trimming PDE surfaces. *Computers & Graphics.* 30, 225-232.
- Ugail, H., 2003. On the Spine of a PDE Surface. *Mathematics of Surfaces.1*, 169-179.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Shereen Younis Muhyaldeen

Doğum Tarihi ve Yeri: 11.04.1965 Zakho /Irak

E-posta adresi : sta_2014@yahoo.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Baghdad Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1989

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2018