

**T.C**  
**ERCIYES ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**KESİRLİ TÜREVLERDE GEOMETRİK YORUMLAR VE LOTKA  
VOLTERRA DENKLEM SİSTEMİ**

**Hazırlayan**  
**Kübra GÜLTEKİN**

**Danışman**  
**Doç. Dr. Tamer ŞENEL**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2018**  
**KAYSERİ**

**T.C**  
**ERCIYES ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**KESİRLİ TÜREVLERDE GEOMETRİK YORUMLAR VE LOTKA  
VOLTERRA DENKLEM SİSTEMİ**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan**  
**Kübra GÜLTEKİN**

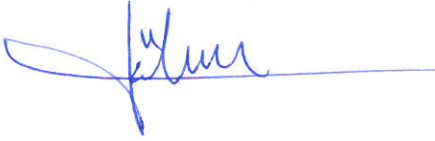
**Danışman**  
**Doç. Dr. Tamer ŞENEL**

**Ağustos 2018**  
**KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Kübra GÜLTEKİN



“Kesirli Türevler, Geometrik Yorumlar ve Lotka Volterra Denklem Sistemi” adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan  
Kübra GÜLTEKİN



Danışman  
Doç. Dr. Tamer ŞENEL



Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ

Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL danışmanlığında Kübra GÜLTEKİN tarafından hazırlanan “Kesirli Türevlerde Geometrik Yorumlar ve Lotka Volterra Denklem Sistemi” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

03.../09.../2018

**JÜRİ:**

Danışman : Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

Üye : Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Bahatdin DAŞBAŞI

**ONAY:**

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 25.../09.../2018 tarih ve 2018/45-54...sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışma konusunu veren, gerek derslerimde gerekse çalıŐmalarımda bana yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Fuat GÜRCAN ve Doç. Dr. Tamer ŞENEL'e bölümümüzün değerli hocalarına ve Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK'e üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca göstermiŐ oldukları sabır, anlayıŐ ve maddi-manevi destekleri için anneme, babam, ablama, kardeŐime ve yeğenim YuŐa KOZAN'a teşekkür ederim



# KESİRLİ TÜREVLERDE GEOMETRİK YORUMLAR VE LOTKA VOLTERRA DENKLEM SİSTEMİ

Kübra GÜLTEKİN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi, Eylül 2018  
Danışman: Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

## ÖZET

Bu tezde kesirli mertebeden türev ve integrallerin farklı tanımları incelendi ve ilgili örnekler verildi. Ele alınan tanımlar aracılığıyla kesin formüller ve bazı özel fonksiyonların kesirli türevleri elde edildi. Kesirli türevlerin uygulandığı çalışma alanları incelendi. Daha sonra kesirli türevin geometrik ve fiziksel yorumu grafiklerle verildi.

Son olarak kesirli mertebeden türev içeren Lotka-Volterra denkleminin genelleştirilmiş biçimi, diğer bir deyişle avcı-av popülasyon modeli incelendi. Çözümlerin varlık ve tekliği ispatlandı ve denge noktalarının kararlılığı incelendi. Ayrıca nümerik çözüm ile elde edilen grafikler verildi.

Kesirli mertebeli model ile tam sayı mertebeli model arasındaki fark incelendi. Her iki sistemdeki Denge Noktasının; tamsayı mertebeli sistem için bir merkez fakat kesirli mertebeli sistem için lokal asimptotik kararlı olduğunu gösteren bir örnek verildi.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli türev, Kesirli integral, Lotka-Volterra, Av-Avcı ,Denge noktaları, Kararlılık, Geometrik ve Fiziksel yorum

# GOMETRIC INTERPRETATIONS IN FRACTIONAL DERIVATIVES AND LOTKA EQUATION SYSTEM

**Kübra GÜLTEKİN**

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Master Thesis, September 2018  
Supervisor: Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL**

## ABSTRACT

In this thesis, different definitions of the fractional order derivative and integrals are examined and some examples related to these definitions are given. By means of these definitions, exact formulas of the fractional derivatives of some special functions are obtained.

The application areas where fractional derivatives are applied are studied. Then the geometric and physical interpretation of the fractional order derivative is given along with the graphs.

Finally, the generalized form of the Lotka-Volterra equation with fractional derivative, in other words the hunter-hunting population model, is examined. The existence and unity of the solutions have been proven. The stability of the equilibrium points was studied and the graphs obtained by the numerical solution were given. The difference between the fractional-order model and the integer-order model was examined. The Equilibrium Point for both systems is examined which is a center for an integer order system, but locally asymptotically stable for a fractional order system.

**Key words:** Fractional derivative, Fractional integral, Lotka-Volterra, Prey-predator, Equilibrium points, Stability, Geometric and Physical interpretation of Fractional derivative

## İÇİNDEKİLER

### KESİRLİ TÜREVLERDE GEOMETRİK YORUMLAR VE LOTKA VOLTERRA DENKLEM SİSTEMİ

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....    | i   |
| YÖNERGEYE UYGUNLUK.....         | i   |
| YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI..... | ii  |
| KABUL VE ONAY.....              | iii |
| ONAY:.....                      | iii |
| TEŞEKKÜR.....                   | iv  |
| ÖZET.....                       | v   |
| ABSTRACT.....                   | vi  |
| İÇİNDEKİLER.....                | vii |
| GİRİŞ.....                      | 1   |

## BÖLÜM 1

### BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 1.1.Gamma Fonksiyonu.....          | 4  |
| 1.2.Beta Fonksiyonu.....           | 8  |
| 1.3.Mittag-Leffler Fonksiyonu..... | 10 |

## BÖLÜM 2

### KESİRLİ TÜREVLE İLGİLİ FARKLI TANIMLAR

|  |    |
|--|----|
| 2.1.L. Euler (1730).....   | 15 |
| 2.2.J.B.N. Fourier (1820-1822).....  | 16 |
| 2.3. N. H. Abel (1823-1826):.....  | 16 |
| 2.4.Liouville (1832-1855).....   | 17 |
| 2.5.G.F.B. Riemann (1847-1876).....  | 18 |
| 2.6.N.Ya. Sonin (1869), A.V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasove<br>(1888), K.Nishimoto(1987-)..... | 18 |
| 2.7.Riemann-Liouville.....   | 18 |
| 2.8.Grünwald-Letnikove.....  | 21 |
| 2.9.M. Caputo (1967).....  | 24 |
| 2.10.K.S. Miller, B. Ross (1993).....  | 25 |

**BÖLÜM 3**  
**BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN KESİRLİ TÜREVİ**

**BÖLÜM 4**  
**KESİRLİ TÜREVİN GEOMETRİK VE FİZİKSEL YORUMU**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4.1.Kesirli İntegrasyonun Geometrik Yorumu: Duvardaki Gölgeler .....</b> | <b>32</b> |
| <b>4.1.1.Sol Tarafli Riemann-Liouville Kesirli İntegrali.....</b>           | <b>32</b> |
| <b>4.1.2.Sağ Tarafli Riemann-Liouville Kesirli İntegrali .....</b>          | <b>35</b> |
| <b>4.1.3.Riesz Potansiyeli.....</b>   | <b>37</b> |
| <b>4.1.4.Feller Potansiyeli .....</b>                                       | <b>38</b> |
| <b>4.1.5.İki Çeşit Zaman-I .....</b>  | <b>39</b> |
| <b>4.2. Kesirli İntegrasyonun Fiziksel Yorumu: Geçmişin Gölgesi .....</b>   | <b>40</b> |
| <b>4.3. Riemann Liouville Kesirli Türevinin Fiziksel Yorumu .....</b>       | <b>41</b> |

**BÖLÜM 5**  
**KESİRLİ MERTEBEDEN LOTKA-VOLTERRA AV-AVCI DENKLEM MODELİ**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>5.1.Varlık ve Teklik.....</b>   | <b>42</b> |
| <b>5.2.Denge Noktaları ve Denge Noktalarının Asimptotik Kararlılığı.....</b> | <b>43</b> |
| <b>5.3.Kesirli Mertebeden Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli .....</b>            | <b>46</b> |
| <b>KAYNAKÇA.....</b>   | <b>51</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>  | <b>57</b> |

## GİRİŞ

Kesirli kalkülüs, kalkülüsteki integral ve türev operatörlerinin geleneksel tanımları dışında gelişen matematiğin bir alanıdır. Yani kesirli üsler tam sayılı üslerin gelişmiş bir halidir.

Kesirli mertebenden türev ve integral 16. yüzyıldan bu yana bilim insanların uğraştığı bir bilim alanıdır. Bu konuda bilinen ilk çalışma, 1695 yılında L'Hospital  $\frac{d^n y}{dx^n}$  türevinde  $n = \frac{1}{2}$  olarak  $\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}}$  in ne anlama geldiğini, yani “n. mertebenin kesirli olması durumunda ne yapmalı?” sorusu üzerinde durduğu çalışmadır.

Daha sonraları, kesirli mertebeden türevler ve integraller hem teoride hem de gerçek dünya problemlerin uygulamasında hızla bir gelişme göstermiştir. Son yıllarda ise kesirli integraller, akışkanları içeren fen ve mühendislik, reoloji (sıvı akışını inceleyen bilim), yayılma hareketi, elektrik devreleri, elektromanyetik teori ve olasılık gibi pek çok alanda olduğu kadar viskoelastik materyallerin incelenmesinde kullanıldı.

Diğer taraftan, tamsayı mertebeli türev ve integrallerin fiziksel ve geometrik yorumları genellikle bilinmesine rağmen kesirli mertebeden türevler ve integrallerin fiziksel ve geometrik yorumları hakkında çok az bilimsel çalışma mevcuttur. Bu operatörlerin 300 yıldan daha fazla kabul edilebilir hiçbir geometrik ve fiziksel yorumu elde edilememiştir[38]. Bu konudaki yorumların eksikliği, New Haven'daki (1974) kesirli kalkülüs hakkındaki ilk uluslararası konferansta kabul edildi ve bu problem açık problemler listesine dahil edildi[21]. 1984'te Strathclyde Üniversitesi'nde (İngiltere), 1989'da Nihon Üniversitesi'nde (Tokyo, Japonya) ve sonraki konferanslarda problemin cevabının bulunamadığı tekrarlandı [19].

Varna'daki (1996) dönüşüm yöntemleri ve özel fonksiyonlar konulu konferansta yapılan yuvarlak masa tartışması [13, 10, 14], sorunun hala çözülmediğini ve o zamandan beri durumun aslında değişmediğini gösterdi.

Kesirli mertebeden integrasyon ve diferansiyeller tamsayı mertebeden integrasyon ve diferansiyel kavramlarının genelleştirilmiş hali olduğundan dolayı, kesirli mertebeden integrasyon ve diferansiyel operatörlerinin fiziksel ve geometrik yorumlarına sahip olmak ideal bir yaklaşımdır. Bu kesirli mertebeden operatörler, tamsayı mertebeden integrasyon ve diferansiyellerin bilinen klasik yorumlarına da bir bağlantı sağlayacaktır.

Bazı bilim insanları geometrik ve fiziksel yorumlara ihtiyaç duyulması nedeniyle kesirli mertebeden türev integralleri fraktal geometriyle [18,27,9,16] ilişkilendirmeye çalışmıştır.

Bunların yanı sıra “Fraktal yönelimli” çalışmalar, kesirli mertebeden integrasyon ve diferansiyellerin yorumlanması ile ilgili bazı yeni düşünceler sunmuştur[16]. Kesirli türevlerin ve / veya kesirli integrallerin uygulandığı her bir problem, bu tipik özelliklerin bir örneği olarak düşünülmesine rağmen, [16] çalışmasında sorulan soruya kesin bir cevap olarak kabul edilemez.

Kesirli mertebeden integrasyon ve diferansiyellerin geometrik yorumuna farklı bir yaklaşım, F. Ben Adda [1, 2] tarafından önerilmiştir. Ancak, bu çalışmada herhangi bir geometrik şekil görülmemektedir, dolayısıyla kesirli türevlerle ve integrallerle ilgili kabul edilebilir bir geometrik yorumdan bahsetmek zordur.

Kesirli mertebeden türevler ve integraller hem teoride hem de gerçek dünya problemlerin uygulamasında hızla gelişen bir alandır. Son yıllarda kesirli integraller, akışkanları içeren fen ve mühendislik, reoloji (sıvı akışını inceleyen bilim), yayılma hareketi, elektrik devreleri, elektromanyetik teori ve olasılık gibi pek çok alanda olduğu kadar viskoelastik materyallerin incelenmesinde kullanıldı.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, tam mertebeden diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş hali olduğundan dolayı, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri kullanarak yapılan modelleme çalışmaları gerçek yaşamdaki olayları modellerken ihmal etmek zorunda kaldığımız parametrelerden kaynaklanan hafızaları(geçmişin etkilerinin ihmalini) en aza indirmemize yardımcı olmaktadır. Böylece kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri kullanarak yapılan modeller daha gerçekçi ve uygulanabilir sonuçlar vermektedir[2]. Bu nedenle kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile oluşturulan modeller ilgi çekici ve özel çalışmalar olarak ortaya çıkmaktadır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin genellikle bir tam çözümleri bulunmadığından, bu tip denklemleri çözmek için değişik nümerik yöntemler kullanılmakta ve üzerinde çalışılan modellerin özellikleri bu yöntemlerin oluşturduğu sonuçlara göre yorumlanmaktadır.

Bu tez çalışmasının temel amacı, kesirli mertebeden türev ve integral kavramlarını açıklamak, geometrik ve fiziksel yorumlarına kısa bir giriş yapmak, kesirli diferansiyel denklemlerle oluşturulan bazı matematiksel modelleri ve özelliklerini ifade etmek ve son olarakta kesirli mertebeden Lotka Volterra (av-avcı) modelini incelemektir.

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli analizde önemli rol oynayan bazı özel fonksiyonların tanımı ve özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde kesirli türev ve integrallerle ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde bazı fonksiyonların türevleri ele alınmıştır. Daha sonraki bölümde kesirli türevin geometrik ve fiziksel yorumunu ifade ettik. Son bölümde ise Lotka Volterra (av-avcı) modelinin kesirli mertebeden türevlenmiş şekli verilmiştir.

## BÖLÜM 1

### BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

#### 1.1.Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(z)$  gamma fonksiyonunu, kompleks düzlemde  $Re(z) > 0$  ve  $\log(t) = \log_e t$  olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Yani  $z = x + iy$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(z) = \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklindedir.

#### Gamma Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

$$\text{i) } \Gamma(z + 1) = z \Gamma(z) \quad (1.3)$$

$$\text{ii) } \Gamma(n + 1) = n!$$

$$\text{iii) } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

iv) Gamma fonksiyonunun limit gösterimi  $Re(z) > 0$  için

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

dir.

**İspat:**

i)  $\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$  eşitliğinde

$$t^z = u \text{ ise } zt^{z-1}dt = du$$

$$\int e^{-t} dt = \int du \text{ ise } -e^{-t} = v$$

dersek kısmi integrasyon yönteminden;

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z] \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

ii)  $\Gamma(1) = 1$  ve  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  eşitlikleri kullanırsak  $z = 1, 2, 3 \dots$  için

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1.0! = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

.

.

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

olur.

iii)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt$$

Burada  $t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$  ve  $t = 0$  için  $u = 0$ ,  $t = \infty$  için  $u = \infty$  alınırsa integral

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{-1} 2udu = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = I$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2} dudv &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} e^{-u^2} dudv = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} dudv = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= I^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2} dudv \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rd\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\
&= \frac{2\pi(-e^{-r^2})}{2} \Big|_0^{\infty} \\
&= 0 - 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

O halde

$$I^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

olup ispat tamamlanır.

iv) Bu teoremin ispatı için yardımcı bir fonksiyon alalım. Bu fonksiyon

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$

şeklinde olsun. Burada  $\tau = \frac{t}{n}$  için  $d\tau = \frac{1}{n} dt \Rightarrow nd\tau = dt$  olur. Sınırlar ise  $t = 0$  için  $\tau = 0$  ve  $t = n$  için  $\tau = 1$  olur.

Bunları yardımcı fonksiyonda yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= \int_0^1 (1 - \tau)^n (n\tau)^{z-1} nd\tau \\
&= \int_0^1 (1 - \tau)^n n^z \tau^{z-1} d\tau
\end{aligned}$$

$$= n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau$$

şeklinde bulunur.

Kısmi integrasyon uygularsak,

$$(1 - \tau)^n = u \Rightarrow -n(1 - \tau)^{n-1} d\tau = du$$

$$\int \tau^{z-1} d\tau = \int dv \Rightarrow \frac{\tau^z}{z} = v$$

dönüşümü yapılır. O halde

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau &= (1 - \tau)^n \frac{\tau^z}{z} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\tau^z}{z} n(1 - \tau)^{n-1} \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n}{z} \int_0^1 \tau^z (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$f_n(z) = \frac{n^z n}{z} \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau$$

yazılır. n kez kısmi integrasyon alınırsa

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{n^z n(n-1) \dots 1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 (1 - \tau) \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \frac{\tau^{z+n}}{z+n} \Big|_0^1 \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)(z+n)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca iyi bilinen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

eşitliğini kullanalım. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

elde ederiz.

## 1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(x) > 0 \text{ ve } \text{Re}(y) > 0$$

şeklinde tanımlanır.

### Beta Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

i)

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} dt, \quad \text{Re} > 0, \text{Re}(y) > 0$$

ii)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

iii)

$$B(x, y) = B(y, x)$$

iv)

$$B(x, y) = \int_0^\pi \frac{t^{x-1}}{(4t)^{x+y}} dt$$

v)

$$B(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n-y}{n}}{x+n}$$

vi)

$$B(x, y) = \frac{x+y}{xy} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{xy}{n(x+y+n)}\right)^{-1}$$

vii)

$$B(x, y).B(x+y, 1-y) = \frac{\pi}{x \sin(\pi y)}$$

Burada Gama ile Beta fonksiyonu arasında önemli bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi gösteren teorem (ii) de verilmiştir. Bunu ispatlamadan önce (i) deki eşitliği gösterelim.

Burada  $t = \sin^2 a \Rightarrow dt = 2 \sin a \cos a da$  dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 a)^{x-1} (\cos^2 a)^{y-1} 2 \sin a \cos a da \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin a)^{2x-1} (\cos a)^{2y-1} da \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi ise (ii) deki önemli maddeninin ispatını verelim.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

tanımına  $t = s^2 \Rightarrow dt = 2s ds$  dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{2x-2} 2s ds \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{2x-1} ds \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\Gamma(y) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2y-1} dt$$

yazalım. O halde

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s^2+t^2)} s^{2x-1} t^{2y-1} dt ds$$

olup  $s = r \cos \theta$ ,  $t = r \sin \theta$  kutupsal koordinat dönüşümü yapılır, burada  $|J| = r$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r^{2(x+y)-2} e^{-r^2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} r dr d\theta \\ &= \left[ 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta \right] \left[ 2 \int_0^{\infty} r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr \right] \\ &= \Gamma(x+y) B(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenilen eşitliktir.

### 1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyon  $e^z$  tüm mertebeli diferansiyel denklemler teorisinde önemli rol oynar.

Tek parametrelili Mittag – Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.5)$$

şeklinde dir. Burada (1.5) dikkate alınırsa,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

.....

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

dir.

Hiperbolik sinüs ve cosinüs fonksiyonları (1.5) Mittag-Leffler fonksiyonunun özel durumlarıdır.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z}$$

Hiperbolik sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının genellemeleri olan n. mertebedeki hiperbolik fonksiyonlar, Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla,

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde tanımlanır.

Sinüs ve cosinüs fonksiyonların genellemeleri olan n. mertebeli trigonometrik fonksiyonlar:

$$k_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n$$

ve

$$E_{1/2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} = e^{(z^2)} \operatorname{erfc}(-z)$$

şeklindedir. Burada  $\operatorname{erfc}(z)$  hata fonksiyonu

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$$

şeklinde tanımlanır.

$\beta = 1$  için tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z)$$

dir.

## BÖLÜM 2

### KESİRLİ TÜREVLE İLGİLİ FARKLI TANIMLAR

Bu bölümde hafıza ve kesirli matematik arasındaki ilişkiyi belirteceğiz. Daha sonra kesirli mertebeden türevlerin bazı özelliklerini ve farklı tanımlarını inceleyeceğiz

Kompleks uyarlanabilir bir sistem, homojen olmayan ve birbirini etkileyen uyarlanabilir etmenlerden oluşur. Bir kompleks uyarlanabilir sistemin önemli bir özelliği, ayrı ayrı bileşenlerin oluşturduğu elemanlar düzeyinde var olmayan sistemi, bir bütün olarak ele aldığımızda yeni bir sistem oluşturmasıdır.

Bu tür sistemler için tipik örnekler, beyin bağışıklık sistemi, ekonomi, sosyal sistem, ekoloji, böcek sürüsü v.s.

Bu nedenle kompleks bir sistemi anlamak için bu sistemi bir bütün olarak incelemek zorunluluğu ortaya çıkmaktadır, yani sistem bileşenleri ayrıştırılmamalıdır. Bu bütünsel yaklaşım düşüncesi, herhangi bir sistemi kendi bileşenlerine ayrıştırmaya çalışan ve bu bileşenleri anlayarak tüm sistemi anlayabilmeyi ümit eden standart indirgemeci yaklaşıma karşıdır.

[61]çalışmasında kesirli denklemlere bütüncül yaklaşım ile bazı problemleri çözdüğü görülmüştür. Örnek olarak aşağıdaki Denklemini göz önüne alalım:

$$\frac{df}{dt} = -\lambda^2 \int_0^t k(t-t')f(t')dt'$$

Eğer bu sistemin hafızası yoksa bu durumda

$$k(t-t') = \delta(t-t')$$

dir. Eğer bu sistem ideal bir hafızaya sahip ise bu takdirde

$$k(t - t') = \begin{cases} 1 & t > t' \text{ ise} \\ 0 & t' > t \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Laplace dönüşümü kullanıldığında eğer hiçbir hafıza yok ise  $L[f] = 1$  ve mükemmel bir hafıza için  $L[f] = \frac{1}{s}$  olur, o halde ideal olmayan hafıza durumunun  $L[f] = \frac{1}{s^\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  olarak verilmesi gerekir. Bu durumda yukarıdaki sistem

$$\frac{df}{dt} = -\lambda^2 \int_0^t k(t - t') f(t') dt'$$

$$f(t) = f_0 E_{\alpha+1}(-\lambda^2 t^{\alpha+1})$$

olur. Burada

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Mittag-Leffler fonksiyonudur. Aynı zamanda fraktallar ile kesirli türevlenme arasında bir ilişkinin olduğu tartışılır. Üstelik Hafızaya sahip sistemlerin genelde Hafızası olmayan sistemlerden daha kararlı olduğu bilindiğinden dolayı aşağıdaki kanıya varılmıştır[62].

“Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler en azından, tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler kadar karardır[62].”

Bölüm 5’ de bu kanıyı destekleyen hem analitik hem de nümerik sonuçlar verilecektir. Şimdi kesirli mertebeden integrallenebilme ve türevlenebilmenin tanımlarını verelim.

**Tanım 2.3:**  $f(t), t > 0$  fonksiyonunun  $\beta \in \mathbb{R}^+$  mertebeden kesirli integrali

$$I^\beta f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s) ds$$

ile tanımlanır ve  $f(t), t > 0$  in  $\alpha \in (n-1, n)$  mertebeden kesirli türevi

$$D_*^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t)$$

ile tanımlanır. Burada  $D_* = \frac{d}{dt}$  şeklinde alınmıştır.

Aşağıdaki özellikler kesirli türevlerin ve kesirli integrallerin temel özelliklerinden bazılarıdır[51 – 57,59].

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$  ve  $\alpha \in (0,1)$  olsun. Bu durumda,

i)  $I_\alpha^\beta : L^1 \rightarrow L^1$  ve  $f(x) \in L^1$  ise bu durumda

$$I_a^\gamma I_a^\beta f(x) = I_a^{\gamma+\beta} f(x)$$

dir.

ii)  $\lim_{\beta \rightarrow n} I_a^\beta f(x) = I_a^n f(x)$  yakınsaması  $n = 1,2,3, \dots$  için  $[a, b]$  aralığı üzerinde düzgündür. Burada

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(s) ds$$

dir

iii)  $\lim_{\beta \rightarrow 0} I_\alpha^\beta f(x) = f(x)$  yakınsaması zayıftır.

iv)  $f(x)$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde mutlak sürekli ise bu takdirde

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} D_*^\alpha f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

dir.

v)  $f(x) = k \neq 0$  ve  $k$  bir sabit ise, bu durumda

$$D_*^\alpha k = 0$$

dir.

**Lemma 2. 1:**  $\beta \in (0,1)$  olsun.  $f \in C[0, T]$  ise, bu takdirde

$$I^\beta f(t) \Big|_{t=0} = 0$$

dır.

### 2.1.L. Euler (1730)

Euler Gama fonksiyonunun aşağıdaki

$$\Gamma(m+1) = m(m-1) \dots (m-n+1) \cdot \Gamma(m-n+1)$$

özelliğini kullanarak:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m \cdot (m-1) \dots (m-n+1) \cdot x^n$$

formülülünü genelleştirdi ve

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

elde etti. Gamma aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0$$

## 2.2. J.B.N. Fourier (1820-1822)

İntegral gösterimi yardımıyla

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(px - pz + n\frac{\pi}{2}\right) dp$$

yazmıştır.

## 2.3. N. H. Abel (1823-1826):

Abel

$$\int_0^x \frac{s'(\eta) d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \varphi(x)$$

integral gösterimini keyfi  $\alpha$  için inceledi ve

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \varphi(x)}{dx^{-\alpha}}$$

yazdı.

#### 2.4.Liouville (1832-1855)

i) Liouville'nin ilk tanımında, bir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$$

fonksiyonun üstel gösterimine göre, o

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = a^m e^{ax}$$

formülünü

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}$$

olarak genelleştirdi.

ii) Bu tanımın ikinci tipi

$$\int_0^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(x+\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

$$\int_0^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(x-\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

kesirli integralidir.

Yukarıdaki formüllerde sırasıyla  $\tau = x+\alpha$  ve  $\tau = x-\alpha$  yı yerine yazarsak

$$\int_0^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} (x-\tau)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau$$

$$\int_0^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x (x-\tau)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau$$

elde edilir.

iii) Kesirli türev içeren üçüncü tanım,

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu} \left( F(x) \frac{\mu}{1} F(x+h) + \frac{\mu \cdot (\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x+2h) - \dots \right)$$

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{h^\mu} \left( F(x) \frac{\mu}{1} F(x-h) + \frac{\mu \cdot (\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x-2h) - \dots \right)$$

dır.

### 2.5. G.F.B. Riemann (1847-1876)

Riemann'ın kesirli integral tanımı,

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(t)$$

dir.

### 2.6. N.Ya. Sonin (1869), A.V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasove (1888), K.Nishimoto(1987-)

Sonin, Letnikov, Laurent, Nekrasove ve Nishimoto

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

Cauchy İntegral Formülünü göz önüne aldılar ve  $n - yi$   $\nu$  ile yer değiştirerek

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

yi elde ettiler.

### 2.7. Riemann-Liouville

Kesirli hesabın popüler tanımı Riemann-Liouville

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}, \quad (m-1 \leq \alpha < m)$$

şeklinde tanımlamışlardır.

**Örnek 2.1** :  $f(t) = t^2$  fonksiyonunun  $\frac{1}{2}$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplayalım.

Riemann-Liouville kesirli türevi,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklindeydi. Burada  $m = 1, \alpha = \frac{1}{2}$  ve özel olarak  $a = 0$  alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau^2 d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$t - \tau = u^2, -d\tau = 2udu$  değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{-(t-u^2)^2 2udu}{(u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 -2(t-u^2)^2 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 (-2t^2 + 4tu^2 - 2u^4) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left\{ -2t^2 \sqrt{t} - \frac{4}{3} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left\{ \left( 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) t^{\frac{5}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left( \frac{16}{15} t^{\frac{5}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{5}{2} \frac{16}{15} t^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{8t\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

**Örnek 2.2 :**  $f(t) = (2t - a)^2$  fonksiyonu  $\frac{3}{2}$ . türevini R-L tanımını kullanarak hesaplayalım.

$\alpha = \frac{3}{2}$  için  $m = 2$  olduğu aşıkardır.

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})} \frac{d^2}{dt^2} \int_a^t (t-\tau)^{2-\frac{3}{2}-1} (2\tau-a)^2 d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^2}{dt^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (2\tau-a)^2 d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{t-a} u^{-\frac{1}{2}} (2t-a-2u)^2 du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{t-a} \left[ (2t-a)^2 u^{-\frac{1}{2}} - 4(2t-a)u^{\frac{1}{2}} + 4u^{\frac{3}{2}} \right] du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \left[ 2(2t-a)^2 (t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{3} (2t-a) (t-a)^{\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{16}{3} (t-a)^{\frac{5}{2}} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{(t-a)^{-\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\pi}} [-23a^2 + 56at - 32t^2]$$

## 2.8.Grünwald-Letnikove

Anton Karl Grünwald (1830-1920) ve Aleksey Vasilievich Letnikov (1837-1888), kesirli mertebeden türev ve integrali tanımlamak için türevin genel tanımından ve gama fonksiyonunu kullanmıştır.

Grünwald-Letnikov kesirli türevin nasıl elde edildiği aşağıda açıklanmıştır.  $y = f(t)$  sürekli bir olmak üzere , bu fonksiyon birinci mertebeden türev,

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

biçimindedir. Bu tanımı kullanarak,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2f}{dt^2} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h_1)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h_2)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(t-h_1) - f(t-h_1-h_2)}{h_2}}{h_1} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadeye  $h = h_1 = h_2$  alınırsa,

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}$$

ikinci mertebeden türev elde edilir. Bu şekilde türev alınmaya devam edilirse n.mertebeden türev,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot \binom{n}{r} f(t-rh)$$

olarak bulunur. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}$$

şeklindedir.  $f^{(n)}(t)$  ifadesi n-nin tam sayı olmayan değerleri için genelleştirilebilir .Bu durumda n-nin pozitif değerleri için kesirli türev , negatif değerleri için kesirli integral elde edilir.

$\alpha$  keyfi tamsayı ,  $n$  pozitif tamsayı olmak üzere

$$f_h^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh)$$

olup

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t) = \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha}$$

olur.

Yukarıda verilen türevin genel tanımından  $h, n \rightarrow \infty$  için  $[a, t]$  aralığında  $n$  eşit parçaya bölünürse, yani  $h = (t - a)/n$  olmak üzere  $\alpha$  mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türev formülü,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{r! \Gamma(\alpha - r + 1)} f(\alpha - r + 1) \end{aligned}$$

olarak yazılır .

Bu formülün farklı bir şekilde ifadesi ise ;

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha + m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklinde verilmiştir. Bu tanımda  $k = 1, 2, \dots, m + 1$  olmak üzere  $f^{(k)}(t)$  türevleri  $[a, t]$  aralığında sürekli,  $m, m > \alpha - 1$  şartını sağlayan bir tamsayı ve  $m$ -nin en küçük değeri ise  $m < \alpha < m + 1$  ile belirlenir.

**Örnek 2.3** :  $f(t) = t^2 + 1$  fonksiyonunun  $\frac{1}{2}$  Mertebeden türevini G-L tanımını kullanarak bulalım.

$\alpha = \frac{1}{2}$  için  $m < \alpha < m + 1$  şartını sağlayan  $m$  tamsayısı 0 dır.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  olduğundan

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\
&= \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} f'(\tau) d\tau \\
&= \frac{(a^2+1)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (2\tau) d\tau \\
&= \frac{(a^2+1)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t-a} u^{-\frac{1}{2}} (t-u) du \\
&= \frac{(a^2+1)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t-a} (tu)^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{(a^2+1)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( t \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{t-a} \\
&= \frac{(a^2+1)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{a^2+1}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} + 4t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
&= \frac{3a^2 + 12t(t-a) - 4(t-a)^{\frac{5}{2}} + 3}{3(t-a)^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

**Örnek 2.4 :**  $f(t) = t$  fonksiyonunun  $\frac{1}{2}$ . mertebeden Grünwald- Letnikov kesirli türevini hesaplayalım. Grünwald- Letnikov kesirli türevinin tanımı

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklindeydi. Burada  $\alpha = \frac{1}{2}$  alındığında  $m = 0$  olur. Özel olarak da  $a = 0$  alalım.

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}+k}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\tau)^{0-\frac{1}{2}} f^{(1)}(\tau) d\tau$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

eşitliği kullanılırsa,

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{0-\frac{1}{2}} 1 d\tau$$

$(t-\tau) = u^2$ ,  $-d\tau = 2udu$  değişken dönüşümü yapılırsa,  $f(t)$  fonksiyonunun  $\frac{1}{2}$  mertebeden kesirli türevi,

$${}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

şeklinde elde edilir.

### 2.9.M. Caputo (1967)

İkinci popüler tanımı ise Caputo yapmıştır.

**Tanım 2.4 :**  $f \in C^n[a, b]$ ,  $\alpha < 0$  ve  $m - 1 < \alpha < m$  olmak üzere;

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

ile verilen ifadelerle sırasıyla  $p$  mertebeden sol ve sağ Caputo Kesirli türev denir.

Bu tanım 1967 yılında İtalyan matematikçi Michelo Caputo tarafından verilmiştir. Bu nedenle  ${}_a^C D_x^p f(x)$  ve  ${}_x^C D_b^p f(x)$  sembolleri Caputo türevi olarak adlandırılmıştır.

${}^c D_x^p f(x)$  sembolü yerine  ${}^c D_{a^+}^p f(x)$  ifadesi ,  ${}^c D_b^p f(x)$  sembolü yerine,  ${}^c D_{a^-}^p f(x)$  sembolü de kullanılmaktadır.

**Örnek 2.5 :**  $f(t) = c$  fonksiyonunun  $\frac{1}{2}$ . mertebeden kesirli türevini Caputo yardımıyla hesaplayalım.

Caputo kesirli türevi,

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}$$

şeklindeydi. Burada  $m = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  alındığında,

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{0 d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1.0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Sabit bir fonksiyonda değişim olamayacağı için, sabit bir fonksiyonunda kesirli türevi normal türevde olduğu gibi "0" dır.

### 2.10.K.S. Miller, B. Ross (1993)

Miller ve Ross türev operatörü D yi

$$D^{\bar{\alpha}} = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

olarak kullanıldı. Burada  $D^{\alpha_i}$  Riemann-Liouville veya Caputo'nun tanımlarıdır.

## BÖLÜM 3

### BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN KESİRLİ TÜREVİ

Bu bölümde bazı özel fonksiyonların kesirli türev tanımınlarını ve parametrelerin spesifik değerleri için örnekler vereceğiz.

**Teorem 3.1 :**  $\alpha$  keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha}$$

dir.

**İspat:**  $\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^m = \frac{d}{dx} (mx^{m-1}) = m(m-1)x^{m-2}$$

.

.

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

$m$  ve  $n$  pozitif tamsayıları için  $\Gamma(m+1) = m!$ ,  $\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$  olduğundan yukardaki eşitlikte yerine yazarsak ,

$$D^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

dir. Burada  $n$  yerine  $\alpha$  ,  $m$  yerine  $\beta$  yazarsak,

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha}$$

elde edilir.

Özel olarak  $\alpha = \frac{3}{2}$  ve  $\beta = 2$  alınırsa,

$$\begin{aligned}
 D^{\frac{3}{2}}x^2 &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 2)}{\Gamma(\frac{3}{2} + 2 + 1)}x^{\frac{3}{2}-2} \\
 &= \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(9/2)}x^{-1/2} \\
 &= \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(1 + 7/2)}x^{-1/2} \\
 &= \frac{\Gamma(7/2)}{7/2\Gamma(7/2)}x^{-1/2} \\
 &= \frac{2}{7}x^{-1/2}
 \end{aligned}$$

**Teorem 3.2 :**  $\alpha$  keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$D^\alpha e^{\alpha x} = \alpha^\alpha e^{\alpha x}$$

şeklindedir.

**İspat :**  $\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}e^{\alpha x}\right) = \frac{d}{dx}\alpha e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

.

.

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x}$$

dir. Burada n yerine  $\alpha$  yazılırsa

$$D^\alpha e^{\alpha x} = \alpha^\alpha e^{\alpha x}$$

eşitliğini elde ederiz.

**Teorem 3.3 :**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(a_n x)$$

şeklinde bir fonksiyon olsun. O halde

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha \exp(a_n x)$$

elde edilir.

**İspat:**  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$$

şeklinde alalım.  $f(x)$  in bir kere türevini alalım

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d}{dx} (e^{a_n x}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n e^{a_n x} \end{aligned}$$

buluruz. Fonksiyonun bir kez daha türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n e^{a_n x} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d}{dx} (e^{a_n x}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^2 e^{a_n x}$$

buluruz. O halde

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^m e^{a_n x}$$

elde ederiz. Burada  $m$  yerine  $\alpha$  yazarsak

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}$$

eşitliğini elde ederiz.

**Teorem 3.4 :**  $\alpha$  keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$D^\alpha [\cos(ax)] = \alpha^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha + ax\right)$$

$$D^\alpha [\sin(ax)] = \alpha^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha + ax\right)$$

dir.

**İspat:**  $D^\alpha e^{iax} = (ia)^\alpha e^{iax} = i^\alpha \alpha^\alpha e^{iax}$  ve  $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$  olup

$$\begin{aligned} D^\alpha e^{iax} &= \left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^\alpha \alpha^\alpha e^{iax} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi \alpha}{2} + ax\right)} \alpha^\alpha \end{aligned}$$

dir.

$$D^\alpha [\cos(ax) + i\sin(ax)] = \alpha^\alpha \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha + ax\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha + ax\right) \right\}$$

olup buradan

$$D^\alpha [\cos(ax)] = \alpha^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha + ax\right)$$

$$D^\alpha [\sin(ax)] = \alpha^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha + ax\right)$$

bulunur.

Özel olarak  $\alpha = \frac{3}{2}$  ve  $\alpha = 2$  alırsak

$$D^{\frac{3}{2}}[\cos(2x)] = 2^{\frac{3}{2}}\cos(\pi + 2x)$$

$$D^{\frac{3}{2}}[\sin(2x)] = 2^{\frac{3}{2}}\sin(\pi + 2x)$$

elde edilir.

**Teorem 3.5 :**  $\alpha$  keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$D^{\alpha}[\cosh(\alpha x)] = \frac{\alpha^{\alpha}}{2}\{e^{\alpha x} + (-1)^{\alpha}e^{-\alpha x}\}$$

$$D^{\alpha}[\sinh(\alpha x)] = \frac{\alpha^{\alpha}}{2}\{e^{\alpha x} + (-1)^{\alpha+1}e^{-\alpha x}\}$$

dir.

**İspat:**

$$\cosh(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}$$

$$\sinh(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

olup

$$\begin{aligned} D^{\alpha}[\cosh(\alpha x)] &= \frac{1}{2}\{D^{\alpha}e^{\alpha x} + D^{\alpha}e^{-\alpha x}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\alpha^{\alpha}e^{\alpha x} + (-\alpha)^{\alpha}e^{-\alpha x}\} \\ &= \frac{\alpha^{\alpha}}{2}\{e^{\alpha x} + (-1)^{\alpha}e^{-\alpha x}\} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D^\alpha[\sinh(\alpha x)] &= \frac{1}{2}\{D^\alpha e^{\alpha x} - D^\alpha e^{-\alpha x}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\alpha^\alpha e^{\alpha x} - (-\alpha)^\alpha e^{-\alpha x}\} \\ &= \frac{\alpha^\alpha}{2}\{e^{\alpha x} + (-1)^{\alpha+1}e^{-\alpha x}\} \end{aligned}$$

bulunur.



## BÖLÜM 4

### KESİRLİ TÜREVİN GEOMETRİK VE FİZİKSEL YORUMU

Bu bölümde, zor ve eski bir problemin çözümüne yeni bir yaklaşım oluşturan Igor Podlubny [22] çalışmasını inceleyeceğiz .

Kesirli mertebeden 3 farklı integrasyon tanımının basit ve gerçek geometrik yorumunu vererek başlayalım. Bunlar sırasıyla, soldan(sol taraflı) ve sağdan(sağ taraflı) Riemann-Liouville kesirsel integrasyon, Riesz potansiyeli ve Feller potansiyel integralleridir. Bu yorumlara dayanarak, Riemann – Liouville kesirli integrasyonunun fiziksel bir yorumu verilecektir.

#### 4.1.Kesirli İntegrasyonun Geometrik Yorumu: Duvardaki Gölgeleler

Bu kesimde, önce sol ve sağ taraflı Riemann – Liouville kesirli integrallerinin geometrik bir yorumunu yaptıktan sonra Riesz potansiyelini ele alacağız.

##### 4.1.1. Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

$\alpha$ . basamaktan sol-taraflı

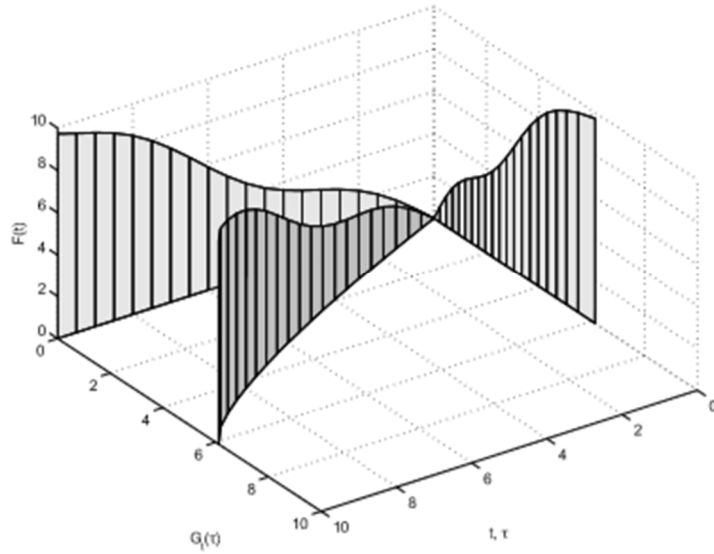
$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (4.1)$$

Riemann-Liouville kesirli integralini ele alalım

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad (4.2)$$

formunda yazalım. fonksiyonununda ve alınırsa

elde edilir. Şimdi, sabit bir  $t$  değeri için (4.2) integrali Stieltjes integraline dönüşür. G.L. Bullock'un makalesindeki yöntem kullanılırsa değişkenlerini eksen olarak kabul edelim ve düzleminde için fonksiyonunu çizelim. Elde edilen eğri boyunca nin değişen uzunlukları için bir "çit elde edilir", buradan çitin üst kenarı üç boyutlu bir eğrisidir. Bu "çit" hem yüzeyine ve hem de yüzeyine yansıtılabilir (bakınız şekil 4.1):



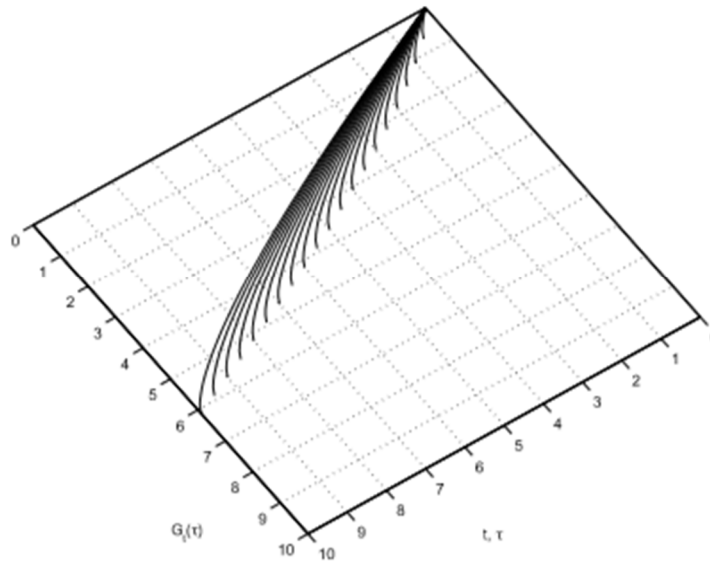
Şekil 4.1: "Çit" ve gölgeleri: için ve

- Bu "çitin" düzlemine yansımasından oluşan alan

—

integralinin değerine tekabül eder.

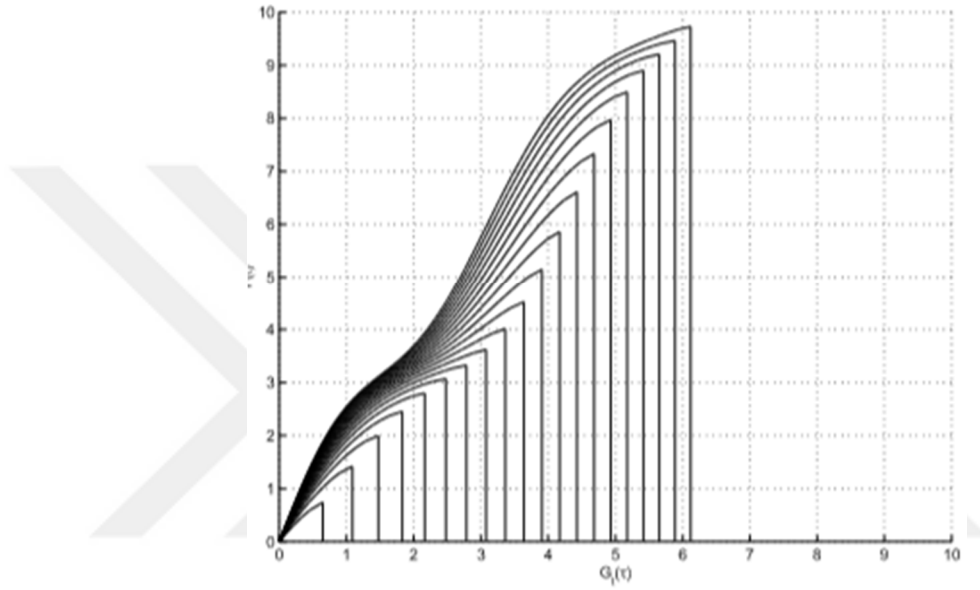
- Aynı "çitin" düzlemine yansımasının alanı (4.2) integralinin ya da ona karşılık gelen (4.1) kesirli integralinin değerine tekabül eder. Diğer bir deyişle, elde edilen "çit" iki duvar üzerinde iki gölge oluşturur. Bunların ilki, duvarında olan, iyi bilinen " " eğrisinin altında kalan alandır.", ki bu (4.5) integralinin bir standart geometrik yorumudur. duvarının üzerindeki "gölge" sabit bir değeri için (4.1) kesirli integralinin bir geometrik yorumudur. Aşıkarak, için "gölgeler" eşittir. Bu, klasik belirli integralin (geometrik bakış açısından) sol-tarafli Riemann-Liouville kesirli integralinin özel bir durumu olduğunu gösterir. değişirken yani nin artması durumunu ele alalım. t değişirken "çit" in boyu ve belirli bir durumda şekli de eş zamanlı olarak değişir. Bu durum için bazı t değerleri için örneklem Şekil 4.2 de görülebilir.



**Şekil 4.2:**

için çit şeklinin değişim süreci

Eğer değişen "çit" ile birlikte duvarı üzerindeki "gölge"nin değişimi izlenirse bu durumda nin bir fonksiyonu olarak (4.1) kesirli integralinin dinamik bir geometrik yorumu elde edilir (bakınız Şekil 4.3).



**Şekil 4.3:**

çin gölgenin zamanlı değişim süreci

#### 4.1.2. Sağ Tarafli Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

basamaktan sağ tarafli

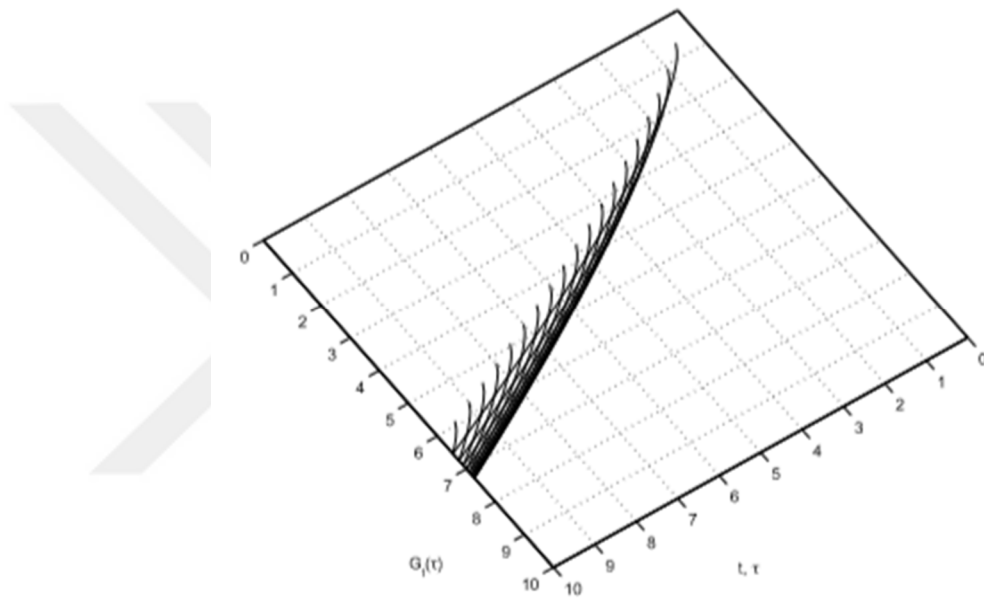
\_\_\_\_\_

Riemann-Liouville kesirli integralini ele alalım ve

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

formunda yazalım. Bu durumda sol-tarafli Riemann-Liouville kesirli integralinin geometrik yorumuna benzer bir geometrik yorum sunulabilir. Fakat, bu durumda "çit" tabanında herhangi bir sabit nokta yoktur. , üst sınır değeri "çit" şekil değiştirdikçe düzleminde doğrusu boyunca hareket eder. Bu hareket Şekil 4.4 de incelenebilir. (Sol-tarafli integral durumunda, sol bitim noktası olan sabit noktadır ve hareket etmez.)



**Şekil 4.4:** için çit şeklinin değişim süreci

Geometrik yorumun diğer tüm parçaları aynı kalır: "çit" şeklini 0'dan b'ye değiştikçe değiştirir ve duvarlardaki bu "çit" in değişen gölgeleri ve buna bağlı olarak Sağ tarafli Riemann-Liouville kesirli integrali (4.6) ve hareketli alt limit ile klasik integrali temsil eder:

—

Açıkçası, için her iki "gölgeler" eşittir. Bu nedenle, sadece sol tarafli değil, aynı zamanda sağ tarafli Riemann-Liouville kesirli integrasyonun geometrik açıdan bile belirli bir durum olarak klasik kesin integrasyonu içerdiğini görüyoruz.

### 4.1.3. Riesz Potansiyeli

Riesz potansiyeli [20,21]

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(\tau) |t - \tau|^{\alpha-1} d\tau \quad (4.10)$$

sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrallerin toplamıdır. Böylece

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau \quad (4.11)$$

Riesz potansiyeli (4.10) formda yazılabilir

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(\tau) dr_t(\tau) \quad (4.12)$$

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha + \text{sign}(\tau - t) |\tau - t|^\alpha\} \quad (4.13)$$

Riesz potansiyeline karşılık gelen "çitin" şekli,  $r_t(\tau) = \tau$  fonksiyonu ile açıklanmaktadır. Bu durumda "çit" iki bölümden oluşur: bunlardan biri ( $0 < \tau < t$  için) sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali durumunda olduğu gibi aynıdır ve ikincisi ( $t < \tau < b$  için) Şekil 4.2'de gösterildiği gibi sağ taraflı Riemann-Liouville integrali ile aynıdır, bakınız Şekil 4.5. Her iki parça da  $\tau = t$  eğme noktasında smoothly (düzgün olarak) birleştirilir.

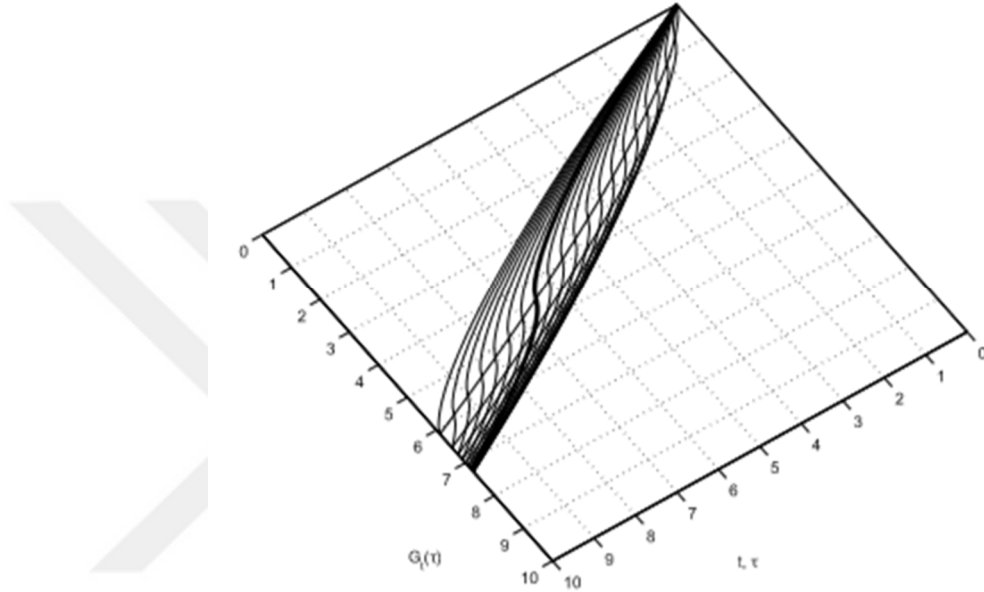
Riesz potansiyeline karşılık gelen "çit" şekli, ara pozisyonunun bazılarında Şekil 4.5'deki kalın çizgi ile gösterilir. Açıkçası, Şekil 4.5 ilişkinin geometrik bir yorumu olan Şekil 4.4'ün Şekil 4.2 üzerinde döşenmesi ile (4.11) elde edilebilir.

Duvardaki bu "çit" nin gölgesi  $(g, f)$  Riesz potansiyelini (4.10) temsil ederken, duvardaki gölge  $(\tau, f)$  klasik integrale karşılık gelir.

$$I(t) = \int_0^b f(\tau) d\tau \quad (4.14)$$

$\alpha = 1$  için her iki "gölgeler" eşittir. Bu, klasik kesin integralin (4.14), geometrik açıdan bile Riesz kesirli potansiyelinin (4.10) belirli bir örneği olduğunu göstermektedir. Biz

zaten sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrasyon durumunda bu içermeyi gördük. Bu, integrasyon kavramının bu üç tür genellemesinin önerilen geometrik yorumunun gücünü göstermektedir.



**Şekil 4.5:** Riesz potansiyeli için çit temel şeklinin değişim süreci

#### 4.1.4. Feller Potansiyeli

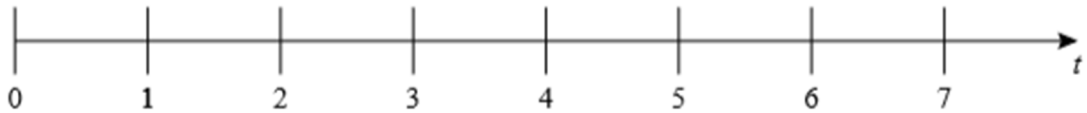
Feller potansiyel operatörü , Riesz potansiyeline benzer şekilde tanımlanır, bu operatörde sol ve sağ taraflı Riemann - Liouville kesirli integrallerin doğrusal bir kombinasyonudur. sabit katsayılarla olmak üzere Feller potansiyel operatörü [24, bölüm 3] aşağıdaki şekilde tanımlanır,

Feller potansiyelinin geometrik yorumu, Şekil 4.4 ve Şekil 4.2 nin düzgün ölçeklendirilmesi ve daha sonra bu şekillerin üst üste bindirilmesi yoluyla kolayca elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen " çit " genel olarak 'de süreksizdir. Bu çit'in Duvardaki gölgesi klasik olarak bilinen belirli integrale (4.14) eşittir.

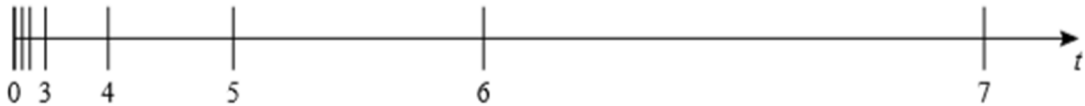
duvarındaki gölge ise, genel olarak, katsayılarının değerlerine bağlı olarak çakışabilen iki alanı oluşur.

#### 4.1.5. İki Çeşit Zaman-I

Kesirli integralin geometrik yorumu temel olarak, ikilisine üçüncü bir boyut eklenmesine dayanmaktadır. zaman olarak kabul edilirse, da "dönüştürülmüş zaman" olarak düşünülebilir. Newton'a göre matematiksel zaman eşit aralıklara bölünmüştür ve hiçbir dış etkiye maruz kalmadan ilerler (Newton 1934). Bu kabul, Newtonun diferensiyel kalkülüsün geliştirilmesi ve mekanik problemlere uygulanması için gerekli bir kabuldür. Ancak, bu kabulün doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanamamıştır. Gerçekten de iki zaman aralığı birbiriyle kıyaslanamaz. Çünkü, zaman anlık olarak ölçülebilir ve sürekli biçimde devam eder. Zamanı ölçmek için kullanılan saatlerin yaptığı iş "tik" lerini tekrarlamak ve saymaktır. Bu sayılara saat, dakika, saniye, milisaniye, vs. denilmektedir. Yelkovanın ardışık ilerlemeleri arasında geçen mutlak zamanın eşit olup olmadığı bilinemez. Zamanın homojen ve homojen olmayan ilerlemeleri Şekil 4.6-4.7 de görülmektedir. algılanan zaman ve mutlak zamanı veren fonksiyon olmak üzere, bir  $f$  fonksiyonunun kesirli integrali fiziksel olarak, bağımsız bir gözlemci tarafından gözlemlenen, hızı  $f$  fonksiyonu ile verilen bir nesnenin katettiği uzaklığı vermektedir.



Şekil 4.6 : Homojen zaman eksenini



Şekil 4.7: Homojen olmayan zaman eksenini

## 4.2. Kesirli İntegrasyonun Fiziksel Yorumu: Geçmişin Gölgesi

Şimdi sol taraflı

$$S_o(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau) = {}_0I_t^\alpha \quad (4.18)$$

Riemann-Liouville kesirli integralini ele alalım, burada  $g_t(\tau)$  formül (4.3) ile tanımlanmıştır.

$v(t)$  fonksiyonunun  $S_o(t)$  kesirli integrali hareket eden bir objenin kat ettiği gerçek uzaklık olarak yorumlanabilir ki bunun için  $v(\tau)$  (bireysel hız) lokal değerleri ve zamanının  $\tau$  (bireysel zaman) lokal değerleri kaydedilmiştir; lokal olarak kaydedilen  $\tau$  zamanı (eşit olarak akan) ile kozmik zaman (eşit olmayan şekilde akan) arasındaki ilişki bilinen bir  $g_t(\tau)$  fonksiyonu ile verilir.

$g_t(\tau)$  fonksiyonu sadece  $\tau$  ya değil aynı zamanda hareket eden objenin bireysel zamanının en son ölçülen değerini gösteren  $t$  parametresine de bağlı olan homogen olmayan zaman skalasını tanımlar.  $t$  değişirken önceki tüm zaman aralığı da değişir. Bu durum, fiziğin günümüzdeki bakış açısıyla uyumludur. S. Hawking: "... zaman dünya gibi büyük bir kütlede daha yavaş ilerliyor görünmelidir." "... tek kesin zaman yoktur, bunun yerine her birey nerede ve ne şekilde hareket ettiğine bağlı kişisel zaman ölçüsüne sahiptir."

Hareket eden nesne uzay-zamanda pozisyonunu değiştirdiğinde tüm uzay-zamandaki gravitasyonel alan da bu harekete bağlı olarak değişir. Sonuç olarak, hareket eden objenin hareketinin geçmişi ile ilgili olan kozmik zaman aralığı değişir. Bu durum, bu şekilde hareket eden bir objenin kat ettiği  $S_o(t)$  gerçek uzaklığının ((4.18) formülü kullanılarak) hesaplanmasını etkiler.

Diğer bir deyişle, hareket eden bir objenin  $v(\tau)$  bireysel hızının sol-taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali objenin kat ettiği  $S_o(t)$  gerçek uzaklığını temsil eder. Bu durumda objenin  $\tau$  bireysel zamanı ile her  $t$  bireysel zaman dilimindeki  $T$  kozmik zamanı arasındaki ilişki (4.3) denklemini ile tanımlanan  $T = g_t(\tau)$  fonksiyonu ile verilir.

### 4.3. Riemann Liouville Kesirli Türevinin Fiziksel Yorumu

Kesirli türevin fiziksel yorumu aşağıdaki şekilde yapılabilir:

$$S_0(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau)$$

alınır,

$$f(t) = D_0^\alpha S_0(t) \quad 0 < \alpha < 1$$

olup bu ifade  $S_0(t)$  kadar mutlak yol katetmiş bir nesnenin algılanan hızını verir.

Diğer yandan (4.2) ifadesinin birinci basamaktan türevi alınır,

$$v_0(t) = \frac{d}{dt} I_0^\alpha f(t) = D_0^{1-\alpha} f(t)$$

elde edilir. Bu ifade ise algılanan hızı  $f(t)$  ile verilen bir nesnenin bağımsız bir gözlemci tarafından gözlemlenen mutlak hızını verir.  $\alpha = 1$  durumunda, yani mutlak zaman ile algılanan zaman arasında bir farkın olmadığı durumda  $v_0(t) = v(t)$  eşitliği elde edilir.

## BÖLÜM 5

### KESİRLİ MERTEBEDEN LOTKA-VOLTERRA AV-AVCI DENKLEM MODELİ

Bu bölümde kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin [60] en azından, tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler kadar kararlı olduğunu ispatlayacağız. Daha sonra kesirli mertebeden Lotka Volterra denklem sisteminin lokal asimptotik kararlılık için yeterli koşulları inceleyeceğiz. Lotka Volterra denklem sisteminin tam sayı mertebeli olması durumunda ilk çözümün bir merkez olduğunu ve nümerik çözümlerin kesirli mertebeli olması durumunda ise çözümün kararlı olduğunu gösteren bir örnek vereceğiz.

#### 5.1.Varlık ve Teklik

$$D_*^\alpha x_1(t) = x_1(t) (r - ax_1(t) - bx_2(t)), \quad t \in (0, T] \quad (5.1)$$

$$D_*^\alpha x_2(t) = x_2(t) (-d + cx_1(t)), \quad t \in (0, T] \quad (5.2)$$

kesirli mertebeden Lotka-Volterra avcı-av sistemini

$$x_1(t) \Big|_{t=0} = x_1(0)$$

ve

(5.3)

$$x_2(t) \Big|_{t=0} = x_2(0)$$

başlangıç değerleri ile birlikte göz önüne alalım. Burada  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  sırasıyla av ve avcı yoğunluklarıdır ve tüm  $r, a, b, c$  ve  $d$  sabitleri pozitifdir.

**Lemma 5.1 :** (5.1) – (5.3) başlangıç değer problemi

$$D_*^\alpha X(t) = A_1 X(t) - x_1(t) A_2 X(t), \quad t \in (0, T] \text{ ve } X(0) = X_0 \quad (5.4)$$

biçiminde yazılabilir. Burada;

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -c \end{bmatrix} \text{ ve } X_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

dır.

**Tanım 5.1 :**  $C^*[0, T]$ , bileşenleri  $x_1, x_2 \in C[0, T]$  olan  $X(t)$  sürekli sütun vektörünün sınıfı olsun, burada  $C[0, T]$ ,  $[0, T]$  aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfıdır.  $X \in C^*[0, T]$  nin normu

$$\|X\| = \sum_{i=1}^2 \sup |x_i(t)|$$

ile verilir.

**Tanım 5.2 :** (5.4) başlangıç değer probleminin çözümü, bir  $X \in C^*[0, T]$  sütun vektörüdür. Bu vektör (5.4) sistemini sağlar.

Şimdi aşağıda varlık teoremini verelim.

**Teorem 5.1 :** (5.4) başlangıç değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

**İspat:** [48] çalışmasında teorem 2.1 ve teorem 2.2 deki ispatlarından açıkça görünür.

## 5.2. Denge Noktaları ve Denge Noktalarının Asimptotik Kararlılığı

$\partial \in (0, 1]$  olsun ve  $x_1(0) = x_{01}$  ve  $x_1(t) = x_{02}$  başlangıç değerlerine sahip

$$D_*^\alpha x_1(t) = f_1(x_1, x_2)$$

$$D_*^\alpha x_2(t) = f_2(x_1, x_2)$$

sistemini göz önüne alalım.

Denge noktalarını hesaplamak için,

$$D_*^\alpha x_i(t) = 0 \Rightarrow f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = 0, \quad i = 1, 2$$

olsun. Buradan denge noktaları olan  $x_1^{eq}, x_2^{eq}$  elde edebiliriz.

Asimptotik kararlılığı elde etmek için,

$$x_i(t) = x_i^{eq} + \varepsilon_i(t)$$

olsun. Bu taktirde;

$$D_*^\alpha (x_i^{eq} + \varepsilon_i(t)) = f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2)$$

olur ki, bu da;

$$D_*^\alpha \varepsilon_i(t) = f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2)$$

( $D_*^\alpha(x_i^{eq}) = 0$  olduğundan) anlamına gelir. Fakat;

$$f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2) \simeq f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2 \dots$$

$$\Rightarrow f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2$$

olur. Burada  $f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = 0$  dir. Böylece;

$$D_*^\alpha \varepsilon_i(t) \cong \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2$$

dir ve

$$\varepsilon_1(0) = x_1(0) - x_1^{eq}$$

ve

(5.5)

$$\varepsilon_2(0) = x_2(0) - x_2^{eq}$$

başlangıç değerlerine sahip

$$D_*^\alpha \varepsilon = A \varepsilon \tag{5.6}$$

sistemini elde ederiz. Burada;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{eq} \quad i, j = 1, 2$$

dir.

$B^{-1}A B = C$  eşitliğine sahibiz. Burada  $C$ ,  $A$ 'nın bir köşegenleştirilmesidir ve,

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ile verilir. Burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$   $A$ 'nın öz değerleri ve  $B$ 'de  $A$ 'nın öz vektörleridir. Böylece

$$AB = BC$$

ve

$$A = B C B^{-1}$$

dir, ki bu da;

$$D_*^\alpha \varepsilon = (B C B^{-1}) \varepsilon$$

$$D_*^\alpha (B^{-1} \varepsilon) = C (B^{-1} \varepsilon)$$

anlamına gelir. Böylece;

$$D_*^\alpha \eta = C \eta$$

(5.7)

$$\eta = B^{-1} \varepsilon$$

olur.

$$D_*^\alpha \eta_1 = \lambda_1 \eta_1 \quad (5.8)$$

$$D_*^\alpha \eta_2 = \lambda_2 \eta_2 \quad (5.9)$$

(5.8) ve (5.9) denklemlerinin çözümleri Mittag-Leffler fonksiyonları ( [52] a bak ) ile;

$$\eta_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \eta_1(0) = E_{\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \eta_1(0) \quad (5.10)$$

$$\eta_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \eta_2(0) = E_{\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha}) \eta_2(0) \quad (5.11)$$

olarak verilir.

Mottingnon [58]'nin sonucunu kullandığımızda;

$$|\arg(\lambda_1)| > \alpha \frac{\pi}{2} \text{ ve } |\arg(\lambda_2)| > \alpha \frac{\pi}{2}$$

ise bu takdirde  $\eta_1(t)$  ve  $\eta_2(t)$  azalan ve böylece  $\varepsilon_1(t)$  ve  $\varepsilon_2(t)$  da azalandır.

Böylece, A matrisinin her iki öz değeride negatif;

( $|\arg(\lambda_1)| > \alpha \frac{\pi}{2}$  ve  $|\arg(\lambda_2)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ ) ise  $(x_1^{eq}, x_2^{eq})$  denge noktası lokal (yerel) asimptotik kararlıdır. Bu da bölüm 2'de ki ifademizi yani, kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin en azından tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler kadar kararlı olduğunu doğrular.

### 5.3. Kesirli Mertebeden Lotka-Volterra Av-Avcı Modeli

Kesirsel mertebeli Lotka – Volterra avcı – av sistemi olan

$$D_*^{\alpha} x_1(t) = x_1(t) (r - ax_1(t) - bx_2(t))$$

$$D_*^{\alpha} x_2(t) = x_2(t) (-d + cx_1(t))$$

sistemini göz önüne alalım. Denge noktalarını oluşturmak için,

$D_*^{\alpha} x_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$  olsun. Bu durumda;

$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (0, 0), \left(\frac{r}{a}, 0\right), \left(\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb}\right)$$

noktaları denge noktalarıdır.

A matrisimiz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan,

$$A = \begin{bmatrix} r - 2ax_1 - bx_2 & -bx_1x_2 \\ cx_2 & -d + cx_1 \end{bmatrix}$$

olur.

$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (0,0)$  için;

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

buluruz ki, A'nın öz değerleri;

$$\lambda_1 = r > 0$$

$$\lambda_2 = -d < 0$$

dır. O halde

$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (0,0)$$

denge noktası kararsızdır.

$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = \left(\frac{r}{a}, 0\right)$  için,

$$A = \begin{bmatrix} -r & -\frac{br}{a} \\ 0 & \frac{cr}{a} - d \end{bmatrix}$$

buluruz ki, A'nın öz değerleri;

$$\lambda_1 = -r < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{cr}{a} - d < 0$$

dır. Eğer,  $cr < ad$  dir. O halde  $cr < ad$  ise,

$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = \left( \frac{r}{a}, 0 \right)$$

denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = \left( \frac{d}{c}, \frac{cr-ad}{cb} \right) \text{ için;}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-ad}{c} & \frac{-bd}{c} \\ \frac{cr-ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

buluruz ki, A'nın öz değeri;

$$\lambda_1 = \frac{-ad + \sqrt{a^2d^2 - 4cd(cr-ad)}}{2c}$$

$$\lambda_2 = \frac{-ad - \sqrt{a^2d^2 - 4cd(cr-ad)}}{2c}$$

dir.

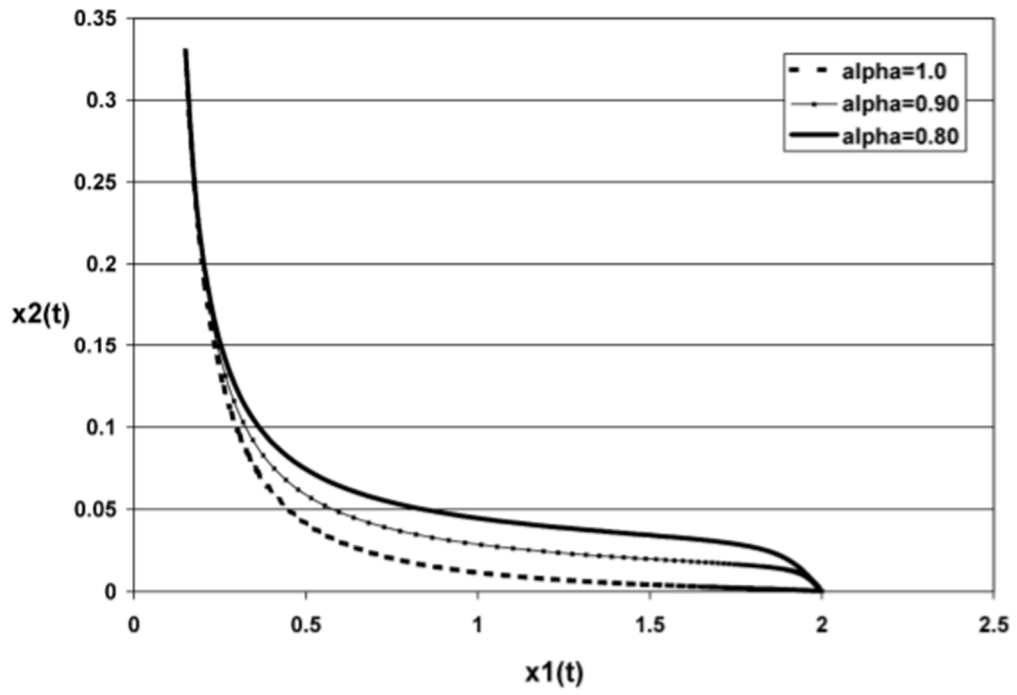
$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = \left( \frac{d}{c}, \frac{cr-ad}{cb} \right)$$

denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı için yeterli koşul

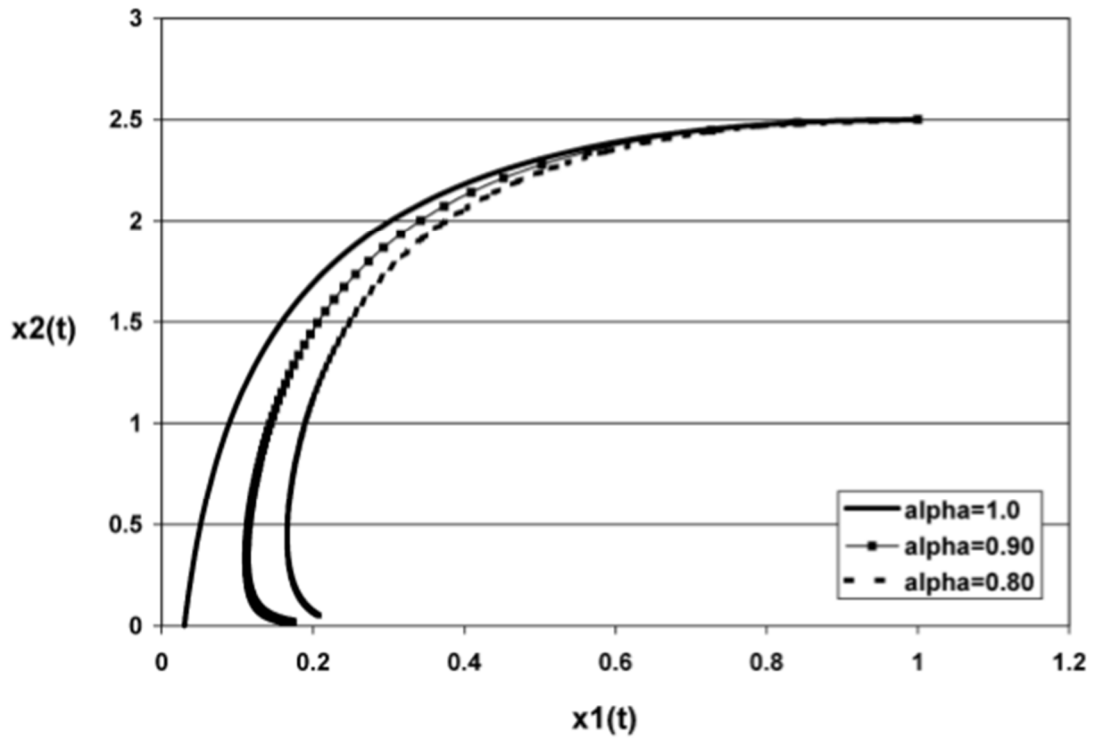
$$| \arg(\lambda_1) | > \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad | \arg(\lambda_2) | > \alpha \frac{\pi}{2}$$

dir.

$a = 0$  özel durumunda, iç denge noktasının tam sayı mertebeli sistem ( $\alpha = 1$ ) için bir merkez  $\left( \arg(\lambda_1) = \frac{\pi}{2}, \arg(\lambda_2) = -\frac{\pi}{2} \right)$  olduğu bilinmektedir.  $0 < \alpha < 1$  kesirli durumunda, iç denge noktası asimptotik kararlıdır.



Şekil 5.1:



Şekil 5.2:

#### 5.4.Sonuç

Kesirli mertebeden sistemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği incelendi.Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin en azından tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler kadar kararlı olduğunu araştırdık. Lotka-Volterra avcı-av sisteminin denge noktaları varlık, teklik ve kararlılığını inceledik.



## KAYNAKÇA

1. F. Ben Adda. Geometric interpretation of the fractional derivative. **Journal of Fractional Calculus**, vol. 11, May 1997, pp. 21–52.
2. F. Ben Adda. Interprétation géométrique de la différentiabilité et du gradient d'ordre réel. **C. R. Acad. Sci. Paris**, t. 326, Série I, 1998, pp. 931–934.
3. G. L. Bullock. A geometric interpretation of the Riemann–Stieltjes integral. **American Mathematical Monthly**, vol. 95, no. 5, May 1988, pp. 448–455.
4. M. Caputo. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent – II. **Geophys. J. R. Astr. Soc.**, vol. 13, 1967, pp. 529–539.
5. M. Caputo. *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli, Bologna, 1969.
6. L. Carroll. *Alice's Adventures in Wonderland*. Progress, Moscow, 1979 (or any other edition).
7. G. Clemence. Time and its measurement. **The American Scientist**, vol. 40, 1952, pp. 260–269.
8. A. Daigneault and A. Sangalli. Einstein's static universe: An idea whose time has come back? **Notices of the AMS**, vol. 48, no. 1, 2001, pp. 9–16.
9. Fu-Yao Ren, Zu-Guo Yu, Feng Su. Fractional integral associated to the self-similar set of the generalised self-similar set and its physical interpretation. **Phys. Lett. A**, vol. 219, 1996, pp. 59–68.
10. R. Gorenflo. Afterthoughts on interpretation of fractional derivatives and integrals. In: P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova (eds.), *Transform Methods and Special Functions*, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998, ISBN 954-8986-05-1, pp. 589–591.
11. S. W. Hawking. *A Brief History of Time*. Bantam Press, London, 1988.
12. B. N. Ivanov. *Printsipy sovremennoi fiziki (Principles of Modern Physics)*. Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
13. V. Kiryakova. A long standing conjecture failed? In: P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova (eds.), *Transform Methods and Special Functions*, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, **Bulgarian Academy of Sciences, Sofia**, 1998, ISBN 954-8986-05-1, pp. 579–588.
14. F. Mainardi. Considerations on fractional calculus: interpretations and applications. In: P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova (eds.), *Transform Methods and*

- Special Functions, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998, ISBN 954-8986-05-1, pp. 594–597.
15. A. McBride, G. Roach (eds). Fractional Calculus. Research Notes in Mathematics, vol. 138, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.
  16. M. Monsrefi-Torbati and J.K. Hammond. Physical and geometrical interpretation of fractional operators. J. Franklin Inst., vol. 335B, no. 6, 1998, pp. 1077–1086.
  17. I. Newton. Mathematical Principles (trans. A. Motte, ed. F. Cajori), Berkeley, 1934.
  18. R. R. Nigmatullin. A fractional integral and its physical interpretation. **Theoret. and Math. Phys.**, vol. 90, no. 3, 1992, pp. 242–251.
  19. K. Nishimoto (ed.). Fractional Calculus and Its Applications. Nihon University, Koriyama, 1990.
  20. I. Podlubny. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
  21. B. Ross (ed.). Fractional Calculus and Its Applications, Lecture Notes in Mathematics, vol. 457, Springer-Verlag, New York, 1975.
  22. R. S. Rutman. On the paper by R.R. Nigmatullin “A fractional integral and its physical interpretation”. **Theoret. and Math. Phys.**, vol. 100, no. 3, 1994, pp. 1154–1156.
  23. R. S. Rutman. On physical interpretations of fractional integration and differentiation. **Theoret. and Math. Phys.**, vol. 105, no. 3, 1995, pp. 1509–1519.
  24. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ich prilozheniya (Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications). Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (English translation: S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993).
  25. I. E. Segal. Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy, Academic Press, New York, 1976.
  26. G. J. Whitrow. The Natural Philosophy of Time. Thomas Nelson and Sons Ltd., London and Edinburgh, 1961.

27. [27] Zu-Guo Yu, Fu-Yao Ren and Ji Zhou. Fractional integral associated to generalized cookie-cutter set and its physical interpretation. **J. Phys.A: Math. Gen.**, vol. 30, 1997, pp. 5569–5577.
28. K. Assaleh; W.M. Ahmad, Modeling of speech signals using fractional calculus 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2007. ISSPA 2007. 12-15 Feb. 2007 Page(s):1 - 4
29. J. F. Douglas, Some applications of fractional calculus to polymer science, **Advances in chemical physics, Vol 102**, John Wiley & Sons, Inc.
30. Z. E. A. Fellah, C. Depollier, Application of fractional calculus to the sound waves propagation in rigid porous materials: Validation via ultrasonic measurement, **Acta Acustica vol.88(2002)34-39**
31. V. V. Kulish and Jos´e L. Lage Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics **J. Fluids Eng.** – September 2002 – Volume 124, Issue 3, 803 (4 pages)
32. K. B. Oldham and J. Spanier, **The Fractional Calculus**, Academic Press, INC. 1974
33. R. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Part1, **Crit Rev Biomed Eng** 2004; 32(1):1-104
34. R. L. Magin, Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus **Journal of Vibration and Control**, Vol. 14, No. 9-10, 14311442 (2008)
35. Margulies, Timothy Wave propagation in viscoelastic horns using a fractional calculus rheology model **Acoustical Society of America Journal**, Volume 114, Issue 4, pp. 2442-2442 (2003).
36. B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral, Fractional differentiation for edge detection **Fractional Signal Processing and Applications** Volume 83, Issue 11, Pages 2285-2480 (November 2003)
37. J. Munkhammar, Riemann - Liouville Fractional Derivatives and the Taylor - Riemann Series, U. U. D. M. Project report 2004:7
38. I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, **fractional calculus and applied analysis**, Vol 5, Number4(2002)

39. N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, **Signal Processing archive Volume 86** , Issue 10 (2006)2668 - 2677
40. E. Soczkiewicz, Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity **Molecular and Quantum Acoustics Vol.23,397-404(2002)**
41. J.I. Su´arez , B.M. Vinagre , A.J. Calder´on , C.A. Monje and Y.Q. Chen Using Fractional Calculus for Lateral and Longitudinal Control of Autonomous Vehicles Lecture Notes in Computer Science, **Springer Berlin / Heidelberg**, Volume 2809/2004
42. B. M. Vinagre and YangQuan Chen, Fractional Calculus Applications In Automatic Control and Robotics, 41st IEEE Conference on decision and control Tutorial Workshop#2, Las Vegas, Desember 2002 **Received: October, 2009**
43. E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka, Numerical solution for the fractional replicator equation, *IJMPC* 16 (7) (2005) 1–9.
44. K. Diethelm, A. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modelling of viscoplasticity, in: F. Keil, W. Mackens, H. Voß, J. Werther (Eds.), *Scientific Computing in Chemical Engineering II—Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering, and Molecular Properties*, **Springer, Heidelberg**, 1999, pp. 217–224.
45. K. Diethelm, A. Freed, The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order, in: S. Heinzl, T. Plesser (Eds.), *Forschung und wissenschaftliches Rechnen 1998*, Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung, **Göttingen**, 1999, pp. 57–71.
46. K. Diethelm, Predictor–corrector strategies for single- and multi-term fractional differential equations, in: E.A. Lipitakis (Ed.), *Proceedings of the 5th Hellenic–European Conference on Computer Mathematics and Its Applications*, **LEA Press, Athens**, 2002, pp. 117–122 [Zbl. Math. 1028.65081].
47. K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, A predictor–corrector approach for the numerical solution of fractional differentialequations, **Nonlinear Dynam.** 29 (2002) 3–22.
48. K. Diethelm, N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, **J. Math. Anal. Appl.** 265 (2002) 229–248.

49. K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Detailed error analysis for a fractional Adams method, **Numer. Algorithms** 36 (2004) 31–52.
50. K. Diethelm, N.J. Ford, Multi-order fractional differential equations and their numerical solution, **Appl. Math. Comput.** 154 (2004) 621–640.
51. E.M. El-Mesiry, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations, **Appl. Math. Comput.** 160 (3) (2005) 683–699.
52. A.M.A. El-Sayed, Fractional differential-difference equations, **J. Fract. Calc.** 10 (1996) 101–106.
53. A.M.A. El-Sayed, Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders, **Nonlinear Anal.** 33 (2) (1998) 181–186.
54. A.M.A. El-Sayed, F.M. Gaafar, Fractional order differential equations with memory and fractional-order relaxationoscillation model, **(P.U.M.A) Pure Math. Appl.** 12 (2001).
55. A.M.A. El-Sayed, E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka, Numerical solution for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations, **Comput. Appl. Math.** 23 (1) (2004) 33–54.
56. A.M.A. El-Sayed, F.M. Gaafar, H.H. Hashem, On the maximal and minimal solutions of arbitrary orders nonlinear functional integral and differential equations, **Math. Sci. Res. J.** 8 (11) (2004) 336–348.
57. R. Gorenflo, F. Mainardi, Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order, in: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, **Springer, Wien**, 1997, pp. 223–276
58. D. Matignon, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, **Computational Eng. in Sys. Appl.**, Vol. 2, Lille, France 963, 1996.
59. I. Podlubny, A.M.A. El-Sayed, *On Two Definitions of Fractional Calculus*, Slovak Academy of Science, Institute of Experimental Phys., ISBN 80-7099-252-2, 1996, UEF-03-96.
60. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
61. A.A. Stanislavsky, Memory effects and macroscopic manifestation of randomness, **Phys. Rev. E** 61 (2000) 4752.

62. E.Ahmed, A.M.A. El Sayed, H.A.A. El-Saka, Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models
63. Dalir M. Applications of Fractional Calculus
64. Podlubny I., Geometric and Physical Interpretation of Fractional Differentiation
65. Yücel B. Kesirsel mertebeden diferansiyel denklemler ve bazı biyolojik uygulamaları. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans tezi, Kayseri 2016
66. Demirci E. Kesirli basamaktan bir diferansiyel denklem üzerine. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora tezi, Ankara 2011.
67. Değerli K., Kesirli Türevde Son Gelişmeler, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul 2017.
68. Ünlü C., Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, İstanbul 2014.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı:** Kübra GÜLTEKİN  
**Uyruğu:** Türkiye (T.C)  
**Doğum Tarihi ve Yeri:** 01.08.1995 Kırşehir  
**Medeni Durum:** Bekar  
**e-mail:** kubragultekin95@hotmail.com  
**Yazışma Adresi:** kubragultekin95@hotmail.com

### EĞİTİM

| Derece        | Kurum                            | Mezuniyet Tarihi |
|---------------|----------------------------------|------------------|
| Yüksek Lisans | Erciyes Üniversitesi, Matematik  | 2016-            |
| Lisans        | Erciyes Üniversitesi, Matematik  | 2016             |
| Lise          | Hacı Ahmet Arısoy Anadolu Lisesi | 2013             |

### YABANCI DİL

İngilizce