



**DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN
LUCAS POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Büşra BULUR

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Ercan ÇELİK
2018
Her Hakkı Saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN LUCAS
POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Büşra BULUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2018

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN LUCAS POLİNOMLARI İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Prof. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Büşra BULUR tarafından hazırlanan bu çalışma, 14/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Hasan BULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Dr. Öğretim Üyesi Sait TAŞ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 20.../09.../2018 tarih ve 37.../...48..... nolu kararı
ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN LUCAS POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Büşra BULUR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tezde, Fen ve mühendislik bilimlerinde ortaya çıkan diferansiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için bir metot sunuldu. İlk olarak, diferansiyel-cebirselsel denklem keyfi dereceye kadar kuvvet serisine dönüştürüldü. Daha sonra bu kuvvet serileri keyfi dereceden Lucas polinomuna dönüştürülerek verilen diferansiyel-cebirselsel denklem nümerik olarak çözüldü. İki farklı problem ele alındı. Problemlerin nümerik çözümleri ile tam çözümleri karşılaştırıldı.

2018, 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel-Cebirselsel Denklemler, Kuvvet Serileri, Lucas Polinomları, İndeks.

ABSTRACT

MS Thesis

THE NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS WITH LUCAS POLYNOMIALS

Büşra BULUR

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, a method is described for solving of differential-algebraic equations (DAEs) arising in sciences and engineering. Firstly, differential-algebraic equation is transformed into power series in arbitrary order, then this power series are solved numerically by using Lucas polynomials approximations in arbitrary order. Two different problems have been investigated. The numerical solutions of problems compared with the their exact solutions.

2018, 33 pages

Keywords: Differential-Algebraic Equations (DAEs), Power Series, Lucas Polynomials, Index.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma süresince değerli bilgi ve katkılarını esirgemeyen ve bana her zaman destek olan Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen değerli annem Gülay Bulur, babam Adnan Bulur ve kardeşim Mehmet Muhammet Bulur'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Büşra BULUR

Eylül 2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Ön Bilgiler.....	3
2.2. Diferansiyel-Cebirsel Denklemler	8
2.2.1. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin İndeksi.....	9
2.3. Lucas sayıları	11
2.3.1. Lucas Sayıları İle İlgili Özdeşlikler	12
2.4. Lucas Polinomları	13
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
3.1. Nümerik Metot	15
3.2. Nümerik Metodun Uygulanışı	16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	18
4.1. Test problemi 1	18
4.2. Test problemi 2	24
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	34

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Test Problemi 4.1. deki $y(t)$ ve $y^{***}(t)$ nin grafikleri.....	33
Şekil 4.2. Test Problemi 4.1. deki $x(t)$ ve $x^{***}(t)$ nin grafikleri	34
Şekil 4.3. Test Problemi 4.2. deki $y(t)$ ve $y^{***}(t)$ nin grafikleri.....	39
Şekil 4.4. Test Problemi 4.2. deki $x(t)$ ve $x^{***}(t)$ nin grafikleri	39
Şekil 4.5. Test Problemi 4.2. deki $z(t)$ ve $z^{***}(t)$ nin grafikleri	40



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Test Problemi 4.1. deki $y(t)$ ve $y^{***}(t)$ nin değerleri.....	33
Çizelge 4.2. Test Problemi 4.1. deki $x(t)$ ve $x^{***}(t)$ nin değerleri.....	34
Çizelge 4.3. Test Problemi 4.2. deki $y(t)$ ve $y^{***}(t)$ nin değerleri.....	39
Çizelge 4.4. Test Problemi 4.2. deki $x(t)$ ve $x^{***}(t)$ nin değerleri.....	40
Çizelge 4.5. Test Problemi 4.2. deki $z(t)$ ve $z^{***}(t)$ nin değerleri.....	40



1. GİRİŞ

Fen, Mühendislik ve Tıp bilimleri gibi alanlarda ortaya çıkan bir çok matematiksel modelleme Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerle ifade edilir. Bunun en önemli nedenlerinden biri, Diferansiyel-Cebirsel Denklemler doğadaki birçok temel kuralı ifade ederken bu alanlardaki problemlerde ortaya çıkmasıdır. Bu nedenle Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin önemi her geçen gün artmaktadır.

Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin çözümü için ilk genel metot 1971 yılında Gear tarafından verildi. Daha sonra araştırmacılar tarafından bir çok metot geliştirildi. Runge-Kutta metodu bunlar içinde en yaygın olarak kullanılan metoddur.

Hairer (1991) Runge-Kutta metodunu kullanarak Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışmalar yapmıştır.

Pierluigi and Mazzia (1992), Brenan (1989) Başlangıç / Sınır Değer metotlarını kullanarak Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin çözümlerine uygulamıştır.

Müller (2000) Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerle modellenmiş dinamik sistemin iyi yönleri ve kötü yönleri ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

Wang (2000, 2005) Mühendislikteki Diferansiyel-Cebirsel Denklemleri çözmek için sıralama metodunu geliştirmiştir.

Çelik (2002) Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Padé yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Kızıloğlu (2005) Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Adomian ayrıştırma metodu ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Akar (2007) Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin En Küçük Kareler Yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte araştırmacılar bu metotların yanı sıra Diferansiyel-Cebirsel Denklemleri çözmek için çeşitli bilgisayar paket programları geliştirmişlerdir.

Petzold (1989) diferansiyel-cebirsel denklem sistemleri için Backward diferansiyel formüllerini kullanarak DASSL bilgisayar paket programını geliştirmiştir.

Hairer and Wanner (1991) diferansiyel-cebirsel denklemlerin Hessenberg formları için Runge-Kutta metodunu kullanarak RADAU5 bilgisayar paket programı ve COLDAE bilgisayar paket programı geliştirmişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1.1: Bir diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini içeren denklemdir. Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece bir bağımsız değişkene bağlı ise denkleme *adi(bayağı) diferansiyel denklem* denir.

Bu tür denklemler genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ 'ye göre çözümlerse

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu ise (2.1) denkleminin açık formda yazılmış halidir.

Tanım 2.1.2: Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine *başlangıç değer problemi* denir. Verilen şartlara da *başlangıç şartları* adı verilir.

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine *sınır değer problemi* denir. Verilen şartlara da *sınır şartları* adı verilir.

Tanım 2.1.3: n 'inci dereceden bir

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n \quad (2.3)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki denkleme *cebirsel denklem* denir. Pozitif n tamsayısına $P(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $P(x)$ polinomunda $P(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.1.4: $a_i, b \in R$ ve x_i 'ler de değişkenler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.5)$$

şeklindeki bir ifadeye *lineer denklem* denir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.6)$$

şeklindeki sisteme lineer denklem sistemi adı verilir. Bu sistem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & MO & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ M \\ b_m \end{bmatrix}$$

veya

$$A.X = B$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi, B matrisine bilinmeyenler matrisi ve X matrisine de sistemin ikinci yanı denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & MO & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ M \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_m \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

olmak üzere

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} & Mb_1 \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} & Mb_2 \\ M & MO & M \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mn} & Mb_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez. Yani;

1. Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,
2. Herhangi iki denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,

3. Herhangi iki denklemin her iki yanını, herhangi bir skalerle çarpıldıktan sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa, sistemin çözümleri aynı kalır.

Bu sebepten $[A : B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye *Gauss-Jordan yok etme metodu* ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de *Gauss-Jordan indirgeme metodu* adı verilir.

Tanım 2.1.5: A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) *non-singüler (regüler) matris*, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) *singüler (regüler olmayan) matris* denir.

Tanım 2.1.6: A , n 'inci mertebeden bir regüler (tersi mevcut ise) matris ($|A| \neq 0$) ise

$$A.X = B$$

lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$X = A^{-1}B \quad (2.9)$$

eşitliği ile verilir. Yani

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \text{M} \quad \text{M} \quad \text{M} \quad \text{M} & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \Lambda + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

lineer denklem sisteminin çözümü; Δ , A matrisinin determinantı olmak üzere

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_n & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \Lambda & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{n1} & b_n & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}, \Lambda, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & b_2 \\ M & M & O & M \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & b_n \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

determinantları hesaplanır ve tek çözüm olan

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \quad (2.12)$$

değerleri bulunur. $A \cdot X = B$ lineer denklem sistemini çözmek için uygulanan bu kurala *Cramer Kuralı* denir.

Tanım 2.1.7: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ 'da her mertebeden türevi varsa

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (2.13)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ 'daki *Taylor serisi* denir. Eğer $x_0 = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun *Maclaren serisi* denir.

Tanım 2.1.8: x bir değişken ve x_0 bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (2.14)$$

serisine, x_0 merkezli *kuvvet serisi* denir. Eğer bu tanımda $x_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

(2.15)

elde edilir. Ayrıca $x = x_0$ olması durumunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0$$

olur.

2.2. Diferansiyel-Cebirsel Denklemler

Diferansiyel-cebirsel denklem, başlangıç değerleri ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.16.a)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0' \quad (2.16.b)$$

formundadır. (2.16.a) denkleminde kapalı formda yazılmış *diferansiyel-cebirsel denklem* denir. Burada $F \in R^n$, $y \in R^n$ ve $t \in R$ şeklindedir.

Diferansiyel - cebirsel denklemi açık olarak

$$F(y', y, x, t) = 0 \quad (2.17.a)$$

$$G(y, x, t) = 0 \quad (2.17.b)$$

şeklinde de yazabiliriz. Yukarıdaki sistemin (2.17.b) denkleminde görüldüğü gibi diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. Burada y diferansiyel değişken, x de cebirsel değişkendir. (2.17.a) denklemi diferansiyel denklem ve (2.17.b) denklemi de cebirsel denklem olduğundan, bu denkleme *Diferansiyel - cebirsel denklem* denir[Ascher, 1998].

Örneğin; Aşağıda başlangıç değerleri ile birlikte verilmiş denklem

$$\begin{aligned} y' &= tx' - y + (1+t)x - 1 \\ x &= \cos t \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y'(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

bir diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemdir.

2.2.1. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin İndeksi

Bir diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklem incelenirken indeksine bakılır. Bu yüzden diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlerin incelenmesinde ve sınıflandırılmasında indeks önemlidir. (2.17.a) ve (2.17.b) diferansiyel-cebirselleştirilmiş denkleminin bir özel formu

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.20.a)$$

$$0 = g(x, y, t) \quad (2.20.b)$$

şeklindedir. Bu özel forma *yarı-açık diferansiyel-cebirsel denklem* denir. Burada da y diferansiyel değişken, x cebirsel değişkendir. Eğer t 'ye göre (2.20.b) denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.21.a)$$

$$g_y(y, x, t)y' + g_x(y, x, t)x' = -g_t(y, x, t) \quad (2.21.b)$$

sistemi elde edilir. (2.21.b) denklemini elde etmek için 1 defa diferansiyel alındığından, (2.20.a) ve (2.20.b) sisteminin indeksi 1 dir[Çelik, 2002],

Tanım 2.2.1.1: $F(t, y, y') = 0$ genel diferansiyel-cebirsel denkleminde, y 'nin indeksi (sistemde y ve t cinsinden); y' 'nü elde etmek için gerekli olan diferansiyelin minimum sayısıdır. Bu işlem

$$F(t, y, y') = 0$$

$$F(t, y, y', y'') = 0$$

$$M$$

$$\frac{d^p F}{dt^p}(t, y, y', \dots, y^{(p+1)}) = 0$$

sistemiyle de tanımlanabilir. Burada p en küçük tamsayıdır. Şimdi indeks için aşağıdaki örnekleri inceleyelim[Çelik, 2002].

- $y = q(t)$ 'yi alalım. Bu denklem indeks'i 1 olan diferansiyel cebirsel denklemdir. Çünkü y 'ye göre bir diferansiyel denklem elde etmek için $q(t)$ 'nin bir defa diferansiyeli alınmalıdır.

- $\left. \begin{array}{l} y_1 = q(t) \\ y_2 = y_1' \end{array} \right\}$ denklemini gözönüne alalım. $y_2 = y_1' = q'(t) \Rightarrow y_2' = q''(t)$ olup y_2 'ye

göre bir diferansiyel denklem elde etmek için $q(t)$ 'nin iki kez diferansiyeline ihtiyaç olduğundan indeks 2'dir.

- $\left. \begin{array}{l} y_1 = q(t) \\ y_2 = y_1' \\ y_3 = y_2' \end{array} \right\}$ sistemini göz önüne alalım. $y_3 = y_2' = y_1'' = q''(t) \Rightarrow y_3' = q'''(t)$ olup y_3 'e

göre bir diferansiyel denklem elde etmek için $q(t)$ 'nin üç kez diferansiyeline ihtiyaç olduğundan indeks 3'tür.

İndeksi 1 den büyük olan diferansiyel-cebirselsel denklemleri çözmek oldukça zordur. Bu tür diferansiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için indeks indirgemesine gidilir. Yani denklem, indeksi 1 olan diferansiyel-cebirselsel denklemlere indirgenir.

2.3. Lucas Sayıları

Tanım 2.3.1:

$L_0 = 2, L_1 = 1$ ve $n \geq 0$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanan sayılara Lucas Sayıları denir[Koshy, 2001; Valda, 1989].

(2.22) den hareketle, $L_n = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$ Lucas sayıları elde edilir.

2.3.1. Lucas Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

a) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_s^2 = L_n L_{n-1} + 2$$

dır.

b) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_s L_{s-1} = \begin{cases} L_{s-1}^2 - 6, & n \text{ tek ise} \\ L_{s-1}^2 - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dır.

c) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_{s-1}^2 = L_{n-2} L_{n-1} + 3$$

dır.

d) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

dır.

2.4. Lucas Polinomları

Lucas Polinomları,

$$L_0(x) = 0, L_1(x) = x, L_2(x) = x^2 + 2$$

olmak üzere,

$$L_{n+2}(x) = xL_{n+1}(x) + L_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır[Hoggatt and Bicknell,1973].

Ayrıca ; $x = 1$ iken

$$L_n(1) = L_n,$$

n . Lucas sayısı elde edilir.

Lucas polinomlarının genelleştirilmiş formu

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

şeklindedir. İlk dokuz Lucas polinomları ve kendi sabitler dizisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

Lucas polinomlar

$$L_0(x) = 0$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = x^2 + 2$$

$$L_3(x) = x^3 + 3x$$

$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$$

$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$$

$$L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 \quad (2.23)$$

$$L_7(x) = x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$$

$$L_8(x) = x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$$

$$L_9(x) = x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x$$

... ..

Lucas Polinomlarının baş katsayıları

1
 1 2
 1 3
 1 4 2
 1 5 5
 1 6 9 2
 1 7 14 7
 1 8 20 16 2
 1 9 27 30 9

şeklindedir.

Lucas polinomlarının oluşum kuralını gözlemlediğimizde, $L_{n+2}(x)$ teriminin $(k + 1)$. sütununun katsayısını oluşturmak amacıyla $L_n(x)$ teriminin k . sütununun katsayısı toplanarak elde edilir.

Bu özellikler kullanılarak Lucas polinomları cinsinden x ve x 'in kuvvetleri

$$\begin{aligned}
 x &= L_1(x) \\
 x^2 &= [L_2(x) - 2] \\
 x^3 &= [L_3(x) - 3L_1(x)] \\
 x^4 &= [L_4(x) - 4L_2(x) + 6] \\
 x^5 &= [L_5(x) - 5L_3(x) + 10L_1(x)] \\
 x^6 &= [L_6(x) - 6L_4(x) + 15L_2(x) - 20] \\
 x^7 &= [L_7(x) - 7L_5(x) + 21L_3(x) - 35L_1(x)] \\
 x^8 &= [L_8(x) - 8L_6(x) + 28L_4(x) - 56L_2(x) + 70] \\
 x^9 &= [L_9(x) - 9L_7(x) + 36L_5(x) - 84L_3(x) + 126L_1(x)] \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

şeklinde olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Nümerik Metot

$$F(t, y, y') = 0 \quad (3.1)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 \quad (3.2)$$

diferansiyel-cebirsal denklemini göz önüne alalım. Burada F ve y her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. (3.1) denkleminin çözümlerinin

$$y = y_0 + y_1 t + e t^2 \quad (3.3)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (3.1) denkleminde (3.3) ifadesi ve türevleri yerlerine yazılır sonra yüksek dereceden terimler ihmal edilirse

$$S e = T \quad (3.4)$$

şeklinde e 'ye göre cebirsal denklem sistemi elde edilir. Burada S ve T sabit matrislerdir. (3.4) sistemi çözüldüğünde e değeri bulunur ve bu e değeri (3.3) denkleminde yerine yazılır. Yüksek dereceden terimler için yukarıdaki işlemler tekrar edilirse (3.1) denkleminin keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir[Çelik, 2002]. Sonra bu kuvvet serileri Lucas Polinomlarına dönüştürülerek diferansiyel-cebirsal denklemin keyfi dereceden nümerik çözümü elde edilmiş olur.

NOT: Eğer diferansiyel-cebirsel denklem

$$F(t, y, y') = 0 \quad (3.5)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.6)$$

şeklinde ise (3.1) denkleminin çözümü

$$y = y_0 + et \quad (3.7)$$

şeklinde olur.

3.2. Nümerik Metodun Uygulanışı

(3.3) fonksiyonu (3.1) de yerine yazıldığında

$$f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots + (f_n + r_1 e_1 + \dots + r_m e_m) t^n \quad (3.8)$$

şeklinde bilinen kuvvet serisinden farklı, (3.8) tipinde başka bir kuvvet serisi tanımlayalım. Burada $r_1, r_2, \dots, r_m$ 'ler sabitlerdir. (3.3) den

$$y_i = y_{i,0} + y_{i,1} t + y_{i,2} t^2 + \dots + e_i t^n \quad (3.9)$$

olarak tanımlanır. y_i , y 'nin i 'inci elemanıdır. (3.1) denkleminde, (3.9) ifadesi yerine yazılırsa

$$f_i = (f_{i,n} + r_{i,1}e_1 + r_{i,2}e_2 + \dots + r_{i,m}e_m)t^{n-j} + O(t^{n-j+1}) \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada f_i , (3.1) denklemindeki $f(t, y, y')$ 'nin i 'inci elemanıdır. Eğer $f(t, y, y')$, y' 'yü ihtiva ediyorsa $j = 1$; ihtiva etmiyorsa $j = 0$ dır. (3.4) ve (3.10) dan

$$S_{i,j} = r_{i,j} \quad (3.11)$$

$$T_i = -f_{i,n} \quad (3.12)$$

şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlürse e_i ($i = 1, 2, \dots, m$) bulunur. Bu e_i değeri (3.9) denkleminde yerine yazılırsa n 'inci dereceden bir polinom olan y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) elde edilir. (3.9) denkleminde (3.12) denkleminde kadar bu işlemler tekrar edilirse (3.1) denklemindeki diferansiyel-cebirselle denklemin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir. Daha sonra bu kuvvet serilerini yine keyfi dereceden Lucas polinomuna dönüştürerek verilen diferansiyel-cebirselle denklemin nümerik çözümü elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, sunulan metot iki problem üzerinde test edildi. Bu problemlerin, nümerik çözümleri bu metotla bulunarak çizelge ve şekil üzerinde analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

4.1. Test Problemi 1.

Aşağıda başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferansiyel-cebirsal denklemini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} y' &= tx' - y + (1+t)x - 1 \\ x &= \cos t \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y'(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Bu diferansiyel-cebirsal denklemin analitik çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= t \cos(t) - 1 \\ x(t) &= \cos(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklindedir. (4.1) denkleminin başlangıç değerlerinden çözümlerinin

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + y'_0 t + e_1 t^2 = -1 + t + e_1 t^2 \\ x(t) &= x_0 + x'_0 t + e_2 t^2 = 1 + e_2 t^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.4) denklemini ve türevleri (4.1) denkleminde yerine yazılır ve yüksek dereceden terimler ihmal edilirse

$$\begin{aligned} 2e_1t + O(t^2) &= 0 \\ (0.5 + e_2t^2) + O(t^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde (3.10) formundaki denklemi elde ederiz. (3.11) ve (3.12) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi

$$Se = T \quad (4.6)$$

şeklindedir. Burada

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

olur. O halde

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

olup (4.8) denklemi çözülürse

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} y(t) &= -1 + t \\ x(t) &= 1 - 0.5t^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. Bu defa (4.10) denkleminin (4.1) denklem sisteminin çözümlerinin

$$\begin{aligned} y(t) &= -1 + t + e_1 t^3 \\ x(t) &= 1 - 0.5t^2 + e_2 t^3 \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Benzer durumda (4.1) denkleminde (4.11) denklemi ve türevleri yerlerine yazılır ve yüksek dereceden terimler ihmal edilirse

$$\begin{aligned} (1.5 + 3e_1)t^2 + O(t^3) &= 0 \\ e_2 t^3 + O(t^4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) den

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklem çözülürse

$$e = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} y(t) &= -1 + t - 0.5t^3 \\ x(t) &= 1 - 0.5t^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

olur. Yukarıdaki işlemleri tekrar edersek

$$y^*(t) = -1 + t - 0.500000000t^3 + 0.0416666667t^5 - 0.001388888889t^7 + 0.00002480158730t^9$$

$$x^*(t) = 1 - 0.5t^2 + 0.0416666667t^4 - 0.001388888889t^6 + 0.00002480158730t^8$$

dokuzuncu dereceden $y^*(t)$ ve $x^*(t)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerinde (2.24) değerleri yerlerine yazılırsa

$$y^{**}(t) = -1 + 2.968402778L_1(t) - 0.7395833334L_3(t) + 0.05228174603L_5(t) - 0.001612103175L_7(t) + 0.00002480158730L_9(t)$$

$$x^{**}(t) = 2.279513889 - 0.6888888889L_2(t) + 0.05069444444L_4(t) - 0.001587301587L_6(t) + 0.00002480158730L_8(t)$$

şeklinde Lucas polinomu elde edilir. Bu defa da $y^{**}(t)$ ve $x^{**}(t)$ Lucas polinomlarında (2.23) değerleri yazılırsa

$$y^{***}(t) = -1 + t - 0.5t^3 + 0.0416666667t^5 - 0.001388888889t^7 + 0.00002480158730t^9$$

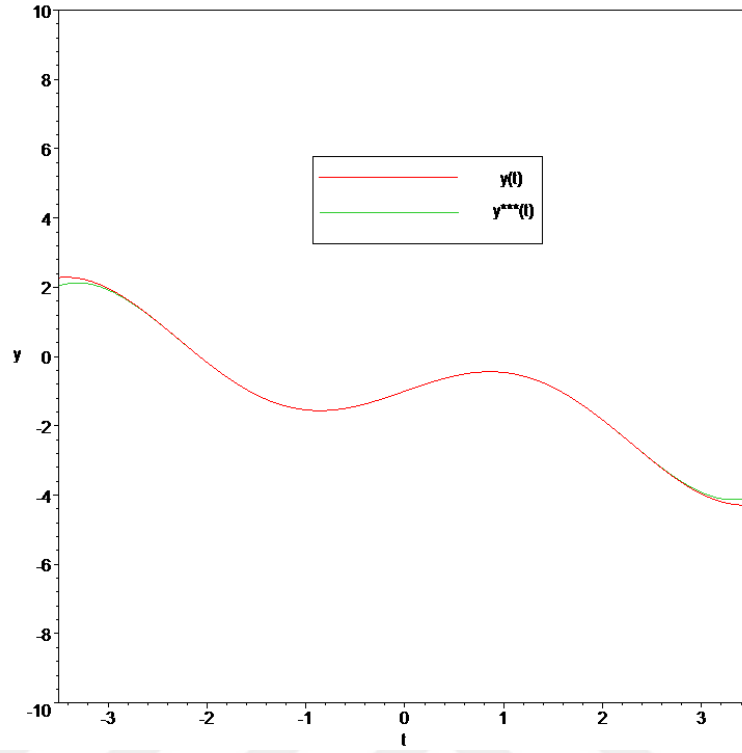
$$x^{***}(t) = 1 - 0.5t^2 + 0.0416666667t^4 - 0.001388888889t^6 + 0.00002480158730t^8$$

şeklinde $y(t)$ ve $x(t)$ 'nin nümerik çözümleri elde edilir.

Analitik çözümler ile nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.1. (4.1) denklemindeki $y(t)$ 'nin nümerik çözümü

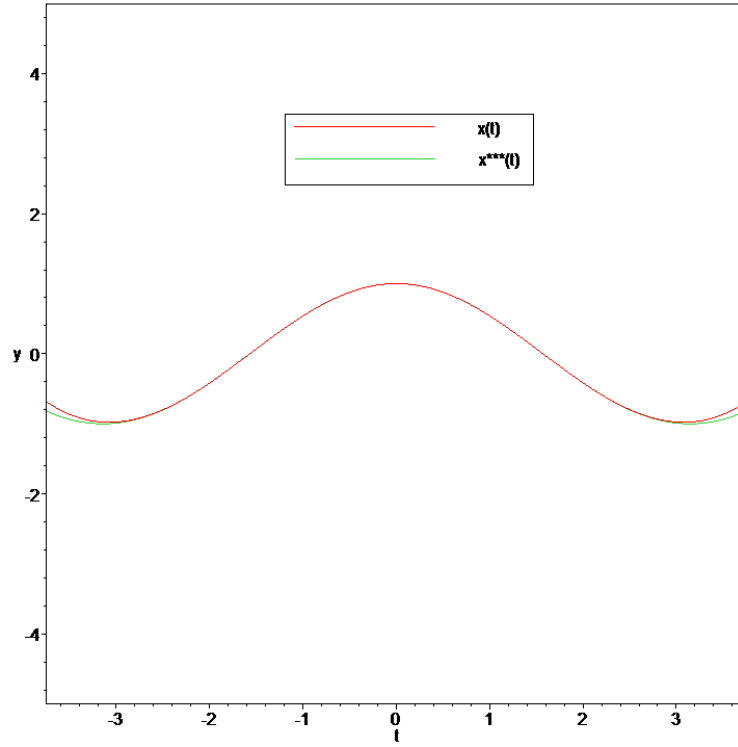
t	$y(t)$	$y^{***}(t)$	$ y(t) - y^{***}(t) $
0.0	-1.000000000000	-1.000000000000	0.00000000
0.1	-0.900499583472	-0.900499583471	0.1×10^{-11}
0.2	-0.803986684432	-0.803986684430	0.2×10^{-11}
0.3	-0.713399053262	-0.713399053259	0.3×10^{-11}
0.4	-0.631575602399	-0.631575602383	0.16×10^{-10}
0.5	-0.561208719055	-0.561208718915	0.140×10^{-9}
0.6	-0.504798631054	-0.504798630051	0.1003×10^{-8}
0.7	-0.464610468901	-0.464610463464	0.5437×10^{-8}
0.8	-0.442634632522	-0.442634608956	0.23566×10^{-7}
0.9	-0.440551028556	-0.440550942596	0.85960×10^{-7}
1.0	-0.459697694132	-0.459697420622	0.273510×10^{-6}



Şekil 4.1. (4.1) denklemindeki $y(t)$ 'nin grafiği ve Lucas polinomu yaklaşımı

Çizelge 4.2. (4.1) denklemindeki $x(t)$ 'nin nümerik çözümü

t	$x(t)$	$x^{***}(t)$	$ x(t) - x^{***}(t) $
0.0	1.000000000000	1.000000000000	0.0000000000
0.1	0.995004165278	0.995004165278	0.0000000000
0.2	0.980066577841	0.980066577841	0.0000000000
0.3	0.955336489126	0.955336489127	0.1×10^{-11}
0.4	0.921060994003	0.921060994032	0.29×10^{-10}
0.5	0.877582561890	0.877582562159	0.269×10^{-9}
0.6	0.825335614910	0.825335616571	0.1661×10^{-8}
0.7	0.764842187284	0.764842195041	0.7757×10^{-8}
0.8	0.696706709347	0.696706738795	0.29448×10^{-7}
0.9	0.621609968271	0.621610063772	0.95501×10^{-7}
1.0	0.540302305868	0.540302579368	0.273500×10^{-6}



Şekil 4.2. (4.1) denklemindeki $x(t)$ 'nin grafiği ve Lucas polinomu yaklaşımı

4.2. Test Problemi 2.

Aşağıdaki başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferansiyel-cebirselsel denklemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} 2x' + 3y' + 2z' + 18x + 14y + 10z &= 0 \\ x' - 2z' + y + 2z &= 0 \\ 9x + 7y + 5z &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33333333 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Bu diferansiyel-cebirselsel denklemin analitik çözümü

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0.1666666667 + 0.1666666667e^{0.1666666667t} \\
y(t) &= -0.3333333333 + 1.3333333333e^{0.1666666667t} \\
z(t) &= 0.1666666667 - 2.1666666667e^{0.1666666667t}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklindedir.

Başlangıç şartlarından (4.16) denkleminin çözümlerinin

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + e_1 t \Rightarrow x = 0.3333333333 + e_1 t \\
y &= y_0 + e_2 t \Rightarrow y = 1 + e_2 t \\
z &= z_0 + e_3 t \Rightarrow z = -2 + e_3 t
\end{aligned} \tag{4.19}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.19) ve türevleri (4.16) denkleminde yerine yazılır ve yüksek dereceden terimler ihmal edilirse

$$\begin{aligned}
(2e_1 + 3e_2 + 2e_3) + O(t) &= 0 \\
(-3 + e_1 - 2e_3) + O(t) &= 0 \\
(9e_1 + 7e_2 + 5e_3) + O(t^2) &= 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde (3.10) formundaki denklem elde edilir. (3.11) ve (3.12) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi

$$Se = T \tag{4.21}$$

şeklindedir. Burada

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

olur. O halde

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

olup (4.23) denklemini çözülürse

$$e = \begin{bmatrix} 0.111111111 \\ 0.888888889 \\ -1.444444444 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

olarak bulunur. Böylece çözüm

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.333333333 + 0.111111111t \\ y(t) &= 1 + 0.888888889t \\ z(t) &= -2 - 1.444444444t \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. Yukarıdaki işlemler tekrar edilirse

$$\begin{aligned} x^*(t) &= 0.333333333 + 0.111111111t + 0.03703703704t^2 + 0.008230452675t^3 \\ &+ 0.001371742112t^4 + 0.0001828989483t^5 + 0.2032210537 \times 10^{-4}t^6 \\ &+ 0.1935438607 \times 10^{-5}t^7 + 0.1612865506 \times 10^{-6}t^8 + 0.1194715189 \times 10^{-4}t^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^*(t) &= 1.000000000 + 0.888888889t + 0.2962962962t^2 + 0.06584362136t^3 \\ &+ 0.01097393689t^4 + 0.001463191586t^5 + 0.1625768429 \times 10^{-3}t^6 \\ &0.1548350885 \times 10^{-4}t^7 + 0.1290292404 \times 10^{-5}t^8 + 0.9557721514 \times 10^{-7}t^9 \end{aligned}$$

$$z^*(t) = -2.000000000 - 1.444444445t - 0.4814814815t^2 - 0.1069958847t^3 \\ - 0.01783264746t^4 - 0.002377686329t^5 - 0.0002641873698t^6 \\ - 0.2516070189 \times 10^{-4}t^7 - 0.2096725158 \times 10^{-5}t^8 - 0.1553129747 \times 10^{-6}t^9$$

elde edilir. Bu kuvvet serilerinde (2.24) değerleri yerine yazılırsa

$$x^{**}(t) = 0.2670945599 + 0.08818250755L_1(t) + 0.03184586813L_2(t) \\ + 0.007355598583L_3(t) + 0.001254325503L_4(t) + 0.0001697809755L_5(t) \\ + 0.1903181296 \times 10^{-4}L_6(t) + 0.1827914240 \times 10^{-5}L_7(t) \\ + 0.1612865506 \times 10^{-6}L_8(t) + 0.1194715189 \times 10^{-7}L_9(t)$$

$$y^{**}(t) = 0.4700898122 + 0.7054600604L_1(t) + 0.2547669449L_2(t) + 0.05884478863L_3(t) \\ + 0.01003460402L_4(t) + 0.001358247804L_5(t) + 0.1522545037 \times 10^{-3}L_6(t) \\ + 0.1462331391 \times 10^{-4}L_7(t) + 0.1290292404 \times 10^{-5}L_8(t) + 0.9557721514 \times 10^{-7}L_9(t)$$

$$z^{**}(t) = -1.138895946 - 1.146372598L_1(t) - 0.4139962856L_2(t) - 0.09562278147L_3(t) \\ - 0.01630623154L_4(t) - 0.002207152683L_5(t) - 0.2474135685 \times 10^{-3}L_6(t) \\ - 0.2376288512 \times 10^{-4}L_7(t) - 0.2096725158 \times 10^{-5}L_8(t) - 0.1553129747 \times 10^{-6}L_9(t)$$

şeklinde Lucas polinomları elde edilir. $x^{**}(t)$, $y^{**}(t)$ ve $z^{**}(t)$ Lucas polinomlarında (2.23) değerleri yazılırsa

$$x^{***} = 0.3333333333 + 0.1111111111t + 0.03703703704t^2 + 0.008230452675t^3 \\ + 0.001371742112t^4 + 0.0001828989483t^5 + 0.2032210536 \times 10^{-4}t^6 \\ + 0.1935438607 \times 10^{-5}t^7 + 0.1612865506 \times 10^{-6}t^8 + 0.1194715189 \times 10^{-4}t^9$$

$$y^{***}(t) = 1.000000000 + 0.8888888889t + 0.2962962962t^2 + 0.06584362136t^3 \\ + 0.01097393689t^4 + 0.001463191586t^5 + 0.1625768429 \times 10^{-3}t^6 \\ 0.1548350885 \times 10^{-4}t^7 + 0.1290292404 \times 10^{-5}t^8 + 0.9557721514 \times 10^{-7}t^9$$

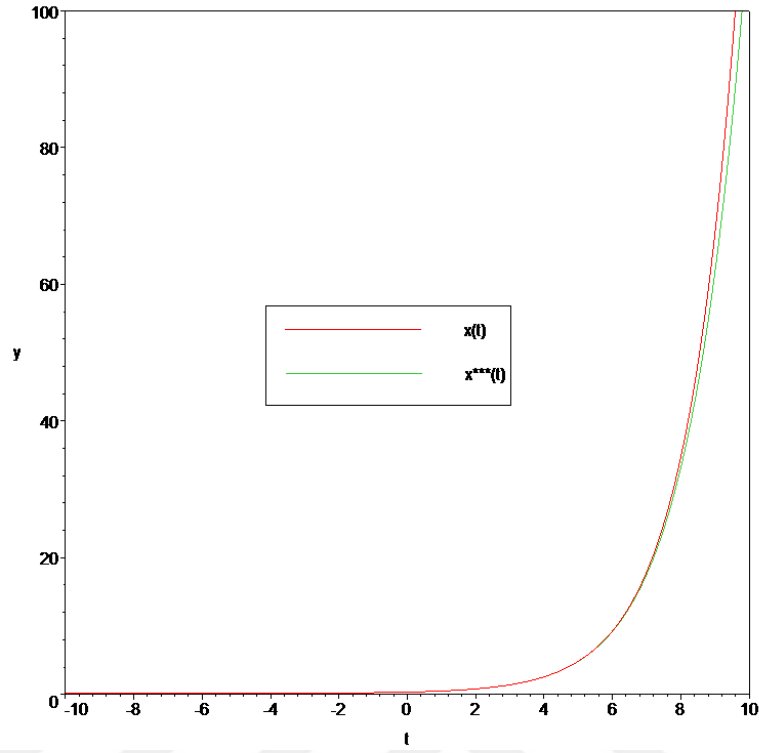
$$z^{***}(t) = -2.000000000 - 1.444444445t - 0.4814814815t^2 - 0.1069958847t^3 \\ - 0.01783264746t^4 - 0.002377686329t^5 - 0.0002641873698t^6 \\ - 0.2516070189 \times 10^{-4}t^7 - 0.2096725158 \times 10^{-5}t^8 - 0.1553129747 \times 10^{-6}t^9$$

şeklinde $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ 'nin nümerik çözümleri elde edilir.

Analitik çözümler ile nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.3. (4.16) denklemindeki $x(t)$ 'nin nümerik çözümü

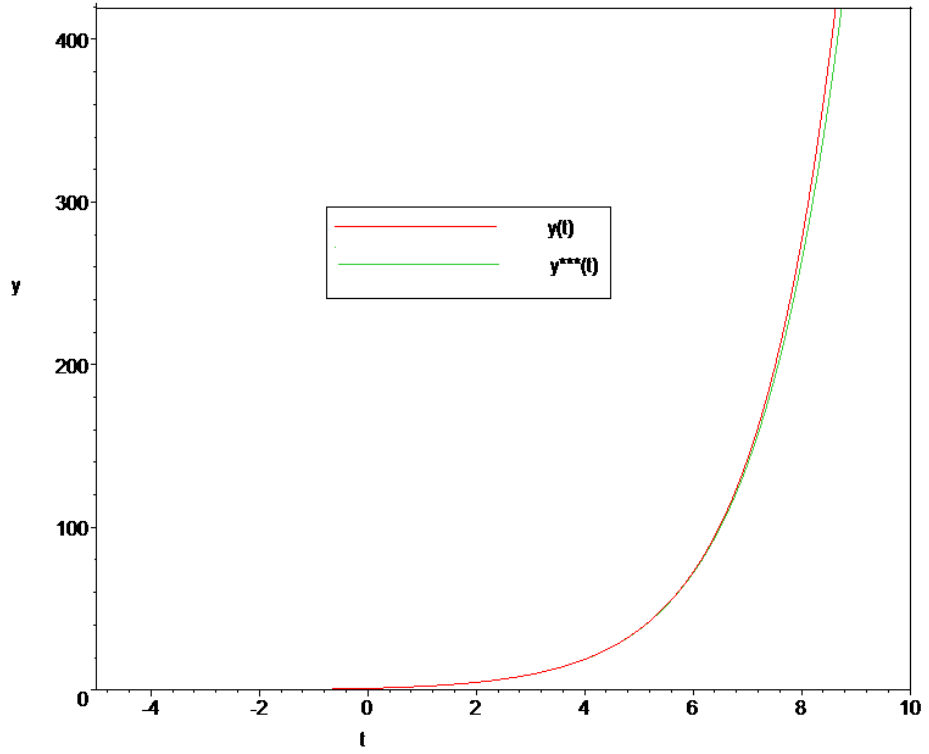
t	$x(t)$	$x^{***}(t)$	$ x(t) - x^{***}(t) $
0.0	0.3333333333	0.3333333333	0.000000000
0.1	0.34482318437	0.34482318436	0.1×10^{-10}
0.2	0.35710513537	0.35710513536	0.1×10^{-10}
0.3	0.37023379311	0.37023379309	0.2×10^{-10}
0.4	0.38426752876	0.38426752874	0.2×10^{-10}
0.5	0.39926873760	0.39926873758	0.2×10^{-10}
0.6	0.41530411637	0.41530411633	0.4×10^{-10}
0.7	0.43244495980	0.43244495976	0.6×10^{-10}
0.8	0.45076747766	0.45076747752	0.14×10^{-9}
0.9	0.47035313349	0.47035313316	0.33×10^{-9}
1.0	0.49128900695	0.49128900605	0.90×10^{-9}



Şekil 4.3. (4.16) denklemindeki $x(t)$ 'nin grafiği ve Lucas polinomu yaklaşımı

Çizelge 4.4. (4.16) denklemindeki $y(t)$ 'nin nümerik çözümü

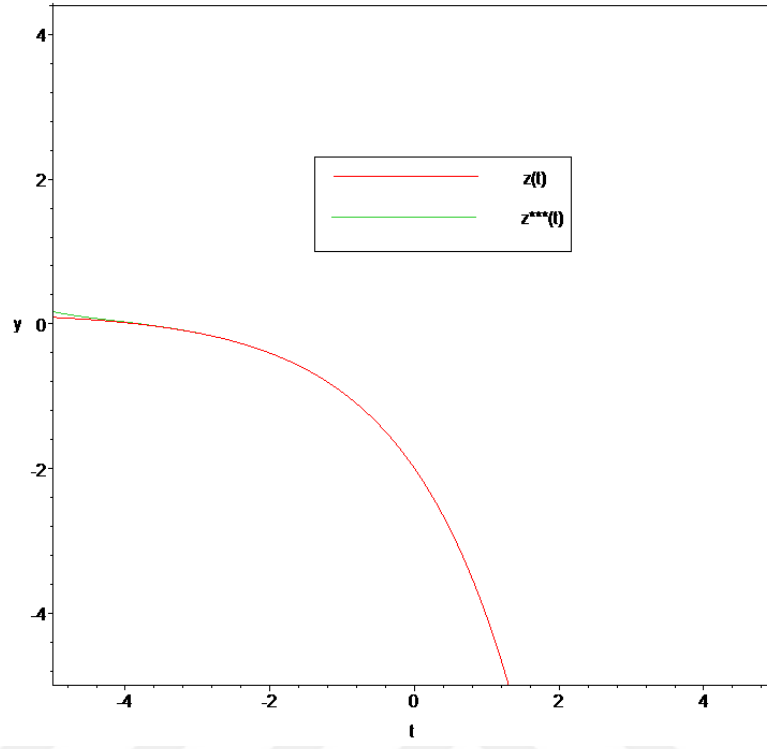
t	$y(t)$	$y^{***}(t)$	$ y(t) - y^{***}(t) $
0.0	1.00000000000	1.00000000000	0.000000000
0.1	1.0919188076	1.0919188074	0.2×10^{-9}
0.2	1.1901744157	1.1901744153	0.4×10^{-9}
0.3	1.2952036776	1.2952036776	0.3×10^{-9}
0.4	1.4074735628	1.4074735624	0.4×10^{-9}
0.5	1.5274832335	1.5274832332	0.3×10^{-9}
0.6	1.6557662635	1.6557662630	0.5×10^{-9}
0.7	1.7928930109	1.7928930102	0.7×10^{-9}
0.8	1.9394731537	1.9394731525	0.12×10^{-8}
0.9	2.0961584005	2.0961583975	0.30×10^{-8}
1.0	2.2636453881	2.2636453807	0.74×10^{-8}



Şekil 4.4. (4.16) denklemindeki $y(t)$ 'nin grafiği ve Lucas polinomu yaklaşımı

Çizelge 4.5. (4.16) denklemindeki $z(t)$ 'nin nümerik çözümü

t	$z(t)$	$z^{***}(t)$	$ z(t) - z^{***}(t) $
0.0	-2.0000000000	-2.0000000000	0.0000000000
0.1	-2.1493680624	-2.1493680627	0.3×10^{-9}
0.2	-2.3090334256	-2.3090334258	0.2×10^{-9}
0.3	-2.4797059761	-2.4797059762	0.1×10^{-9}
0.4	-2.6621445396	-2.6621445367	0.1×10^{-9}
0.5	-2.8571602544	-2.8571602548	0.4×10^{-9}
0.6	-3.0656201781	-3.0656201784	0.3×10^{-9}
0.7	-3.2884511428	-3.2884511430	0.2×10^{-9}
0.8	-3.5266438748	-3.5266438742	0.6×10^{-9}
0.9	-3.7812574009	-3.7812573975	0.34×10^{-8}
1.0	-4.0534237557	-4.0534237451	0.106×10^{-7}



Şekil 4.5. (4.16) denklemindeki $z(t)$ 'in grafiği ve Lucas polinomu yaklaşımı

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde sunduğumuz nümerik metot, Diferansiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot iki test problemine uygulandı.

Problemlerin tam çözümleri ile, metotla elde ettiğimiz nümerik çözümler çizelgeler ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Karşılaştırma sonucunda analitik çözümlerle Lucas polinomları yardımıyla elde edilen nümerik çözümlerin uyumlu olduğu görüldü.



KAYNAKLAR

- Akar, M., 2007. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin En Küçük Kareler Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Ascher, U.M., Petzold, L.R., 1998. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. Society for Industrial and Applied Mathematics. 240.
- Bayram, M., and Çelik, E., 2003. Arbitrary Order Numerical Method for Solving Differential-Algebraic Equations by Padé Series. Applied Mathematics and Computation.
- Brenan, K.E., Campbell, S. L., Petzold, L. R., 1989. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Applied Mathematics and Computation, Nort-Holland, Amsterdam.
- Çelik, E., 2002. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2003. On The Numerical Solution of Differential-Equations by Padé Series. Applied Mathematics and Computation. 89, 447–451.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2005. The Numerical Solution Physical Problems Modeled as a Systems of Differential-Algebraic Equations (DAEs). Journal of The Franklin Institute. 342:1–6.
- Gear, C. W., 1971. The Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18, 89-92.
- Hairer, E., and Wanner, G., 1991. Solving Ordinary Differential Equations II: stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag.
- Kızıloğlu, O., 2005. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Nümerik Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&SonsInc., ISBN: 978-0-471-39969-8.
- Müller, P. C., 2000. Descriptor systems: prons and cons of system modelling by differential-algebraic equations. Mathematics and Computers in Simulation. 53, 273-279.
- Pierluigi, A., and Mazzia, F., 1992. 1. Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations and Computation of Consistent Initial/Boundary Conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 87, 135-142.
- Valda, S., 1989. Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section. Halsted Press, New York, 10-100.
- Wang, F.S., 2000. A Modified Collocation Method for Solving Differential-Algebraic Equations. Applied Mathematics and Computation. 116, 257–278.
- Wang, W., 2005. An Algorithm for Solving DAEs with Mechanization. Applied Mathematics and Computation. 167: 1350–1372.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında İstanbul’da doğdu. İlkokulu Vedide Baha Pars ilkokulunda, Liseyi İstanbul Davutpaşa lisesinde tamamladı. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girerek 2013 yılında mezun oldu.

