

**ZAKHAROV-KUZNETSOV DENKLEMİNİN (G'/G, 1/G)
AÇILIM METODU KULLANILARAK YÜRÜYEN
DALGA ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Bülent KUZU
(151121120)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Bilim Dalı: Uygulamalı Matematik
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Asif YOKUŞ**

TEMMUZ-2018

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAKHAROV-KUZNETSOV DENKLEMİNİN (G'/G, 1/G) AÇILIM METODU
KULLANILARAK YÜRÜYEN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bülent KUZU

(151121120)

Anabilim Dalı: Matematik

Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Haziran 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Temmuz 2018

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Asif YOKUŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN (Yüzüncü Yıl, VAN)

Prof. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

TEMMUZ-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasından tamamlanmasına kadar her aşamasında bilgisinden ve tecrübesinden istifade ettiğim, benden sabır ve hoşgörüsünü eksik etmeyen kıymetli hocam ve danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Asıf YOKUŞ' a şükranlarımı sunarım.

Bülent KUZU
ELAZIĞ – 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanımlar	4
Tanım 1. 2.....	9
Tanım 1. 3.....	9
Tanım 1. 4.....	9
2. KLASİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	10
2.1. Fourier Seri Metodu (Değişkenlere Ayırma Yöntemi).....	10
2.2. D’alembert Metodu.....	13
2.3. Fourier Dönüşüm Metodu	15
3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BİR ANALİTİK METOT	21
3.1 $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ Açılım Metodunun Analizi.....	22
4. BURGERS DENKLEMİNİN TARİHÇESİ	24
4.1. Burgers Benzeri Denklemin $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ Açılım Metodunun Uygulanması.....	26
5. ZAKHAROV-KUZNETSOV DENKLEMİNİN TARİHÇESİ	31
5.1. Zakharov-Kuznetsov Denklemin $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ Açılım Metodunun Uygulanması	31
6.SONUÇLAR	45
7.KAYNAKLAR	46
8.ÖZGEÇMİŞ	50

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAKHAROV-KUZNETSOV DENKLEMİNİN $(G'/G, 1/G)$ AÇILIM METODU KULLANILARAK YÜRÜYEN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Bülent KUZU

Fırat Üniversitesi
Fen bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim dalı
2018, Sayfa: 56

Bu çalışma beş bölüm halinde oluşturulmuştur.

Birinci bölümde solitary dalgalar ve solitonların tarihçesi hakkında bilgi verilerek çalışmaya temel teşkil eden bazı temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin klasik çözüm yöntemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$ açılım metodunun analizi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde analizi yapılan $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$ açılım metodu kullanılarak Burgers Tipi denklemi için hareket eden dalga çözümleri elde edilerek bu çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri şekiller ile gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, üçüncü bölümde analizi yapılan $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$ açılım metodu kullanılarak (3+1) boyutlu Zakharov-Kuznetsov denklemi için hareket eden dalga çözümleri elde edilerek bu çözümlerin üç boyutlu grafikleri şekiller ile gösterilmiştir.

SUMMARY

M.S. Thesis

NONLINEAR ZAKHAROV-KUZNETSOV EQUATION $(G'/G, 1/G)$ EXPANSION METHOD FOR WALKING WAVE SOLUTIONS

Bülent KUZU

Firat University

Institute of Science

Department of Mathematics

2018, Pages: 56

This work was organized into five sections.

In the first section, some basic definitions are given to give information about the history of solitary waves and solitons.

In the second section, classical solution methods of nonlinear partial differential equations are given.

In the third section, the analysis of the $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$ expansion method, which is used to obtain the periodic wave solutions of the nonlinear partial differential equations, is performed.

In the fourth section, moving wave solutions for the Burgers-Like equation are obtained by using the $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$ expansion method that is analyzed in the third section and the two and three dimensional graphics of these solutions are shown in figures.

In the fifth section, moving wave solutions for the $(3 + 1)$ -dimensional Zakharov-Kuznetsov equation are obtained by using the $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$ expansion method analyzed in the third section and the three-dimensional graphs of these solutions are shown in figures.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Peryodik doğrusal bir dalga	1
Şekil 1.2. Bir solitary dalga	2
Şekil 1.3. İki soliton etkileşimi.....	4
Şekil 4.1. Denklem (4.4) ve (4.11)'in çözümünün üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($\lambda = 1, \sigma = -1, A_2 = 1$)	28
Şekil 4.2. Denklem (4.4) ve (4.11)'in çözümünün iki boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($\lambda = 1, \sigma = -1, A_2 = 1, x = 0$)	28
Şekil 4.3. Denklem (4.4) ve (4.17)'in çözümünün üç boyutlu ve iki boyutlu grafiği ($A_1 = 2, A_2 = 1, \mu = 1$)	30
Şekil 5.1. $u(x, y, z)$ denkleminin (5.7) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu Grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,373, z = 0,574, c = 20,667, \alpha = 1,317, \lambda = -1,317, \mu = 4,633, c_1 = 6,455, c_2 = 4,674$).....	33
Şekil 5.2. $u(x, y, z)$ denkleminin (5.9) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,41, z = 0,239, c = 20,7, \alpha = 1,388, \lambda = -1,82, \mu = 4,626, c_1 = 6,381, c_2 = 4,414$)	34
Şekil 5.3. $u(x, y, z)$ denkleminin (5.11) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,277, z = 0,663, c = 20,492, \alpha = 1,715, \lambda = -1,303, \mu = 4,529, c_1 = 6,6711, c_2 = 4,351$)	35
Şekil 5.4. $u(x, y, z)$ denkleminin (5.13) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,296887, z = 0,518761, c = 20,425, \alpha = 1,49376, \lambda = -1,49376, \mu = 4,61564, c_1 = 6,70626, c_2 = 4,70626$) ..	36
Şekil 5.5. $u(x, y, z)$ denkleminin (5.16) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,492, z = 0,451, c = 20,388, \alpha = 1,005, \lambda = 4,671, \mu = 4,05, c_1 = 6,685, c_2 = 5,381$)	37

- Şekil 5.6.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.18) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,396888, z = 0,986013, c = 20,4344, \alpha = 1,57339, \lambda = 4,70364, \mu = 4,69726, c_1 = 6,73413, c_2 = 5,08576$) 38
- Şekil 5.7.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.20) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,286631, z = 0,254258, c = 20,181, \alpha = 1,37489, \lambda = 4,73738, \mu = 4,59364, c_1 = 6,202, c_2 = 5,61826$) 39
- Şekil 5.8.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.22) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,765634, z = 0,878142, c = 20,7219, \alpha = 1,83752, \lambda = 4,85939, \mu = 4,84064, c_1 = 6,85315, c_2 = 5,87814$) 40
- Şekil 5.9.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.26) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,434271, z = 0,434271, c = 20,5468, \alpha = 1,5749, \lambda = 4,48115, \mu = 4,36865, c_1 = 6,98428, c_2 = 5,56865$) 41
- Şekil 5.10.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.28) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,408035, z = 0,548907, c = 20,7893, \alpha = 1,07083, \mu = 4,54555, c_1 = 6,79359, c_2 = 5,01767$) 42
- Şekil 5.11.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.30) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,219684, z = 0,426374, c = 20,7168, \alpha = 1,98133, \lambda = 4,24476, \mu = 4,43229, c_1 = 6,75332, c_2 = 5,3278$) 43
- Şekil 5.12.** $u(x, y, z)$ denkleminin (5.30) tam çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($y = 0,287412, z = 0,591909, c = 20,9187, \alpha = 1,94734, \lambda = 4,37855, \mu = 4,57481, c_1 = 6,85132, c_2 = 5,09637$) 44

1. GİRİŞ

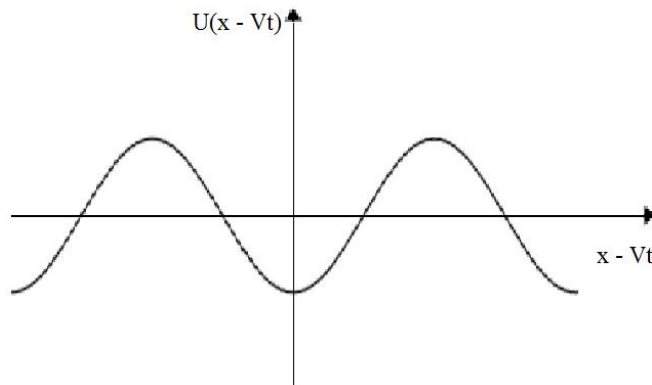
Lineer denklemler farklı olayları tanımlamak için yıllardır kullanılmaktadır. Örneğin; Newton, Maxwell ve Schrödinger denklemleri lineer denklemler olup bu denklemler dış etkenlerin sisteme sadece doğrusal bir etkisini göz önünde bulundurlar. Ancak birçok sistem lineer değildir. Teorik modellerin çoğunluğu günümüzde doğrusal tanımlamalara dayanmaktadır. Doğrusal olmayan yapılar küçük müdahaleler ile düzeltilmektedir. Bu yaklaşımın kesin olarak yanlış olduğu bilinmektedir. Doğrusal yaklaşım sistemin bazı temel davranışlarını tam olarak belirtmeyebilir.

Doğrusal olmayan denklemlerin, uyarılmaları değiştikçe niteliksel olarak değişen eşitliklerin çoklu kararlılık ve olay ile bir alakası yoktur. Doğrusal bir sistemde iki farklı sebebin birlikte hareketinin bir etkisi, bireysel olarak bu etkilerin her birinin üst üste eklenmesidir. Ancak doğrusal olmayan sistemlerde iki temel hareketin birbirine eklenmesi, oluşan parçaların işbirliğini yansıtan yeni etkilere sebep olabilir. Doğrusal olmayanlığı anlamak için ilk önce doğrusallığı anlamak gerekir. Doğrusal dalgaları göz önüne alalım. Genellikle, bir dalga hareketi esnasında ilerlemesi ile bilinir. Herhangi bir lineer dalganın karakteristik özellikleri şunlardır:

i) Doğrusal bir dalganın şekli ve hızı genliğinden bağımsızdır.

ii) İki doğrusal dalganın toplamı yine bir doğrusal dalgadır

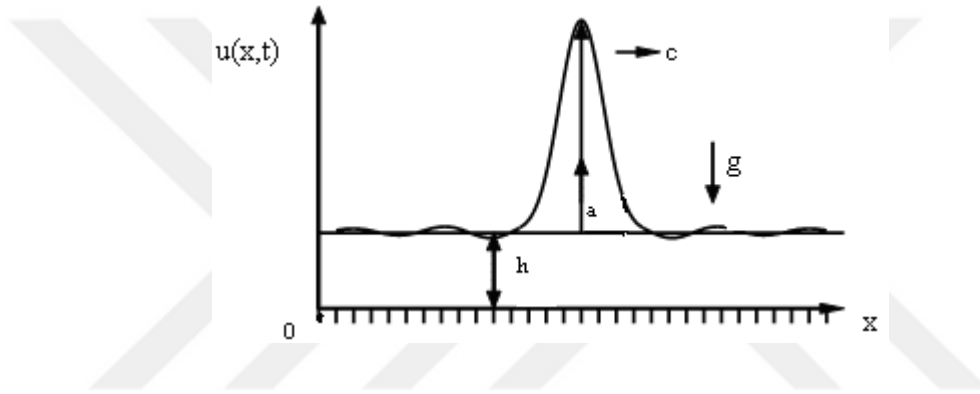
iii) Küçük genlikli dalgalar doğrusaldır. Şekil 1.1. periyodik doğrusal bir dalgayı göstermektedir.



Şekil 1.1. Periyodik doğrusal bir dalga

Yüksek genlikli dalgalar doğrusal olmayan dalgalar haline gelebilir. Ortamda hareket eden bir dalganın akıbeti ortamın özellikleri ile belirlenir. Büyük genlikli dalgaların şeklinin bozulmasının doğrusal olmayan sonuçlarına örnek olarak türbülans verilebilir. Ancak bir başka bozulma kaynağı da dalganın dağılımıdır.

Yüz yıldan daha fazla bir süredir solitary dalgaları tanımlayan matematiksel denklemler çözülmektedir. Şekil 1.1. den de görüldüğü gibi solitary dalgalar, dağılım ve doğrusal olmayanlığın etkileri arasındaki küçük bir denge sayesinde oluşmaktadır. Doğrusal olmayanlık, Şekil 1.2. ' de görüldüğü gibi dağılımı düzleştiren tepeyi dik yapma eğilimindedir.



Solitary dalgalar bu iki tehlike ve yıkıcı kuvvetler arasında yaşar. Buna göre, lineer olmayanlık ve dağılım arasındaki denge, solitary dalgaların varlığından sorumludur. Bunun sonucu olarak son derece kuvvetlidir. Solitary dalgalar ve solitonlar lineer denklemler kullanılarak tanımlanamaz. Bir su yüzeyindeki yükselmelerin ve çukurların periyodik olarak tekrarlanmasını temsil eden veya yoğunluğun sıklaşması ve seyrelmesini temsil eden sıradan dalgalardan farklı olarak solitonlar, belirli bir hız ile kendine özgü hareket eden tek yükseltilerdir. Solitonların hareketi ve dönüşümü matematiksel fiziğin doğrusal olmayan denklemleri ile tanımlanır. Solitary dalgaların ve solitonların tarihi çok ilginçtir. Solitary dalgaların ilk bilimsel gözlemi su yüzeyi üzerinde 1834 yılında Russell tarafından yapılmıştır. Russell gözlemini şu şekilde açıklamıştır:

“Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kütesinin botun uç kısmının etrafında biriktiğini gördüm. Daha sonra bu su kütesi arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu

yuvarlanmış su kütesinin hızının azalmadan ve formunu değiştirmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu at sırtında takip ettim. Ona yetiştiğim zaman saatte yaklaşık 8–9 mil hızla ilerlediğini gördüm. Onu 1–2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834’ün Ağustos ayında Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtma şansım oldu” [1]. Dikkate değer bu keşif, solitary dalgaları çalışmak ve fiziksel laboratuvar deneylerini yapmak için Russell’i motive etmiştir. Russell, deneysel olarak

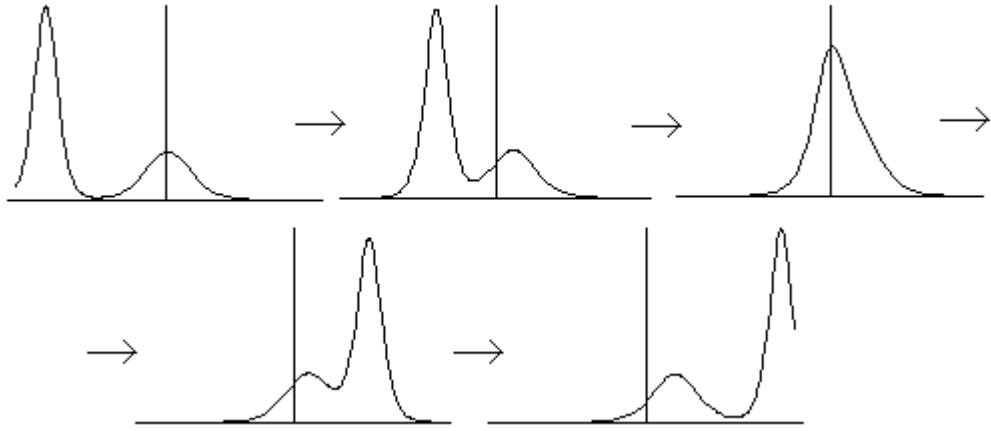
$$c^2 = g(h + a) \quad (1.1)$$

ilişkisini ortaya çıkarmıştır. Şekil 1.2.’ de görüldüğü gibi denklem (1.1)’de c solitary dalganın hızı, a su yüzeyi üzerinde dalganın genliği, h sonlu bir derinliği ve g yerçekimi ivmesini göstermektedir. Solitary dalgalar bundan dolayı yerçekimi dalgaları olarak da adlandırılır.

Solitary dalgaları tanımlayan ilk matematiksel denklemler 1895 yılında formüle edildi. 1960 yıllarına kadar solitary dalgalar gereken ilgiyi görmemiştir. Ancak 1965 yılında Zabusky ve Kruskal [2] solitary dalgaların birbirleriyle etkileşimini incelemişlerdir. Zabusky ve Kruskal, KDV denklemi için yaptıkları sayısal çalışmalar ve bu denklemin integrallenebileceğini göstermeleri ile solitary dalgalara olan ilgiyi tekrar arttırmışlardır. Aynı yıl içerisinde Zabusky ve Kruskal, solitary dalgaların birbirleriyle etkileşim içinde olduğunu keşfetmişlerdir. Bunlara ilaveten, şeklini ve genliğini muhafaza eden bu dalgalar bu etkileşimden ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Kimliklerini koruyan ve karakterlerini küçük parçalarına aktarabilen solitary dalgaların keşfi, Zabusky ve Kruskal’ı bu solitary dalgalara solitonlar demek için cesaretlendirmiştir. Bu bilim adamları, solitonlar kavramının doğuşuna damgalarını vurmuşlardır. 1965 yılından sonra fark edildi ki, su yüzeyindeki, nabız atışlarındaki, girdaplardaki, kasırgalardaki ve benzer kategoriye giren pek çok olaydaki solitary dalgalar aslında solitonlardır. Şekil 1.3.’ te görüldüğü gibi çarpışma esnasında şekillerini koruyan dalgalara solitonlar denir. Solitonların en önemli özelliklerinden biri bir parçacık gibi davranırlar. Solitonların diğer önemli özellikleri şunlardır:

- i) Şekil değiştirmezler
- ii) Uzayın bir bölgesinde sınırlıdırlar.

iii) Diğer solitonlar ile etkileşime girdikten sonra şekillerini muhafaza ederler.



Şekil 1.3. İki soliton etkileşimi

Matematiksel olarak solitonlar ve solitary dalgalar arasında bir fark vardır. Solitary dalgalar integrallenemeyen denklemlerin sınırlandırılmış çözümleri iken, solitonlar integrallenebilen denklemlerin sınırlandırılmış çözümleridir. Solitonların bir başka karakteristik özelliği ise, diğer solitonlar ile çarpıştıktan sonra bozulmayan solitary dalgalarıdır. Kasırgalar ve girdaplar gibi solitary dalgaları dalgalar olarak göz önüne almak zordur. Bunun sebebi, bu dalgalar bazen soliton-like uyarılmaları olarak adlandırılır. Bu ifadeden kaçınmak için genellikle bütün durumlarda soliton terimi kullanılır.

1.1. Temel Tanımlar

Bir fonksiyonda sadece bir tane bağımlı değişken bulunur. Fonksiyonlar bağımsız değişkenlere göre adlandırılır. Bu adlandırma iki farklı şekilde olur.

i) Tek değişkenli fonksiyonlar; sadece bir tane bağımsız değişken bulunduran fonksiyonlardır ve genel olarak $y = f(x)$ formatında karşımıza çıkar. Burada x bağımsız, y bağımlı değişkendir. Bu tek değişkenli fonksiyonun türevlerini ihtiva eden diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bu adi diferansiyel denklemler aşağıdaki ifadelerin

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

Şeklinde gösterilebilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü mertebesi kadar keyfi sabit içerir. Bu çözüm bir eğri ailesine karşılık gelir.

Çok değişkenli fonksiyonlar: en az iki bağımsız değişken içeren fonksiyonlara denir. Genel olarak

$$z = f(x, y), \text{ iki değişkenli}$$

$$u = f(x, y, z), \text{ üç değişkenli}$$

$$f(x, y, z, \dots) = 0, \text{ çok değişkenli}$$

Şeklinde karşımıza çıkar. Çok değişkenli fonksiyonun türevini bulunduran denklemlere ise kısmi diferansiyel denklem denir. Genel olarak

$$f(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} \dots) = 0,$$

veya

(1.3)

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0,$$

şeklinde yazılır. Bu kısmi diferansiyel denklemin çözümü ise mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu çözümler ise uzayda bir yüzey ailesi belirtir. Diferansiyel denklemlerin elde edilişleri üç kısımda toplanabilir:

Problem cebirsel özelliklerle verilebilir. Örneğin, içinde birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit içeren cebirsel bir denklem ve düzlemde bir eğri ailesini oluşturabilir. Böyle bir eğri ailesinin öğelerinin bazı ortak özelliklerini bu keyfi sabitlerin verilen cebirsel denklem ve onun türevleri arasında yok edilmesi ile elde edildiği bilinmektedir. Bu yok etme işleminin sonunda bir diferansiyel denklem elde edilebilmektedir.

Geometrik özellikleri ile problemi tanımlayıp bu özelliklere uyan bir eğrinin bulunması da bize bir diferansiyel denklem verir. Bilindiği gibi bir eğrinin bir noktadaki teğetinin eğimi o noktadaki türevin değeri ile verilmektedir.

Uygulamalı bilim dallarında ise problemin bir matematiksel modeli elde edilerek olaya veya sisteme karşılık gelen diferansiyel denklem oluşturulabilir. Diferansiyel denklemlerde önemli bazı genel tanım ve teoremleri verelim: Bir denklem içerisinde türev bulunduruyorsa bu denkleme diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem sadece

bir tek bağımsız değişken içeriyor ise bu tip denklemlere adi diferansiyel denklem denir ve genel olarak adi diferansiyel denklem

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad (1.4)$$

açık formda veya

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.5)$$

kapalı formda gösterilir.

Bir diferansiyel denklemin keyfi sabitlere bağlı çözümlerinin *kümesine genel çözüm*, genel çözümün her bir ögesine özel çözüm ve bir özel çözümün grafiğine de integral eğrisi denir İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerde genellikle iki keyfi sabit olduğundan iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar bağımsız değişkenin tek değeri için fonksiyonun kendisini ve bazı türevlerin değerlerinin verilmesi şeklinde ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin seçilmiş birkaç değeri için fonksiyonun ya da türevinin değerlerinin verilmesi şeklinde ise sınır şartları adını alır. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine başlangıç değer problemi, sınır şartları ile incelenmesine de sınır değer problemi denir. (1.5) diferansiyel denklemi

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (1.6)$$

başlangıç şartları ile birlikte verilmiş ise Denklem 1.5 ve Denklem 1.6 başlangıç şartları ile birlikte Cauchy problemi olarak bilinir. Benzer şekilde bir diferansiyel denklem bir veya daha çok değişkenli fonksiyonun türevlerini içeriyor ise diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir ve genel bir kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots \dots \dots + \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = 0$$

açık formda veya

$$F(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, \dots, u_{tt\dots t}) = 0$$

kapalı formda verilebilir.

Kısmi Diferansiyel denklemler:

1. Değişkenlerine ayırma metodu,
2. D' Alembert Metodu,
3. Riemann Metodu,

gibi klasik metotlar ve diğer özel metotlar kullanılarak çözüm fonksiyonları elde edilebilir. Elde edilen model denklemin ve bu modelin çözümlerinin, modele uygun olup olmadığını Hadamard kuralı ile iyi durumda veya kötü durumda olduğunu test etmek mümkündür. Modeli oluşturan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki;

- i) Çözüm mevcut ise o çözüm tektir.
- ii) Başlangıç ve sınır şartlarının uygun sınırlamalar altında bir çözümü vardır.
- iii) Kararlıdır.

şartları sağlıyorsa bu modele iyi durumludur, aksi takdirde kötü durumludur denir. Başlangıç veya sınır şartlarında çok küçük bir değişme yapıldığında çözümde çok büyük değişiklikler olmuyorsa sisteme kararlıdır, yani; çözüm sürekli olarak başlangıç ve sınır şartlarına bağlıdır denir. Diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında kolaylık sağladığından,

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU + G = 0 \quad (1.8)$$

şeklinde verilen ikinci mertebeden bir genel kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada; u , x ve y bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon ve u 'nun iki kez türetilebilir olduğunu kabul edelim. $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantı için eğer

$\Delta > 0$, ise denklem hiperbolik

$\Delta = 0$, ise denklem parabolik

$\Delta < 0$, ise denklem eliptik

olarak sınıflandırılır. Denklem 1.9'un özel durumları için; titreşen zar, titreşen ip, uzayda ses dalgaları, bir iletkendeki elektriksel titreşim, gibi fiziksel olayların modellenmesinde sırasıyla hiperbolik, parabolik ve eliptik tip denklemler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ hiperbolik dalga denklemi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ parabolik difüzyon denklemi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ Eliptik Laplace denklemi}$$

olarak bilinmektedir. Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyona bağlıdır. Bu nedenle de bir kısmi diferansiyel denklemin sonsuz sayıda çözümü olabilir. Modellenen fiziksel probleme uygun olan çözümün bulunabilmesi için, model oluşturulurken bazı yardımcı şartlar da belirtilmelidir. Bu yardımcı şartları iki grupta toplayabiliriz. Bu yardımcı şartlar başlangıç ve sınır şartları olarak bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerde başlangıç şartı adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibidir, bir kısmi diferansiyel denklemin tanımlandığı Ω uzaysal bölgesinin S sınırının n dış normalini boyunca sağlanması gereken koşullara sınır şartları denir. α , β ve g fonksiyonları S sınırı üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere bu sınır şartları

$$\text{Dirichlet şartı: } u = g,$$

$$\text{Neumann şartı: } \frac{\partial u}{\partial n} = g,$$

$$\text{Robin şartı: } \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g,$$

olarak bilinmektedir [3]. Diferansiyel denklemler lineer olup olmadıklarına göre de sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklem bağımlı değişken y nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük dereceden kuvvetlerini içeriyorsa veya y ve y nin türevlerinin çarpımını içeriyorsa bu diferansiyel denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Akışkanlar dinamiğinde kullanılan modeller kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edildiğinden çalışmamızda kullanacağımız akışkanlar dinamiğindeki bazı önemli kavramları vermemiz yararlı olacaktır. Bu kavramlar:

Vizkozluk: Sıvı kesme hareketine karşı bir direnç gösterir ve bu direnç vizkozluk adı verilen iç sürtünme şeklindedir. Vizkosite komşu sıvı tabakalarının birbiri üzerinde kaymalarından kaynaklanan sürtünme nedeni ile de ortaya çıkar .

Türbülans (Girdap): Vizkoz bir sıvının, komşu tabakaları birbiri üzerinden kararlı şekilde akıyorsa kararlı akış çizgilerine laminar akış denir. Ancak, oldukça yüksek hızlardaki sıvının akışı laminar akıştan girdaplı akış adı verilen oldukça düzensiz ve rasgele akışa dönüşebilir. Girdaplı akışta hız, sıvıyı saran ortamın geometrisine ve sıvının vizkositesine bağlı olarak değişir. Söz konusu olan girdaplı akımın pek çok örnekleri vardır. Taşla dolu bir dere veya nehirdeki suyun akışı, rüzgarlı bir havada bacadan yükselen duman girdap şeklinde olduğu gibi, hız motorunun suda oluşturduğu iz ile uçakların ve hareketli araçların havada oluşturduğu izler girdaplı akışa birer örnek verilebilir.

Tanım 1. 2.

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Aksi durumda lineer denklem denir.

Tanım 1. 3.

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türevelere sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}) = 0, \tag{1.9}$$

İse Φ fonksiyonuna Denklem 1.3'ün çözümüdür denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir. Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

Tanım 1. 4.

Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$ ile verilsin. M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir

2. KLASİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Literatürde çok iyi bilinen Fourier seri metodu, D'Alambert metodu, özel metot olan Fourier-Laplace dönüşüm metodu ve metotlara göre nispeten yeni olan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri için bir analitik metot $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ metodunun uygulamasını vereceğiz. Bu çalışmada önce klasik metotları ve $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ metodunu basit bir örnek üzerinde uygulamalarını vereceğiz. Ayrıca klasik çözüm metotları ile çözüm fonksiyonları araştırılırken karşılaşılabilecek zorluklar karmaşıklıkların $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ metodunu kullanılarak daha basitleştirildiğini göreceğiz.

Bu durumları incelemek için hem denklem hem de başlangıç ve sınır şartları iyi durumlu olan;

$$u_{tt} - cu_{xx} = 0, \quad (2.1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad (2.2)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad (2.3)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. Aşağıdaki kesimlerde öncelikle hangi metot uygulanacaksa o metodun genel hatları üzerinde durulacak ve metodun uygulanması ise yukarıda verilen Cauchy problemi üzerinde tartışılacaktır.

2.1 Fourier Seri Metodu (Değişkenlere Ayırma Yöntemi)

Değişkenlerine Ayırma yöntemi ile bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü araştırılırken, kısmi diferansiyel denklemin

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (2.4)$$

Şeklinde bir çözümün var olduğu kabul edilir ve bu çözümün gerekli türevleri hesaplanır. Hesaplanan bu türevler kısmi diferansiyel denklemde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra denklem Sturm-Liouville şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek denklemin çözümü kolayca bulunabilir [35].

Bu metodun uygulaması için hiperbolik tipindeki Denklem 2.1 kısmi diferansiyel denklemi ile birlikte Denklem 2.2 başlangıç ve sınır şartlarını ele alalım ve Denklem 2.4

şeklinde bir çözümün var olduğunu kabul edelim. Denklem 2.4'ün çözümünü Denklem 2.1 sağlamalıdır. Bunun için;

$$\begin{aligned} u_x &= X'(x).T(t) & u_{xx} &= X''(x).T(t) \\ u_t &= X(x).T'(t) & u_{tt} &= X(x).T''(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

gerekli türevler bulunur ve hesaplanan Denklem 2.5 türevleri Denklem 2.1 kısmi diferansiyel denkleminde yerlerine yazılarak

$$X'' . T - c^2 X T'' = 0$$

buradan da

$$\frac{X''}{X} - c^2 \frac{T''}{T} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{X''}{X} = c^2 \frac{T''}{T} = \lambda$$

bağıntısı göz önüne alınıp

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{veya} \quad T'' - \frac{\lambda}{c^2} T = 0, \quad (2.6)$$

şeklinde X ve T ye bağlı adi diferansiyel denklemleri kolayca bulunur. Bu denklemlere Strum-Liouville denklemleri denir. Elde edilen Denklem 2.6'nın genel çözümleri sırasıyla

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad (2.7)$$

$$T(t) = D^* \cos(\sqrt{\lambda}ct) + E^* \sin(\sqrt{\lambda}ct), \quad (2.8)$$

şeklinde bulunabilir. Burada A, B, D^* ve E^* keyfi sabitlerdir. Ayrıca Denklem 2.2 eşitlikleri ile verilen $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ sınır şartları göz önünde bulundurularak

$$X(0) = X(l) = 0, \text{ olur. } X(0) = 0, \text{ şartı altında } A=0 \text{ bulunur ve } X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilebilir. $X(l) = 0$, şartı alındığında ise $B \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$, olur ve burada $B \neq 0$ olmalıdır aksi takdirde aşikar çözüm buluruz. Sinüs fonksiyonun çözümü 0 olmalıdır.

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ olmalıdır ve buradan}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

olur. Buna göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (2.10)$$

fonksiyonu Denklem 2.6'nın, Denklem 2.2 eşitliğindeki sınır şartını sağlayan çözümdür.

Benzer şekilde Denklem 2.9 değerleri, denklem 2.8'in çözümünde kullanılırsa

$$T_n(t) = D_n^* \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + E_n^* \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right), \quad (2.11)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem 2.10 ve 2.11'in çözümleri Denklem 2.4 eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$U_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[D_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + E_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

bulunur ve dalga denklemini lineer olduğundan

$$U(x, t) = \sum_1^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[D_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + E_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right], \quad \pi \quad (2.13)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu olur. Özel olarak Denklem 2.2'nin başlangıç ve sınır şartlarında

$$c = 1, \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = 0 \text{ ve } l = \pi$$

seçilirse, Denklem 2.1'in

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

başlangıç ve sınır şartları ile çözüm fonksiyonunu araştıralım. Denklem 2.13'ün çözüm fonksiyonunda yukarıdaki ifadeler yerlerine yazılırsa

$$U(x, t) = \sum_1^{\infty} \sin\left(\frac{nx}{l}\right) \left[D_n \cos(nt) + E_n \sin(nt) \right], \quad (2.14)$$

şeklinde bulunur ve başlangıç şartları göz önüne alınarak

$$U(x,0) = \sin x = \sum_1^{\infty} D_n \sin nx, \quad (2.15)$$

$$U_t(x,0) = 0 = \sum_1^{\infty} D_n \sin nx, \quad (2.16)$$

şeklinde bulunabilir. Denklem 2.15 ve 2.16 eşitliklerinde gerekli işlemler yapılırsa

$$D_n = 1 \text{ ve } E_n = 0$$

ifadeleri elde edilir. Bu değerler Denklem 2.16'nın çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa

$$U(x,t) = \sum_1^{\infty} \sin(nx) \cos(nt), \quad (2.17)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur.

2.2. D'Alembert Metodu

Bir anlamda özel bazı denklemlere uygulanabilen D'Alembert metodu sadece hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Eliptik ve parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü D'Alembert metodu ile yapılamamaktadır.

Bu metodun uygulanması için hiperbolik tipindeki Denklem 2.1 kısmi diferansiyel denklem ile birlikte Denklem 2.2 başlangıç ve sınır şartları ele alalım ve bu denklemde $u(x,t)$ fonksiyonu x değişkenine göre t anındaki dalganın durumu $f(x)$ fonksiyonu dalganın $t=0$ zamanında ki durumu, $g(x)$ ise dalganın ilk hızını belirtmektedir.

(2.1) kısmi diferansiyel denklemini

$$Lu = D_t^2 u - c^2 D_x^2 u \quad (2.18)$$

şeklinde kanonik formda yazılır ve Denklem 2.18 ile yazılan ikinci basamaktan sabit katsayılı operatörü çarpanlarına ayırarak buradan kısmi diferansiyel denklemin karakteristikleri

$$\xi = x + ct, \quad \mu = x - ct \quad (2.19)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 2.1'e Denklem (2.19) dönüşümleri uygulanırsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \mu} = 0 \quad (2.20)$$

bir hiperbolik diferansiyel denklem elde edilir. ϕ ve φ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

Denklem 2.20 ile elde edilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$U(x,t) = \phi(y - cx) + \varphi(y + cx) \quad (2.21)$$

şeklindedir. Denklem 2.21'in çözümü için Denklem 2.2 eşitliğinde verilen başlangıç şartları uygulanırsa,

$$U(x,0) = f(x) = \phi(x) + \varphi(x) \quad (2.22)$$

$$U_t(x,0) = g(x) = c[\phi'(x) + \varphi'(x)] \quad (2.23)$$

eşitlikleri bulunur ve Denklem 2.23 eşitliğinin integralenmesi ile

$$\phi(x) + \varphi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + K \quad (2.24)$$

ifadesi kolayca görülebilir. Burada x_0 ve K keyfi sabitlerdir. Denklem 2.22 ve 2.24 eşitliklerinin taraf tarafa toplanması ile

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} \quad (2.25)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2} \quad (2.26)$$

keyfi fonksiyonları elde edilir. Denklem 2.25 eşitliliğinden de

$$\phi(x+ct) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} \quad (2.27)$$

ve Denklem 2.26 eşitliğinden de

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2} \quad (2.28)$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x_0}^{x+ct} g(\tau) d\tau - \int_{x_0}^{x-ct} g(\tau) d\tau \right] \quad (2.29)$$

şeklinde genel çözüm fonksiyonu bulunur. Denklem 2.29 de elde edilen eşitlikte gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu bulunur. Çözüme Denklem 2.1 şeklindeki bir boyutlu dalga denklemini için verilen Cauchy probleminin D'Alembert çözümü denir. Benzer şekilde Denklem 2.31 eşitlikleri göz önüne alınıp Denklem 2.32 başlangıç ve sınır şartları ile birlikte D'Alembert metodu ile Denklem 2.1 çözüm fonksiyonunu araştıralım: D'Alembert metodu ile elde edilen Denklem 2.30 çözüm fonksiyonunda, örneğin Denklem 2.31 de verilen başlangıç şartları göz önüne alınarak,

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\sin(x-t) + \sin(x+t)] \quad (2.31)$$

şeklinde yazılır. Denklem 2.31 çözüm fonksiyonunda trigonometrik özdeşlikler kullanılarak, gerekli işlemler yapılırsa,

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(t) \quad (2.32)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilir.

2.3. Fourier Dönüşüm Metodu

Özel dönüşüm metotlarından biri olan Fourier dönüşüm metodu ile kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü bulunurken karşılaşılan karmaşık hesaplamaları en aza indirmek için kullanılan bir dönüşüm metodudur. Bu dönüşüm metodu kullanılarak ele alınan kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek elde edilen denklemin genel çözümü bulunur. Bu genel çözümde başlangıç şartları kullanılarak özel

çözüm elde edilir. Ve bu özel çözüme ters Fourier dönüşümü uygulanarak kısmi diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonu bulunmuş olur.

Burada önce tek değişkenli ve (ℓ, ℓ) aralığında sürekli periyodik olan bir $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım bu $f(x)$ fonksiyonun (ℓ, ℓ) aralığında Fourier seri açılımı;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (2.33)$$

şeklinde olur, burada

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\ell} dt, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

Denklem 2.34 eşitlikleri 2.33 denkleminde yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\ell} dt \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell} dt \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi}{\ell} (t-x) dt \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (2.36)$$

mutlak integrallenebilir ve yakınsak olmak üzere buradan

$$\frac{|a_0|}{2} = \frac{1}{2\ell} \left| \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2\ell} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (2.37)$$

şeklinde yazılır. Dikkat edilecek olursa $l \rightarrow \infty$ için $a_0 \rightarrow 0$ dır ve

$$f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \left(\frac{n\pi}{\ell} (t-x) \right) dt a_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (2.38)$$

olur, burada $a_{n+1} - a_n = \Delta a = \frac{\pi}{\ell}$ eşitliği alınırsa

$$f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} F(x_k) \Delta a,$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos[\alpha(t-x)] dt f(\alpha) \quad (2,39)$$

şeklinde yazılabilir ve $\alpha \rightarrow f(\alpha)$ için

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(\alpha) d\alpha = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\alpha(t-x)] dt \right] d\alpha, \quad (2.40)$$

bulunur. Ayrıca

$$\cos \alpha(t-x) = \frac{e^{ia(t-x)} + e^{-ia(t-x)}}{2}, \quad (2.41)$$

şeklinde alınabilir ve bu eşitlik Denklem 2.40 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ia(t-x)} dt \right] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ia(t-x)} dt \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt e^{-iax} \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt \right] e^{iax} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt e^{-iax} \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt \right] e^{iax} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt e^{-iax} \right] d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt \right] e^{iax} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt \right] e^{-iax} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt \right] e^{iax} dx, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$F \{ f(x) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iax} dx,$$

şeklinde tek değişkenli bir fonksiyonun Fourier dönüşümü elde edilir. Elde edilen bu dönüşümün tersi ise

$$F^{-1} \{ f(t) \} = f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(k) e^{ikx} dx,$$

şeklinde bulunur. Bu dönüşüm ters Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Benzer şekilde iki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonun fourier dönüşümü

$$F \{u(x,t)\} = u(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,t) dx \quad (2.42)$$

şeklinde yazılır ve bu dönüşümün tersi olan Fourier dönüşümü ise

$$u(x,t) = F^{-1} \{u(k,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} u(k,t) dt \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca; $u(x,t)$ fonksiyonun fourier dönüşümü altına türevleri alınabilir ve bu türevler

$$\begin{aligned} F \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} &= (ik) F \{u(x,t)\} = (ik) u(x,t) \\ F \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} &= (ik)^2 F \{u(x,t)\} = (ik)^2 u(x,t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

şeklinde olup Fourier dönüşümü altında bir fonksiyonun n inci mertebeden türevi ise

$$F \left\{ \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\} = (ik)^n F \{u(x,t)\} = (ik)^n u(x,t) \quad (2.45)$$

şeklinde bulunabilir. Fourier dönüşümünün en büyük dezavantajı sabit fonksiyon ve $\sin x$ fonksiyonlarının fourier dönüşümünün olmamasıdır. Çünkü

$$F \{\sin wx\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \sin wx dx \quad (2.46)$$

Denklem 2.46 eşitliğindeki Riemann anlamında integralinin olmamasıdır. Şimdi ise Denklem 2.1 hiperbolik tipindeki kısmi diferansiyel denklemi ve Denklem 2.2 başlangıç şartı altında Fourier dönüşüm metodu kullanarak denklemin çözüm fonksiyonunu arayalım. Denklem 2.45 eşitliğinden

$$F \{u(x,t)\} = u(x,t) \quad (2.47)$$

olacağından Denklem 2.1 diferansiyel denklemindeki $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ifadesinin eşitini Denklem 2.45 eşitliğinden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 (ik)^2 u = -c^2 k^2 u \quad (2.48)$$

denklemini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 k^2 u = 0 \quad (2.49)$$

şeklinde ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denkleminde, $k, c > 0$ olmak üzere Denklem 2.49 denkleminin

$$u = c_1(k)e^{-ikct} + c_2(k)e^{ikct} \quad (2.50)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu bulunur ve elde edilen bu çözüm fonksiyonunda Denklem 2.2 başlangıç şartı kullanılarak $c_1(k)$ ve $c_2(k)$ ifadelerini bulabiliriz. Buradan da

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) & \quad u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ u_t(x,0) = g(x) & \quad \text{ise} \quad \frac{\partial u(k,0)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} g(x) dk \end{aligned} \quad (2.51)$$

başlangıç şartları elde edilir. Daha sonra Denklem 2.51 eşitlikleri kullanılarak

$$u(k,0) = c_1(k) + c_2(k) = f(k) \quad (2.52)$$

$$u_t(k,0) = -ikc c_1(k) + ikc c_2(k) = g(x) \quad (2.53)$$

şekline getirilir. Denklem 2.52 ile 2.53 denkleminin çözülürse

$$c_1(k) = \frac{1}{2} f(k) - \frac{1}{2ikc} g(x), \quad (2.54)$$

$$c_2(k) = \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{2ikc} g(x), \quad (2.55)$$

ifadeleri bulunur. Bulunan Denklem 2.54 ve 2.55 değerleri Denklem 2.50 çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(k) [e^{-ikct} + e^{ikct}] + \frac{1}{2ikc} g(x) [e^{ikct} - e^{-ikct}], \quad (2.56)$$

fonsiyonu elde edilir. Denklem 2.56 çözüm fonksiyonuna göre ters Fourier dönüşümü uygulanır ise

$$\begin{aligned} f^{-1} \{u(x,t)\} &= u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) [e^{ik(x-ct)} + e^{ik(x+ct)}] dk \\ &+ \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[\frac{e^{ik(x-ct)} - e^{ik(x+ct)}}{ik} \right] dk \\ &= \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{x-ct}^{x+ct} e^{ik\xi} d\xi \right) dk \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ik\xi} dk \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

ifadesi bulunur. Sonuç olarak Denklem 2.57 çözüm fonksiyonunda gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad (2.58)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. Bu elde edilen Denklem 2.58 çözümü iyi bilinen D'alembert metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonu ile aynıdır Burada Denklem 2.1'in $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$ eşitlikleri göz önüne alınıp başlangıç ve sınır şartları ile birlikte fourier dönüşüm metodu uygulanırsa denklemin çözümü bulunabilir. Yani bu çözüm Denklem 2.17'de olduğu gibi Denklem 2.30'daki gibi seri formunda bir çözüm bulunur ve bu çözümde Denklem 2.32 şeklindedir.

3. LİNEER OLMAYAN KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BİR ANALİTİK METOT

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler fizik ve matematikte önemli bir yere sahiptir. Bu denklemler fizik, mekanik, biyoloji, kimya ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan olayların matematiksel modelleridir. Bu denklemlerin genel çözümleri fiziksel olayların karakteri hakkında araştırmacılara bilgi verir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünün elde edilmesinde Matlap, Maple ve Mathematica gibi bilgisayar programlarından faydalanılır. Fiziksel olayların doğasını anlamak için pek çok analitik metot literatüre kazandırılmıştır. Bu metotların bazıları; Bäcklund dönüşümü [4], Cole-Hopf dönüşümü [5], Generalized Miura dönüşümü [6], Ters saçılma metodu [7], Darboux dönüşümü [8], Painleve analizi [9], benzerlik indirgeme metodu [10], sine-cosine metodu [11], ilk integral metodu [12], Üstel fonksiyon metodu [13]. Bu metotların yanı sıra, keyfi bir adi diferansiyel denklemi göz önüne alınıp bu denklemin çözümlerinden faydalanarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşan pek çok metot vardır. Bu metotların bazılarını şöyle sıralayabiliriz. Genişletilmiş Tanh fonksiyon metot [14], genelleştirilmiş Tanh fonksiyon metot [15], Jacobi elliptic fonksiyon metot [16] G'/G açılım metodu Wang [17] tarafından sunuldu. Guo ve Zhou bu metot üzerinde çalışmalar yaparak genişletilmiş G'/G açılım metodunu [18] sundular. Daha sonra Lü ve arkadaşları ise geliştirilmiş genelleştirilmiş G'/G açılım metodunu [19] sundular. Ayrıca yeni geliştirilmiş $1/G'$ açılım metodunu [20] sundular. Son zamanlarda ise Li ve arkadaşları G'/G açılım metodu üzerine bazı eklemeler yaparak $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodunu [21] literatüre kazandırdılar. $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodu araştırmacılar tarafından kullanılarak birçok denklemlere uygulanmıştır [22 - 24].

Bu bölümde kısmi diferansiyel denklemlerin hareket dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan ve literatürde birçok uygulaması bulunan $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodunun analizi yapılacaktır.

3.1 $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ Açılım Metodunun Analizi

İkinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem

$$G''(\xi) + \lambda G(\xi) = \mu \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. Burada öncelikle $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ve $\left(\frac{1}{G}\right)$ ifadelerinin türevlerini alalım

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = \frac{G''G - G'G'}{G^2} = \frac{G''}{G} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad \text{ve} \quad G''(\xi) = -\lambda G(\xi) + \mu \quad \text{yerine yazılırsa}$$

$$\frac{G''}{G} = \frac{-\lambda\mu}{G} + \mu \frac{1}{G} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{1}{G}\right)' = \frac{0-G'}{G^2} = -\frac{G'}{G} \frac{1}{G} \quad \text{elde edilir.}$$

Yukarıdaki eşitliklerde $\frac{G'}{G} = \phi$ ve $\frac{1}{G} = \psi$ denilerek

$$\phi' = -\phi^2 + \mu\psi - \lambda, \quad \psi' = -\phi\psi \quad (3.2)$$

denklemleri elde edilir. Denklem 3.2 ile verilen eşitlikler kullanılarak Denklem 3.1 denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

i) $\lambda < 0$ olmak üzere

$$G(\xi) = A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.3)$$

Burada A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir. Ayrıca

$$\psi^2 = \frac{-\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2} (\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda) \quad (3.4)$$

yazılır ve burada $\sigma = A_1^2 - A_2^2$ dir.

ii) $\lambda > 0$ olmak üzere

$$G(\xi) = A_1 \sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2 \cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.5)$$

yazılır ve bununla birlikte

$$\psi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2} (\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda) \quad (3.6)$$

eşitliği vardır ve $\sigma = A_1^2 + A_2^2$ dir.

iii) $\lambda = 0$ olmak üzere

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2 \quad (3.7)$$

yazılır ve bu eşitliğin yanında

$$\psi^2 = \frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2} (\phi^2 - 2\mu\psi) \quad (3.8)$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi ise bu metodun nasıl uygulandığını inceleyelim. $u = u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$Q(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.9)$$

lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem için

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - Vt$$

dönüşümü yapılarak Denklem 3.9

$$Q'(u, u', u'' \dots) = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir. Denklem 3.10'un çözümü ϕ ve ψ polinomları cinsinden

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i \phi^i + \sum_{i=1}^N b_i \phi^{i-1} \psi \quad (3.11)$$

olarak ifade edilir. Burada $a_i (i = 0, 1, \dots, N)$ ve $b_i (i = 1, \dots, N)$ sayıları daha sonra belirlenecek olan sabit sayılardır. N ise Denklem 3.10 denkleminde en yüksek mertebeden türev ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılması ile elde edilebilen pozitif bir dengeleme terimidir. Denklem 3.11 eşitliği Denklem 3.2, 3.4 veya 3.8 eşitlikleri ile birlikte Denklem 3.10'da yazılırsa ϕ ve ψ ye bağlı bir polinom yazılır. Bu polinomda $\phi^i \psi^j$ terimlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_i, b_i, V, \mu, A_1, A_2$ ve λ için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica veya Matlab gibi bilgisayar programları yardımıyla çözümlenerek Denklem 3.1'in Denklem 3.3, 3.5 ve 3.7 denklemleri gibi çözümleri bulunur.

4. BURGERS DENKLEMİNİN TARİHÇESİ

1930' lı yılların sonlarına doğru J.M. Burgers (1895-1981) türbülans akışın fiziksel davranışının çok önemli bazı özelliklerini elde etmek için çeşitli model denklemlerini inceler [25]. Burgers'in düşüncesi, temel fiziğin bazı dallarını yorumlamak amacıyla, Navier-Stokes denklemlerinin basitleştirilmiş hali olan fakat non-linear konveksiyon ve lineer difüzyonun temel özelliklerini içeren evrimdenklemlerini bulmaktır. Burgers, çok ünlü (1939) bir makalesinde aday olabilecek birkaç denklemi inceler ve sonunda non-linear

$$u_t + uu_x = vu_{xx} \quad v > 0 \quad (4.1)$$

Difüzyon denklemine dikkatini verir. Denklem 4.1 yarı-parabolik bir kısmi diferansiyel denklem olup istatistiksel özellikleri ve Navier-Stokes denklemlerine yaklaşımlar hiyerarşisindeki önemli rolü nedeniyle fiziksel anlamda hatırı sayılır bir ilgi kaynağı olmuş ve ilk olarak Bateman'ın makalelerin birinde görülmüştür [26]. Bateman, Denklem 4.1'in iki temel çözümünü verdiği makalesinde ayrıca bu denklemin üzerinde çalışılmasının ilginç olabileceğini belirtmiştir. Denklem 4.1 türbülansın matematik modeli olarak Burgers tarafından kapsamlı olarak çalışıldığı için kendi ismiyle anılagelmiştir. Burgers, türbülansın değişik yönlerini inceleyerek bir boyutlu şok dalgaları için denklemi küçük bir parametreyle, v ile çarpılmış yüksek basamaktan türev kapsadığından dolayıdır ki Lagerstrom vd [27]. tarafından Navier-stokes denklemlerine benzediği vurgulanmıştır. Denklem bir çok alanda model olarak kullanılmıştır. Burgers denklemi, Gaz dinamiği [28] akustik ve türbülans fenomeni [25] başarılı bir şekilde modeller. Denklem; şok dalga teorisi ve türbülans ilişkisi Cole [32] izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilişkisi Goldberg [29] tarafından verilmiştir. Bunlara ek olarak, birbirinden çok farklı alanlarda; sayılar teorisi Van der Pol [30], ısı transferi elastisitesi vs. çeşitli uygulamalarına da sıkça rastlanmaktadır. Bu yönleride dikkate alınırsa Bateman'ın mesajının isabetli olduğu açıktır. Burges denkleminin çözümleri konveksiyon ve difüzyon arasında hasas bir dende sergiler. Dahası, başlangıç değerlerine göre tam ve kesin çözümü bilinen birkaç non-linear kısmi diferansiyel denklemden biridir [31], [32]. Burgers denkleminin dikkat çekici yönlerinden biri $u = u(x, t)$ denkleminin çözümü ve $\theta = \theta(x, t)$ olmak üzere

$$u = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \quad (4.2)$$

Dönüşümü ile

$$\theta_t = v\theta_{xx} \quad (4.3)$$

Lineer difüzyon(ısı) denklemine dönüşmesidir. Denklem 4.3'ün bir çok çözümü bilinmektedir. Burgers denklemi ile ısı denklemi arasındaki ilişkiyi Denklem 4.2 dönüşümü göstermekte olup literatürde Hopf-Cole dönüşümü olarak adlandırılmaktadır. Hopf-Cole dönüşümü ilk olarak Lagerstrom vd. nin teknik raporlarında görülmüş, bu çalışma daha sonra Cole tarafından yayınlanmıştır. Aşağı yukarı aynı yıllarda hebersiz olarak, Hopf tarafından da bu dönüşüm keşfedilmiş , denklemin tam ve açık çözümü de makelesinde yer almıştır. Bu dönüşüm, Burgers'in benzerlik dönüşümleri;

$$u = t^{-\frac{1}{2}}S(z), z = (4v)t^{-\frac{1}{2}} x \quad (4.4)$$

Altında yaptığı çözümlerde de görülmektedir. Burgers denkleminin benzerlik formunun S(z)'ye göre yarı-linear adı diferansiyel denklem Riccati denklemi olduğu Rodin [33] ,[36] tarafından gösterilmiştir. Chu [34], Shvets ve Melshko [35], tarafından Hopf-Cole dönüşümünün daha genel uygulamaları ele alınmıştır. Burgers denkleminin genel çözümü Hopf [42] tarafından $u(x, 0) = u_0(x)$ başlangıç koşulu ile birlikte

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-\delta)^2}{4vt} - \frac{1}{2\mu} \int_0^\delta u_0(\delta') d\delta' \right\} d\delta \quad (4.5)$$

olmak üzere

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi(x, t) \quad (4.6)$$

Şeklinde vermiştir. Cole (1951) ise ünlü makalesinde Denklem 4.1'in şok dalga teorisi ile ilişkisi, Denklem 4.1'in türbülans teorisi ile ilişkisi, genel özellikler, ve başlangıç-değer probleminin genel çözümü alt başlıklar altında Burgers denklemini incelemiş ve çözümüne örnekler vermiştir. Bergers denklemi matematiksel olarak da ilgi çekici özelliklere sahiptir. Denklem 4.1'de v kinematik vizkoziteyi göstermekte olup, denklemin parabolik yapısı, v=0 alındığında hiperbolik yapıya dönüşür. Daha da önemlisi, parabolik denklemin çözümünün özellikleri hiperbolik denkleminkinden oldukça farklıdır. Örneğin; Öziş, Aksan ve Özdeş [37] Evans ve Abdullah [38] gibi araştırmacılar v'nin çeşitli değerleri için denklemin sayısal çözümlerini elde edip bilinen analitik çözümlerle karşılaştırdılar. Ames ve Nucci [39] akışkan denklemlerin analizini grup yöntemiyle incelerken, bu yöntemle

Berger denklemini çalıştılar ve Abd-el-Malek ve El-Mansi [40], Vaganan ve Kumaran [41] ise grup metodunu Denklem 4.1'e uygulamışlardır.

4.1. Burgers Benzeri Denklemine $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ Açılım Metodunun Uygulanması

Bu bölümde, ikinci bölümde analizi yapılan $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodu kullanılarak Burgers benzeri denklemi [23] için hareket eden dalga çözümler elde edilecektir.

Örnek 4.2

Aşağıda verilen Burgers benzeri denklemini gözönüne alalım.

$$u_t + u_x + uu_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0, \quad (4.7)$$

Denklem 4.7'de $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$ dönüşümü kullanılırsa 4.7 Denklemi

$$-Vu' + u' + uu' + \frac{1}{2}u'' = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. 4.8 Denkleminin her iki tarafı bir kez integrali alınır

$$-Vu + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u' = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada integral sabiti özel olarak sıfır alınmıştır. Denklem 4.9 eşitliğinde u' ile $(u)^2$ terimlerinin dengelenmesiyle dengeleme terimi $N = 1$ bulunur. Böylece Denklem 4.9 için

$$u(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + b_1\psi(\xi) \quad (4.10)$$

Şeklinde bir çözüm seçebiliriz. Buna göre Denklem 4.10'un çözümü 4.9 Denkleminde yerine yazılır. Denklem 3.2 ve 3.8 arasındaki eşitlikleri de bir arada düşünülür ise

i) $\lambda < 0$ için

$$a_0 + \frac{a_0^2}{2} - a_0V - \frac{a_1\lambda}{2} - \frac{b_1^2\lambda^2}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} = 0$$

$$b_1 + a_0b_1 - b_1V + \frac{1}{2}a_1\mu + \frac{b_1^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} = 0$$

$$a_1 + a_0 a_1 - a_1 V = 0, -\frac{1}{2} b_1 + a_1 b_1 = 0,$$

$$-\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{b_1^2 \lambda}{2(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)} = 0 \quad (4.11)$$

olacak şekilde a_0, a_1, b_1 ve V sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Bu denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözülür ise

$$a_0 = \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, \lambda \neq 0, b_1 = \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}}{2\sqrt{\lambda}}, V = 1 \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2} \mu^2 + \lambda^2 \sigma \neq 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu değerler Denklem 4.9 eşitliği ile birlikte Denklem 4.10 çözüm fonksiyonunda yazılır ise Denklem 4.7'nin çözümü

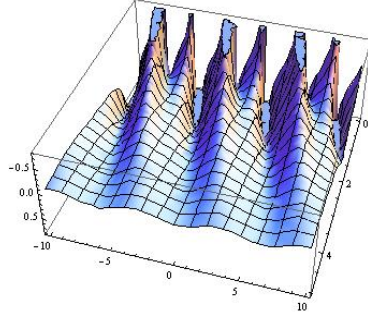
$$u(x, t) = \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1 \sqrt{-\lambda} \text{Cosh}(\xi \sqrt{-\lambda}) + A_2 \sqrt{-\lambda} \text{Sinh}(\xi \sqrt{-\lambda})}{A_1 \text{Sinh}(\xi \sqrt{-\lambda}) + A_2 \text{Cosh}(\xi \sqrt{-\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} \right) \\ \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}}{2\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(A_1 \text{Sinh}(\xi \sqrt{-\lambda}) + A_2 \text{Cosh}(\xi \sqrt{-\lambda}) + \mu/\lambda)}$$

şeklinde yazılır. Burada $\sigma = A_1^2 - A_2^2$ ve $\xi = x - (1 \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2})t$ dir. (4.13)

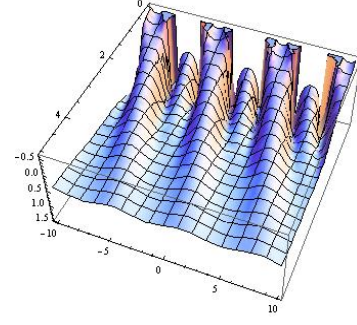
Eğer özel olarak Denklem 3.4 çözümünde $A_1 = 0, A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ alınırsa Denklem 4.7

$$u(x, t) = \frac{iA_2 \lambda + \sqrt{-\lambda^2 \sigma} \text{Sech}[\sqrt{-\lambda} \xi] + A_2 \sqrt{-\lambda^2} \text{Tanh}[\sqrt{-\lambda} \xi]}{2A_2 \sqrt{\lambda}} \quad (4.14)$$

şeklinde bir çözüme sahip olur. Bu çözüme ait üç boyutlu grafiği Şekil 4.1 ve iki boyutlu grafiği Şekil.4.2 ile gösterilmiştir.

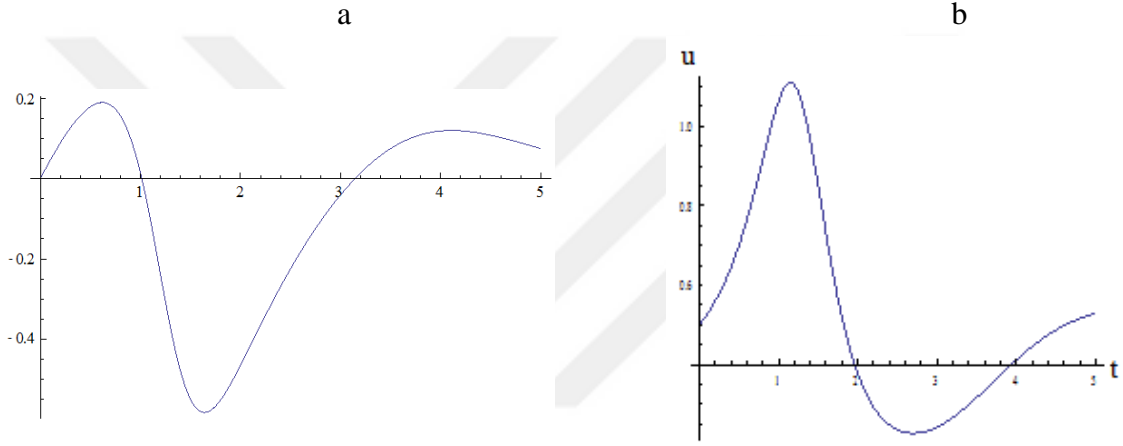


a) Reel kısım



b) Sanal kısım

Şekil 4.1. Denklem 4.7 ve 4.14'ün çözümünün üç boyutlu grafiği ($\lambda = 1, \sigma = -1, A_2 = 1$)



Şekil 4.2. Denklem 4.7 ve 4.14'ün çözümünün iki boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ($\lambda = 1, \sigma = -1, A_2 = 1, x = 0$)

Eğer özel olarak $A_2 = 0, A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ alınırsa Denklem 4.7

$$u(x, t) = \frac{iA_1\lambda + A_1\sqrt{-\lambda^2}\text{Coth}[\sqrt{-\lambda}\xi] + \sqrt{-\lambda^2}\sigma\text{Csch}[\sqrt{-\lambda}\xi]}{2A_1\sqrt{\lambda}} \quad (4.15)$$

çözümüne sahip olur.

ii) $\lambda > 0$ için

$$a_0 + \frac{a_0^2}{2} - a_0V - \frac{a_1\lambda}{2} + \frac{b_1^2\lambda^2}{2(-\mu^2 + \lambda^2\sigma)} = 0$$

$$b_1 + a_0b_1 - b_1V + \frac{1}{2}a_1\mu - \frac{b_1^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\sigma} = 0$$

$$a_1 + a_0a_1 - a_1V = 0$$

$$-\frac{1}{2}b_1 + a_1b_1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{b_1^2\lambda}{2(-\mu^2 + \lambda^2\sigma)} = 0 \quad (4.16)$$

olacak şekilde a_0, a_1, b_1 ve V sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Bu denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözülür ise

$$a_0 = \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, \lambda \neq 0, b_1 = \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2\sigma}}{2\sqrt{\lambda}}, V = 1 \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2}\mu^2 + \lambda^2\sigma \neq 0 \quad (4.17)$$

elde edilir. Bu değerler Denklem 3.6 eşitliği ile birlikte Denklem 4.9 ve 4.10 çözüm fonksiyonunda yerine yazılır ise Denklem 4.7'nin çözümü

$$u(x, t) = \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1\sqrt{\lambda}\cos(\xi\sqrt{\lambda}) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\xi\sqrt{\lambda})}{A_1\sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2\cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} \right) \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2\sigma}}{2\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(A_1\sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2\cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \mu/\lambda)} \quad (4.18)$$

şeklinde yazılır. Burada $\sigma = A_1^2 + A_2^2$ ve $\xi = x - (1 \pm \frac{i\sqrt{\lambda}}{2})t$ dir.

Eğer özel olarak Denklem 4.18 çözümünde $A_1 = 0, A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ alınırsa Denklem 4.7

$$u(x, t) = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2\sigma}\sec(\sqrt{\lambda}\xi)}{2A_2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\tan(\sqrt{\lambda}\xi) \quad (4.19)$$

şeklinde bir çözüme sahip olur.

Eğer özel olarak $A_2 = 0, A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ alınırsa Denklem 4.7 denklemini

$$u(x, t) = \frac{iA_1\lambda + A_1\lambda\cot[\sqrt{\lambda}\xi] + \sqrt{\lambda^2\sigma}\csc[\sqrt{\lambda}\xi]}{2A_1\sqrt{\lambda}} \quad (4.20)$$

çözümüne sahip olur.

iii) $\lambda = 0$ için

$$a_0 + \frac{a_0^2}{2} - a_0V = 0,$$

$$b_1 + a_0 b_1 - b_1 V + \frac{1}{2} a_1 \mu - \frac{b_1^2 \mu}{A_1^2 - 2A_2 \mu} = 0,$$

$$a_1 + a_0 a_1 - a_1 V = 0,$$

$$-\frac{1}{2} b_1 + a_1 b_1 = 0,$$

$$-\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{b_1^2}{2(A_1^2 - 2A_2 \mu)} = 0 \quad (4.21)$$

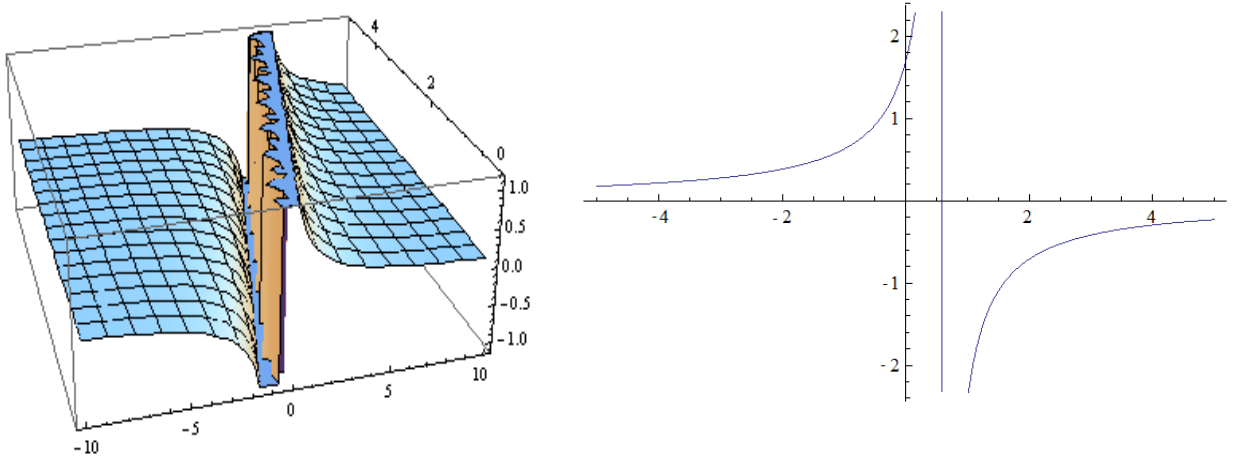
olacak şekilde a_0, a_1, b_1 ve V sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Bu denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözülür ise

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}, \quad V = 1, \quad A_1^2 - 2A_2 \mu \neq 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Bu değerler Denklem 3.7 ve 3.8 eşitliği ile birlikte Denklem 4.9 ve 4.10 çözüm fonksiyonunda yazılır ise Denklem 4.7'nin çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi \mu + A_1}{\frac{\mu}{2} \xi^2 + A_1 \xi + A_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(\frac{1}{\frac{\mu}{2} \xi^2 + A_1 \xi + A_2} \right) \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır. Burada $\xi = x - t$ dir. Bu çözüme ait üç boyutlu ve iki boyutlu grafik Şekil 4.3' te ile gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Denklem 4.4 için Denklem 4.17 çözümünün üç boyutlu ve iki boyutlu grafiği ($A_1 = 2, A_2 = 1, \mu = 1$)

5. ZAKHAROV-KUZNETSOV DENKLEMİNİN TARİHÇESİ

(3+1) boyutlu Zakharov-Kuznetsov denklemi, 1974 yılında V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov tarafından kendi isimlerini verdikleri ve literatürde Zakharov-Kuznetsov olarak bilinen denklemin her yönde azalabilen ve manyetik alan boyunca yayılabilen düşük basınç miknatıslı üç boyutlu plazma dalgalarını tartışmışlardır [42]. Pertürbasyon tekniği kullanılarak Zakharov-Kuznetsov denkleminin lineer olmayan tek dalga çözümleri çalışılmış ve bu tek dalga çözümlerinin genlik ve genişliği, manyetik alan ve plazmanın dönüşümü tartışılmıştır [43] Zakharov-Kuznetsov denkleminin pozitif potansiyel solitonları plazma modelinin üretmek için nasıl uyarlanabileceği tartışılmıştır [44]. Zakharov-Kuznetsov denkleminin güç yasası parametresinin spesifik değerleri için Şok dalgalarının veya topolojik solitonlarına uygulanışı tartışılmıştır [45]. Hareketli dalga denklemlerinin çözümleri için (2 + 1) boyutlu ve (3 + 1) boyutlu Zakharov-Kuznetsov ve Burgers denklemi için modifiye edilmiş bir tan-coth metodu kullanılarak denklemleri çözmek için yeni bir değişken kullanılmış ve yeni hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir [46]. Geliştirilmiş Bernoulli denklemi kullanılarak hiperbolik fonksiyon çözümleri ve hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. [47] Doğrusal olmayan denklemlerin, hareketli dalga çözümleri, ZK-BBM denklemleri kullanılarak çözümler sunulmuştur. [48] Zakharov-Kuznetsov denkleminin periyodik yapılar ve solitonlara uygulanışı ile yeni hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. [49] Tek dalga çözümleri bulmak için değiştirilmiş ve genişletilmiş tanh-fonksiyonu (METF) yöntemi kullanılmıştır [50]. Uygulamalı bilimde önemli bir yere sahip olan Zakharov-Kuznetsov denklemi birçok araştırmacının çalışma konusu olmuştur bu

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (5.1)$$

denklemdir.

5.1. Zakharov-Kuznetsov Denklemine $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ Açılım Metodunun Uygulanması

(3+1) boyutlu Zakharov-Kuznetsov denkleminin trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel fonksiyonlar içeren yeni yürüyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Yürüyen dalga çözümlerinde bulunan sabitlere özel değerler verilerek çözüm fonksiyonlarının grafiklerini sunulmuştur.

Örnek 2.

Bu bölümde

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

Denklem (5.1) ile verilen doğrusal olmayan $(3 + 1)$ -boyutlu ZK denklemini göz önüne alalım. Burada x, y, z üç uzaysal boyut ve t zaman boyutudur. Burada v sabit olmak (5.1) denkleminde $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x + y + z - v t$ dönüşümü kullanılırsa

$$-v u' + \alpha u u' + 3u'' = 0 \quad (5.2)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Denklem 5.2'nin her iki tarafı bir kez integre edilirse

$$c - v u + \frac{\alpha}{2} u^2 + 3u' = 0 \quad (5.3)$$

elde edilir. Burada c integrasyon sabitidir. Denklem 5.3'te en yüksek mertebeden türev u' ile en yüksek mertebeden lineer olmayan $(u)^2$ terimi ile karşılaştırılması ile elde edilebilen pozitif dengeleme terimi $N = 1$ bulunur. Bu dengeleme terimi yerine yazılırsa Denklem 5.3 için

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \phi(\xi) + b_1 \psi(\xi) \quad (5.4)$$

şeklinde bir çözüm seçebiliriz. Bu çözüm fonksiyonları λ nın durumuna göre incelersek

i) $\lambda < 0$ için Denklem 5.4 eşitliği Denklem 5.3'te yerlerine yazılır ve Denklem 3.1, 3.2 ve 3.4 eşitlikleri dikkate alınarak bir cebirsel denklem elde edilir. Metodun işleyişi gereği $\phi^i \psi^j$ ($i = 0, 1, \dots, N$) ($j = 1, \dots, N$) terimlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned} \text{sabit terim} \quad c - v a_0 + \frac{\alpha a_0^2}{2} - 3\lambda a_1 - \frac{\alpha \lambda^2 b_1^2}{2(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)} &= 0, \\ \varphi(\xi) \text{ için ;} \quad -v a_1 + \alpha a_0 a_1 &= 0, \\ \varphi(\xi)^2 \text{ için ;} \quad -3a_1 + \frac{\alpha a_1^2}{2} - \frac{\alpha \lambda^2 b_1^2}{2(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)} &= 0, \\ \psi(\xi) \text{ için ;} \quad 3\mu a_1 - v b_1 + \alpha a_0 b_1 + \frac{\alpha \lambda \mu b_1^2}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} &= 0, \\ \varphi(\xi) \psi(\xi) \text{ için ;} \quad -3b_1 + \alpha a_1 b_1 &= 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

şekilde $\sigma = c_1^2 - c_2^2$ olmak üzere a_0, a_1, b_1 ve v sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem sistemi elde edilmiş olur. Denklem 5.5 sistemi paket programlama dili Mathematica 11 yardımı ile çözülür ise

1. Durum:

$$a_0 = -\frac{\sqrt{2c\alpha-9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = -\frac{3\sqrt{-\mu^2-\lambda^2}\sigma}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = -\sqrt{2c\alpha-9\lambda}, \quad (5.6)$$

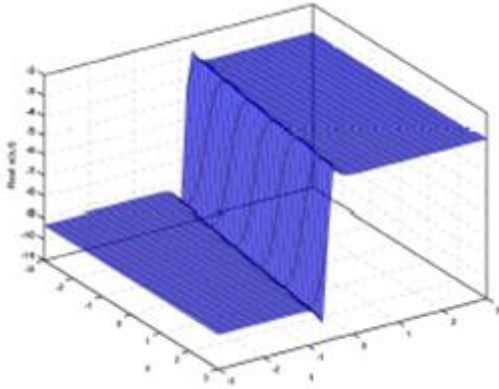
elde edilir. (5.6) eşitlikleri (5.4) çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z + \sqrt{2c\alpha-9\lambda} t$$

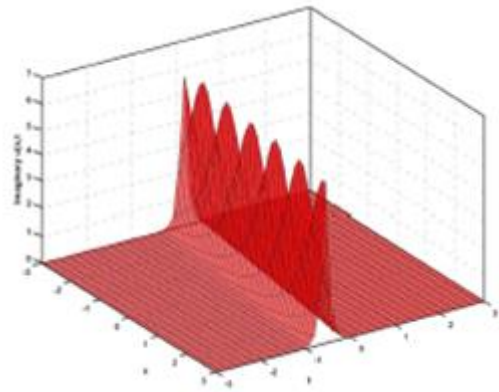
olmak üzere (5.1) denkleminin yürüyen dalga çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = -\frac{\sqrt{2c\alpha-9\lambda}}{\alpha} - \frac{3\sqrt{-\sigma\lambda^2-\mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}+c_1\cosh[(\xi)\sqrt{-\lambda}]+c_2\sinh[(\xi)\sqrt{-\lambda}]\right)} + \frac{3(c_2\sqrt{-\lambda}\cosh[(\xi)\sqrt{-\lambda}]+c_1\sqrt{-\lambda}\sinh[(\xi)\sqrt{-\lambda}])}{\alpha\left(\frac{\mu}{\lambda}+c_1\sqrt{-\lambda}\cosh[(\xi)\sqrt{-\lambda}]+c_2\sinh[(\xi)\sqrt{-\lambda}]\right)}, \quad (5.7)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.7 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.1 gibi verilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.1. $u(x, y, z)$ denklem için 5.7 Denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği
($y = 0,373, z = 0,574, c = 20,667, \alpha = 1,317, \lambda = -1,317, \mu = 4,633, c_1 = 6,455, c_2 = 4,674$)

2. Durum:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = -\frac{3\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2\sigma}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} \quad (5.8)$$

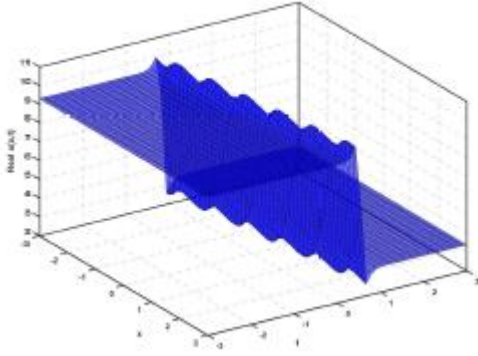
elde edilir. Denklem 5.8 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z - \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} t$$

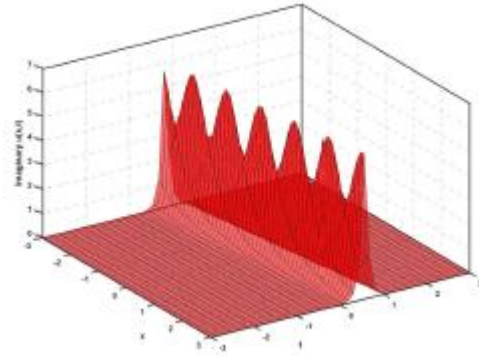
Olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha} - \frac{3\sqrt{-\sigma\lambda^2 - \mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_2 \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}] \right)} + \frac{3 \left(c_2 \sqrt{-\lambda} \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_1 \sqrt{-\lambda} \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}] \right)}{\alpha \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_2 \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}] \right)}, \quad (5.9)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.9 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.2 gibi verilebilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.2. $u(x, y, z)$ denklemi için Denklem 5.9 çözümünün bazı değerler için üçboyutlu grafiği

$$(y = 0,41, z = 0,239, c = 20,7, \alpha = 1,388, \lambda = -1,82, \mu = 4,626, c_1 = 6,381, c_2 = 4,414)$$

3. Durum:

$$a_0 = -\frac{\sqrt{2c\alpha-9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{3\sqrt{-\mu^2-\lambda^2}\sigma}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = -\sqrt{2c\alpha-9\lambda}, \quad (5.10)$$

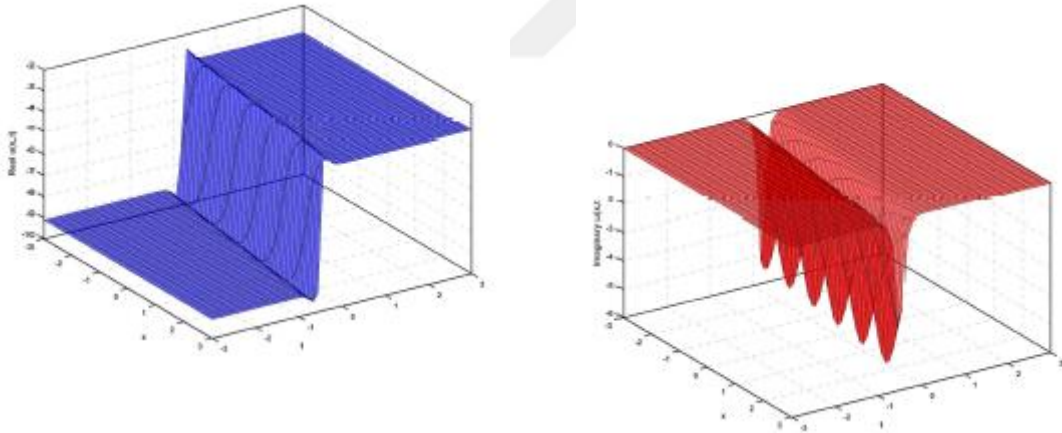
elde edilir. Denklem 5.10 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z + \sqrt{2c\alpha-9\lambda} t$$

Olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = -\frac{\sqrt{2c\alpha-9\lambda}}{\alpha} + \frac{3\sqrt{-\sigma\lambda^2-\mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_2 \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}]\right)} + \frac{3\left(c_2\sqrt{-\lambda} \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_1\sqrt{-\lambda} \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}]\right)}{\alpha\left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_2 \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}]\right)}, \quad (5.11)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.11 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.3 gibi verilebilir.



a) reel kısım

b) sanal kısım

Şekil 5.3. $u(x, y, z)$ denklemi için 5.11 denklem bazı değerleri için üç boyutlu grafiği

$$(y = 0,277, z = 0,663, c = 20,492, \alpha = 1,715, \lambda = -1,303, \mu = 4,529, c_1 = 6,6711, c_2 = 4,351,)$$

4. Durum:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2c\alpha-9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{3\sqrt{-\mu^2-\lambda^2}\sigma}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = \sqrt{2c\alpha-9\lambda}, \quad (5.12)$$

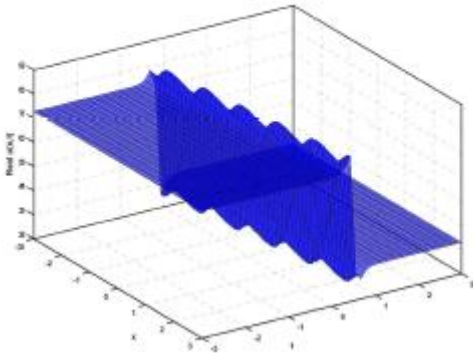
elde edilir. Denklem 5.12 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z - \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} t$$

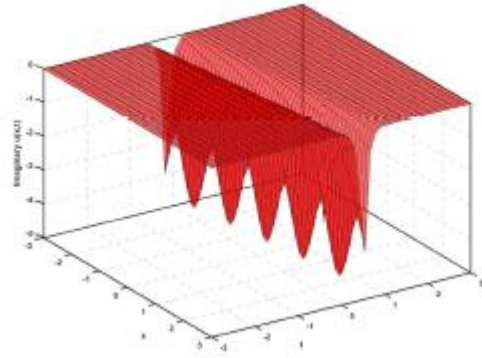
Olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha} + \frac{3\sqrt{-\sigma\lambda^2 - \mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_2 \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}] \right)} + \frac{3 \left(c_2 \sqrt{-\lambda} \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_1 \sqrt{-\lambda} \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}] \right)}{\alpha \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\xi\sqrt{-\lambda}] + c_2 \sinh[\xi\sqrt{-\lambda}] \right)}, \quad (5.13)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.13 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm Grafiği aşağıdaki Şekil 5.4 gibi verilebilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.4. $u(x, y, z)$, denklemi için 5.13 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği

$$y = 0,296887, z = 0,518761, c = 20,425, \alpha = 1,49376, \lambda = -1,49376, \mu = 4,61564, c_1 = 6,70626, c_2 = 4,70626,$$

ii) $\lambda > 0$ için Denklem 5.4 eşitliği Denklem 5.3'te yerlerine yazılır ve Denklem 3.1, 3.2 ve 3.6 eşitlikleri dikkate alınarak bir cebirsel denklem elde edilir. Metodun işleyişi gereği $\phi^i \psi^j$ ($i = 0, 1, \dots, N$) ($j = 1, \dots, N$) terimlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek

$$\text{sabit terim} \quad c - va_0 + \frac{\alpha a_0^2}{2} - 3\lambda a_1 - \frac{\alpha \lambda^2 b_1^2}{2(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)} = 0,$$

$$\varphi(\xi) \text{ için ;} \quad -va_1 + \alpha a_0 a_1 = 0,$$

$$\varphi(\xi)^2 \text{ için ;} \quad -3a_1 + \frac{\alpha a_1^2}{2} - \frac{\alpha \lambda^2 b_1^2}{2(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)} = 0,$$

$$\psi(\xi) \text{ için ;} \quad 3\mu a_1 - v b_1 + \alpha a_0 b_1 + \frac{\alpha \lambda b_1^2}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} = 0,$$

$$\varphi(\xi) \psi(\xi) \text{ için ;} \quad -3b_1 + \alpha a_1 b_1 = 0, \quad (5.14)$$

Şekilde $\sigma = c_1^2 + c_2^2$ olmak üzere a_0, a_1, b_1 ve V sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Denklem 5.14 denklem sistemi paket programlama dili Mathematica 11 yardımı ile çözülür ise

1. Durum:

$$a_0 = -\frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = -\frac{3\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = -\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}, \quad (5.15)$$

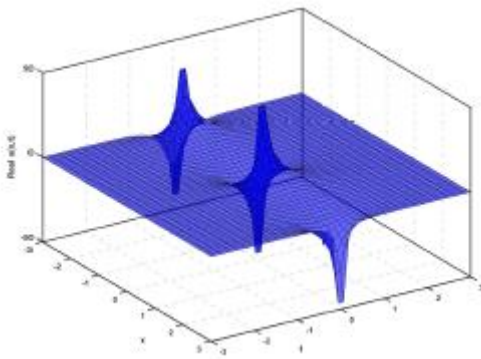
elde edilir. Denklem 5.15 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z + \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} t$$

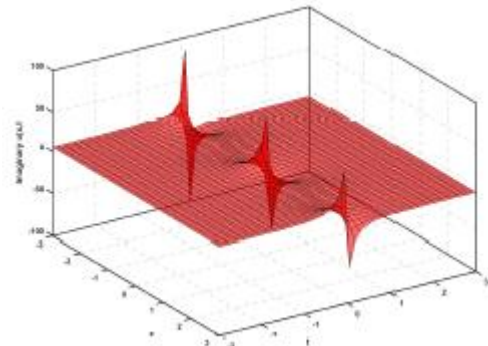
olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = -\frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha} - \frac{3\sqrt{\sigma\lambda^2 - \mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}] \right)} + \frac{3(c_2\sqrt{\lambda} \cos[\xi\sqrt{\lambda}] - c_1\sqrt{\lambda} \sin[\xi\sqrt{\lambda}])}{\alpha \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}] \right)}, \quad (5.16)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.16 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.5 gibi verilebilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.5. $u(x, y, z)$ denkleminin 5.16 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği ($y = 0,492, z = 0,451, c = 20,388, \alpha = 1,005, \lambda = 4,671, \mu = 4,05, c_1 = 6,685, c_2 = 5,381$)

2. Durum:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = -\frac{3\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2\sigma}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = \sqrt{2c\alpha - 9\lambda}, \quad (5.17)$$

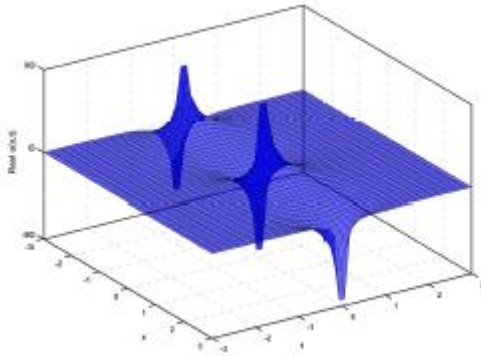
elde edilir. Denklem 5.17 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z - \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} t$$

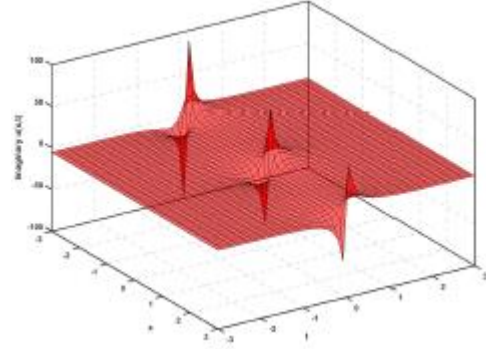
olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha} \frac{3\sqrt{\sigma\lambda^2 - \mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}] \right)} + \frac{3(c_2\sqrt{\lambda} \cos[\xi\sqrt{\lambda}] - c_1\sqrt{\lambda} \sin[\xi\sqrt{\lambda}])}{\alpha \left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}] \right)}, \quad (5.18)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.18 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.6 gibi verilebilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.6. $u(x, y, z)$ denklemi için 5.18 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği ($y = 0,396888$, $z = 0,986013$, $c = 20,4344$, $\alpha = 1,57339$, $\lambda = 4,70364$, $\mu = 4,69726$, $c_1 = 6,73413$, $c_2 = 5,08576$)

3. Durum

$$a_0 = -\frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{3\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2\sigma}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = -\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}, \quad (5.19)$$

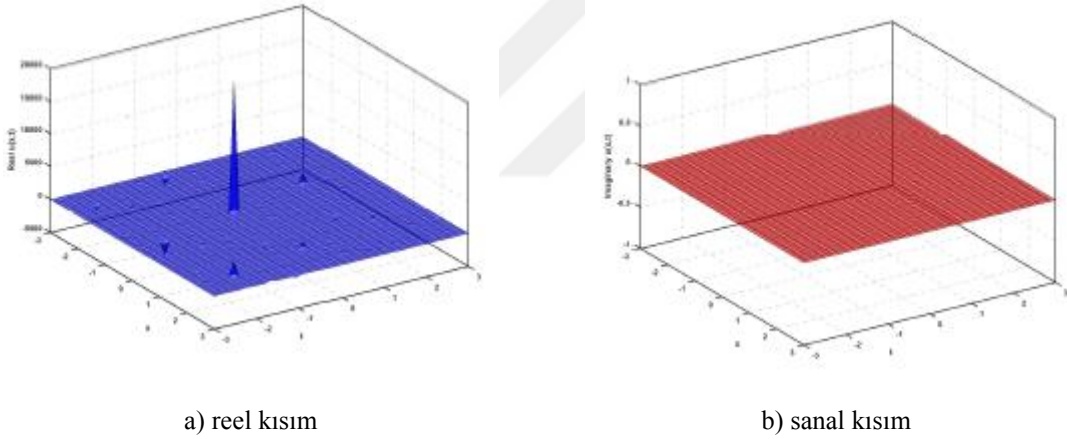
elde edilir. Denklem 5.19 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$$\xi = x + y + z + \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} t$$

olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = -\frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha} + \frac{3\sqrt{\sigma\lambda^2 - \mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}]\right)} + \frac{3\left(c_2\sqrt{\lambda} \cos[\xi\sqrt{\lambda}] - c_1\sqrt{\lambda} \sin[\xi\sqrt{\lambda}]\right)}{\alpha\left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}]\right)}, \quad (5.20)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.20 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.7 gibi verilebilir.



Şekil 5.7. $u(x, y, z)$ denklemini için 5.20 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği

$$(y = 0,286631, z = 0,254258, c = 20,181, \alpha = 1,37489, \lambda = 4,73738, \mu = 4,59364, c_1 = 6,202, c_2 = 5,61826,)$$

4. Durum

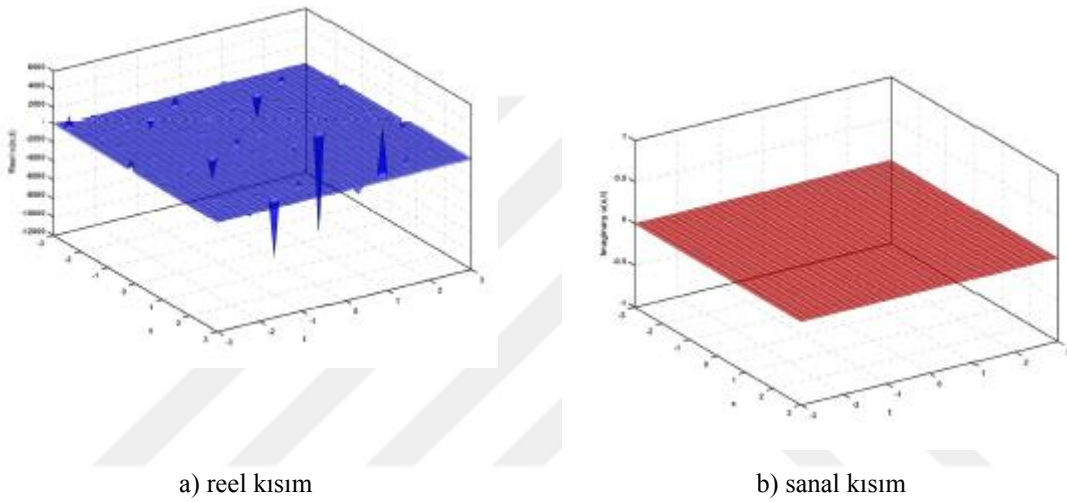
$$a_0 = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{3\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2\sigma}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = \sqrt{2c\alpha - 9\lambda}, \quad (5.21)$$

elde edilir. Denklem 5.21 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$\xi = x + y + z - \sqrt{2c\alpha - 9\lambda} t$ olmak üzere Denklem 5.1 denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{2c\alpha - 9\lambda}}{\alpha} + \frac{3\sqrt{\sigma\lambda^2 - \mu^2}}{\alpha\sqrt{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}]\right)} + \frac{3\left(c_2\sqrt{\lambda} \cos[\xi\sqrt{\lambda}] - c_1\sqrt{\lambda} \sin[\xi\sqrt{\lambda}]\right)}{\alpha\left(\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cos[\xi\sqrt{\lambda}] + c_2 \sin[\xi\sqrt{\lambda}]\right)}, \quad (5.22)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.22 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.8 gibi verilebilir.



Şekil 5.8. $u(x, y, z)$ denklemi için 5.22 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği

$$(y = 0,765634, z = 0,878142, c = 20,7219, \alpha = 1,83752, \lambda = 4,85939, \mu = 4,84064, c_1 = 6,85315, c_2 = 5,87814)$$

iii) $\lambda = 0$ için Denklem 5.4 eşitliği Denklem 5.3'te yerlerine yazılır ve denklem 3.1, 3.2, 3.7 ve 3.8 eşitlikleri dikkate alınarak bir cebirsel denklem elde edilir. Metodun işleyişi gereği $\phi^i \psi^j$ ($i = 0, 1, \dots, N$) ($j = 1, \dots, N$) terimlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek

$$\text{sabit terim} \quad c - va_0 + \frac{\alpha a_0^2}{2} = 0,$$

$$\varphi(\xi) \text{ için ;} \quad -va_1 + \alpha a_0 a_1 = 0,$$

$$\varphi(\xi)^2 \text{ için ;} \quad -3a_1 + \frac{\alpha a_1^2}{2} + \frac{\alpha b_1^2}{2(c_2^2 - 2c_1\mu)} = 0,$$

$$\psi(\xi) \text{ için ;} \quad 3\mu a_1 - vb_1 + \alpha a_0 b_1 - \frac{\alpha \mu b_1^2}{c_2^2 - 2c_1\mu} = 0,$$

$$\varphi(\xi) \psi(\xi) \text{ için ;} \quad -3b_1 + \alpha a_1 b_1 = 0, \quad (5.24)$$

olacak şekilde a_0, a_1, b_1 ve V sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Denklem 5.24 denklem sistemi paket programlama dili Mathematica 11 yardımı ile çözülür ise

1. Durum

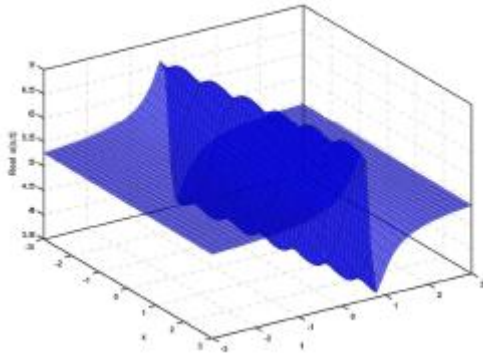
$$a_0 = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = -\frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = \sqrt{2c\alpha}, \quad (5.25)$$

elde edilir. Denklem 5.25 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

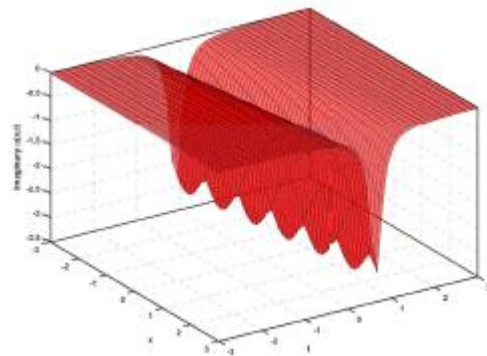
$\xi = x + y + z - \sqrt{2c\alpha} t$ olmak üzere Denklem 5.1'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2c}{\alpha}} - \frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha \left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu \right)} + \frac{3(c_2 + \xi\mu)}{\alpha \left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu \right)}, \quad (5.26)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.26 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.9 gibi verilebilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.9. $u(x, y, z)$ denklemi için 5.26 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği

($y = 0,434271, z = 0,434271, c = 20,5468, \alpha = 1,5749, \lambda = 4,48115, \mu = 4,36865,$
 $c_1 = 6,98428, c_2 = 5,56865$.)

2. Durum

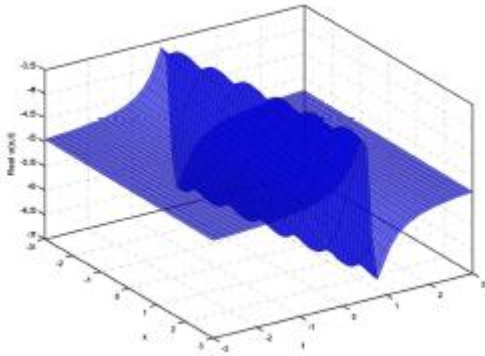
$$a_0 = -\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = -\sqrt{2\alpha c}, \quad (5.27)$$

elde edilir. Denklem 5.27 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

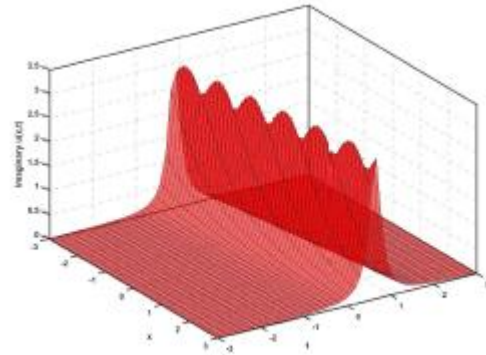
$\xi = x + y + z + \sqrt{2c\alpha} t$ olmak üzere Denklem 5.1 denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = -\sqrt{\frac{2c}{\alpha}} + \frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu\right)} + \frac{3(c_2 + \xi\mu)}{\alpha\left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu\right)}, \quad (5.28)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.28 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.10 gibi verilebilir.



a) reel kısım



b) sanal kısım

Şekil 5.10. $u(x, y, z)$ denklemini için 5.28 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği

($y = 0,408035, z = 0,548907, c = 20,7893, \alpha = 1,07083, \mu = 4,54555, c_1 = 6,79359, c_2 = 5,01767$)

3. Durum

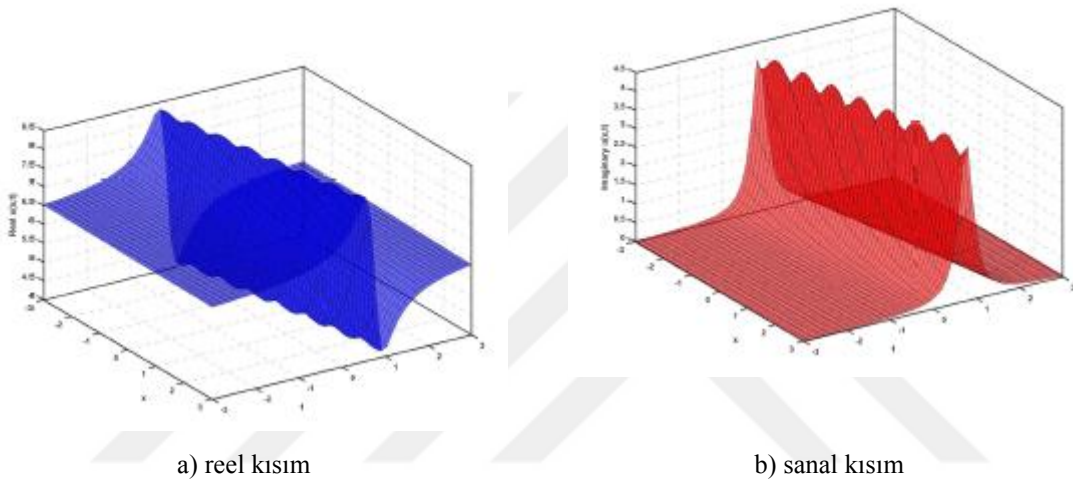
$$a_0 = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = \sqrt{2\alpha c}, \quad (5.29)$$

elde edilir. Denklem 5.29 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$\xi = x + y + z - \sqrt{2c\alpha} t$ olmak üzere Denklem 5.1 denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2c}{\alpha}} + \frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu\right)} + \frac{3(c_2 + \xi\mu)}{\alpha\left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu\right)}, \quad (5.30)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.30 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.11 gibi verilebilir.



Şekil 5.11. $u(x, y, z)$ denklemini için 5.30 denklem çözümünün bazı değerler için üç boyutlu grafiği

$$y = 0,219684, z = 0,426374, c = 20,7168, \alpha = 1,98133, \lambda = 4,24476, \mu = 4,43229, \\ c_1 = 6,75332, c_2 = 5,3278)$$

4. Durum

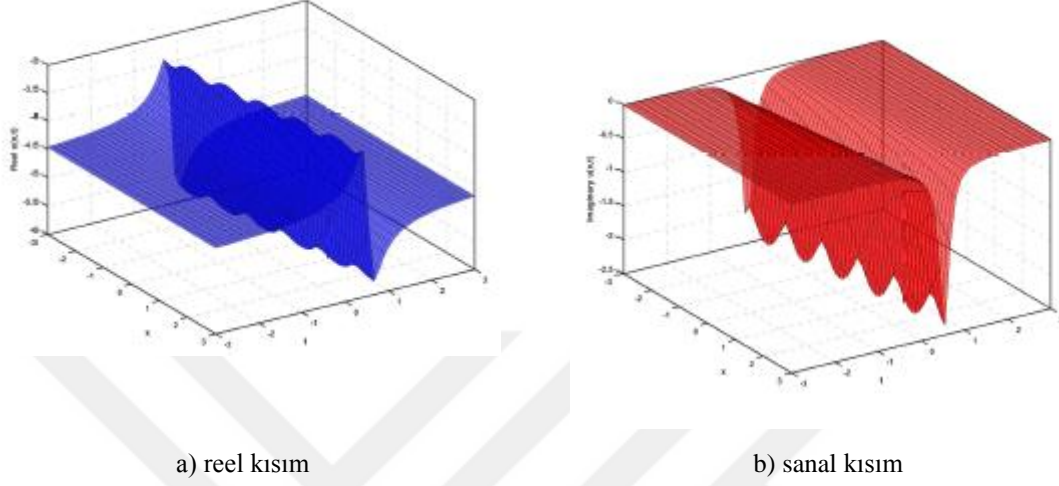
$$a_0 = -\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}, \quad a_1 = \frac{3}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{-3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad v = -\sqrt{2\alpha c}, \quad (5.31)$$

elde edilir. Denklem 5.31 eşitlikleri Denklem 5.4 çözüm fonksiyonunda yazılır ve

$\xi = x + y + z + \sqrt{2c\alpha} t$ olmak üzere Denklem 5.'in çözüm fonksiyonu

$$u(x, y, z, t) = -\sqrt{\frac{2c}{\alpha}} - \frac{3\sqrt{c_2^2 - 2c_1\mu}}{\alpha\left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu\right)} + \frac{3(c_2 + \xi\mu)}{\alpha\left(c_1 + c_2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\mu\right)}, \quad (5.32)$$

elde edilmiş olur. Denklem 5.32 çözüm fonksiyonunda sabitlere değer verilerek 3 boyutlu çözüm grafiği aşağıdaki Şekil 5.12 gibi verilebilir.



Şekil 5.12. $u(x, y, z)$ denklemi için 5.30 denklem çözümünün bazı değerleri için üç boyutlu grafiği

($y = 0,287412, z = 0,591909, c = 20,9187, \alpha = 1,94734, \mu = 4,57481, c_1 = 6,85132, c_2 = 5,09637$)

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodu lineer olmayan Burgers tipi ve (3+1) boyutlu Zakharov-Kuznetsov denklemlerine uygulanmıştır. Bu denklemlerin çözüm kümesi λ' in durumlarına göre hiperbolik, trigonometrik ve polinom fonksiyonları şeklinde çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Bu denklemin çözümleri Mathematica paket programı yardımı ile elde edilen tüm durumların kısmi diferansiyel denklemi sağladığı görülmüştür. Bu çözümde bulunan sabitlere özel değerler verilerek üç ve iki boyutlu grafikler çizilmiştir.

$\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodunda bilgisayar üzerinde Mathematica paket programı yardımı ile sonuçların hesaplanması farklı durumların ve katsayılarının elde edilmesi grafiklerinin reel ve sanal kısımlarının olması gibi önemli bir özeliğe sahiptir. Bu açılım metodu kullanılarak birçok diferansiyel denklemin yürüyen dalga çözümleri elde edilebilir.

Denklemin adi diferansiyel denkleme dönüştükten sonra denklemin integrallenebilir olması işlem karmaşıklığını azaltmıştır. Açılım metodunun doğasında var olan (3.1) denkleminin çözümleri λ' in durumlarına göre farklı çözümler elde edildiğinden kısmi diferansiyel denkleminde bir çok çözümünün elde edilmesine olanak sağlamıştır.

Sonuç olarak kısmi diferansiyel denklemlerde matematiğin uygulamalı alanlarında kullanılmak üzere özgün sonuçlar elde edilmiştir.

7. KAYNAKLAR

- [1] **Russell, J.S.**, (1844) Report on Waves 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS
- [2] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, (1965). Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [3] **Granas, A., Guenther, R. B., and Lee, J. W.** (1988). Existence principles for classical and Carathéodory solutions of nonlinear systems and applications. In Proceedings of the international conference on theory and applications to differential equations, Ohio
- [4] **Zhao, Z., Zhang, Y., Rui, W.**, (2014). Bäcklund transformation and solutions of a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation, *Applied Mathematics and Computation*, **248**, 456-462.
- [5] **Jordan, P.M.**, (2010). On the application of the Cole-Hopf transformation to hyperbolic equations based on second-sound models, *Mathematics and Computers in Simulation* **81**, 18-25
- [6] **Xifang, C., Hongyou, W., Chuanyou, X.**, (2006). On Miura transformations among nonlinear partial differential equations, *Journal of Mathematical Physics*, **47**, 083515-19
- [7] **Demontis, F., Prinari, B., Van Der Mee, C.**, (2014). The inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with asymmetric boundary conditions, *Journal of Mathematical Physics*, **55**, 101505.
- [8] **Yilmaz, H.**, (2015). Exact solutions of the Gerdjikov-Ivanov equation using Darboux transformations, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **22**, 32-46.
- [9] **Kumar, V., Gupta, R.K., Jiwari, R.**, (2013). Painlevé Analysis, Lie Symmetries and Exact Solutions for Variable Coefficients Benjamin-Bona-Mahony-Burger (BBMB) Equation, *Communications in Theoretical Physics*, **60**, 175.
- [10] **Inan, I.E., Kaya, D. and Ugurlu, Y.**, (2010). Auto-Bäcklund transformation and Similarity reductions for coupled Burger's equation, *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 2507 - 2511.
- [11] **Taşcan, F., Bekir, A.**, 2009. Analytical solutions of the (2 + 1)-dimensional Nonlinear evolution equation using the sine-cosine method, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3134 - 3139.
- [12] **Eslami, M., Mirzazadeh, M.**, (2014). First integral method to look for exact solutions of a variety of Boussinesq-like equations, *Ocean Engineering*, **83**, 133- 137.
- [13] **He, J.H., Wu, X.H.**, (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons Fractals*, **30**, 700 - 708.
- [14] **Fan, E.**, (2000). Extended tanh-function method and its applications To nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212 - 218.

- [15] **Chen, H., Zhang, H.**, (2004). New multiple soliton solutions to the general Burgers–Fisher equation and the Kuramoto–Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons Fractals*, **19**, 71 - 76.
- [16] **Fu, Z., Liu, S., and Zhao, Q.**, (2001). New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [17] **Wang, M., Li, X., and Zhang, J.**, (2008). The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417 - 423.
- [18] **Guo, S., Zhou, Y.**, (2010). The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214 - 3221.
- [19] **Lü, H.L., Liu, X.Q., and Niu, L.**, (2010). A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3811 - 3816.
- [20] **Yokus, A.** (2011) Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations and Comparison of Their Solutions, Ph.D. Thesis, Firat University,
- [21] **Li, L., Li, E., and Wang, M.**, (2010). The $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, **25**, 454 - 462.
- [22] **Inan, I. E., Ugurlu, Y., Inc, M.**, (2015). New Applications of the $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -Expansion Method, *Acta Physica Polonica A*, **128(3)**, 245-251.
- [23] **Demiray, S., Unsal, O., Bekir, A.**, (2014). New Exact Solutions for Boussinesq Type Equations by using $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ and $(1/G)$ -Expansion Methods, *Acta Physica Polonica A*, **125(5)**, 1093-1098.
- [24] **Zayed, E.M.E., Alurrfi, K.A.E.**, (2014). The $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -Expansion Method and its Applications to Find the Exact Solutions of Nonlinear PDEs for Nanobio sciences *Mathematical Problems In Engineering*, **521712-10**.
- [25] **Burgers, J. M.** (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In *Advances in applied mechanics* (Vol.1, pp.171-199) Elsevier
- [26] **Bateman, H.** (1915). *The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-motion on the Basis of Maxwell's Equations*. University press.
- [27] **Lagerstrom, P.A., Cole, J.D. and Trilling, L.** (1949), *Problems in the theory of viscous compressible fluids*, Calif. Inst. Tech., Tech. Note, 232 p.
- [28] **Lighthill, M.J.** (1956), *Viscosity effects in sound waves of finite amplitude*, *Surveys in Mechanics*, 250-351 pp.

- [29] **Cole, J. D.** (1951). On a quasi-linear parabolic equation occurring in aero dynamics. Quarterly of applied mathematics, **9(3)**, 225-236
- [30] **Goldberg, A.** (1962), Finite amplitude waves in magneto hydrodynamics, Soviet Phys. JETP, 15:179-181 pp.
- [31] **Van der Pol, E.** (1951), On a non-linear partial differential equation 122 satisfied by the logarithm of the Jacobian theta-functions with arithmetical applications, Proc. Acad. Sci, A13:261-284 pp.
- [32] **Hopf, E.** (1950). The partial differential equation $ut + uux = \mu xx$. Communications on pure and Applied mathematics, **3(3)**, 201-230.
- [33] **Rodin, E.Y.A.** (1974), Riccati solution for Burgers equation, Quart. Appl. Math, 27:541-545 pp.
- [34] **Chu, C.W.** (1965), A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations, Quart. Apple. Math, 23:257-278 pp
- [35] **Shvets, M.E. and Meleshko, V.P.** (1965), Numerical algorithm of a solution of the system equations of hydrodynamics of the atmosphere, Izv. Acad. Sc. USSR Atmosphere Ocean Phys, 1:519- 520 pp
- [36] **Rodin, E. Y.** (1970). On some approximate and exact solutions of boundary value problems for Burgers' equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **30(2)**, 401-414
- [37] **Öziş, T., Aksan, E. N., and Özdeş, A.** (2003). A finite element approach for solution of Burgers equation . Applied Mathematics and Computation, **139 (2-3)**, 417-428
- [38] **Evans, D. J., and Abdullah, A. R.** (1984). The group explicit method for the solution of Burger's equation. Computing, **32(3)**, 239-253
- [39] **Ames, W. F., and Nucci, M. C.** (1986). Analysis of fluid equations by Group methods. Journal of engineering mathematics, **20(2)**, 181-187
- [40] **Abd-el-Malek, M. B., and El-Mansi, S. M.** (2000). Group theoretic methods applied to Burgers equation. Journal of computational and Applied Mathematics, **115(1-2)**, 1-12.
- [41] **Vaganan, B. M., and Kumaran, M. S.** (2004). Similarity solutions of the Burgersequation with linear damping. Applied mathematics letters **17(10)**, 1191-1196.
- [42] **Yokus, A., and Kaya, D.** (2017). Numerical and exact solutions for time fractional Burgers equation. Journal of nonlinear sciences and applications, **10(7)**, 3419-3428.
- [43] **Mushtaq, A., and Shah, H. A.** (2005). Nonlinear Zakharov Kuznetsov equation for two-dimensional-acoustic solitary waves in a relativistic, rotating magnetized electron-positron-ionplasma. Physics of plasmas, **12(7)**, 072306.
- [44] **Mace, R. L., and Hellberg, M. A.** (2001). The Kortewegde Vries Zakharov Kuznetsove Quation for electron-acoustic waves. Physics of Plasmas, **8(6)**, 2649-2656.
- [45] **Kuznetsov, E. A., Rubenchik, A. M., and Zakharov, V.E.** (1986). Soliton stability in Plasmas and hydrodynamics. PhysicsReports, **142(3)**, 103-165.

- [46] **Krishnan, E. V., and Biswas, A.** (2010). Solutions to the Zakharov-Kuznetsov equation with higher order nonlinearity by mapping and ansatz methods. *Physics of Wave Phenomena*, **18(4)**, 256-261.
- [47] **Gzkizil, F., and Salhi, A.** (2015). New travelling wave solutions of two Nonlinear Physical models by using a modified tanh-coth method. *Journal of Algorithms Computational Technology*, **9(1)**, 1-12.
- [48] **Baskonus, H.M., Koç, D.A., and Bulut, H.** (2016). New travelling wave prototypes to the nonlinear Zakharov–Kuznetsov equation with power law nonlinearity. *Nonlinear Sci.Lett. A*, **7**, 67-76.
- [49] **Bibi, S., and Mohyud-Din, S.T.** (2014). Traveling Wave Solutions of ZK-BBM Equation Sine-Cosine Method. *Communications in Numerical Analysis*, 1-9.
- [50] **Wazwaz, A.M.** (2005). Exact solutions with solitons and periodic structures for the Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation and its modified form. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **10(6)**, 597-606.

ÖZGEÇMİŞ

1975 Mazgirt doğumluyum. İlkokulu Demirci köyü, ortaokulu Malatya, Liseyi Kayseri, üniversiteyi Malatya İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 1997’de bitirdim. 1998 de Milli Eğitim Bakanlığına öğretmen olarak atandım. 20 yıldır öğretmenlik yapmaktayım. 2001 yılında evlendim, iki kızım var. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik dalında yüksek lisansa kabul edildim..

