T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİSPERSİVE DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

BETÜL YAZAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2018

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİSPERİVE DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

BETÜL YAZAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. EMİL NOVRUZ

GEBZE
2018

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BEHAVIOUR OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR DISPERSIVE WAVE EQUATION

BETÜL YAZAR

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. EMİL NOVRUZ

GEBZE
2018

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..27../..06../..2018.. tarihi ve ..2018../..33.... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 04/07/2018 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Betül Yazar'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Emil Novruz

ÜYE : Prof. Dr. Mansur İsgenderoğlu

ÜYE : Prof. Dr. Fatih Taşçı

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

....../....../......... tarih ve ..../........ sayılı kararı.

ÖZET

Bu tez çalışmasında disipatif lineer olmayan dispersive dalga denkleminin çözümünün patlaması olayı incelenmiştir. İlk olarak denklemin son halini alana kadar geçirdiği evreler ve bu evrelerle ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiştir. Bu çalışmada kullanılan tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra lineer olmayan dispersive dalga denkleminin çözümünün patlaması için gerekli olan bazı koşullar verilmiş ve bu koşullar karşılaştırılmıştır. Son olarak ise lineer olmayan dispersive dalga denkleminin disipatif hali ele alınmış ve bu durum için bir patlama koşulu verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer Olmayan Dispersive Dalga Denklemi, Cauchy Problemi, Disipatif Terim, Çözümün Patlaması.

SUMMARY

In this thesis, we have investigated blow-up phenoma for dissipative nonlinear dispersive wave equation. Firstly, phases that the equation experienced until it was become final version and the studies related to these phases was summarized. Some definitions, theorems and inequalities that were used in this study was given. Then some necessary conditions for blow-up of solution of nonlinear dispersive wave equation was given and the conditions was compared. Finally, dissipative form of nonlinear dispersive wave equation was considered and a blow-up condition for this case was given.

Keywords: Nonlinear Dispersive Wave Equation, Cauchy Problem, Dissipative Term, Blow-up of the Solution.

TEŞEKKÜR

Başta bu tez çalışmasının hazırlanmasında bana sabırla destek veren tez danışmanım Prof. Dr. Emil Novruz olmak üzere yol gösteren bütün hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca tez yazım aşamasında yardımcı olan arkadaşım Melike Yakut'a ve tüm eğitim hayatım boyunca maddi manevi arkamda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1834 yılında Edinburg şehri yakınlarında Hermiston'daki Union Canal'da İskoç deniz mühendisi John Scott Russell kanal teknelerinin en verimli tasarımını elde etmek için deneyler yapıyordu. Bir çift atı bir tekneye bağlamış kanal boyunca çekiyordu. Tekne birden durduğunda Russell teknenin ön tarafından çıkan ilginç bir dalga farketti. Daha sonra "soliter dalga çözümleri ya da soliton çözümler" olarak adlandırılacak olan bu dalga gelecek on yıl ve yirminci yüzyıl boyunca lineer olmayan diferansiyel denklemler teorisi, hidrodinamik, lineer olmayan optik ve hesaplamalı mühendislikte önemli bir rol oynayacaktı.

Russel, on yıl sonra Bilimin İlerlemesi için Britanya Birliği'nin 14. Buluşması'nda (The Fourteenth Meeting of The British Association for the Advancement of Science) gördüklerini şöyle açıklıyor:

"Kanalda suyu devindirecek kadar bir su kütlesi yoktu. Su şiddetli bir galeyan halinde teknenin önüne yığıldı ve sonra birden tekneyi arkasında bırakarak ileriye doğru büyük bir hızla yuvarlandı. Görünüşte formunda ve hızının düşüklüğünde bir değişim olmadan kanal boyunca yoluna devam etti. Atın üstünde onu takip ettim ve onu yakaladığımda birkaç otuz feet uzunluğu ve bir, bir buçuk ayak yüksekliğindeki (30-45 cm yükseklik ve 9 metreye varan genişlik) orjinal şeklini koruyarak saatte sekiz ya da dokuz mil (14 km/h) hızla hâlâ ilerliyordu. Yavaş yavaş yüksekliği azaldı ve bir ya da iki millik (2-3 kmlik) bir takipten sonra onu rüzgârların arasında kaybettim." [1]

Russel'ın tekil dalga ya da soliton olarak bilinen 'Dönüşümün Dalgası' prensibinin ilk teorik değerlendirmesi 1870'de J. Boussinesq ve L. Rayleigh tarafından yapıldı [2]. Sığ su dalgalarının ilk matematiksel modeli çok daha sonra, 1895'de, Hollandalı iki matematikçi D. J. Korteweg ve G. de Vries tarafından yapıldı. Bu model sığ bir su tabakasının serbest yüzeyinde su dalgalarının tek yönlü hareketini veren bir denklemdir. Bu denklem Korteweg de Vries (KdV) denklemi olarak adlandırılır [3].

$u(x,t)$ fonksiyonu, t zamanında x konumundaki dalganın yüksekliğini ifade eden fonksiyon olmak üzere KdV denlemi

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

biçiminde yazılmıştır. KdV denkleminin c sabit hızıyla hareket eden gezen dalga çözümü

$$u(x,t) = f(\xi) = f(x - ct) \tag{1.2}$$

biçimindedir. Genel olarak bir kısmi diferansiyel denklemin (1.2) formundaki çözümüne gezen dalga çözümü denir. KdV denkeminin gezen dalga çözümünü bulmak için f fonksiyonunu (1.1)'de yerine yazarsak $-cf' + \left(\frac{1}{2} f^2\right)' + f''' = 0$ adi diferansiyel denklemi elde edilir. f 'nin ve türevlerinin $\pm\infty$'da sıfır olduğunu göz önüne alırsak bu adi diferansiyel denklemin çözümü $f = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi)$ olarak bulunur. Dolayısıyla keyfi $c \neq 0$ sayısı için KdV denkleminin gezen dalga çözümleri

$$u(x,t) = \frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)] \tag{1.3}$$

olarak bulunur.

İlerleyen yıllarda bir süre yeni sonuç elde edilememiştir. Bu durağan süreçten sonra 1965 yılında N. J. Zabusky ve M. D. Kruskal sabit bir hızla hareket ederken çarpışan, çarpıştıktan sonra hızlarını ve şekillerini koruyan tekil dalgaları gözlemlemişlerdir ve bu tekil dalgalara "soliton" adını vermişlerdir [4].

1972 yılına gelindiğinde KdV denklemi B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony tarafından geliştirilerek Benjamin-Bona-Mahony (BBM) ya da düzenli uzun dalga denklemi olarak adlandırılan

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

denklemi şeklinde yeniden yazılmıştır. Bu denklemin çözümünün tekliği ve kararlılığı ispatlanmıştır [5]. BBM denkleminin KdV denkleminden en önemli farkı BBM denkleminin tekil dalga çözümlerinin solitonlar olmamasıdır [6].

Sığ sulardaki dalgalar üzerine çalışmalar yapanlardan biri de B. Fuchssteiner'dir. 1981 yılında B. Fuchssteiner KdV denkleminin bi-Hamiltion yapısı üzerine önemli çalışmalar yapmıştır [7].

1990'lı yıllarda R. Camassa ve D. D. Holm sığ sularda oluşan tekil dalgaların hareketlerini açıklayan yeni bir model geliştirmişlerdir. Camassa-Holm denklemi olarak adlandırılan bu denklem

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

şeklinde verilmiştir. Burada k katsayısı pozitif bir sayıdır ve denklemin dispersive katsayısı olarak tanımlanır [8], [9].

İlerleyen yıllarda R. Camassa, D. Holm ve J. Hyman, BBM ile KdV denklemini, (1.5) denklemiyle karşılaştırarak Camassa-Holm denkleminin bu denklemlerden farklarını şöyle tespit etmişlerdir: Camassa-Holm denkleminin tekil dalga çözümleri zirveli solitonlara, kırılan dalgalara ve düzenli dalgalara sahiptirler [9], [16]. Camassa-Holm denkleminin tekil dalgaları zirve noktasına sahiptir ayrıca tekil dalga çözümleri kararlıdır ve bu çözümler düzgün solitonlardır [9], [10], [11].

Camassa-Holm denklemi bi-Hamiltion yapıya sahiptir [7] ve tamamen integrallenebilirdir [9], [12]. Camassa-Holm denkleminin bi-Hamilton yapısı hakkındaki en kapsamlı çalışmayı 1997 yılında A. Constantin yapmıştır [13].

A. Constantin ve J. Escher başlangıç koşulunun geniş bir sınıfı için (1.5) denkleminin Cauchy problemini ele alarak global çözümün varlığını araştırmışlar ve yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca zayıf çözümün varlığını da göstermişlerdir [14], [15]. Bunun yanısıra Camassa-Holm denkleminin tekil dalga çözümlerinin varlığı ve bazı yeni sonuçlar [17] - [20] makalelerinde verilmiştir.

2000 yılına gelindiğinde A. A. Himonas ve G. Misiolek verilen Camassa-Holm denkleminin bir modifikasyonu olan 5. dereceden Camassa-Holm denkleminin periyodik Cauchy problemini

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + u_{xxx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} - u_{xxxxx} = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), \qquad t \in \mathbb{R}, \ x \in T \end{cases} \tag{1.6}$$

ele almışlardır. Bu problem için yerel çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamışlardır [21].

2000-2002 yılları arasında Y. A. Li, P. J. Olver ve G. Misiolek s > 3/2 olmak üzere H^s Sobolev uzayında integrallenebilir lineer olmayan dispersive model dalga denklemini

$$u_t - vu_{xxt} = \alpha u_x + \beta u_{xxx} + 3\gamma uu_x - \gamma v(uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}) \tag{1.7}$$

ele alarak yerel çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamışlardır [22]- [24]. Burada α, β, γ ve v sabit sayılardır.

Ele alınan denklemlerden biri de lineer dispersive KdV denklemi ile lineer olmayan dispersive Camassa-Holm denkleminin kombinasyonu olan Dullin-Gottwald-Holm (DGH) denklemidir.

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

Burada α^2 ve γ/c_0 sabitleri uzunluk ölçeğinin karesidir. $c_0 = \sqrt{gh} > 0$ $(c_0 = 2\omega)$ durgun sığ sulardaki suyun hızıdır. h ortalama su derinliği ve g=9.8 m/s² yer çekimi ivmesidir. Bu denklem L. Tian, G. Gui, Y. Liu ve Y. Zhou tarafından [25], [26] makalelerinde, bu denklemin zayıf disipatif hali ise E. Novruzov tarafından [27] makalesinde çalışılmıştır.

2004 yılından itibaren üzerinde çalışılan bir diğer denklem ise Camassa-Holm ve DGH denklemlerinin daha genel hali olan ve lineer olmayan dispersive dalga denklemi olarak adlandırılan

$$u_t - u_{xxt} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[g(u) + \frac{1}{2} f''(u) u_x^2 \right]_x = 0 \tag{1.9}$$

denklemidir. Bu denklemde $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ ve $g(u) = ku + u^2$ olarak alınırsa (1.9) denklemi Camassa-Holm denklemine dönüşür. Bu denklemle ilgili yapılan çalışmalar yukarıda ayrıntılı olarak verilmiştir. $f(u) = \gamma \dfrac{u^2}{2}$, $g(u) = \dfrac{3-\gamma}{2} u^2$ dönüşümüyle Dai tarafından [28]-[30]'da çalışılan hiperelastik rod dalga denklemi,

$f(u)=\gamma\frac{u^2}{2}$ dönüşümüyle de Coclite, Holden, and Karlsen tarafından [31], [32]'de çalışılan genelleştirilmiş hiperelastik rod dalga denklemi elde edilir.

2006 yılında H. Holden ve X. Raynaud (1.9) denkleminin Cauchy problemini ele almışlar. Bu problem için global çözümün varlığını göstermişlerdir. Ayrıca problemin $H^1(\mathbb{R})$ den olan bir başlangıç koşulu için iyi tanımlı (well-posed) olduğunu ve çözümün enerjiyi koruduğunu ispatlamışlardır. Problemin stabilliği ise başlangıç değeri ile f ve g fonksiyonlarına göre kanıtlanmıştır [33].

Bu çalışmaların önemli bir kısmı da çözümün patlamasıyla ilgilidir. İlk olarak 1960'lar da N. Semenov'un "zincir reaksiyon teorisi" ile ortaya çıkan bu konuyla ilgili ilk çalışmalar parabolik tipli denklemler için yapılmıştır [34]- [37]. İlerleyen yıllarda özellikle 1998-2013 yılları arasında ise Camassa-Holm denklemi ve onun farklı modelleri (dispersive, dispersive olmayan, zayıf disipatif, DGH) için çözümün patlaması olayı incelenmiştir.

A. Constantin, J. Escher ve L. Molinet (1.5) denkleminin Cauchy probleminin çözümünün sonlu zamanda patlaması üzerine araştırmalar yapmışlardır [14], [16] ,[53]. [16] makalesinde çözümün $u_0(x)$ tek fonksiyon olmak üzere $u_0\in H^3(\mathbb{R})$ ve $u_0'(0)<0$ koşulları altında patladığı gösterilmiştir.

L. Brandolese [38] deki makalesinde

$$u_t-u_{xxt}+3uu_x=\gamma(2u_xu_{xx}+uu_{xxx}),\quad t>0,\ x\in\mathbb{R} \tag{1.10}$$

hiperelastic rod dalga denklemi için $1\le\gamma\le4$ durumunda bir patlama kriteri vermiştir.

Aynı yıl, bu kez L. Brandolose ve M. F. Cortez [39] makalesinde (1.9) denklemini ele almışlardır ve bu çalışmalarında [42]'deki patlama kriterini basitleştirmişlerdir. [39]'daki patlama kriteri, daha önce [8], [15], [22], [40]-[44] makalelerinde verilen patlama kriterlerinden farklı olarak, reel eksende tek bir x_0 noktası için $u_0(x_0)$ ve $u_0'(x_0)$ değerlerine bağlı olarak verilmiştir. Diğer bir deyişle [42]'de kullanılan $\|u_0\|_{H^1}$ gibi norm hesaplamaları kullanılmamıştır. Ayrıca potansiyelin ($y=u_0-u_{0xx}$) işareti üzerine bir koşul koyulmamıştır. Bu tip patlama koşuluna uzaya göre yerel (local-in-space) koşul denir.

2017 yılında E. Novruzov, L. Brandolose ve M. F. Cortez'in [39] makalesindeki patlama kriterini $u_0'(x_0)$ için verilen üst sınırı genişleterek kesinleştirmiştir [45].

Şimdiye kadar ele alınan denklemlerin zayıf disipatif durumları için de patlama olayı incelenmiştir. Örneğin (1.9) denkleminin özel bir hali olan zayıf disipatif Camassa-Holm denklemi

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + 3uu_{xxx}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

özel olarak ele alınmıştır. S. Wu ve Z. Yin bu denklemin Cauchy probleminin çözümünün, potansiyelin işaretine bağlı olarak sonlu zamanda patladığını göstermişlerdir [46]-[49]. Z. Guo [46]'deki patlama kriterini iyileştirmiş ve yayılma hızı için yeterli koşullar vermiştir [50]. Zayıf disipatif Camassa-Holm denkleminin patlama olayı diğer çalışmalardan farklı olarak belli bir integral koşulu altında E. Novruzov tarafından da [51] makalesinde incelenmiştir.

(1.9) denkleminin bir diğer özel bir hali olan keyfi dispersiyon katsayılı, disipatif Camassa-Holm denkleminin

$$u_t - u_{xxt} + k(u - u_{xx}) + 3u_x + \lambda(u - u_{xx}) = 2u_x u_{xx} + 3uu_{xxx},\ t > 0\ ,\ x \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

kompakt destekli başlangıç değere sahip olan Cauchy problemi ise E. Novruzov ve A. Hagverdiyev tarafından incelenmiştir. Bu problem için çözümün sonlu zamanda patlamasını garanti edecek bir koşul elde edilmiştir [52].

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, lineer olmayan dispersive dalga denkleminin Cauchy problemi

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[g(u) + \dfrac{1}{2} f''(u) u_x^{\,2} \right]_x = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.13}$$

ele alınmıştır. L. Brandolese ve M. F. Cortez'in [39] makalesinde bu problem için verdikleri patlama koşul incelenmiştir.

İkinci bölümde E. Novruzov'un [45] makalesi ele alınmıştır. Bu makalede (1.13) problemi için verilen patlama koşulu incelenmiştir. Ayrıca bu koşul [39]'daki patlama koşuluyla karşılaştırılmıştır.

Üçüncü bölümde ise disipatif terimli lineer olmayan dispersive dalga denkleminin Cauchy problemi

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + [f(u)]_x - [f(u)]_{xxx} + \left[g(u) + \frac{1}{2} f''(u) u_x{}^2 \right]_x + \lambda(u - u_{xx}) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.14}$$

ele alınmıştır. [54] makalesi göz önüne alınarak verilen çözümün uzaya göre yerel koşul altında patlamasını garanti eden bir patlama koşulu incelenmiştir. Ayrıca başlangıç zamanının normuna bağlı bir patlama koşuluna da bakılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, gelecek bölümlerde kullanılacak tanımlar, teoremler, eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.1: *(* $C^m(\Omega)$ *uzayı)* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge ve m negatif olmayan bir tam sayı olsun.* Ω *üzerinde tanımlanmış sürekli ve* $|\alpha| \leq m$ *olmak üzere α. mertebeden kısmi türevleri* $(D^\alpha \phi)$ *sürekli olan tüm* ϕ *fonksiyonlarını içeren vektör uzayı* $C^m(\Omega)$ *ile gösterilir. Bu vektör uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde bir norm tanımlanmıştır* [55].

$$\forall \phi \in C^m(\Omega) \text{ için } \|\phi\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{n=0}^{m} \sup_{x\in\Omega} \left|\phi^{(n)}(x)\right| \tag{2.1}$$

Tanım 2.2: *(* $C^\infty(\Omega)$ *uzayı)* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge olsun. Ω üzerinde tanımlı, sürekli ve sonsuz (her mertebeden) sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı* $C^\infty(\Omega)$ *uzayı ile gösteilir. Yani* $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ *gösterimi sağlanır* [55].

Tanım 2.3: *(* $L^p(\Omega)$ *uzayı)* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge ve* $p > 0$ *bir reel sayı olmak üzere,*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \tag{2.2}$$

koşulunu sağlayan $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan vektör uzayı* $L^p(\Omega)$ *ile gösterilir.* $L^p(\Omega)$ *vektör uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde bir norm tanımlanmıştır* [55].

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{2.3}$$

Tanım 2.4: (Esaslı Supremum) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge ve* $u:\Omega \to \mathbb{R}$ *ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer* Ω *üzerinde hemen hemen her yerde* $|u(x)| \leq K$ *eşitsizliğini sağlayan bir* K *pozitif sayısı bulunabiliyorsa* u *fonksiyonuna* Ω *üzerinde esas sınırlı (essentially bounded) fonksiyon denir. Böyle* K *'ların infimumuna da* u *fonksiyonunun esaslı supremumu denir ve*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf \{ K : |u(x)| \leq K, h.h.y. \} \tag{2.4}$$

ile gösterilir [55].

Tanım 2.5: ($L^\infty(\Omega)$ *uzayı)* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge olmak üzere Ω üzerinde ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı olan fonksiyonlardan oluşan uzaya* $L^\infty(\Omega)$ *uzayı denir. Bu vektör uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde bir norm tanımlanmıştır* [55].

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| \tag{2.5}$$

Teorem 2.1: $p \in [1,\infty]$ *için* $L^p(\Omega)$ *Banach uzayıdır* [55].

Tanım 2.6: (Zayıf Türev) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge,* $u,v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *ve α multiindeks olsun. Eğer her* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *için*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi v dx \tag{2.6}$$

eşitliği sağlanıyorsa v fonksiyonuna u fonksiyonunun Ω bölgesinde α. mertebeden zayıf türevi denir ve $D^\alpha u = v$ *ile gösterilir* [56].

Tanım 2.7: (Sobolev Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bir bölge,* $1 \leq p \leq \infty$ *ve k negatif olmayan bir tam sayı olsun.* $|\alpha| \leq k$ *olmak üzere her α multiindeksi için* $D^\alpha u$ *zayıf türevi var ve*

$L^p(\Omega)$ *uzayına ait olan* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya Sobolev uzayı denir ve* $W^{k,p}(\Omega)$ *ile gösterilir. Yani bu uzay*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \,\middle|\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le k \right\} \tag{2.7}$$

şeklindedir. $W^{k,p}(\Omega)$ *uzayı normlu bir lineer uzaydır ve bu uzay üzerinde tanımlanmış norm*

$1 \le p < \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \tag{2.8}$$

ve $p = \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u| = \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.9}$$

şeklindedir [56].

Teorem 2.2: $1 \le p \le \infty$ *ve* $k = 1,2,...$ *olmak üzere* $W^{k,p}(\Omega)$ *uzayı üzerindeki* $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ *normuna göre Banach uzayıdır* [56].

Teorem 2.3: $W^{k,2}(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır ve* $H^k(\Omega)$ *ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım* $u,v \in W^{k,2}(\Omega)$ *olmak üzere*

$$\langle u,v \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır [56].

Tanım 2.8: X , Y *normlu lineer uzay olsunlar. Bu durumda* *i)* $X \subset Y$ *için* $\| f \|_Y \leq C \| f \|_X$

ii) $\exists C > 0$, $\forall f \in X$ *için* $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$

koşulları sağlanırsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir ve $X \to Y$ *ile gösterilir* [55].

Teorem 2.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı bir bölge olsun.* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *için* $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *doğrudur. Ayrıca* $u \in L^q(\Omega)$ *için*

$$|\Omega|^{-1/p} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{-1/q} \|u\|_{L^q(\Omega)} \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \to L^p(\Omega) \tag{2.12}$$

sürekli gömülmesi geçerlidir [55].

Teorem 2.5: $m \geq 1$ *tamsayı ve* $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere aşağıdaki sürekli gömülmeler geçerlidir.*

i) *Eğer* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ *ise* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *için* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$,

ii) *Eğer* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *ise* $\forall q \in [p, \infty)$ *için* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$,

iii) *Eğer* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ *ise* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

iii) durumunda

$$\begin{cases} \left[\left|m-\dfrac{n}{p}\right|\right], & \dfrac{n}{p}\notin\mathbb{Z} \\ m-\dfrac{n}{p}-1'den\, küçük\ pozitif\ tam\, sayı, & \dfrac{n}{p}\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.13}$$

ve

$$k=\left[\left|m-\frac{n}{p}\right|\right], \qquad \theta=\left(m-\frac{n}{p}\right)-k \tag{2.14}$$

olmak üzere

$$\gamma=\begin{cases} k, & \dfrac{n}{p}\notin\mathbb{Z} \\ m-\dfrac{n}{p}-1, & \dfrac{n}{p}\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\left\|D^{\alpha}u\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\le C\left\|u\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\left|\alpha\right|\le\gamma \tag{2.16}$$

ve ayrıca

$$\left|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)\right|\le C\left|x-y\right|^{\theta}\left\|u\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad h.h.y., \qquad \left|\alpha\right|=\gamma \tag{2.17}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\|u\right\|_{C^{\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C_1\left\|u\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.18}$$

sağlanır [57].

Tanım 2.9: (Konvolüsyon) $f,g\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ *ve* $x\in\mathbb{R}^n$ *olmak üzere*

$$h(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanmış olan $h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonuna* f *ve* g *fonksiyonunun konvolüsyonu denir ve*

$$h=f*g \tag{2.20}$$

ile gösterilir [57].

Teorem 2.6: $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *olsun.* f *ve* g *fonksiyonunun konvolüsyonu değişme özelliğine sahiptir* [57]:

$$f*g=g*f \tag{2.21}$$

Tanım 2.10:(İyi Tanımlılık) Bir kısmi diferansiyel denklem için verilen bir problemin tek bir çözümü varsa ve bu çözüm başlangıç değerlerine sürekli bağlıysa verilen probleme iyi tanımlıdır denir [56].

Tanım 2.11: (Çözümün Patlaması) Bir başlangıç sınır değer probleminde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *açık bölge ve* $T>0$ *olmak üzere* $\Omega\times[0,T)$ *aralığında çözümün mevcut olduğu tüm* T *'lerin supremumuna çözümün varlık aralığı denir ve* $T_{\max}$ *ile gösterilir.* $T_{\max}=+\infty$ *ise çözüm globaldir,* $T_{\max}<+\infty$ *ise çözüm global değildir ve* $0<T_{\max}<+\infty$ *ise çözüm sonlu bir zamanda patlar* [60].

Teorem 2.7: •(1) $s>\frac{3}{2}$ *için* $u_0\in H^s(\mathbb{R})$ *ve* $f,g\in C^\infty(\mathbb{R})$ *olsun. Bu durumda* $T=T(u_0,f,g)$ *biçiminde bir* $T>0$ *sayısı ve (1.13) probleminin* $C([0,T),H^s(\mathbb{R}))\cap C^1([0,T),H^{s-1}(\mathbb{R}))$ *sınıfından olan tek bir u çözümü vardır. Bu çözüm aşağıdaki sabit enerji integraline sahiptir:*

$$\int_R \left(u^2 + (u_x)^2\right) = \int_R \left(u_0{}^2 + \left(u'_0\right)^2\right) = \|u_0\|_{H^1}^2 \tag{2.22}$$

Ayrıca çözüm problemin başlangıç değerine sürekli bağlıdır. Yani

$$u_0 \to u(.,u_0) : H^s(\mathbb{R}) \to C\left([0,T); H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T); H^{s-1}(\mathbb{R})\right) \tag{2.23}$$

dönüşümü süreklidir.

•*(2) (1) deki koşullara ek olarak* $f''(u) \geq \gamma > 0$ *olsun.*

i) (Patlama koşulu ve hızı)

$0 < T^* \leq \infty$ *sayısı* $C\left([0,T^*), H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T^*), H^{s-1}(\mathbb{R})\right)$ *sınıfından olan u çözümünün maksimal zamanı olsun. Bu durumda* $T^* < \infty$ *olması için gerek ve yeter koşul*

$$\lim_{t \to T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t,x) = -\infty \tag{2.24}$$

olmasıdır. Ayrıca burada $\inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t,x)$ *fonksiyonunun patlama hızı* $t \to T^*$ *iken* $O\left(\frac{1}{T^* - t}\right)$ *dir.*

ii) (Patlama kriteri)

$$u'_0(x_0) < -\sqrt{\frac{4\sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} |g(v)| + \|u_0\|_{H^1}^2 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} f''(v)}{\gamma}} \tag{2.25}$$

koşulunu sağlayan bir $x_0 \in \mathbb{R}$ *noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda u sonlu zamanda patlar ve*

$$C_0 \equiv 2 \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} |g(v)| + \frac{\|u_0\|_{H^1}^2}{2} \sup_{|v| \leq \|u_0\|_{H^1}} f''(v) \tag{2.26}$$

biçiminde verilen $C_0 = C_0\left(\|u_0\|_{H^1}, f, g\right)$ *için* $T^* \leq \frac{1}{\sqrt{2C_0\gamma}}\log\left(\frac{\sqrt{\gamma/2}\,u_0'(x_0)-\sqrt{C_0}}{\sqrt{\gamma/2}\,u_0'(x_0)+\sqrt{C_0}}\right)$

eşitsizliği sağlanır [42].

3. LİNEER OLMAYAN DİSPERSİVE DALGA DENKLEMİ

Bu bölümde (1.13) probleminin çözümünün patlaması öğrenilecektir. Daha açık bir ifadeyle söylersek, uzaya göre yerel koşul altında çözümün sonlu zamanda patlaması gösterilecektir. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.1: $f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *ve* $s > \frac{3}{2}$ *için* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *olsun. Ayrıca* $f'' \geq \gamma > 0$ *sağlansın. Eğer aşağıdaki (1) yada (2) koşullarından biri sağlanırsa (1.13) probleminin* $C\left([0,T^*); H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T^*); H^{s-1}(\mathbb{R})\right)$ *sınıfından olan u çözümünün maksimal* T^* *zamanı sonludur:*

•*(1)* - $\exists c \in \mathbb{R}$ *öyleki* $m = g(c) = \min_{\mathbb{R}}(g)$.

- $\phi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g-m)}$ *ile verilen* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü* $0 \leq K \leq 1$ *için* K *-Lipschitz'dir.*

- *Öyle bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vardır ki*

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\left|u_0(x_0) - c\right| \tag{3.1}$$

sağlanır.

•*(2)* - $\exists c \in \mathbb{R}$ *öyleki* $M = g(c) = \max_{\mathbb{R}}(g)$.

- $\psi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(M-g)}$ *ile verilen* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü* $0 \leq K \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$ *için* K *-Lipschitz'dir.*

- *Öyle bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vardır ki*

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-8K^2}\right)\left|u_0(x_0) - c\right| \tag{3.2}$$

sağlanır.

Ayrıca T^* *için aşağıdaki üst sınır değerlendirmesi sağlanır:*

$$T^{*} \le \frac{4}{\gamma\sqrt{4u_0'\left(x_0\right)^2-\left(\sqrt{1\pm 8K^2}-1\right)^2\left(u_0\left(x_0\right)-c\right)^2}} \tag{3.3}$$

Burada, $\pm 8K^2$ *terimi (1) koşulu için pozitif, (2) koşulu için negatif olarak seçilmelidir.*

Kanıt 3.1: Öncelikle s *için* $s \ge 3$ *seçimini yapabiliriz. Gerçekten de eğer* $3/2 < s < 3$ *ise ve* $u_o \in H^s\left(\mathbb{R}\right)$ *başlangıç değeri, (3.1) veya (3.2) formunda bir koşulu sağlıyorsa* u_0 *başlangıç değerine* $H^3\left(\mathbb{R}\right)$ *sınıfından olan ve bu bahsedilen koşulu sağlayan bir diziyle yaklaşabiliriz. Ayrıca Teorem 2.7'de hatırlatılan iyi tanımlılık sonucunu kullanabiliriz. Daha sonra* $u \in C\left([0,T^*),H^3\right) \cap C^1\left([0,T^*),H^2\right)$ *çözümünü dikkate alabiliriz.*

Şimdi Teorem 3.1'in ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemma ve onun kanıtını vereceğiz:

Lemma 3.1: $1_{\mathbb{R}^+}$ *ve* $1_{\mathbb{R}^-}$ *işaret fonksiyonları olsun.*

•(1) f *ve* g *fonksiyonları Teorem 3.1'in (1) koşulları altındayken*

$$\left(p1_{\mathbb{R}^\pm}\right)*\left(g(u)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right) \ge \frac{\alpha}{2}\left(g(u)-m\right)+\frac{m}{2} \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada α sayısı,

$$\alpha = \frac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right) \tag{3.5}$$

şeklindedir.

•(2) f *ve* g *fonksiyonları Teorem 3.1'in (2) koşulları altındayken*

$$\left(p1_{\mathbb{R}^\pm}\right)*\left(g(u)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right) \ge \frac{\alpha}{2}\left(g(u)-M\right)+\frac{M}{2} \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada α sayısı,

$$\alpha = \frac{1}{4K^2}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right) \tag{3.7}$$

şeklindedir.

$1_{\mathbb{R}^+}$ *ve* $1_{\mathbb{R}^-}$ *işaret fonksiyonları ile kastedilen* $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ *olmak üzere* $p1_{\mathbb{R}^+}=\frac{1}{2}e^{-x}$ *ve* $p1_{\mathbb{R}^-}=\frac{1}{2}e^{x}$ *gösterimidir.*

Lemma 3.1'in Kanıtı: İlk önce $1_{\mathbb{R}^+}$ *fonksiyonunu ele alalım. Teorem 3.1-(1)'de verilen koşula göre* $g-m\geq 0$ *olur. Ayrıca* $\phi=\sqrt{\frac{1}{\gamma}\left(g-m\right)}$ *fonksiyonu diferansiyellenebilirdir ve Lipschitz olma koşulundan dolayı* $\left|\phi^{'}\right|\leq K$ *sağlanır. Bu eşitsizlik düzenlenirse* $(g^{'})^2\leq 4\gamma K^2(g-m)$ *eşitsizliği elde edilir.*

Şimdi, $P(\lambda)=\frac{\gamma}{2}\lambda^2-\alpha g^{'}(u)\lambda+b\left(g(u)-m\right)$ *kuadratik polinomunu göz önüne alalım. Burada α ve b sabit sayılardır. P≥0 olması için gerek ve yeter koşul* $\alpha^2(g^{'})^2\leq 2\gamma b(g-m)$ *olmasıdır. Ayrıca* $P\geq 0$ *olmasını garanti etmek için* b *sabiti* $b=2\alpha^2K^2$ *şeklinde seçilmelidir. Tüm* ξ *reel sayıları için* $P\left(u_x(\xi)\right)\geq 0$ *eşitsizliği ve* f *fonksiyonu için verilen* $f^{''}(u)\geq\gamma$ *koşulu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\left.\begin{aligned}
\left(p1_{R^+}\right)*\left(b\left(g(u)-m\right)+\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right) &= \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{\xi}\left(b\left(g(u)-m\right)+\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right)(\xi)d\xi \\
&\geq \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{\xi}\left(\alpha g^{'}(u)u_x\right)(\xi)d\xi \\
&= \alpha\frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[g(u)-m\right](\xi)d\xi \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(g(u)-m\right)(x)-\alpha(p1_{R^+})*\left(g(u)-m\right)(x)
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Dolayısıyla

$$\left(p1_{\mathbb{R}^+}\right)*\left((b+\alpha)\left(g(u)-m\right)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right)\geq\frac{\alpha}{2}\left(g(u)-m\right)(x) \tag{3.9}$$

bulunur. Burada (3.4) değerlendirmesini elde etmek için $b+\alpha=1$ *olmalıdır. Bu eşitlik* $2\alpha^2K^2+\alpha-1=0$ *kuadratik denklemine eşdeğerdir. Bu denklemin reel köklerinden en büyüğü alınırsa α için (3.5) değeri elde edilir. Ayrıca (3.9) eşitsizliğinde* $(p1_{\mathbb{R}^+})*m=m\int_{\mathbb{R}}p1_{\mathbb{R}^+}=\frac{m}{2}$ *eşitliği kullanılırsa (3.4) değerlendirmesi elde edilir.*

f *ve* g *fonksiyonları Teorem 3.1-(2) koşulları altındayken de aynı yol izlenir. Lipshitsz koşulundan dolayı* $(g')^2\leq 4\gamma K^2(M-g)$ *eşitsizliği doğrudur. Dolayısıyla* $b=-2\alpha^2K^2$ *seçilerek yine aynı* $P(\lambda)$ *polinomu kullanılabilir.* m *yerine* M *kullanılarak yukarıdaki hesaplamaların aynısı yapılır. (3.6) değerlendirmesini elde etmek için daha önce olduğu gibi* $b+\alpha=1$ *olmalıdır.* b *yerine yazılırsa* $2\alpha^2K^2-\alpha+1=0$ *denklemi elde edilir. Bu denklemin köklerinin reel olması için* $0\leq K\leq 1/\sqrt{8}$ *olmalıdır.Bu denklemin reel köklerinden en küçüğü seçilerek α için (3.9) eşitliği ve ayrıca (3.6) değerlendirmesi elde edilir.*

Diğer yandan $p1_{\mathbb{R}^-}$ *fonksiyonu için de konvolüsyon değerlendirmesi aynı şekilde yapılır. Gerçekten de Teorem 3.1-(1) koşulları altında, keyfi bir* $\lambda\in\mathbb{R}$ *için* $P(\lambda)=\frac{\gamma}{2}\lambda^2+\alpha g'(u)\lambda+b\left(g(u)-m\right)\geq 0$ *polinomu kullanılır. Böylece*

$$\left.\begin{aligned}\left(p1_{R^-}\right)*\left(b\left(g(u)-m\right)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right)&=\frac{e^x}{2}\int_x^\infty e^{-\xi}\Big(b\left(g(u)-m\right)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big)(\xi)d\xi\\&\geq\frac{e^x}{2}\int_x^\infty e^{-\xi}\left(-\alpha g'(u)u_x\right)(\xi)d\xi\\&=\frac{\alpha}{2}\left(g(u)-m\right)(x)-\alpha(p1_{R^-})*\left(g(u)-m\right)(x)\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

eşitsizliği elde edilir ve işlemler önceki durumda olduğu gibi devam ettirilir. ■

Teorem 3.1'in Kanıtı: İlk olarak (1.9) denklemini lokal olmayan formda yazacağız:

$$u_t + f'(u)u_x + \partial_x p * \left[g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right]_x = 0, \quad t > 0, x \in R \tag{3.11}$$

Burada $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ *fonksiyonu* $1 - \partial_x^2$ *operatörünün temel çözümüdür. (3.11) denkleminde x değişkenine göre türev alınırsa,*

$$u_{tx} + f'(u)u_{xx} = -\frac{f''(u)}{2} u_x^2 + g(u) - p * \left[g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right] \tag{3.12}$$

denklemi elde edilir. Şimdi

$$\begin{cases} q_t(t,x) = f'\left(u(t,q(t,x))\right) & t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ q(0,x) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.13}$$

problemini göz önüne alalım. Burada u (1.13) probleminin çözümü olan fonksiyondur. Ayrıca $[0,T^*)$ *aralığı üzerinde* $q \in C^1\left([0,T^*) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ *olur.*

(3.4)'deki $1_{\mathbb{R}^+}$, $1_{\mathbb{R}^-}$ *fonksiyonları için verilen konvolüsyon değerlendirmelerini toplarsak ve* $f''(u) \geq \gamma > 0$ *koşulunu kullanılırsak (3.12) eşitliğinden*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[u_x(t,q(t,x))\right] &= \left[u_{tx} + f'(u)u_{xx}\right]\left(t,q(t,x)\right) \\ &= -\frac{f''(u)}{2} u_x^2 + g(u) - p * \left[g(u) + \frac{f''(u)}{2} u_x^2 \right] \\ &\leq \left[-\frac{\gamma}{2} u_x^2 + (1-\alpha)\left(g(u) - m\right) \right]\left(t,q(t,x)\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

elde edilir.

Lemma 3.1'deki (3.5) α tanımından $0<\alpha\le 1$ *olduğu biliniyor. Böylece* K, *α cinsinden yazılabilir:*

$$2K^2=\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \tag{3.15}$$

Ayrıca $\phi=\sqrt{\frac{1}{\gamma}\left(g-m\right)}$ *fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından* $\phi(u)\le K\left|u-c\right|$ *eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve (3.15) eşitliği (3.14)'de kullanılırsa*

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[u_x(t,q(t,x))\right]&\le -\frac{\gamma}{2}u_x^2+(1-\alpha)\gamma\phi(u)^2\\ &\le -\frac{\gamma}{2}u_x^2+(1-\alpha)K^2\gamma(u-c)^2\\ &=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2}(u-c)^2-u_x^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi β *sayısını,* $A(t,x)$ *ve* $B(t,x)$ *fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$\beta:=\frac{1-\alpha}{\alpha}=2K^2\alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right) \tag{3.17}$$

$$A(t,x)=\left(\beta(u-c)-u_x\right)\left(t,q(t,x)\right) \tag{3.18}$$

$$B(t,x)=\left(\beta(u-c)+u_x\right)\left(t,q(t,x)\right) \tag{3.19}$$

Bu ifadeleri kullanarak (3.16) eşitsizliğini yeniden yazalım:

$$\frac{d}{dt}\left[u_x(t,q(t,x))\right]\le\frac{\gamma}{2}\left(AB\right)(t,x) \tag{3.20}$$

Diğer taraftan p çekirdeği $\partial_x p=p1_{\mathbb{R}^-}-p1_{\mathbb{R}^+}$ *özdeşliğini sağlar. Bununla birlikte* $f''\ge\gamma$ *eşitsizliği kullanılırsa*

$$\left.\begin{aligned}
A_t(t,x) &= \beta\left(u_t + f^{'}(u)u_x\right) - \left(u_{tx} + f^{'}(u)u_{xx}\right)\\
&= \frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 - g(u) + (p - \beta\partial_x p) * \left(g(u) + \frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right)\\
&\geq \frac{\gamma}{2}u_x^2 - g(u) + (1+\beta)p1_{R^+} * \left(g(u) + \frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right)\\
&\quad + (1-\beta)p1_{R^-} * \left(g(u) + \frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Lemma 3.1 deki konvolüsyon değerlendirmelerini kullanacağız. Bunun için $-1 \leq \beta \leq 1$ *olmalıdır. Bu şart* $\alpha \geq 1/2$ *olmasını gerektirir. Bu ise Teorem 3.1-(1)'de verilen* $0 \leq K \leq 1$ *kısıtlaması ile garanti edilir.*

Önce (3.4) değerlendirmesini kullanıp daha sonra (3.16) eşitsizliğini elde etmek için yaptığımız hesaplamaları yaparsak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\left.\begin{aligned}
A_t(t,x) &\geq \frac{\gamma}{2}u_x^2 + (\alpha-1)(g(u)-m)\\
&= \frac{\gamma}{2}u_x^2 - (1-\alpha)\gamma\phi(u)^2\\
&\geq \frac{\gamma}{2}\left(u_x^2 - \beta^2(u-c)^2\right)\\
&= -\frac{\gamma}{2}(AB)(t,x)
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_t(t,x) &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1-\alpha)(g(u)-m)\\
&\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (1-\alpha)\gamma\phi(u)^2\\
&\leq \frac{\gamma}{2}\left(\beta^2(u-c)^2 - u_x^2\right)\\
&= \frac{\gamma}{2}(AB)(t,x)
\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Teorem 3.1'in (1) kısmında başlangıç koşulu için verilen

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\left|u_0(x_0)-c\right| \qquad (3.24)$$

koşulu, (3.17)'deki β tanımı kullanılarak yeniden yazılırsa

$$u'_0(x_0) < -\beta\left|u_0(x_0)-c\right| \qquad (3.25)$$

eşitsizliği veya buna eşdeğer olarak $A(0,x_0)>0$ ve $B(0,x_0)<0$ eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi aşağıdaki τ sayısını tanımlayalım:

$$\tau = sup\left\{t \in [0,T^*): \ A(.,x_0)>0 \ \text{ ve } \ B(.,x_0)<0, \quad [0,t] \ \text{ üzerinde}\right\} \qquad (3.26)$$

Burada $\tau>0$ olur. Eğer $\tau<T^*$ olduğu kabul edilirse $A(\tau,x_0)\le 0$ ve $B(\tau,x_0)\ge 0$ eşitsizliklerinden en az biri doğru olmak zorundadır. Bu durumda $[0,\tau)$ aralığında $(AB)(.,x_0)<0$ olur ve dolayısıyla (3.22)'den $A(\tau,x_0)\ge A(0,x_0)>0$ ve (3.23)'den $B(\tau,x_0)\le B(0,x_0)<0$ eşitsizlikleri elde edilir. Öyleyse $\tau=T^*$ olmalıdır.

Özetlersek, A, B ve AB fonksiyonları $[0,T^*)$ aralığında aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} A(.,x_0) & \text{pozitif ve artan,} \\ B(.,x_0) & \text{negatif ve azalan,} \\ AB(.,x_0) & \text{negatif ve azalan.} \end{cases} \qquad (3.27)$$

Son olarak $T^*<\infty$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $h(t)=\sqrt{-(AB)(t,x_0)}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (3.22), (3.23) eşitsizlikleri ve $\frac{A-B}{2}(t,x_0)\ge h(t)$ geometrik-aritmetik değer eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt}(t) &= -\frac{A_t B + AB_t}{2\sqrt{-AB}}(t,x_0) \\
&\geq \frac{\gamma(-AB)(A-B)}{4\sqrt{-AB}}(t,x_0) \\
&\geq \frac{\gamma}{2} h^2(t)
\end{aligned}\right\} \tag{3.28}
$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi aşağıdaki hesaplamları yapacağız:

$$
\left.\begin{aligned}
h' &\geq \frac{\gamma}{2} h^2 \\
\frac{h'}{h^2} &\geq \frac{\gamma}{2} \\
\left(-\frac{1}{h}\right)' &\geq \frac{\gamma}{2} \\
-\frac{1}{h(t)} + \frac{1}{h(0)} &\geq \frac{\gamma}{2} t \\
h(t) &\geq \frac{1}{\frac{1}{h(0)} - \frac{\gamma}{2} t}
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}
$$

Fakat $h(0) = \sqrt{-(AB)(0,x_0)} > 0$ *olduğundan çözüm sonlu zamanda patlar ve* $T^* < \dfrac{2}{\gamma h(0)}$ *eşitsizliği sağlanır.* A *ve* B *'nin tanımlarını yeniden kullanırsak* T^* *için*

$$
T^* \leq \frac{2}{\gamma\sqrt{u'_0(x_0)^2 - \beta^2 (u_0(x_0) - c)^2}} \tag{3.30}
$$

değerlendirmesi elde edilir.

Diğer taraftan Teorem 3.1'in (2) kısmının ispatı için (3.15) yerine

$$
2K^2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \tag{3.31}
$$

alınır. Ayrıca (3.7)'den dolayı $\alpha \geq 1$ olmalıdır. Böylece (3.14)-(3.16) değerlendirmeleri yerine

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u_x(t,q(t,x))] &= \left[u_{tx} + f'(u)u_{xx}\right](t,q(t,x)) \\ &\leq \left[-\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (\alpha - 1)\left(M - g(u)\right)\right](t,q(t,x)) \\ &\leq -\frac{\gamma}{2}u_x^2 + (\alpha - 1)\gamma\psi(u)^2 \\ &\leq \frac{\gamma}{2}\left(\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2}(u - c)^2 - u_x^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

değerlendirmesi kullanılır. Bu durum için β katsayısı $\beta := 2K^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 8K^2}\right)$ biçimindedir. Bu ise $-1 \leq \beta \leq 1$ olmasını gerektirir. Fakat bu K Lipschitz koşuluna herhangi bir kısıtlama getirmez. İspatın devamı aynı şekilde devam ettirilir. ■

Teorem 3.1'de (1) ve (2) koşulları altında çözümün patladığını gösterdik. Diğer yandan bu koşullar teoremin ifadesinde yer alan ψ ve ϕ fonksiyonlarını içermediği için söz konusu koşulların kesin olmadığını tahmin edebiliriz. Dolayısıyla $u_0'(x_0)$'ın ait olduğu aralığı genişletebiliriz. Bir sonraki teoremde çözümün aşağıdaki koşullar altında patladığını göstereceğiz:

$$u_0'(x_0) < -\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\varphi\left(u(x_0)\right) \tag{3.33}$$

$$u_0'(x_0) < -\frac{1}{2K}\left(1 - \sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u(x_0)\right) \tag{3.34}$$

Bu koşullar daha kesin koşullardır. Çünkü ψ ve ϕ fonksiyonları Lipschitz koşulunu sağladığı için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\left|u_0(x_0) - c\right| \leq -\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\varphi\left(u(x_0)\right) \tag{3.35}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\left|u_0(x_0)-c\right| \le -\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u(x_0)\right) \tag{3.36}$$

Teorem 3.2: $f,g \in C^\infty(\mathbb{R})$ *ve* $s>3/2$ *için* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *olsun. Ayrıca* $f'' \ge \gamma > 0$ *sağlansın. Eğer aşağıdaki (1) ya da (2) koşullarından biri sağlanırsa (1.13) probleminin* $C\left([0,T^*);H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T^*);H^{s-1}(\mathbb{R})\right)$ *sınıfından olan u çözümünün maksimal* T^* *zamanı sonludur:*

•*(1)* - $\exists c \in \mathbb{R}$ *öyleki* $m = g(c) = \min_{\mathbb{R}}(g)$.

- $\varphi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(g-m)}$ *ile verilen* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü* $0 \le K \le 1$ *için* K*-Lipschitz'dir.*

- *Öyle bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vardır ki*

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u(x_0)\right) \tag{3.37}$$

sağlanır.

•*(2)* - $\exists c \in \mathbb{R}$ *öyleki* $M = g(c) = \max_{\mathbb{R}}(g)$.

-$\psi = \sqrt{\frac{1}{\gamma}(M-g)}$ *ile verilen* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü* $0 \le K \le \frac{1}{\sqrt{8}}$ *için* K*-Lipschitz'dir.*

- *Öyle bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vardır ki*

$$u'_0(x_0) < -\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u(x_0)\right) \tag{3.38}$$

sağlanır.

Kanıt 3.2: İlk önce $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R})$ *durumunu göz önüne alacağız. Aşağıdaki gösterimleri verelim:*

$$y = u - u_{xx}, \qquad E_1(t) = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)\,d\xi \tag{3.39}$$

Burada $q(x_0,t)$, *Teorem 3.1'in ispatında verilen (3.13) probleminin çözümüdür.* $E_1(t)$ *fonksiyonunun türevi alınırsa*

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\,d\xi + e^{q(x_0,t)} y\big(q(x_0,t)\big) q_t(x_0,t) \tag{3.40}$$

elde edilir. Şimdi $\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\,d\xi$ *integralini kısmi integrasyon yardımıyla hesaplayalım.*

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi = \\
&\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(-[f(u)]_x + [f'(u)u_{xx}]_x - [g(u)]_x + \left[\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right]_x \right)d\xi = \\
&-e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi} f'(u)u_{xx}\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f'(u)u_{xx}d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2 d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi = -e^{\xi} f'(u)u_x\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi} f'(u)u_{xx}\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f'(u)u_x d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f''(u)u_x^2 d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi = \\
&e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f'(u)u_x\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi} f'(u)u_{xx}\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi = e^{\xi} f'(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&-e^{\xi} f'(u)(u-u_{xx})\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi = e^{\xi} f'(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&-e^{\xi} f'(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi}(g(u)-m)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{3.41}
$$

(3.41)'i (3.40')da yerine yazarsak

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE_1(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi+e^{q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t)\geq\\&e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}-e^{\xi} f^{'}(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}-e^{\xi}(g(u)-m)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}\\&+e^{q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t)+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi\end{aligned}\right\}\tag{3.42}$$

eşitsizliğini buluruz. (3.13) eşitliğini göz önüne alırsak

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE_1(t)}{dt}\geq e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}-e^{\xi}(g(u)-m)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}\\&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi\end{aligned}\right\}\tag{3.43}$$

elde ederiz. (3.43) eşitsizliğini $e^{-q(x_0,t)}$ *ile çarparsak*

$$\left.\begin{aligned}&e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}\geq\left[f^{'}(u)(u-u_x)+\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2-(g(u)-m)\right]\big(q(x_0,t),t\big)\\&+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi\end{aligned}\right\}\tag{3.44}$$

eşitsizliğine ulaşırız. (3.44) eşitsizliğin sağ ve sol tarafına $-q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)$ *terimini eklersek (3.13)'den dolayı*

$$\left.\begin{aligned}&-q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)+e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}\geq -q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\\&+\left[f^{'}(u)(u-u_x)+\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2-(g(u)-m)\right]\big(q(x_0,t),t\big)\\&+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi\end{aligned}\right\}\tag{3.45}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca $y = u - u_{xx}$ *eşitliğini göz önüne alarak* $\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi$ *integraline iki defa kısmi integrasyon uygularsak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.*

$$E_1(t) = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi = e^{q(x_0,t)}\left(u\left(q(x_0,t),t\right) - u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \tag{3.46}$$

Dolayısıyla

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right) \geq \frac{f''\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right) \\ &-\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right) - m\right) + e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\,\frac{f''(u)}{2}u_x^2 d\xi \\ &+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u) - m)d\xi \end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

eşitsizliği yazılabilir. $f'' \geq \gamma$ *şartı ve Lemma 3.1'deki (3.4) eşitsizliği (ya da tam olarak (3.9) eşitsizliği) kullanılırsa*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right) \geq \\ &\frac{\gamma}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right) - \left(1 - \frac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\right)\frac{\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right) - m\right)}{\gamma}\gamma \geq \\ &\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right) - \frac{2}{K^2}\left(K^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\right)\frac{\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right) - m\right)}{\gamma}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

elde edilir. $\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)$ *sayısını*

$$\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right) = \sqrt{\frac{2}{K^2}\left(K^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+8K^2} - 1\right)\right)} \tag{3.49}$$

biçiminde yeniden yazıp (3.48)'de kullanırsak

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq \\ \frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)\end{array}\right\} \tag{3.50}$$

eşitsizliğini buluruz. Şimdi benzer eşitsizliği

$$E_2(t)=\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi \tag{3.51}$$

integrali için elde edeceğiz. $E_2(t)$ *fonksiyonunun türevi alınırsa*

$$\frac{dE_2(t)}{dt}=\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}y_t(\xi,t)d\xi-e^{-q(x_0,t)}y\left(q(x_0,t),t\right)q_t(x_0,t) \tag{3.52}$$

integrali elde edilir. Bu integrali kısmi integrasyon yardımıyla hesaplarsak aşağıdaki eşitlikleri verir.

$$\left.\begin{array}{l}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}y_t(\xi,t)d\xi=\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}\left(-\left[f(u)\right]_x+\left[f'(u)u_{xx}\right]_x-\left[g(u)\right]_x+\left[\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right]_x\right)d\xi= \\ -e^{-\xi}f(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}f'(u)u_{xx}\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}g(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}f(u)d\xi \\ +\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}f'(u)u_{xx}d\xi+\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2d\xi-\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}g(u)d\xi=e^{-\xi}f(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\ +e^{-\xi}f'(u)u_x\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}f(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}f'(u)u_{xx}\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\ -e^{-\xi}g(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}f''(u)u_x^2d\xi-\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}g(u)d\xi=e^{-\xi}f'(u)(u+u_x)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\ -e^{-\xi}f'(u)y\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}g(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}f''(u)u_x^2d\xi \\ -\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}g(u)d\xi\end{array}\right\} \tag{3.53}$$

(3.52) ve (3.53) birlikte kullanılırsa

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{dE_2(t)}{dt} = -\displaystyle\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y_t(\xi,t)d\xi + e^{-q(x_0,t)} y\left(q(x_0,t),t\right)q_t(x_0,t) \geq \\ \displaystyle\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\, \dfrac{f^{''}(u)}{2} u_x^2 d\xi + \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}(g(u)-m)d\xi + e^{-q(x_0,t)} y\left(q(x_0,t),t\right) q_t(x_0,t) \\ +e^{-q(x_0,t)}\left[f^{'}(u)(u+u_x) - f^{'}(u)y + \dfrac{f^{''}(u)}{2} u_x^2 - (g(u)-m)\right]\left(q(x_0,t),t\right) \end{array}\right\} \tag{3.54}$$

bulunur. (3.13) eşitliği kullanılırsa

$$\left.\begin{array}{l} -e^{q(x_0,t)}\dfrac{dE_2(t)}{dt} \geq e^{q(x_0,t)}\displaystyle\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,\dfrac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi + e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}(g(u)-m)d\xi \\ +\left[f^{'}(u)(u+u_x) + \dfrac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 - (g(u)-m)\right]\left(q(x_0,t),t\right) \end{array}\right\} \tag{3.55}$$

elde edilir. Diğer taraftan kısmi integrasyon

$$E_2(t) = \int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y(\xi,t)d\xi = e^{-q(x_0,t)}\left(u\left(q(x_0,t),t\right) + u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \tag{3.56}$$

eşitliğini verir.(3.55) eşitsizliğinin her iki tarafına $q_t(x_0,t)e^{q_t(x_0,t)}E_2(t)$ *ifadesi eklenir ve (3.13) ile Lemma 3.1'deki (3.4) eşitsizliği göz önüne alınırsa*

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{d\left(e^{q(x_0,t)}E_2(t)\right)}{dt} \geq \dfrac{f^{''}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)}{2} u_x^2\left(q(x_0,t),t\right) - \left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right) - m\right) \\ +e^{q(x_0,t)}\displaystyle\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\,\dfrac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi + e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}(g(u)-m)d\xi \geq \\ \dfrac{\gamma}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right) - \left(1 - \dfrac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\right)\dfrac{\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)-m\right)}{\gamma}\gamma \end{array}\right\} \tag{3.57}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq \\ \dfrac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\dfrac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)\end{array}\right\} \tag{3.58}$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz. Diğer taraftan (3.50) eşitsizliğinden

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq \\ \dfrac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\dfrac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)\end{array}\right\} \tag{3.59}$$

olduğunu biliyoruz. (3.58) ve (3.59) eşitsziliklerinin her ikisi de alttan aynı ifade ile sınırlıdır. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırırsak $R_1(t)=u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)$ *ve* $R_2(t)=-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)$ *şeklinde tanımlı* $R_1(t)$ *ile* $R_2(t)$ *fonksiyonlarını elde ederiz.* $R_1(t)$ *ve* $R_2(t)$ *fonksiyonları*

$$N_1(t)=-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)>0 \tag{3.60}$$

sağlandığı sürece monoton artan fonksiyonlardır. Ayrıca (3.37) koşulundan dolayı

$$N_1(0)=-u_0'(x_0)-\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u_0(x_0)\right)>0 \tag{3.61}$$

sağlanır. $N_1(t)$ *fonksiyonunu sürekliliği sebebiyle* $[0,T_1)$ *aralığında* $R_1(t)$ *ve* $R_2(t)$ *fonksiyonları artan fonksiyonlardır. Yani* $t_1<t_2<T_1$ *için* $R_1(t_2)\geq R_1(t_1)$ *ve* $R_2(t_2)\geq R_2(t_1)$ *eşitsizlikleri ya da buna eş değer olarak*

$$-u_x\left(q(x_0,t_2),t_2\right)-\left(-u_x\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\geq-\left(u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)-u\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right) \tag{3.62}$$

$$\left(-u_x\left(q(x_0,t_2),t_2\right)\right)-\left(-u_x\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\geq u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)-u\left(q(x_0,t_1),t_1\right) \tag{3.63}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler birleştirilirse

$$\left(-u_x\left(q(x_0,t_2),t_2\right)\right)-\left(-u_x\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\geq \left|u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)-u\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right| \tag{3.64}$$

bulunur. Bunun yanısıra Teorem 3.2-(1)'deki Lipschitz koşulundandan $K\leq 1$ *için*

$$\left|\varphi\left(u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)\right)-\varphi\left(u\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\right|\leq K\left|u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)-u\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right| \tag{3.65}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$\left.\begin{array}{l}\left(-u_x\left(q(x_0,t_2),t_2\right)\right)-\left(-u_x\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\geq \\ \dfrac{1}{K}\left|\varphi\left(u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)\right)-\varphi\left(u\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\right|\geq \\ \dfrac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\left|\varphi\left(u\left(q(x_0,t_2),t_2\right)\right)-\varphi\left(u\left(q(x_0,t_1),t_1\right)\right)\right|\end{array}\right\} \tag{3.66}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise

$$N_1(t_2)\geq N_1(t_1)>0 \tag{3.67}$$

olduğu anlamına gelir. Ayrıca

$$N_2(t)=\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right) \tag{3.68}$$

şeklinde tanımlı $N_2(t)$ *foksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

$N_2(t)$ *fonksiyonu,* $[0,T_1)$ *aralığında artan fonksiyondur. Dolayısıyla* $N_1(t)$, $N_2(t)$ *ve* $N_1(t)N_2(t)$ *fonksiyonları* $[0,T_1)$ *aralığında artan fonksiyonlardır. Bunun yanısıra (3.67)'den dolayı* $N_1(T_1)>0$ *olur. Yukarıda yapılan hesaplamaların benzeri* *yapılırsa* $R_1(t)$, $R_2(t)$, $N_1(t)$ *ve* $N_2(t)$ *fonksiyonlarının tüm* $t > T_1$ *sayıları için monoton artan olduğu bulunur.* $N_1(t)N_2(t) \geq N_1(0)N_2(0) > 0$ *olduğundan dolayı*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right) - u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \geq \left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)^2 \\ &-\left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2 \geq \left(-u_x(x_0,0)\right)^2 \\ &-\left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u(x_0,0)\right)\right)^2 = l > 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

eşitsizliği ve benzer şekilde

$$\frac{d}{dt}\left(-u\left(q(x_0,t),t\right) - u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \geq l \tag{3.70}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.69) ve (3.70) toplanırsa

$$\frac{d}{dt}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \geq l \tag{3.71}$$

eşitsizliği bulunur. $[0,t)$ *aralığı üzerinde integral alınırsa*

$$-u_x\left(q(x_0,t),t\right) \geq -u_x(x_0,0) + lt \tag{3.72}$$

gerçeklenir.

Ayrıca Teorem 2.7'deki (2.22) enerji integralinden $\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{H^1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^1}$ *olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlik* $u\left(q(x_0,t),t\right)$ *fonksiyonunun ve dolayısıyla* $\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)$ *fonksiyonunun sınırlı olduğu anlamına gelir. Böylece yeterince büyük* t_0 *sayısı vardır öyle ki*

$$-u_x\left(q(x_0,t_0),t_0\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\left|u\left(q(x_0,t_0),t_0\right) - c\right| \tag{3.73}$$

eşitsizliği sağlanır. Bulduğumuz bu (3.73) eşitsizliği Teorem 3.1'de (1.13) problemi için verilen (3.1) patlama koşulunun aynısıdır. Dolayısıyla (1.13) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar. Böylce Teorem 3.2'nin (1) kısmı $u_0(x)\in H^3(\mathbb{R})$ *için ispatlanmış oldu.*

Eğer $\frac{3}{2}<s<3$ *için* $u_0(x)\in H^s(\mathbb{R})$ *ise ilk önce* $H^3(\mathbb{R})$ *uzayına ait* $u_0^n(x)$ *dizisiyle* H^s *üzerindeki norma göre* $u_0(x)$*'e bir yaklaşım elde edilir. u çözümünün başlangıç değerine sürekli bağlılığı kullanılarak* $n\to\infty$ *iken limite geçilirse* $u_x\left(q(x_0,t),t\right)$ *için yukarıda verilen değerlendirme* $\frac{3}{2}<s<3$ *durumu için de geçerli olur.*

(2) kısmının ispatı için (3.50) ve (3.58) yerine, Lemma 3.1'deki (3.6) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\Big)\geq\\&\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}-2\left(\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\Big(u\left(q(x_0,t),t\right)\Big)\right)^2\right)\end{aligned}\right\}\tag{3.74}$$

ve

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\Big)\geq\\&\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}-\left(\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\Big(u\left(q(x_0,t),t\right)\Big)\right)^2\right)\end{aligned}\right\}\tag{3.75}$$

eşitsizlikleri elde edilir. İspatın son kısmı ise (3.38) kullanılarak aynı şekilde devam ettirilir. ■

4. DİSİPATİF LİNEER OLMAYAN DİSPERSİVE DALGA DENKLEMİ

Bu bölümde üçüncü bölümde incelediğimiz (1.9) denkleminin disipatif halini ele alacağız. Disipatif terim mevcut olduğundan genel olarak ele aldığımız normda çözümün sıfıra yakınsadığını gözlemleyebiliriz. Buna rağmen belli başlangıç koşulları altında disipatif denklemin çözümünün sonlu zamanda patladığını gösterebiliriz.

Teorem 4.1: $f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *ve* $s > \frac{3}{2}$ *için* $u_o \in H^s(\mathbb{R})$ *olsun. Ayrıca* $f'' \geq \gamma > 0$ *sağlansın. Eğer aşağıdaki (1) ya da (2) koşullarından biri sağlanırsa (1.14) probleminin* $C\left([0,T^*);H^s(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,T^*);H^{s-1}(\mathbb{R})\right)$ *sınıfından olan u çözümünün maksimal* T^* *zamanı sonludur:*

•*(1)* - $\exists c \in \mathbb{R}$ *öyleki* $m = g(c) = \min_{\mathbb{R}}(g)$.

- $\varphi = \sqrt{\frac{(g - m)}{\gamma}}$ *ile verilen* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü* $0 \leq K \leq 1$ *için* K *-Lipschitz'dir.*

- *Öyle bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vardır ki*

$$u'_0(x_0) < -\left|u_0(x_0) - c\right| - \sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right| - \frac{2\lambda}{\gamma}} \tag{4.1}$$

sağlanır.

•*(2)* - $\exists c \in \mathbb{R}$ *öyleki* $M = g(c) = \max_{\mathbb{R}}(g)$.

- $\varphi = \sqrt{\frac{(M - g)}{\gamma}}$ *ile verilen* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü* $0 \leq K \leq 1/\sqrt{8}$ *için* K *-Lipschitz'dir.*

- *Öyle bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *vardır ki*

$$u'_0(x_0) < -|u_0(x_0) - c| - \sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right| - \frac{2\lambda}{\gamma}} \tag{4.2}$$

sağlanır.

Kanıt 4.1: *İlk önce* $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R})$ *durumunu göz önüne alacağız. Aşağıdaki gösterimleri verelim:*

$$y = u - u_{xx}, \qquad E_1(t) = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)\,d\xi \tag{4.3}$$

Burada $q(x_0,t)$ *fonksiyonu*

$$\begin{cases} q_t(t,x) = f'\left(u(t,q(t,x))\right) & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ q(0,x) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.4}$$

probleminin çözümüdür. $E_1(t)$ *fonksiyonunun türevini alırsak*

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\,d\xi + e^{q(x_0,t)} y\left(q(x_0,t)\right) q_t(x_0,t) \tag{4.5}$$

elde ederiz. Şimdi $\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)\,d\xi$ *integralini kısmi integrasyon ile hesaplayalım.*

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi = \\
&\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(-[f(u)]_x + [f^{'}(u)u_{xx}]_x - [g(u)]_x + \left[\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right]_x - \lambda(u-u_{xx})\right)d\xi = \\
&-e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi} f^{'}(u)u_{xx}\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f^{'}(u)u_{xx}d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^{\,2}d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi - \lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi = -e^{\xi} f^{'}(u)u_x\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+e^{\xi} f^{'}(u)u_{xx}\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f^{'}(u)u_x d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f^{''}(u)u_x^{\,2}d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^{\,2}d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi - \lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi = e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f^{'}(u)u_x\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&-e^{\xi} f(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi} f^{'}(u)u_{xx}\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} f(u)d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi \\
&-\lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi = e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_{xx})\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} g(u)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g(u)d\xi \\
&-\lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi = e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f^{'}(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Bigg|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi}(g(u)-m)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi - \lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y(\xi,t)d\xi
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.6)
$$

(4.6) eşitliğini (4.5)'de yerine yazarsak

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dE_1(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi+e^{q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t)\geq\\
&e^{\xi}f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}-e^{\xi}f^{'}(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}\\
&-e^{\xi}(g(u)-m)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t)\\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2d\xi+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi-\lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

eşitsizliğini buluruz. (4.4) eşitliğini göz önüne alırsak

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dE_1(t)}{dt}\geq e^{\xi}f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}-e^{\xi}(g(u)-m)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}\\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2d\xi+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi-\lambda\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.8) eşitsizliğini $e^{-q(x_0,t)}$ ile çarparsak

$$\left.\begin{aligned}
&e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}\geq\left[f^{'}(u)(u-u_x)+\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2-(g(u)-m)\right]\big(q(x_0,t),t\big)\\
&+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2d\xi+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}(g(u)-m)d\xi-\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

elde ederiz. Son eşitsizliğin sağ ve sol tarafına $-q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)$ terimini eklersek (4.4)'den dolayı

$$\left.\begin{aligned}&-q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)+e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}\geq -q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\\&+\left[f'(u)(u-u_x)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2-(g(u)-m)\right]\left(q(x_0,t),t\right)\\&+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2d\xi+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}(g(u)-m)d\xi\\&-\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca

$$E_1(t)=\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}y(\xi,t)d\xi=e^{q(x_0,t)}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \tag{4.11}$$

eşitliği doğrudur. Dolayısıyla

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right)\geq\frac{f''\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)\\&-\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)-m\right)+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2d\xi\\&+e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}(g(u)-m)d\xi-\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. $f''\geq\gamma$ *şartı ve Lemma 3.1'deki (3.4) eşitsizliği kullanılırsa*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right)}{dt}+\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\geq\frac{\gamma}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)\\&-\left(1-\frac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\right)\frac{\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)-m\right)}{\gamma}\gamma\\&\geq\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{2}{K^2}\left(K^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\right)\frac{\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)-m\right)}{\gamma}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

elde edilir. $\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)$ *sayısını*

$$\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)=\sqrt{\frac{2}{K^2}\left(K^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\right)} \tag{4.14}$$

biçiminde yeniden yazıp (4.13)'de kullanırsak

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right)+\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\\
&=\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\
&+\lambda\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\
&\geq\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

eşitsizliğini buluruz. Şimdi benzer eşitsizliği

$$E_2(t)=\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi \tag{4.16}$$

integrali için elde edeceğiz. Bunun için önce $E_2(t)$ *fonksiyonunun türevini alalım.*

$$\frac{dE_2(t)}{dt}=\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y_t(\xi,t)d\xi-e^{-q(x_0,t)}y\left(q(x_0,t),t\right)q_t(x_0,t) \tag{4.17}$$

Bu integrale kısmi integrasyon uygularsak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi} y_t(\xi,t)d\xi = \\
&\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\left(-\left[f(u)\right]_x+\left[f^{'}(u)u_{xx}\right]_x-\left[g(u)\right]_x+\left[\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right]_x-\lambda y\right)d\xi = \\
&-e^{-\xi}f(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}f^{'}(u)u_{xx}\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}g(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\
&-\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}f(u)d\xi+\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}f^{'}(u)u_{xx}d\xi+\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2d\xi \\
&-\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}g(u)d\xi-\lambda\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi=e^{-\xi}f(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}f^{'}(u)u_x\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\
&-e^{-\xi}f(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}f^{'}(u)u_{xx}\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}g(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\
&-\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}f^{''}(u)u_x^2d\xi-\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}g(u)d\xi-\lambda\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi = \\
&e^{-\xi}f^{'}(u)(u+u_x)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}f^{'}(u)y\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}+e^{-\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty}-e^{-\xi}g(u)\Big|_{q(x_0,t)}^{\infty} \\
&-\frac{1}{2}\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}f^{''}(u)u_x^2d\xi-\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}g(u)d\xi-\lambda\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.18}
$$

(4.17) ve (4.18) birleştirilirse

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{dE_2(t)}{dt}=-\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y_t(\xi,t)d\xi+e^{-q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t) \\
&\geq\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2d\xi+\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}\big(g(u)-m\big)d\xi \\
&+\lambda\int_{q(x_0,t)}^{\infty} e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi+e^{-q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t) \\
&+e^{-q(x_0,t)}\left[f^{'}(u)(u+u_x)-f^{'}(u)y+\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2-(g(u)-m)\right]\big(q(x_0,t),t\big)
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.19}
$$

bulunur. (4.4) kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned}&-e^{q(x_0,t)}\frac{dE_2(t)}{dt}-\lambda e^{q(x_0,t)}E_2(t)\geq e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2d\xi\\&+e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}(g(u)-m)d\xi+\\&\left[f'(u)(u+u_x)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2-(g(u)-m)\right](q(x_0,t),t)\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan kısmi integrasyon

$$E_2(t)=\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}y(\xi,t)d\xi=e^{-q(x_0,t)}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)+u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \tag{4.21}$$

eşitliğini verir. (4.20) eşitsizliğinin her iki tarafına $q_t(x_0,t)e^{q(x_0,t)}E_2(t)$ *ifadesi eklenir ve (4.4) ile Lemma 3.1'deki (3.4) eşitsizliği göz önüne alınırsa*

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{d}{dt}\left(e^{q(x_0,t)}E_2(t)\right)-\lambda e^{q(x_0,t)}E_2(t)\geq\frac{f''\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)\\&-\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)-m\right)+e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}\frac{f''(u)}{2}u_x^2d\xi\\&+e^{q(x_0,t)}\int_{q(x_0,t)}^{\infty}e^{-\xi}(g(u)-m)d\xi\geq\frac{\gamma}{2}u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)\\&-\left(1-\frac{1}{4K^2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\right)\frac{\left(g\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)-m\right)}{\gamma}\gamma\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\lambda\left(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq\\&\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz. $-\left|u_0(x_0)-c\right| \le -\frac{1}{K}\varphi\left(u(x_0)\right)$ *eşitsizliğini kullanılarak (4.23) eşitsizliğini yeniden düzenlersek:*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(c-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\lambda\left(c-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\
&\ge\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\frac{1}{2K}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\varphi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2+\frac{2\lambda c}{\gamma}\right)\\
&\ge\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8K^2}-1\right)\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|\right)^2-\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Dolayısıyla

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(c-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}\right)\\
&\ge\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}\right)\\
&\times\left(-\frac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda\right)\\
&\ge\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}\right)\\
&\times\left(-\frac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.15)'den

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-c-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}\right)\\
&\ge\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}\right)\\
&\times\left(-\frac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left.\begin{array}{l}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\dfrac{2\lambda c}{\gamma}\right|}\right)\\ \times\left(-\dfrac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\dfrac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\dfrac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda\right)>0\end{array}\right\} \tag{4.27}$$

sağlandığı sürece, (4.25) ve (4.26) yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-c-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}\right)>0 \tag{4.28}$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left(c-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}\right)>0 \tag{4.29}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Teoremin koşullarından herhangi bir $[0,T_1)$ aralığı üzerinde

$$\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}\right)>0 \tag{4.30}$$

ve

$$\left.\begin{array}{l}\left(-\dfrac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\dfrac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\dfrac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda\right)\\ \geq\dfrac{\gamma}{2}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\dfrac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\dfrac{2\lambda}{\gamma}\right)>0\end{array}\right\} \tag{4.31}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece (4.28) ve (4.29)'den

$$u\left(q(x_0,t),t\right)-c-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}>0 \tag{4.32}$$

$$c-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}>0 \tag{4.33}$$

olur ve dolayısıyla tüm $t\geq T_1$ *sayıları için*

$$-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\frac{2\lambda}{\gamma}>0 \tag{4.34}$$

sağlanır. Daha sonra (4.25) ve (4.26) eşitsizlikleri toplanırsa, herhangi bir $l>0$ *sayısı için*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}\right)\\&\times\left(-\frac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda\right)\geq l\end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

elde edilir. Böylece, t *sonsuza giderken* $-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\to\infty$ *olur. Fakat* $t\to\infty$ *iken* $\|u\|_{H^1}$ *(ve* $\|u\|_{L^\infty}$*) normunun sıfıra gittiğini biliyoruz. Dolayısıyla öyle bir* T_2 *sayısı vardır ki tüm* $t\geq T_2$ *sayıları için*

$$-u_x\left(q(x_0,t),t\right)-\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|-\sqrt{\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}>\frac{1}{2}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right) \tag{4.36}$$

ve

$$-\frac{\gamma}{2}u_x\left(q(x_0,t),t\right)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left|u\left(q(x_0,t),t\right)-c\right|^2+\left|\frac{2\lambda c}{\gamma}\right|}-\lambda>-\frac{\gamma}{4}u_x\left(q(x_0,t),t\right) \tag{4.37}$$

sağlanır. Buradan

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq\\&\frac{1}{2}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\times\left(-\frac{\gamma}{4}u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)=\frac{\gamma}{8}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{4.38}$$

elde edilir.

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u_x\left(q(x_0,t),t\right)}\right)<-\frac{\gamma}{8}\tag{4.39}$$

eşitsizliğinin her iki tarafında integral alınırsa yeterince büyük t *için*

$$0<-\frac{1}{u_x\left(q(x_0,t),t\right)}<-\frac{1}{u_x\left(q(x_0,T_2),T_2\right)}-\frac{\gamma}{8}(t-T_2)<0\tag{4.40}$$

eşitsizliği bulunur. Bu çelişki ile birlikte çözümün sonlu zamanda patladığını kanıtlamış olduk.

Eğer $\frac{3}{2}<s<3$ *için* $u_0(x)\in H^s\left(\mathbb{R}\right)$ *ise ilk önce* $H^3\left(\mathbb{R}\right)$ *uzayına ait* $u_0^n(x)$ *dizisiyle* H^s *üzerindeki norma göre* $u_0(x)$*'e bir yaklaşım elde edilir. u çözümünün başlangıç değerine sürekli bağlılığı kullanılarak* $n\to\infty$ *iken limite geçilirse* $u_x\left(q(x_0,t),t\right)$ *için yukarıda verilen değerlendirme* $\frac{3}{2}<s<3$ *durumu için de geçerli olur.*

Teoremin (2) kısmını kanıtlamak için (4.15) ve (4.23) yerine, (4.4) yardımıyla,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\lambda\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\&\geq\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}-\left(\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)\end{aligned}\right\}\tag{4.41}$$

ve

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\left(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\lambda\left(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\ \geq\frac{\gamma}{2}\left(u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}-\left(\frac{1}{2K}\left(1-\sqrt{1-8K^2}\right)\psi\left(u\left(q(x_0,t),t\right)\right)\right)^2\right)\end{array}\right\}\tag{4.42}$$

eşitsizlikleri kullanılır. Kanıtın son kısmı ise Lemma 3.1'deki (3.6) eşitsizliği kullanılarak aynı şekilde yapılır. ■

Teorem 4.2: $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *ve* $s>\frac{3}{2}$ *için* $u_o\in H^s(\mathbb{R})$ *olsun. Ayrıca* $f''\geq k>0$ *sağlansın. Eğer m sayısı,* $m=\max_{|s|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^1(R)}}\left|g'(s)\right|$ *biçiminde olmak üzere* $u'_0(x_0)<-\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+m^2}}{k}$ *koşulunu sağlayan bir* $x_0\in\mathbb{R}$ *sayısı varsa (1.14) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.*

Kanıt 4.2: Yukarıda Teorem *4.1'in son kısmında bahsedilen sebepten dolayı genelliği bozmayacak şekilde* $u_0(x)\in H^3(\mathbb{R})$ *olarak alınabilir.*

Kısmi integrasyon kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} y_t(\xi,t)d\xi = \\
&\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(-[f(u)]_x + [f^{'}(u)u_{xx}]_x - [g(u)]_x + \left[\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\right]_x - \lambda y(\xi,t)\right)d\xi = \\
&e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f^{'}(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left[g(u)\right]_x d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\lambda y(\xi,t)d\xi \\
&= e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} - e^{\xi} f^{'}(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2 d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi} g^{'}(u)u_x d\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{(g^{'}(u))^2}{f^{''}(u)}d\xi \\
&-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{(g^{'}(u))^2}{f^{''}(u)}d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\lambda y(\xi,t)d\xi = e^{\xi} f^{'}(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&-e^{\xi} f^{'}(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} + e^{\xi}\frac{f^{''}(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\
&+\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\left(\frac{\sqrt{f^{''}(u)}}{\sqrt{2}}u_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{g^{'}(u)}{\sqrt{f^{''}(u)}}\right)^2 d\xi \\
&-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\frac{(g^{'}(u))^2}{f^{''}(u)}d\xi - \int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\lambda y(\xi,t)d\xi
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4.43)
$$

Böylece,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dE_1(t)}{dt}+\lambda\displaystyle\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi = \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y_t(\xi,t)d\xi+e^{q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t) \\ +\lambda\displaystyle\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}y(\xi,t)d\xi \geq e^{\xi}f'(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\ -e^{\xi}f'(u)y\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{\xi}\dfrac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)} \\ +e^{q(x_0,t)}y\big(q(x_0,t),t\big)q_t(x_0,t)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\dfrac{(g'(u))^2}{f''(u)}d\xi\end{array}\right\} \tag{4.44}$$

elde edilir. $q_t = f'\big(u(q(x,t),t)\big)$ *eşitliği göz önüne alınırsa*

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dE_1(t)}{dt}+\lambda E_1(t)\geq \\ e^{\xi}f'(u)(u-u_x)\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}+e^{\xi}\dfrac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{-\infty}^{q(x_0,t)}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\dfrac{(g'(u))^2}{f''(u)}d\xi\end{array}\right\} \tag{4.45}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$E_1(t)=e^{q(x_0,t)}\Big(u\big(q(x_0,t),t\big)-u_x\big(q(x_0,t),t\big)\Big) \tag{4.46}$$

olduğu biliniyor. (4.45) eşitsizliği $e^{-q(x_0,t)}$ *ile çarpılırsa*

$$\left.\begin{array}{l}e^{-q(x_0,t)}\dfrac{dE_1(t)}{dt}+\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\geq \\ \left[f'(u)(u-u_x)+\dfrac{f''(u)}{2}u_x^2\right]\big(q(x_0,t),t\big)-\dfrac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\displaystyle\int_{-\infty}^{q(x_0,t)} e^{\xi}\dfrac{(g'(u))^2}{f''(u)}d\xi\end{array}\right\} \tag{4.47}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin sağ ve sol yanına $-q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)$ *ifadesi eklenir ve* $q_t = f'(u)$ *eşitliği kullanılırsa*

$$\left.\begin{aligned}&-q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)+e^{-q(x_0,t)}\frac{dE_1(t)}{dt}+\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\\&\geq -q_t(x_0,t)e^{-q(x_0,t)}E_1(t)+\left[f'(u)(u-u_x)+\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right]\left(q(x_0,t),t\right)\\&-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\frac{(g'(u))^2}{f''(u)}d\xi\end{aligned}\right\} \qquad (4.48)$$

elde edilir. (4.48) düzenlenirse

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\right)+\lambda e^{-q(x_0,t)}E_1(t)\geq\\&\left[\frac{f''(u)}{2}u_x^2\right]\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\frac{(g'(u))^2}{f''(u)}d\xi\end{aligned}\right\} \qquad (4.49)$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\lambda\left(u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\&\geq\frac{f''(u)}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}-\frac{1}{2}e^{-q(x_0,t)}\int_{-\infty}^{q(x_0,t)}e^{\xi}\frac{(g'(u))^2}{f''(u)}d\xi\\&\geq\frac{k}{2}u_x^2\Big|_{q(x_0,t)}-\frac{1}{2}\frac{m^2}{k}=\frac{k}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{m^2}{k^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4.50)$$

eşitsizliği bulunur. Aynı yol izlenirse $E_2(t)$ *için de aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(-u\left(q(x_0,t),t\right)-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)-\lambda\left(u\left(q(x_0,t),t\right)+u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\\&=-\frac{d}{dt}\left(e^{q(x_0,t)}E_2(t)\right)-\lambda e^{q(x_0,t)}E_2(t)\geq\frac{k}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{m^2}{k^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

(4.50) ve (4.51) eşitsizlikleri toplanırsa

$$\frac{d}{dt}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)+\lambda\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq\frac{k}{2}\left(u_x^2\left(q(x_0,t),t\right)-\frac{m^2}{k^2}\right) \qquad (4.52)$$

bulunur. Şimdi (4.52)'de klasik bir hesaplama yapalım. Eğer

$$u'_0\left(x_0\right)>\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+m^2}}{k} \qquad (4.53)$$

eşitsizliği sağlanırsa $t\to\infty$ *için* $-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\to\infty$ *olur. Bu durumda* $\exists t^*>0$ *öyleki herhangi* $\delta<\frac{k}{2}$ *için*

$$\frac{k}{2}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)^2-\lambda\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)-\frac{m^2}{2k}>\delta\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)^2 \qquad (4.54)$$

olur. Böylece, $t>t^*$ *için*

$$\frac{d}{dt}\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)\geq\delta\left(-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\right)^2 \qquad (4.55)$$

elde edilir. Basit bir hesaplama

$$-u_x\left(q(x_0,t),t\right)\geq\frac{1}{\dfrac{1}{-u_x\left(q(x_0,t^*),t^*\right)}-\delta(t-t^*)} \qquad (4.56)$$

eşitsizliğini verir. Dolayısyla $t\to T=t^*-\dfrac{1}{\delta u_x\left(q(x_0,t^*),t^*\right)}$ *için* $u_x\left(q(x_0,t),t\right)\to-\infty$ *olur. Böylece Teorem 2.7'deki (2.24) ifadesinden dolayı çözüm sonlu zamanda patlar.*

Sonuç 4.1: $s > \frac{3}{2}$ *için* $u_o \in H^s(\mathbb{R})$ *ve* $\lambda = 0$ *olsun. Ayrıca* $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ *ve* $f'' \geq k > 0$ *sağlansın. Eğer* $m = \max_{|s| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^1(R)}} |g'(s)|$ *sayısı için* $u'_0(x_0) < -\frac{m}{k}$ *koşulunu sağlayan bir* $x_0 \in \mathbb{R}$ *sayısı varsa (1.14) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.* ■

KAYNAKLAR

[1] Russell J. S., (1844), “Report of the Fourteenth Meeting of The British Association for the Advancement of Science”, Plates XLVII-LVII, New York, 311-390.

[2] Boussineq J. V., (1871), “Theorie generale des mouvements qui sont propages dans un canal rectangulaire horizontal”, Comptes Rendus des Seances de l’Academie des Sciences, 73, 256-260.

[3] Korteweg D. J., de Vries G., (1895), “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves”, Philosophical Magazine Series 5, 39 (240), 422-443.

[4] Zabusky N. J., Kruskal M. D., (1965), “Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States”, Physical Review Letters, 15 (6), 240-243.

[5] Benjamin B., Bona J. L., Mahony J. J., (1972), “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”, Philosophical Transactions of the Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 272 (1220), 47-78.

[6] Bona J. L., Pritchard W. G., Scott L. R., (1980), “Solitary wave interaction”, Physics of Fluids, 23, 438-441.

[7] Fuchssteiner B., (1981), “The Lie Algebra Structure of Nonlinear Evolution Equations Admitting Infinite Dimensional Abelian Symmetry Group”, Progress of Theoretical Physics, 65 (3), 861-876.

[8] Camassa R., Holm D., (1993), “An integrable shallow water equation with peaked solitons”, Physical Review Letters, 71 (11), 1661-1664.

[9] Camassa R., Holm D., Hyman J., (1994), “A New Integrable Shallow Water Equation”, Advences in Applied Mechanics, 31, 1-33.

[10] Constantin A., Strauss W. A., (2000), “Stabilty of peakons Communications on Pure Applied Mathematics, 53 (5), 603-610.

[11] Beals R., Sattinger D. H., Szmigielski J., (1999), “Multi-peakons and a theorem of Stieltjes”, Inverse Problem, 15 (1), 1-4.

[12] Beals R., Sattinger D. H., Szmigielski J., (1998), “Acoustic Scattering and the Extended Korteweg de Vries Hierarchy”, Advances in Mathematics, 140 (2), 190-206.

[13] Constantin A., (1997), “The Hamiltonian structure of the Camassa- Holm equation”, Expositiones Mathematicae, 15 (1), 53-85.

[14] Constantin A., Escher J., (1998), “Global weak solutions for a shallow water equation”, Indiana University Mathematics Journal, 47 (4), 1527-1545.

[15] Constantin A., Escher J., (1998), “Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations”, Acta Mathematica, 181 (2), 229-243.

[16] Constantin A., Escher J., (1998), “Global existence and blow-up for a shallow water equation”, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 26 (2), 303-328.

[17] Cooper F., Shepard H., (1994), “Solitons in the Camassa-Holm shallow water equation”, Physics Letters A, 194 (4), 246-250.

[18] Alber M. S., Camassa R., Holm D. D., Marsden J. E., (1995), “On the Link Between Umbilic Geodesics and Soliton Solutions of Nonlinear PDEs”, Proceedings Mathematical and Physical Sciences, 450 (1940), 677-692.

[19] Li Y. A., Olver P. J., (1997), “Convergence of solitary-wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system I. Compactons and peakons”, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 3 (3), 419-432.

[20] Li Y. A., Olver P. J., (1998), “Convergence of solitary-wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system ii. Complex analytic behavior and convergence to non-analytic solution”, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4 (1), 159-191.

[21] Himonas A. A., Misiolek G., (2000), “Well-Posedness of the Cauchy Problem for a Shallow Water Equation on the Circle”, Journal of Differential Equations, 161 (2), 479-495.

[22] Li Y. A., Olver P. J., (2000), “Well-posedness and Blow-up Solutions for an Integrable Nonlinearly Dispersive Model Wave Equation”, Journal of Differential Equations, 162 (1), 27-63.

[23] Camassa R., (2000), “Characteristic variables for a completely integrable shallow water equation”, Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty years after NEEDS’79 (Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems 1979), World Scientific, Singapore, 65-74.

[24] Misiolek G., (2002), “Classical solutions of the periodic Camassa-Holm equation”, Geometric and Functional Analysis GAFA, 12 (5), 1080-1104.

[25] Tian L., Gui G., Liu Y., (2005), “On the Well-Posedness Problem and the Scattering Problem for the Dullin-Gottwald-Holm Equation”, Communications in Mathematical Physics, 257 (3), 667-701.

[26] Zhou Y., (2007), “Blow up solutions to the DGH equation”, Journal of Functional Analysis, 250 (1), 227-248.

[27] Novruzov E., (2013), “Blow-up phenomena for the weakly dissipative Dullin-Gottwald- Holm equation”, Journal of Mathematical Physics, 54 (9).

[28] Dai H. H., (1998), “Exact travelling-wave solutions of an integrable equation arising in hyperelastic rods”, Wave Motion, 28 (4), 367-381.

[29] Dai H. H., (1998), “Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod”, Acta Mechanica, 127 (1-4), 193-207.

[30] Dai H. H., Huo Y., (2000), “Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyperelastic rod”, Proceedings of The Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 456 (1994), 331-363.

[31] Coclite G. M., Holden H., Karlsen K. H., (2005), “Well-posedness for a parabolic-elliptic system”, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 13 (3),659-682.

[32] Coclite G. M., Holden H., Karlsen K. H., (2005), “Global weak solutions to a generalized hyperelastic-rod wave equation”, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 37 (4), 1044-1069.

[33] Holden H., Raynaud X., (2007), “Global conservative solutions of the generalized hyperelastic-rod wave equation”, Journal of Differential Equations, 233 (2), 448-484.

[34] Kaplan S., (1963), “On the Growth of Solutions of Quasilinear ParabolicEquations”, Communications on Pure and Applied Mathematics, 16 (3), 305- 330.

[35] Fujita H., (1966), “On the Blowing Up of Solutions to the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ “, Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Section 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry, 13 (2), 109-124.

[36] Friedman A., (1964), “Partial Differential Equations of Parabolic Type”, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

[37] Glassey R. T., (1973), “Blow up Theorems for Nonlinear Wave Equations”, Mathematische Zeitschrift, 132 (3), 183-203.

[38] Brandolese L., (2014), “Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations”, Communications in Mathematical Physics, 330 (1), 401-414

[39] Brandolese L., Cortez M. F., (2014), “Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations”, Journal of Differential Equations, 256 (12), 3981-3998.

[40] Constantin A., (2000), "Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach", Annales de l'institut Fourier, 50 (2), 321-362.

[41] Constantin A., Strauss W. A., (2000), "Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods", Physics Letters Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 270, (3-4), 140-148.

[42] Tian C., Yan W., Zhang H., (2014), "The Cauchy problem for the generalized hyperelastic rod equation", Mathematische Nachrichten, 287 (17-18), 2116-2137.

[43] Yin Z., (2004), "Well-posedness, global solutions and blowup phenomena for a nonlinearly dispersive wave equation", Journal of Evolution Equation 4, (3), 391-419.

[44] Zhou Y., (2004), "Wave breaking for a shallow water equation", Nonlinear Analysis, 57, (1), 137-152.

[45] Novruzov E., (2017), "Local-in-space blow-up criteria for a class of nonlinear dispersive wave equations", Journal of Differential Equations, 263 (9), 5773-5786.

[46] Wu S., Yin Z., (2006), "Blow-up, blow-up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa-Holm equation", Journal of Mathematical Physics, 47 (1), 013504.

[47] Wu S., Yin Z., (2007), "Blow-up and decay of the solution to the weakly dissipative Camassa-Holm equation", Acta Mathematicae Applicatae Sinica 30, 996-1003, (in Chinese)

[48] Wu S., Yin Z., (2009), "Global existence and blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation", Journal of Differential Equations, 246 (11), 4309-4321.

[49] Wu S., (2011), "Global weak solutions for the weakly dissipative Camassa-Holm equation", Journal of Partial Differantial Equations, 24 (2), 165-179.

[50] Guo Z., (2008), "Blow up, global existence, and infinite propagation speed for the weakly dissipative Camassa-Holm equation", Journal of Mathematical Physics, 49 (3), 033516.

[51] Novruzov E., (2012), "On blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation", Journal of Engineering Mathematics, 77 (1), 187-195.

[52] Novruzov E., Hagverdiyev A., (2014), "On the behavior of the solution of the dissipative Camassa-Holm equation with the arbitrary dispersion coefficient", Journal of Differantial Equations, 257 (12), 4525-4541.

[53] Constantin A., Molinet L., (2000), “Global weak solutions for a shallow water equation”, Communications in Mathematical Physics, 211 (1), 45-61.

[54] Novruzov E., Yazar B., (2017), “On blow-up criteria for a class of nonlineardispersive wave equations with dissipation”, Monatshefte für Mathematik, DOI 10.1007/s00605-017-1102-6.

[55] Adams R., Fournier J., (1975), “Sobolev Spaces”, Second Edition.

[56] Evans L. C., (1998), “Partial Differential Equations”, Second Edition (Graduate Studies in Mathematics), American Mathematical Society.

[57] Kesevan S., Topics in Functional Analysis and Applications, John Wiley and Sons, India, 1989.

[58] Levine H. A., Todorova G., (2000), “Blow-up Solutions of Cauchy Problem for a Wave Equation with Nonlinear and Damping and Source Terms and Positive Initial Energy”, Proceedings of the American Mathematical Society, 129 (3), 793-895.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Rize'nin Çayeli ilçesinde doğdum. 2015 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldum. Aynı yıl Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.

EKLER

Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar

Novruzov E., Yazar B., (2017), “On blow-up criteria for a class of nonlinear dispersive wave equations with dissipation”, Monatshefte für Mathematik, DOI 10.1007/s00605-017-1102-6.