



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONSUZ ÇİZGELERİN LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN MORİTA
DENKLİĞİ**

EKREM EMRE

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MÜGE KANUNİ ER**

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONSUZ ÇİZGELERİN LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN MORİTA
DENKLİĞİ**

Ekrem EMRE tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Müge KANUNİ ER
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Müge KANUNİ ER
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Ayten KOÇ
İstanbul Kültür Üniversitesi

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi A. Tuğba GÜROĞLU
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 13/07/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

02/07/2018

Ekrem EMRE

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim de ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Müge Kanuni Er'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

02/07/2018

Ekrem EMRE

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
EXTENDED ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. MORİTA DENKLİK.....	2
2.1. KATEGORİ TEORİSİ: TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	2
2.2. MODÜL TEORİSİ: TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	4
2.3. MORİTA DENKLİK: TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	8
2.4. MORİTA TEORİ	9
2.5. MORİTA TEOREMLERİNİN SONUÇLARI	13
3. LEAVITT YOL CEBİRLERİ.....	15
3.1. LEAVITT YOL CEBİRİ ÖRNEKLERİ	19
3.2. COHN YOL CEBİRLERİ.....	20
3.3. LEAVITT YOL CEBİRLERİNDE YÖNLÜ LİMİTLER	24
3.4. İDEALLER.....	26
3.5. $\mathbb{Z}$ -DERECE	28
4. LEAVITT YOL CEBİRLERİNDE TAM İDEMPOTENTLER	33
4.1. ÖRNEKLER.....	37
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	41
6. KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ	44

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. E .	17
Şekil 3.2. R_n .	19
Şekil 3.3. R_1 .	19
Şekil 3.4. E_1 .	19
Şekil 3.5. E_T .	20
Şekil 3.6. E_2 .	22
Şekil 3.7. $E_2(X)$.	23
Şekil 3.8. R_n .	23
Şekil 3.9. $R_n(X)$.	23
Şekil 3.10. $C_{\mathbb{N}}$.	25
Şekil 3.11. $R_{\mathbb{N}}$.	26
Şekil 3.12. $A_{\mathbb{N}}$.	26
Şekil 3.13. A_3 .	30
Şekil 3.14. E_H .	30
Şekil 4.1. E_3 .	33
Şekil 4.2. E_4 .	37
Şekil 4.3. E_5 .	37
Şekil 4.4. E_6 .	37
Şekil 4.5. E_7 .	38
Şekil 4.6. E_8 .	38
Şekil 4.7. E_9 .	38
Şekil 4.8. E_{10} .	39
Şekil 4.9. E_{11} .	39
Şekil 4.10. E_{12} .	39
Şekil 4.11. E_{13} .	39
Şekil 4.12. E_{14} .	40

SİMGELER

$\mathcal{C}$	Kategori
R	Halka
M	Modül
I	İdeal
E	Yönlü çizge
$L_K(E)$	Leavitt yol cebiri
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$E_n(R)$	R üzerinde tanımlı $n \times n$ matris
$E_{mn}(R)$	R üzerinde tanımlı $m \times n$ matris
$\otimes$	Tensör çarpım
$\oplus$	Direkt toplam
$\cong$	İzomorf
$\approx_M$	Morita denk
$\varinjlim$	Yönlü limit
$\overrightarrow{F}$	Funktor
π	İz düşüm fonksiyonu
ι	İçerme fonksiyonu

ÖZET

SONSUZ ÇİZGELERİN LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN MORİTA DENKLIĞI

Ekrem EMRE

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Müge KANUNİ ER

Temmuz 2018, 43 sayfa

Bu çalışmanın amacı sonsuz çizgeler üzerinde tanımlı Leavitt yol cebirlerinin Morita denkliğini araştırmaktır. Bunun için bir E çizgesi verildiğinde K herhangi bir cisim olmak üzere ürettiği ideal $L_K(E)$ ye eşit olan bir $e \in L_K(E)$ idempotentinin ($e^2 = e$) olması için E çizgesinin sağlaması gereken koşullar araştırılmıştır. Literatürde bilinmektedir ki R bir idempotent halka ve $e \in R$ bir idempotent olmak üzere eRe ve ReR halkaları Morita denktirler. Buna göre eğer $e \in R$ bir tam idempotent yani $ReR = R$ ise eRe ile R Morita denk olmaktadır. $L_K(E)$ de en az bir e tam idempotent olması için E çizgesinin sağlaması gereken gerek ve yeter koşulları bulmak için E çizgesinde maksimal küme tanımlanmış ve $L_K(E)$ de bir e tam idempotentin bulunması için gerek ve yeter şartlar maksimal kümeye bağlı olarak ifade edilmiştir. Ayrıca E üzerinde bir indirgeme algoritması tanımlanmış ve problem E nin bir alt çizgesi olan $E_r, r \geq 0$ çizgesine indirgenmiştir.

Anahtar sözcükler: Leavitt yol cebiri, Morita denklik, Tam idempotent.

ABSTRACT

MORITA EQUIVALENCE OF LEAVITT PATH ALGEBRAS OVER INFINITE GRAPHS

Ekrem EMRE

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Müge KANUNİ ER

July 2018, 43 pages

The purpose of this thesis is to study the Morita equivalence of Leavitt path algebras which are defined over infinite graphs. For any graph E and any field K , we investigate conditions on E such that there is an idempotent $e \in L_K(E)$, ($e^2 = e$) and the ideal generated by e is equal to $L_K(E)$. In the literature, it is shown that if R is an idempotent ring and $e \in R$ an idempotent element, then eRe and ReR are Morita equivalent rings. If $ReR = R$, then e is called a full idempotent. Hence if $e \in R$ is a full idempotent, then eRe and R are Morita equivalent rings. In this thesis, we first define a new subset of vertices of E , which we call a maximal set. Then by using this maximal set, we give the necessary and sufficient conditions on E that assure the existence of a full idempotent e in $L_K(E)$. Moreover we use a reduction algorithm on E and so we restrict the problem to a subgraph $E_r, r \geq 0$ of E .

Keywords: Full idempotent, Leavitt path algebra, Morita equivalence.

EXTENDED ABSTRACT

MORITA EQUIVALENCE OF LEAVITT PATH ALGEBRAS OVER INFINITE GRAPHS

Ekrem EMRE

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Müge KANUNİ ER

July 2018, 43 pages

1. INTRODUCTION

Let R and S be two rings. If the module categories of those rings are isomorphic, then R and S are called Morita equivalent rings. As an example of Morita equivalent rings, R and R_n can be given, where R_n is the matrix ring whose entities are the elements of R . It is a well known result in literature that if R and S are Morita equivalent rings, then $C(R)$ and $C(S)$ are isomorphic, where $C(R)$ and $C(S)$ are the centers of R and S , respectively. Therefore if R and S are commutative rings, then being Morita equivalent for those rings mean that those rings are isomorphic. Hence being Morita equivalent is meaningful for non-commutative rings. There are many known properties which are Morita invariant such as being prime, semi-prime, simple, semi-simple, right noetherian, right artinian. In this thesis Leavitt path algebras defined on infinite directed graphs are studied. For this purpose as E being a directed graph it is investigated that what are those conditions which E must satisfy so that $L_K(E)$ has at least one full idempotent element. Now we explain the idea behind this thesis. Let $E = (E^0, E^1, r, s)$ be a directed graph. If we define $E^0 = \{v_i\}_{i \geq 1}$, then the set $\{e_n\}_{n \geq 1}$ as $e_n = \sum_{i=1}^n v_i$ consist of local units for $L_K(E)$. Therefore we have that $L_K(E) = \sum_{n \geq 1} e_n L_K(E) e_n$. Since $L_K(E)$ is an idempotent ring, as known in the literature the idempotent rings $\sum_{n \geq 1} e_n L_K(E) e_n$ and $\sum_{n \geq 1} L_K(E) e_n L_K(E)$ are Morita equivalent. Moreover if $F = (F^0, F^1, r_F, s_F)$ is a subgraph of E , then as $F^0 = \{v_i\}_{i \geq 1}$ ve $e_n = \sum_{i=1}^n v_i$ we have that $L_K(F) = \sum_{n \geq 1} e_n L_K(E) e_n$. Hence if there is a positive integer $m \geq 1$ such that e_m is a full idempotent in $L_K(E)$, then $L_K(F)$ and $L_K(E)$ are Morita equivalent. In the second section of this thesis we mention about Morita equivalence. Then in the third chapter we deal with Leavitt path algebras, Cohn path algebras, direct limits in Leavitt path algebras and ideals of Leavitt path algebras. In the fourth section, for any directed graph the necessary and sufficient conditions which E must satisfy so that there is a full idempotent in $L_K(E)$ are specified. Then in the last chapter results and discussions are referred to.

2. MATERIAL AND METHODS

Leavitt path algebras is a topic of interest of not only non-commutative ring theorists, but also C^* -algebraists. Hence, the interplay between the topics stimulates interest and many proof techniques and tools are used from symbolic dynamics, ergodic theory, homology, K -theory and functional analysis. In this thesis, we use the some graph moves to show the Morita equivalence of Leavitt path algebras, these are the methods that originate from ergodic theory, symbolic dynamics. Most of this work reflected onto the Leavitt path algebra context is studied in the paper [1] by G. Abrams, A. Louly, E. Pardo, C. Smith. The next step comes from the paper [2] by L.O. Clark and A. Sims which carries the method onto the Morita equivalence of Steinberg algebras. We have only concentrated in the source elimination move within our work. Yet there is still more recent work in the graph moves and another reduction algorithm in literature that preserve Morita equivalence of Leavitt path algebras [3].

Another method is from graph theory that is mainly used in the ideal structure of Leavitt path algebras. We use the hereditary and saturated subsets of the vertices. Let E be any directed graph and K any field.

A subset H of E^0 is called hereditary if $v \geq w$ and $v \in H$ imply $w \in H$. First, we define an equivalence relation on E^0 . Then for any hereditary subset $H \subseteq E^0$, we define a maximal set of H . To assure the existence of a full idempotent in $L_K(E)$, the necessary and sufficient conditions on E is given by means of a maximal set. (Theorem 4.6)

Then we use the source elimination on E consecutively to construct subgraphs E_r of E . This reduction helps to simplify the graph and find the full idempotent. In Theorem 4.17, we prove that $L_K(E)$ has at least one full idempotent if and only if $L_K(E_r)$ has at least one full idempotent.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

In this thesis for any given directed graph E and field K we investigate necessary and sufficient conditions on E such that there is a full idempotent in $L_K(E)$. We prove that in Theorem 4.6 that Leavitt path algebra has at least one full idempotent if and only if there is a vertex set whose maximal set is finite.

It was shown in literature that (see [1, Proposition 3.1]) removing sources from a row-finite graph will produce a graph where the Leavitt path algebras of both the original and the resulting graph would be Morita equivalent. This result was then generalised to any directed graph in [2]. In Lemma 4.15, we prove the same known result by using a different approach.

We also restrict the problem of finding full idempotent in $L_K(E)$ to a subalgebra $L_K(E_r)$, $r \geq 0$ of $L_K(E)$ and find the main result in Theorem 4.17. In Theorem 4.17, we prove that $L_K(E)$ has at least one full idempotent if and only if $L_K(E_r)$ has at least one full idempotent.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this thesis for any given directed graph E and a field K , we have given the necessary and sufficient conditions on E such that there is a full idempotent in $L_K(E)$. This gives a collection of graphs whose Leavitt path algebras are Morita equivalent to their associated corner subalgebra generated by this full idempotent.

Now here is the idea behind this work: Suppose that P and Q are two properties defined on rings such that, for any ring R with identity, if R satisfies P , then it does Q . Now assume that P and Q are Morita invariant properties. In this case even if R does not have an identity but has a full idempotent e and satisfies P , then it satisfies Q . Recall that that R and eRe are Morita equivalent rings. Since P is Morita invariant and eRe is a ring with identity e , eRe satisfies P and so does Q . Therefore since Q is Morita invariant, R satisfies Q . Hence if the properties P and Q are Morita invariant, then instead of having a unit to satisfy Q , it is sufficient for R to satisfy Q that R has a full idempotent. So we can use that for the generalization such as in [4, Corollary 1.2].

1. GİRİŞ

R ve S iki halka olmak üzere eğer bu halkaların modül kategorileri izomorf iseler R ve S halkalarına Morita denktirler denir. Morita denk halkalara örnek olarak R halkası ile R_n matris halkası verilebilir. Literatürde bilindiği üzere eğer R ve S Morita denk halkalar iseler $Z(R)$ ve $Z(S)$ sırasıyla R ve S halkalarının merkezlerini göstermek üzere $Z(R)$ ile $Z(S)$ izomorfturlar. Dolayısıyla Morita denklik kavramı değişmeli halkalarda izomorfluk kavramıyla aynı anlama gelmektedir. Literatürde Morita denklik altında korunduğu bilinen özelliklere örnek olarak asal, yarı-asal, basit, yarı-basit, sağ noetheryen, sağ artınyen verilebilir. Bu çalışmada sonsuz çizgeler üzerinde tanımlı Leavitt yol cebirlerinin Morita denkliği incelenmiştir. Bunun için herhangi bir E çizgesi verildiğinde, K herhangi bir cisim olmak üzere $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinde bir e tam idempotent elemanı olması için E çizgesinin sağlaması gereken koşullar araştırılmıştır. Çünkü bir $E = (E^0, E^1, r, s)$ çizgesi verildiğinde $E^0 = \{v_i\}_{i \geq 1}$ olmak üzere $e_n = \sum_{i=1}^n v_i$ şeklinde tanımlı idempotent elemanlardan oluşan $\{e_n\}_{n \geq 1}$ kümesi $L_K(E)$ için lokal birimlerden oluşur. Dolayısıyla $L_K(E) = \sum_{n \geq 1} e_n L_K(E) e_n$ dir. Ayrıca $L_K(E)$ bir idempotent halka olduğundan literatürde bilindiği üzere $\sum_{n \geq 1} e_n L_K(E) e_n$ ve $\sum_{n \geq 1} L_K(E) e_n L_K(E)$ idempotent halkaları Morita denktirler. Dahası $F = (F^0, F^1, r_F, s_F)$ çizgesi E nin bir alt çizgesi ise $F^0 = \{v_i\}_{i \geq 1}$ ve $e_n = \sum_{i=1}^n v_i$ olmak üzere $L_K(F) = \sum_{n \geq 1} e_n L_K(E) e_n$ dir. Buna göre e_m tam- idempotent olacak şekilde bir $m \geq 1$ pozitif tamsayısı varsa $L_K(F)$ ile $L_K(E)$ Morita denk olmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde Morita denklik konusuna değinilmiştir. Leavitt yol cebirleri başlıklı üçüncü bölümde ise Leavitt yol cebirlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde Cohn cebirlerine, Leavitt yol cebirlerinde yönlü limitlere, Leavitt yol cebirlerinde idealler konusuna değinilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde bir E çizgesi verildiğinde $L_K(E)$ de bir tam idempotent olması için E çizgesinin sağlaması gereken şartlar belirlenmiştir. Tezin son bölümünde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. MORİTA DENKLİK

Bu bölüm sırasıyla Kategori Teorisi, Modül Teorisi, Morita Denklik, Morita Teori ve Morita Teoremlerinin Sonuçları olmak üzere beş alt bölümden oluşmaktadır. Bu alt başlıklarda konuyla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiş ayrıca konunun daha iyi anlaşılması için örneklere de yer verilmiştir. Bu bölümde [5] ve [6] kaynaklarından yararlanılmıştır. Bazı teoremlerin ispatları verilmiştir. Bazılarının ispatları ve daha ayrıntılı bilgi için söz konusu kaynaklara ilave olarak [7] ve [8] kaynaklarına bakılabilir.

2.1. KATEGORİ TEORİSİ: TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. [6, Tanım 1.1.1] Bir kategori $\mathcal{C}$ aşağıdakilerden oluşur:

- $Ob(\mathcal{C})$ ile gösterilen objelerin kümesi;
- Her $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ için A ile B arasındaki tüm morfizmaların kümesi $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$;
- Her $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$ için $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$;
- Her $A \in Ob(\mathcal{C})$ için $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ olmak üzere her $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), X, Y \in Ob(\mathcal{C}), f \circ id_X = f, id_Y \circ f = f$ eşitlikleri sağlanır.

Örnek 2.2. Kümelerin kategorisi **Set** ile gösterilir. Burada **Obj** tüm kümelerdir. $A, B \in \mathbf{Obj}$ olmak üzere $Hom_{\mathbf{Set}}(A, B)$ ise A dan B ye tüm fonksiyonlardır.

Örnek 2.3. Grupların kategorisi **Grp** ile gösterilir. Burada **Obj** tüm gruplardır. $A, B \in \mathbf{Obj}$ olmak üzere $Hom_{\mathbf{Grp}}(A, B)$ ise A dan B ye tüm grup homomorfizmalarıdır.

Örnek 2.4. Abelyen(değişmeli) grupların kategorisi **AbGrp** ile gösterilir. Burada **Obj** tüm Abelyan gruplardır. $A, B \in \mathbf{Obj}$ olmak üzere $Hom_{\mathbf{AbGrp}}(A, B)$ ise A dan B ye tüm grup homomorfizmalarıdır.

Örnek 2.5. R bir halka olmak üzere sol R modüllerin kategorisi ${}_RMod$ ile gösterilir. Burada **Obj** tüm sol R modüllerdir. $A, B \in \mathbf{Obj}$ olmak üzere $Hom_{{}_RMod}(A, B)$ ise A dan B ye tüm sol R modül homomorfizmalarıdır.

Örnek 2.6. Halkaların kategorisi **Rng** ile gösterilir. Burada **Obj** tüm birimli halkalardır. $A, B \in \mathbf{Obj}$ olmak üzere $Hom_{\mathbf{Rng}}(A, B)$ ise A dan B ye tüm halka homomorfizmalarıdır.

Örnek 2.7. Değişmeli halkaların kategorisi **CRng** ile gösterilir. Burada **Obj** tüm birimli değişmeli halkalardır. $A, B \in \mathbf{Obj}$ olmak üzere $\text{Hom}_{\mathbf{CRng}}(A, B)$ ise A dan B ye tüm halka homomorfizmalarıdır.

Tanım 2.8. [6, Tanım 1.1.2] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategorileri verildiğinde, F ile gösterilen $Ob(\mathcal{C})$ den $Ob(\mathcal{C}')$ ye bir fonktor aşağıdakilerden oluşur :

- Bir $F : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C}')$ fonksiyonu ve
- Her $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, bir $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B))$ fonksiyonu, öyleki bu fonksiyonlar aşağıdaki şartları sağlar:

Verilen herhangi bir $A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(id_A) = id_{F(A)}$ ve $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$ ve $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ olmak üzere $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.9. [6, Tanım 1.1.12] $\mathcal{C}$ kategorisi verilsin. Buna göre $\mathcal{C}$ kategorisinin bir alt kategorisi $\mathcal{D}$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\mathbf{Obj}(\mathcal{D}) \subseteq \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$,
- Her $A, B \in \mathcal{D}$ için $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $(1_A)_{\mathcal{D}} = (1_A)_{\mathcal{C}}$. Eğer 2. koşulda eşitlik sağlanırsa $\mathcal{D}$ ye $\mathcal{C}$ nin tam alt kategorisi denir.

Örnek 2.10. **AbGrp** kategorisi **Grp** kategorisinin tam alt kategorisidir.

Tanım 2.11. [6, Tanım 1.1.3] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategorileri ile $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ve $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ functorları verilmiş olsun. Buna göre $\alpha : F \longrightarrow G$ şeklinde gösterilen F den G ye bir α doğal dönüşümü $(\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A))_{A \in \mathcal{C}}$ ailesinden oluşur. Öyleki $A, B \in \mathcal{C}$ ve $f : A \longrightarrow B$ olmak üzere $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$ eşitliği sağlanır. Eğer her $A \in \mathcal{C}$ için α_A bir izomorfizma ise α ya doğal izomorfizma denir.

Tanım 2.12. [6, Tanım 1.1.4] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategorileri ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ fonktörü verilmiş olsun. Buna göre eğer $\alpha : F' \circ F \longrightarrow id_{\mathcal{C}}$ ve $\alpha' : F \circ F' \longrightarrow id_{\mathcal{C}'}$ olacak şekilde $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ fonktörü ile α ve α' doğal izomorfizmaları varsa F ye kategorilerin denkliği adı verilir.

Tanım 2.13. [6, Tanım 1.1.16] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fonktörü verilmiş olsun. Buna göre eğer F fonktörü morfizmalar üzerinde örten ise F ye tam denir. Eğer F morfizmalar üzerinde bire-bir ise F ye bağlı denir. Eğer F hem örten hem birebir ise F ye tam bağlı denir.

Tanım 2.14. [6, Tanım 1.1.17] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fonktörü verilmiş olsun. Buna göre eğer her $X \in Ob(\mathcal{D})$ için $F(A)$ X e izomorf olacak şekilde bir $A \in Ob(\mathcal{C})$ elemanı varsa F ye özde örten denir.

Teorem 2.15. [7, Teorem 1] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fonktörü verilmiş olsun.

Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- i. F kategorilerin denkliğidir.
- ii. F tam bağlı ve özde örtendir.

2.2. MODÜL TEORİSİ: TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.16. [6, Tanım 1.2.2] R bir halka olmak üzere R üzerinde bir sol modül M aşağıdakilerden oluşur:

- Boş olmayan bir küme M ;
- Bir ikili işlem $+$ öyleki $(M, +)$ birim elemanı $0 \in M$ olan değişmeli bir grup;
- $R \times M \longrightarrow M$ bir sol grup etki öyleki; her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ elemanları için;
- $(r + s)m = rm + sm$
- $r(m + n) = rm + rn$
- $(rs)m = r(sm)$
- $1_R m = m$

R halkası üzerinde tanımlı bir sol M modül ${}_R M$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.17. [6, Tanım 1.2.3] R bir halka olmak üzere R üzerinde bir sağ modül M aşağıdakilerden oluşur:

- Boş olmayan bir küme M ;
- Bir ikili işlem $+$ öyleki $(M, +)$ birim elemanı $0 \in M$ olan değişmeli bir grup;
- $M \times R \longrightarrow M$ bir sağ grup etki öyleki; her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ elemanları için;
- $m(r + s) = mr + ms$
- $(m + n)r = mr + nr$
- $m(rs) = (ms)r$
- $m1_R = m$

R halkası üzerinde tanımlı bir sağ M modül M_R şeklinde gösterilir.

Örnek 2.18. Bir R halkası kendisi üzerinde hem sol hem de sağ modüldür. Bu modüle regüler modül de denir.

Örnek 2.19. R nin her sol ideali aynı zamanda bir sol modüldür. Benzer şekilde R nin her sağ ideali aynı zamanda bir sağ modüldür.

Tanım 2.20. [6, Tanım 1.2.6] Bir R halkası ve R üzerinde tanımlı sol modüller M ve N verilsin. Buna göre bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu; her $m, m' \in M$ ve her $r \in R$ için

$$f(m + m') = f(m) + f(m')$$

$$f(rm) = rf(m)$$

koşullarını sağlıyorsa f ye bir modül homomorfizması denir. Sağ modüller için de benzer tanım verilir.

Tanım 2.21. [6, Tanım 1.2.7] Bir R halkası ile R üzerinde tanımlı sol M, N, Z modülleri verilmiş olsun. Buna göre bir $f : M \times N \rightarrow Z$ dönüşümü birinci ve ikinci bileşenlere göre lineer ise f ye bilinear dönüşüm denir.

Tanım 2.22. [6, Tanım 1.2.8] K bir cisim ve K üzerinde tanımlı bir vektör uzayı A olsun. Buna göre eğer A da çarpma olarak adlandırılan bir $A \times A \rightarrow A$ bilinear dönüşümü varsa A ya bir cebir denir.

Tanım 2.23. [6, Tanım 1.2.9] Bir A cebiri ve A -modül M verilmiş olsun. Buna göre M nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine M nin Jacobson radikali denir ve $rad(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.24. [6, Tanım 1.2.10] Değişmeli bir halka R , R üzerinde bir cebir A ve bir A -modül M olsun. Buna göre eğer M nin alt modüllerinden oluşan her $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$ dizisi için $n \geq n_0$ ise $M_n = M_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa M ye artıyen modül denir.

Tanım 2.25. [6, Tanım 1.2.11] Değişmeli bir halka R , R üzerinde bir cebir A olsun. Eğer A regüler modül olarak artıyen ise A ya artıyen cebir denir.

Tanım 2.26. [6, Tanım 1.2.12] A bir artıyen cebir olsun. Buna göre $A/rad(A)$ modülünün her S_1, S_2 basit alt modülleri için $S_1 \cong S_2$ iken $S_1 = S_2$ oluyorsa A ya temel cebir denir.

Tanım 2.27. [6, Tanım 1.2.13] R bir halka olsun. Buna göre $r \in R$ elemanı $r.r = r$ koşulunu sağlıyorsa r ye R nin bir idempotenti denir.

Tanım 2.28. [6, Tanım 1.2.14] R bir halka ve $e_1, e_2 \in R$ iki idempotent olsun. Buna göre eğer $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ ise e_1 ve e_2 ye ortogonal idempotentler denir. $e \neq 0$ bir idempotent olsun. Buna göre her ortogonal idempotentler e_1, e_2 için $e = e_1 + e_2$ iken $e_1 = 0$ ya da $e_2 = 0$ oluyorsa e ye ilkel denir.

Tanım 2.29. [6, Tanım 1.2.15] Sol R modül M ve sağ R modül N verilmiş olsun. Buna göre G değişmeli bir grup olmak üzere $f : M \times N \longrightarrow G$ dönüşümü her $m_1, m_2 \in M, n \in N, r \in R$ için

$$f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$$

$$f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$$

$$f(mr, n) = f(m, rn)$$

özelliklerini sağlıyorsa f ye dengeli dönüşüm denir.

Tanım 2.30. [6, Tanım 1.2.16] M bir sağ R modül, N bir sol R modül, T bir değişmeli grup ve $\tau : M \times N \longrightarrow T$ bir dengeli dönüşüm olsun. Buna göre eğer G bir değişmeli grup ve $\eta : M \times N \longrightarrow G$ bir dengeli dönüşüm olmak üzere $f \circ \tau = \eta$ olacak şekilde tek bir $f : T \longrightarrow G$ grup homomorfizması varsa (T, τ) ya M ile N nin tensör çarpımı denir.

Önerme 2.31. [6, Önerme 1.2.17] M bir sağ R modül ve N bir sol R modül olsun. Buna göre eğer M ve N nin iki tensör çarpımı (G, τ) ve (G', τ') ise $G \cong G'$ dir.

İspat. τ' , R -dengeli olduğundan ve T tensör çarpım olduğundan bir $f : T \longrightarrow T'$ homomorfizması vardır öyleki $\tau' = f \circ \tau$ dir. τ , R -dengeli olduğundan ve T' tensör çarpım olduğundan bir $g : T' \longrightarrow T$ homomorfizması vardır öyleki $\tau = g \circ \tau'$ dir. Böylece $\tau = g \circ f \circ \tau$ ve $\tau' = f \circ g \circ \tau'$ olmak üzere f bir grup izomorfizmasıdır. Dolayısıyla $T \cong T'$ dir. $\square$

Önerme 2.32. [6, Önerme 1.2.18] Herhangi iki sağ R modül M ve sol R modül N verildiğinde M ile N nin tensör çarpımı vardır.

İspat. Bazı $\{e_{m,n} : m \in M, n \in N\}$ olan modül X ile gösterilsin. Y ile X in $e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n}$; $e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'}$ ve $e_{mr,n} - e_{m,rn}$ elemanları tarafından üretilen alt grubu gösterilsin. Burada $m, m' \in M, n, n' \in N$ ve $r \in R$ dir. $\iota : M \times N \longrightarrow X$ kanonik dönüşüm ve $\pi : X \longrightarrow X/Y$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\alpha = \pi \circ \iota$ şeklinde tanımlansın. Buna göre α nın R -dengeli olduğu açıktır. G bir değişmeli grup ve $f : M \times N \longrightarrow G$ bir R -dengeli eşleme olsun. Buna göre $h : X \longrightarrow G$ olacak şekilde $h(e_{m,n}) = f(m, n)$ şeklinde tanımlı ve dolayısıyla $h \circ \iota = f$ eşitliğini sağlayan tek bir h grup homomorfizması vardır. Ayrıca h in tanımında X in üreteçlerinin h in çekirdeğinde olduğunu göstermek kolaydır. Dolayısıyla $p(e_{m,n}) = f(m, n)$ şeklinde tanımlı $p : X/Y \longrightarrow G$ dönüşümü iyi tanımlıdır ve tektir. O halde $p \circ \alpha$ dönüşümü $p \circ \alpha = f$ eşitliğini sağlayan tek türlü bir grup homomorfizmasıdır. Dolayısıyla $(X/Y, p)$, M ve N için bir tensör çarpımdır. $\square$

Tanım 2.33. [6, Tanım 1.2.19] Eğer bir sol R modülü R nin kopyalarının direkt toplamına izomorf ise bu modüle serbest denir.

Önerme 2.34. [6, Önerme 1.2.20] Her sol R modül serbest bir sol R modülün bölümüne izomorftur.

İspat. Üreteci B olan bir modül M olsun. Bazı B olan serbest bir sol R -modül F olmak üzere $f : F \rightarrow M$ dönüşümü $f(b) = b, b \in B$ şeklinde tanımlansın. Buna göre f örtendir ve birinci izomorfizma teoreminden $F/\ker f \cong M$ elde edilir. $\square$

Tanım 2.35. [6, Tanım 1.2.21] M bir sol R modül olsun. Buna göre eğer M nin herhangi bir öz alt modülü yoksa M ye basit denir.

Tanım 2.36. [6, Tanım 1.2.22] M bir sol R modül olsun. Buna göre eğer M basit modüllerin direkt toplamına izomorf ise M ye yarı-basit denir.

Önerme 2.37. [6, Önerme 1.2.23] Bir R halkası verilsin. Buna göre R nin her basit N modülü için R nin öyle bir maksimal M modülü vardır ki $N \cong R/M$ dir. Tersine olarak M , R nin bir maksimal modülü ise R/M , R nin bir basit modülüne izomorftur.

İspat. M bir maksimal ideal ise R/M nin öz alt ideali yoktur. Dahası R/M nin her ideali bir R -modüldür. Dolayısıyla R/M basit bir modüldür. Şimdi de N nin basit bir R -modül olduğu kabul edilsin. Buna göre $0 \neq n \in N$ için $r \mapsto rn$ dönüşümü tanımlanırsa, Rn sıfırdan farklı N nin bir alt modülü olduğundan bu dönüşüm örtendir ve Rn , N yi içerir. Dolayısıyla R nin bir I ideali için $R/I \cong N$ dir. I idealinin maksimal olmadığı kabul edilsin. Buna göre $I \subsetneq J \subsetneq R$ şeklinde R nin bir J ideali vardır. Dolayısıyla $R/I \cong N$ nin bir öz alt ideali olacağından bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla I ideali maksimal olmalıdır. $\square$

Tanım 2.38. [6, Tanım 1.2.24] Bir R halkası verilsin. Buna göre sol R modüllerin kategorisi ${}_R\text{Mod}$ olmak üzere her $M \in \text{Ob}({}_R\text{Mod})$ yarı-basit ise ${}_R\text{Mod}$ ye yarı-basit modül kategorisi denir.

Lemma 2.39. [6, Lemma 1.2.25] M , N_1 ve N_2 sol R modüller olmak üzere $\text{Hom}_R(M, N_1 \oplus N_2) \cong \text{Hom}_R(M, N_1) \oplus \text{Hom}_R(M, N_2)$ dir.

İspat. Eğer $\pi_1 : N_1 \oplus N_2 \longrightarrow N_1$ ve $\pi_2 : N_1 \oplus N_2 \longrightarrow N_2$ izdüşümlerini tanımlarsak $\rho(f) = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f), f \in \text{Hom}_R(M, N_1 \oplus N_2)$ şeklinde tanımlı $\rho : \text{Hom}_R(M, N_1 \oplus N_2) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N_1) \oplus \text{Hom}(M, N_2)$ dönüşümünün bir grup izomorfizması olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Lemma 2.40. [6, Lemma 1.2.26] M_1, M_2 ve N sol R modüller olmak üzere $\text{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N) \cong \text{Hom}_R(M_1, N) \oplus \text{Hom}_R(M_2, N)$ dir.

İspat. Eğer $\iota_1 : M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ ve $\iota_2 : M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ kanonikal dönüşümleri tanımlanırsa $\sigma(f) = (f \circ \iota_1, f \circ \iota_2), f \in \text{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N)$ şeklinde tanımlı $\sigma : \text{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M_1, N) \oplus \text{Hom}(M_2, N)$ dönüşümünün bir grup izomorfizması olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Tanım 2.41. [6, Tanım 1.2.27] Bir R halkası verilsin. Eğer R nin öz-alt ideali yoksa R ye basit halka denir.

Tanım 2.42. [6, Tanım 1.2.28] Bir R halkası verilsin. Eğer R sol regüler modül olarak yarı-basit ise R ye sol yarı-basit halka denir. Benzer şekilde R sağ regüler modül olarak yarı-basit ise R ye sağ yarı-basit halka denir.

Önerme 2.43. [8, Sonuç 3.7] Sol(sağ) yarı-basit halka her zaman sağ(sol) yarı-basittir.

Bu önermenin sonucu olarak sol ya da sağ yarı-basit yerine yarı-basit halka denir.

2.3. MORİTA DENKLİK: TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.44. [6, Tanım 1.3.1] R ve S halkaları verilmiş olsun. Buna göre eğer ${}_R\text{Mod}$ ve ${}_S\text{Mod}$ denk kategoriler ise R ile S ye Morita denktirler denir.

Teorem 2.45. [5, Sonuç 18.42] R ve S halkaları Morita denk olsunlar. Bu durumda halkaların merkezleri izomorfturlar.

Bu teoremin sonucu olarak Morita denk değişmeli halkalar izomorfturlar.

Örnek 2.46. R bir halka ve S , girdileri R nin elemanları olan $n \times n$ matrislerin halkası olsun. Buna göre R ve S halkaları Morita denktirler.

2.4. MORİTA TEORİ

Tanım 2.47. [6, Tanım 1.4.1] M bir sol R modül olmak üzere M nin iz ideali $tr(M)$ ile gösterilir ve $tr(M) = \sum_{f \in Hom_R(M,R)} f(M)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.48. [6, Tanım 1.4.2] Bir R halkası ve sağ R modül P verilsin. Buna göre eğer her $f \in Hom_R(M,N)$; $M, N \in Ob(Mod_R)$ için $Hom_R(P, -)$ fonktoru bağlı ise yani $f \circ g \neq 0$ olacak şekilde en az bir $g \in Hom_R(P,M)$ varsa P ye Mod_R için bir üreteç denir.

Teorem 2.49. [5, Teorem 18.8] Herhangi bir sağ R modül P için aşağıdaki önermeler denktirler:

- i. P bir üreteçtir;
- ii. $tr(P) = R$ dir;
- iii. R , sonlu bir direkt toplam $\bigoplus_i P'$ nin dik toplananıdır.;
- iv. R , bir direkt toplam $\bigoplus_i P'$ nin dik toplananıdır;
- v. Her $M \in Ob(Mod_R)$ modülü bir $\bigoplus_i P$ direkt toplamına izomorftur.

İspat. (i) $\implies$ (ii) Kabul edelim ki $tr(P) \neq R$ olsun. Buna göre izdüşüm dönüşüm $R \longrightarrow R/tr(P)$ sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla bir $g \in Hom_R(P,R)$ için $P \xrightarrow{g} R \longrightarrow R/tr(P)$ sıfırdan farklıdır. Fakat o zaman $gP \neq tr(P)$ olacağından bir çelişki elde edilir.

(ii) $\implies$ (iii) (ii) den dolayı $g_1P + \dots + g_nP = R$ olacak şekilde $g_1, \dots, g_n \in Hom_R(P,R)$ ler vardır. Buna göre $(g_1, \dots, g_n) : P \oplus \dots \oplus P \longrightarrow R$ bir ayrık epimorfizma olacağından istenen elde edilir.

(iii) $\implies$ (iv) Bu önermenin doğru olduğu açıktır.

(iv) $\implies$ (v) Bu önermenin doğruluğu da M , serbest bir modülün örten bir görüntüsü olduğundan açıktır.

(v) $\implies$ (i) Sıfırdan farklı bir homomorfizm $f : M \longrightarrow N$ ve sabit bir örten dönüşüm $\bigoplus_i P_i \longrightarrow M, P_i = P$ olsun. Bu durumda açıkça $\bigoplus_i P_i \longrightarrow M$ sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla bir i için $P_i \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ sıfırdan farklı olacağından istenen elde edilir. $\square$

Tanım 2.50. [6, Tanım 1.4.4] Bir sol R modül P eğer aşağıdaki şartı sağlıyorsa P ye projektif modül denir.

M ve N sol R modüller olmak üzere herhangi bir $f : M \longrightarrow N$ epimorfizması ve $g : P \longrightarrow N$ homomorfizması verildiğinde $g = f \circ \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma : P \longrightarrow M$ homomorfizması vardır.

Tanım 2.51. [6, Tanım 1.4.5] R bir halka ve P bir sol R modül olsun. Buna göre eğer P sonlu üretilmiş projektif bir modül ise P ye ön-üreteç denir.

Tanım 2.52. [6, Tanım 1.4.6] R bir halka ve $e \in R$ bir idempotent olsun. Buna göre eğer $ReR = R$ ise yani e tarafından üretilen ideal tüm halkaya eşit ise e ye tam idempotent denir.

Örnek 2.53. Tam-idempotente örnek olarak $e = E_{kk} \in E_n(R)$, $1 \leq k \leq n$ verilebilir.

Tanım 2.54. [6, Tanım 1.4.8] R ve S halkaları verilmiş olsun. Buna göre bir (R, S) bimodül M aşağıdaki özellikleri sağlayan bir değişmeli gruptur:

- M sol R modül ve sağ S modüldür;
- Her $r \in R, s \in S$ ve $m \in M$ için $(rm)s = r(ms)$ dir.

(R, S) bimodül M kısaca ${}_R M_S$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.55. R halkası çarpma işlemine göre bir (R, R) bimodüldür.

Örnek 2.56. $E_{mn}(R)$ değişmeli grubu bir $(E_m(R), E_n(R))$ bimodüldür.

Tanım 2.57. [6, Tanım 1.4.12] M ve N (R, S) bimodüller olmak üzere eğer $f : M \rightarrow N$ dönüşümü sol ve sağ modül homomorfizması ise f ye bimodül homomorfizması denir.

Önerme 2.58. [6, Önerme 1.4.13] (R, S) bimodül M ve sol S modül N olsun. Buna göre $M_S \otimes N$ bir sol R modüldür.

Önerme 2.59. [6, Önerme 1.4.14] (R, S) bimodül M ve (S, T) bimodül N olsun. Buna göre $M_S \otimes N$ bir (R, T) bimodüldür.

İspat. Biliyoruz ki $M \otimes_R N$ nin her elemanı $\sum_i m_i \otimes n_i$ şeklinde sonlu bir toplam olarak ifade edilebilir. Buna göre $r(\sum_i m_i \otimes n_i) = \sum_i (rm_i) \otimes n_i$ olarak tanımlanırsa $M \otimes_R N$ nin bir sol R -modül olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Tanım 2.60. [6, Tanım 1.4.15] M bir sol R modül olsun. Buna göre M den M ye tüm homomorfizmaların kümesi toplama ve bileşke işlemleriyle bir halka belirtir. Bu halkaya endomorfizma halkası denir ve $End_R(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.61. [6, Tanım 1.4.16] M bir (R, S) bimodül olsun. Buna göre $\varphi_M : R \rightarrow End({}_R M)$ ve $\lambda_M : R \rightarrow End(M_S)$ halka homomorfizmaları birer izomorfizma ise M ye bağlı dengeli denir. Burada $r \in R, s \in S$ ve $m \in M$ olmak üzere $\varphi_M(r)(m) = r.m$ ve $\lambda_M(s)(m) = m.s$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.62. [6, s.485] P ve Q modülleri verilmiş olsun. Eğer her $p, p' \in P$ ve $q \in Q$ elemanları için $(pq)p' = p(qp')$ yazılabiliyorsa P ve Q modüllerine PQP -birleşmeli denir.

Lemma 2.63. [5, Lemma 18.15] R bir halka ve P bir sağ R modül olsun. Ayrıca $S = \text{End}(P)$ olmak üzere P aynı zamanda bir sol S modül olacağından P bir (S, R) bimodüldür. Benzer şekilde $Q = \text{End}(P, R)$ olmak üzere Q bir (R, S) bimodül olur. Buna göre:

- i. $(q, p) \mapsto qp$ dönüşümü $\alpha : Q \otimes_S P \rightarrow R$ şeklinde bir (R, R) bimodül homomorfizması tanımlar.
- ii. $(p, q) \mapsto pq$ dönüşümü $\beta : P \otimes_R Q \rightarrow S$ şeklinde bir (S, S) bimodül homomorfizması tanımlar.

İspat. PSQ -birleşmeli olduğundan α iyi tanımlıdır. Dahası RPQ ve PQR -birleşmeli olduğundan α bir (R, R) -bimodül homomorfizmasıdır. Benzer şekilde QRP -birleşmeli olduğundan β iyi tanımlıdır. Dahası SQP ve QPS -birleşmeli olduğundan α bir (S, S) -bimodül homomorfizmasıdır. $\square$

Tanım 2.64 (Morita kontekst). P bir sağ R modül olmak üzere $(R, P, Q, S, \alpha, \beta)$ sıralı altılısına P_R ile bağlantılı Morita kontekst denir.

Verilen bir Morita kontekst için aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 2.65. [5, Lemma 18.17] 1- P_R nin üreteç olması için gerek ve yeter şart α nın örten olmasıdır.

2-Eğer P_R bir üreteç ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (a) $\alpha : Q \otimes_S P \rightarrow R$ bir (R, R) bimodül izomorfizmasıdır.
- (b) (R, S) bimodülleri Q ve $\text{Hom}_S({}_S P, {}_S S)$ izomorfurlar.
- (c) (S, R) bimodülleri P ve $\text{Hom}_S(Q_S, S_S)$ izomorfurlar.
- (d) $R, \text{End}({}_S P)$ ve $\text{End}(Q_S)$ halkaları izomorfurlar.

İspat. (1)- $\text{im}(\alpha) = \text{tr}(P_R)$ olduğundan önermenin doğruluğu açıktır.

(2)- P_R bir üreteç olsun. Buna göre $1_R = \sum q_i p_i$ dir. (2a) nın doğruluğunu göstermek için $0 = \alpha(\sum_j q'_j \otimes p'_j) = \sum_j q'_j p'_j$ olmak üzere $\sum_j q'_j \otimes p'_j = 0$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(2b) nin doğru olduğunu göstermek için $p \cdot \lambda(q) = pq \in S$ şeklinde $\lambda : Q \rightarrow \text{Hom}_S({}_S P, {}_S S)$ dönüşümü tanımlansın. SPQ -birleşmeli olduğundan $\lambda(q) \in \text{Hom}_S(P, S)$ dir. Dahası RPQ ve PQS -birleşmeli olduğundan λ bir (R, S) -homomorfizmadır. Ayrıca λ nın bire-bir ve örten olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (2c) nin doğruluğu da benzer şekilde gösterilebilir. (2d) nin doğru olduğunu göstermek için $p \cdot \sigma(r) = pr$ ve $\tau(r) \cdot q = rq$ şeklinde sırasıyla $\sigma : R \rightarrow \text{End}({}_S P)$ ve $\tau : R \rightarrow \text{End}(Q_S)$ halka homomorfizmaları tanımlanırsa σ ve τ lerin izomorfizma oldukları kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Önerme 2.66. [5, Lemma 18.19] 1- P_R nin sonlu üretilmiş ve projektif olması için gerek ve yeter şart β nin örten olmasıdır.

2- Eğer P_R sonlu üretilmiş ve projektif ise:

- (a) $\beta : P \otimes_R Q \longrightarrow S$ bir (S, S) bimodül izomorfizmasıdır.
- (b) (R, S) bimodülleri Q ve $\text{Hom}_R(P_R, R_R)$ izomorfturlar.
- (c) (S, R) bimodülleri P ve $\text{Hom}_R(RQ, R)$ izomorfturlar.
- (d) $S, \text{End}(P_R)$ ve $\text{End}(RQ)$ halkaları izomorfturlar.

İspat. β nin örten olması için gerek ve yeter şart $1_S = \sum p_k'' q_k''$ olmasıdır. Buna göre her $p \in P$ için, $p = (\sum p_k'' q_k'')p = \sum p_k'' (q_k'' p)$ dir. Dolayısıyla İkili Taban Lemmasından (Dual Basis Lemma) P_R sonlu üretilmiş projektif bir modüldür. (2) nin ispatı yukarıdakine benzer şekilde yapılır. $\square$

Sonuç 2.67. [5, Sonuç 18.21] P_R ön-üreteç ise ${}_S P_R$ ve ${}_R Q_S$ bağlı dengeli bimodüllerdir.

Önerme 2.68. P_R ön-üreteç ise ${}_S P, Q_S$ ve ${}_R Q$ da ön-üreteçlerdir.

İspat. $\text{Hom}_S(Q_S, S_S) \cong P$ ve $\text{End}(Q_S) \cong R$ dir. Ayrıca α ve β örten olduklarından Q_S ön-üreteçtir. Diğer kısımlarda benzer şekilde gösterilir. $\square$

Teorem 2.69. [5, Teorem 18.24] P_R bir ön-üreteç ve P_R ile ilişkili Morita kontekst $(R, P, Q, S, \alpha, \beta)$ olsun. Buna göre

- i. $-\otimes_R Q : \text{Cat}_R \longrightarrow \text{Cat}_S$ ve $-\otimes_S P : \text{Cat}_S \longrightarrow \text{Cat}_R$ karşılıklı ters kategori denkliklerdir.
- ii. $P \otimes_R - : {}_R \text{Cat} \longrightarrow {}_S \text{Cat}$ ve $Q \otimes_S - : {}_S \text{Cat} \longrightarrow {}_R \text{Cat}$ karşılıklı ters kategori denkliklerdir.

İspat. Herhangi bir U_R için $(U \otimes_R Q) \otimes_S P \cong U \otimes_R (Q \otimes_S P) \cong U \otimes_R R \cong U$ elde edilir. Benzer şekilde herhangi bir V_S için $(V \otimes_S P) \otimes_R Q \cong V$ elde edilir. (2) nin ispatı benzer şekilde yapılır. $\square$

Teorem 2.70. [5, Teorem 18.26] R ve S iki halka $F : \text{Cat}_R \longrightarrow \text{Cat}_S$ ve $G : \text{Cat}_S \longrightarrow \text{Cat}_R$ karşılıklı ters kategori denklikler olsunlar. Buna göre $Q = F(R_R)$ ve $P = G(S_S)$ olmak üzere ${}_S P_R$ ve ${}_R Q_S$ yazılabilir. Dahası $F \cong - \otimes_R Q$ ve $G \cong \otimes_S P$ dir.

İspat. $P \in \mathcal{M}_R$ ve $S \in \mathcal{M}_S$ olmak üzere $\text{End}(P_R) \cong \text{End}(S_S) \cong S$ dir. Dolayısıyla P bir ${}_S P_R$ modül olarak düşünülebilir. Benzer şekilde Q bir ${}_R Q_S$ modül olarak düşünülebilir. Ayrıca $S_S, \mathcal{M}_S$ için bir ön-üreteç ve $P_R, \mathcal{M}_R$ için bir ön-üreteçtir. Dahası P nin R -duali $\text{Hom}_R(P, R) \cong \text{Hom}_S(F(P), F(R)) \cong \text{Hom}_S(S_S, Q_S) \cong Q$ olarak hesaplanır. Buna göre P_R ile ilişkili Morita kontekst $(R, P, Q, S, \alpha, \beta)$ dır. Dolayısıyla $F \cong \text{Hom}_R(P_R, -) \cong - \otimes_R Q$ ve benzer şekilde $G \cong \text{Hom}_S(Q_S, -) \cong - \otimes_S P$ elde edilir. $\square$

Tanım 2.71. [6, Tanım 1.4.23] (S, R) bimodül P olsun. Buna göre eğer P_R ön-üreteç ve ${}_S P_R$ bağlı dengeli bimodül ise P ye (S, R) ön-üreteç denir.

Teorem 2.72. [5, Teorem 18.28] R ve S halkaları verilsin. Buna göre $Cat_S \longrightarrow Cat_R$ kategori denkliklerin izomorf sınıfı ile (S, R) ön-üreteçlerin izomorf sınıfı arasında bire-bir eşleme vardır.

İspat. Her (S, R) -pro-üreteç ${}_S P_R$ için bir $-\otimes_S P : \mathcal{M}_S \longrightarrow \mathcal{M}_R$ denkliği vardır. Tersine olarak eğer $G : \mathcal{M}_S \longrightarrow \mathcal{M}_R$ bir denklik ise $P := G(S_S)$ bir (S, R) ön-üreteçtir.

Eğer ${}_R P'_T$ bir (R, T) ön-üreteç ise $\mathcal{M}_S \longrightarrow \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_T$ çarpımı $-\otimes_S (P \otimes_R P')$ ile tanımlanır. Böylece ikinci kısım da ispatlanmış olur. $\square$

2.5. MORİTA TEOREMLERİNİN SONUÇLARI

Önerme 2.73. [5, Önerme 18.32] Cat_R ve Cat_S Morita denk ise ${}_R Cat$ ve ${}_S Cat$ da Morita denktir.

Önerme 2.74. [5, Önerme 18.33] R ve S halkaları verilmiş olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler denktir.

- i. $R \approx S$.
- ii. P_R, Cat_R nin bir ön üretici olmak üzere $S \cong End(P_R)$ dir.
- iii. $e \in M_n(R)$ bir tam idempotent olmak üzere $S \cong eM_n(R)e$ dir.

İspat. (3) $\implies$ (1) Eğer $S \cong eM_n(R)e$ ise $S \approx M_n(R)$ dir.

(1) $\implies$ (2) Teorem 2.85 den elde edilir.

(2) $\implies$ (3) $R^n = P \oplus P'$ ve $e \in M_n(R)$, R^n nin P üzerine izdüşümü olsun. Buna göre $tr(P) = R$ olduğundan $e, M_n(R)$ de bir tam-idempotenttir. Dolayısıyla $\lambda(f)|_P = f, \lambda(f)|_{P'} = 0$ şeklinde tanımlı $\lambda : End(P_R) \longrightarrow e.End(R^n).e = eM_n(R)e$ dönüşümü bir izomorfizma olduğundan istenen elde edilir. $\square$

Sonuç 2.75. [5, Sonuç 18.35] Halkalar üzerindeki bir $\mathcal{P}$ özelliğinin Morita değişmez olması için gerek ve yeter şart R halkası $\mathcal{P}$ özelliğini sağlıyorsa eRe veya $E_n(R), n \geq 2$ halkalarının da $\mathcal{P}$ özelliğini sağlamasıdır. Burada $e \in R$ bir tam idempotenttir.

Sonuç 2.76. [5, Sonuç 18.36] R bir halka ve R üzerinde tanımlı tüm sonlu üretilmiş projektif sağ modüller serbest olsun. Buna göre $S \approx R$ olması için gerek ve yeter şart $S \cong M_n(R)$ olacak şekilde bir n sayısının olmasıdır.

Lemma 2.77. [5, Lemma 18.41] ${}_A M_B$ bağılı dengeli (A, B) bimodül olsun. Buna göre $Z(A) \cong Z(B)$ dir.

İspat. $f : Z(A) \longrightarrow E$ dönüşümü $f(z)(m) = zm, z \in Z(A), m \in M$ şeklinde tanımlanırsa $f(z) \in E$ dir. Ayrıca f nin bir halka homomorfizması olduğunu göstermek kolaydır. Dahası ${}_A M_B$ bağılı dengeli modül olduğundan f bir izomorfizmadır. Benzer şekilde $g : Z(B) \longrightarrow E$ izomorfizması tanımlanabileceğinden istenen elde edilir. $\square$

Sonuç 2.78. [5, Sonuç 18.42] $R \approx_M S$ ise $Z(R) \cong Z(S)$.

Önerme 2.79. [5, Önerme 18.44] R halkası ve P_R ön-üretec verilsin. Buna göre P_R ile ilgili Morita kontekst $(R, P, Q, S, \alpha, \beta)$ olmak üzere S nin sağ ideallerinin kafesi P_R nin sağ modüllerinin kafesine izomorftur. Dahası

- i. R nin ideallerinin kafesi,
- ii. S nin ideallerinin kafesi,
- iii. ${}_S P_R$ nin (S, R) alt modüllerinin kafesi ve
- iv. ${}_R Q_S$ nin (R, S) alt modüllerinin kafesi izomorfturlar.

İspat. $S \in \mathcal{M}_S$ olmak üzere $S \otimes_S P \cong P \in \mathcal{M}_R$ dir. $\mathcal{B} \subseteq S$ sağ ideal olmak üzere $\mathcal{B} \otimes_S P \cong \mathcal{B}P \subseteq P$ dir. Dahası $\mathcal{B}$ nin ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{B}P$ nin P nin bir (S, R) -altmodülü olmasıdır. Bu ifadenin yeter şart kısmı açıktır. Gerek şart kısmını göstermek için $\mathcal{B}P$ nin P nin bir (S, R) -altmodülü olduğu kabul edilsin. Buna göre $s \in S$ için $s\mathcal{B}P \subseteq \mathcal{B}P$ ve $s\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ bir idealdir. Buna göre $P \otimes_R - : {}_R \mathcal{M} \longrightarrow_S \mathcal{M}$ olmak üzere (1) ile (3) arasında bir izomorfizma elde edilir. $\square$

Sonuç 2.80. [5, Sonuç 18.45] R halkasının nilpotent, asal ve yarı-asal idealleri ile S halkasının nilpotent, asal ve yarı-asal idealleri izomorfturlar.

3. LEAVITT YOL CEBİRLERİ

Bu bölüm sırasıyla Leavitt Yol Cebirleri, Leavitt Yol Cebiri Örnekleri, Cohn Yol Cebirleri, Leavitt Yol Cebirlerinde Yönlü Limitler, İdealler, $\mathbb{Z}$ -Derece ve Morita Denk Leavitt Yol Cebirleri olmak üzere yedi alt bölümden oluşmaktadır. Birinci kısımda Leavitt yol cebirleri tanıtılmış ve Leavitt yol cebirlerinin lokal birimli halka oldukları vurgulanmıştır. İkinci kısımda literatürde sıklıkla karşılaşılan çizgelere ve bunlar üzerinde tanımlı Leavitt yol cebirlerinin özelliklerine değinilmiştir. Üçüncü kısımda Cohn yol cebirlerine ve bunların Leavitt yol cebirleriyle olan ilişkisine değinilmiştir. Dördüncü kısımda Leavitt yol cebirlerinde yönlü limitler konusuna değinilip bazı örnekler verilmiştir. Beşinci kısımda Leavitt yol cebirlerinde idealler konusuna kısaca giriş yapılmış ve bazı önemli sonuçlara yer verilmiştir. Altıncı kısımda Leavitt yol cebirlerinde derece konusuna değinilmiş ve son olarak Morita denk Leavitt yol cebiri üreten çizge örnekleri verilmiştir. Bu bölümde [1, 9–11] kaynaklarından yararlanılmıştır. Gerekli görülen teoremlerin ispatları verilmiştir. İspatları verilmeyen teoremlerin ispatları ve daha ayrıntılı bilgi için ek olarak [12–14] kaynaklarına bakılabilir.

Bu bölümde yönlü çizgeler kısaca E ile gösterilecektir. Ayrıca herhangi bir yönlü E çizgesi üzerinde tanımlı Leavitt yol cebiri $L_K(E)$ ile gösterilecektir. Burada K herhangi bir cisimdir.

Tanım 3.1. [10, s.1] R bir halka olsun. Buna göre R^m ve R^n serbest sol R modüllerinin izomorf olması $m = n$ olmasını gerektiriyorsa R ye *IBN*(Değişmez Taban Sayısı) özelliğine sahiptir denir.

Tanım 3.2. [10, Tanım 1.1.1] Verilen bir R halkası ve $m < n$ doğal sayıları için $R^m \cong R^n$ ve $1 < k < m$ olmak üzere $R^m \not\cong R^k$ ise R halkasına (m, n) tipinde *IBN* özelliğini sağlamayan halka denir.

Teorem 3.3. [10, Teorem 1.1.2] Her (m, n) pozitif tam sayı çifti ve K cismi için aşağıdaki özellikleri sağlayan K - cebir izomorfizmasına göre tek bir $L_K(m, n)$ birimli K -cebiri vardır:

- i. $L_K(m, n)$ cebiri (m, n) modül tipine sahiptir ve
- ii. (m, n) modül tipine sahip herhangi bir K -cebiri A olmak üzere belirli koşulları sağlayan bir $\phi : L_K(m, n) \longrightarrow A$, K - cebir homomorfizması vardır.

Tanım 3.4. [10, Tanım 1.1.3] K herhangi bir cisim ve $n > 1$ herhangi bir tam sayı olsun. Buna göre $(1, n)$ tipindeki Leavitt K -cebiri $L_K(1, n)$ ile gösterilir ve

$$K \langle X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle / \langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - 1, X_i Y_j - \delta_{ij} 1 \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.5. [10, Teorem 1.1.4] Herhangi bir K cismi için $n \geq 2$ olmak üzere $L_K(1, n)$ Leavitt K -cebiri basittir.

Tanım 3.6. [10, Tanım 1.2.2] Bir yönlü çizge $E = (E^0, E^1, r, s)$ iki küme E^0, E^1 ve iki fonksiyondan $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$ oluşur. E^0 in elemanlarına köşeler E^1 in elemanlarına da kenarlar denir.

Tanım 3.7. [10, s.4] Bir E çizgesi verildiğinde her $v \in E^0$ için $s^{-1}(v)$ kümesi sonlu ise E ye sıra-sonlu denir. Bir $v \in E^0$ için $s^{-1}(v) = \emptyset$ ise v ye bataklık denir. Eğer $r^{-1}(v) = \emptyset$ ise v ye kaynak denir. Aynı zamanda bataklık ve kaynak olan bir v köşesine izole denir. Eğer $|s^{-1}(v)|$ sonsuz ise v ye sonsuz yayan denir. Eğer v bataklık ya da sonsuz yayan ise v ye singüler aksi halde regüler denir.

Tanım 3.8. [10, s.4] E çizgesinde bir μ yolu $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ şeklinde kenarların bir dizisidir. Burada $r(e_i) = s(e_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1$ dir. Burada μ yolunun kaynağı ve hedefi sırasıyla $s(\mu) = s(e_1)$ ve $r(\mu) = r(e_n)$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca μ yolunun uzunluğu $n = \ell(\mu)$ veya $n = |\mu|$ şeklinde gösterilir. Bir μ yolu $e_1 e_2 \dots e_n$ şeklinde gösterilir. Köşeler uzunluğu sıfır olan yollar olarak ele alınır. Bir $v \in E^0$ için $s(v) = r(v) = v$ şeklinde tanımlanır. Bir $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ yolu için μ yolunun köşelerinin kümesi $\mu^0 = \{s(e_i), r(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $n \geq 2$ olmak üzere E^n ile E çizgesinde uzunluğu n olan tüm yolların kümesi ifade edilir ve $Path(E) = \bigcup_{n \geq 0} E^n$ ile E deki tüm yolların kümesi gösterilir.

Tanım 3.9. [10, Tanım 1.2.3] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Ayrıca $(E^1)^* = \{e^* | e \in E^1\}$ olsun. Buna göre katsayıları K nın elemanları olan E üzerindeki Leavitt yol cebiri aşağıdaki bağıntıları sağlayan ve $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli bir K -cebiri dir:

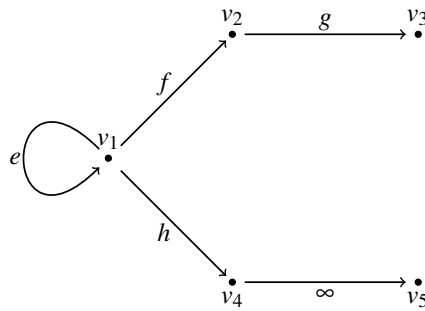
- (V) her $v, v' \in E^0$ için $vv' = \delta_{v,v'}v$,
- (E1) her $e \in E^1$ için $s(e)e = er(e) = e$,
- (E2) her $e \in E^1$ için $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$,
- (CK1) her $e, e' \in E^1$ için $e^*e' = \delta_{e,e'}r(e)$,
- (CK2) her regüler $v \in E^0$ köşesi için $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$.

Tanım 3.10. [10, Hatırlatma 1.2.5] E bir çizge ve A bir K -cebir olsun. Öyleki A aşağıdaki şartları sağlayan ortogonal idempotentlerden oluşan $\{a_v | v \in E^0\}$ kümesi ile $\{a_e | e \in E^1\}$ ve $\{b_e | e \in E^1\}$ kümelerini içersin.

- Her $e \in E^1$ için $a_{s(e)}a_e = a_ea_{r(e)} = a_e$ ve $a_{r(e)}b_e = b_ea_{s(e)} = b_e$,
- Her $e, f \in E^1$ için $b_fa_e = \delta_{e,f}a_{r(e)}$ ve
- Her regüler $v \in E^0$ köşesi için $a_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e$.

Buna göre A ya bir E -aile denir ve bu durumda bir $L_K(E) \rightarrow A$ K -cebir homomorfizması vardır öyleki $v \mapsto a_v$, $e \mapsto a_e$ ve $e^* \mapsto b_e$ dir. Bu duruma Leavitt yol cebirlerinin evrensel özelliği de denir.

Örnek 3.11. [10, Örnek 1.2.8]



Şekil 3.1. E.

Aşağıda $L_K(E)$ de bazı işlemler verilmiştir.

$$v_1 f = f = f v_2 \text{ (E1).}$$

$$v_2 f^* = f^* = f^* v_1 \text{ (E2).}$$

$$f^* f = v_2, f^* h = f^* e = 0 \text{ (CK1).}$$

$$v_1 = e e^* + f f^* + h h^*, v_2 = g g^* \text{ (CK2).}$$

v_4 köşesi sonsuz yayan, v_3, v_5 köşeleri de bataklık olduklarından bu köşelerde (CK2) tanımlı değildir.

Tanım 3.12. [10, Tanım 1.2.10] Birleşmeli bir halka R için idempotent elemanlardan oluşan bir $F \subseteq R$ kümesine aşağıdaki şartı sağlaması durumunda lokal birimlerin kümesi denir.

R nin sonlu her $\{r_1, \dots, r_n\}$ alt kümesi için $fr_i f = r_i$, her $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde $f \in F$ vardır. Diğer bir ifadeyle R nin herhangi bir N sonlu alt kümesi için $N \subseteq fRf$ olacak şekilde bir $f \in F$ vardır. Eğer ${}_R R = \bigoplus_{e \in E} Re$ olacak şekilde R nin ortogonal idempotentlerden oluşan bir E alt kümesi varsa R ye yeterli idempotentte sahiptir denir.

Lemma 3.13. [10, Lemma 1.2.12] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $\gamma, \lambda, \mu, \rho \in \text{Path}(E)$ olmak üzere;

$$i. (\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \begin{cases} \gamma\kappa\rho^* & \text{if } \mu = \lambda\kappa, \kappa \in \text{Path}(E) \\ \gamma\sigma^*\rho^* & \text{if } \lambda = \mu\sigma, \sigma \in \text{Path}(E) \\ 0 & \end{cases}$$

dir. Özel olarak eğer $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ ise $\lambda^*\mu \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda = \mu$ olmasıdır. Bu durumda $\lambda^*\mu = r(\lambda)$ dir.

ii. $L_K(E)$ üzerindeki K -etki sıradandır. Yani $k, k' \in K$ olmak üzere $(k\gamma\lambda^*)(k'\mu\rho^*) = kk'(\gamma\lambda^*\mu\rho^*)$ dir.

iii. $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri bir K -vektör uzayı olarak $\{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in \text{Path}(E), r(\gamma) = r(\lambda)\}$ formundaki tek-terimlilerden oluşur. Yani her $x \in L_K(E)$ elemanı $x = \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \lambda_i^*$ şeklindedir. Burada $k_i \in K^\times, \gamma_i, \lambda_i \in \text{Path}(E)$ öyleki her $1 \leq i \leq n$ için $r(\gamma_i) = r(\lambda_i)$ dir.

iv. $L_K(E)$ nin birimli olması için gerek ve yeter şart E^0 ın sonlu olmasıdır. Bu durumda $1_{L_K(E)} = \sum_{v \in E^0} v$ dir.

v. Her $\alpha \in L_K(E)$ için öyle bir sonlu $V(\alpha)$ kümesi vardır ki $f = \sum_{v \in V(\alpha)} v$ olmak üzere $f\alpha f = \alpha$ dir. Dahası $L_K(E)$ bir yeterli lokal idempotent halkadır.

İspat. i. (CK1) den dolayı $e^*f \in L_K(E)$ ifadesi ya sıfıra eşittir ya da $r(e)$ köşesine. Buradan istenen sonuç elde edilir.

ii. $L_K(E)$ nin tanımından açıktır.

iii. (i) den elde edilir.

iv. Eğer E^0 sonlu ise ispat açıktır. Eğer E^0 sonsuz ise $L_K(E)$ de birim eleman yoktur.

v. $L_K(E)$ deki farklı köşelerin toplamının idempotent olacağı açıktır. Şimdi $\alpha =$

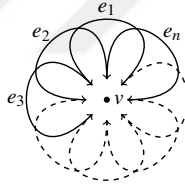
$\sum_{i=1}^m k_i \gamma_i \lambda_i^* \in L_K(E)$ herhangi bir eleman olmak üzere $V(\alpha)$ ile α üzerindeki köşelerin kümesi gösterilsin. Buna göre eğer $f = \sum_{v \in V(\alpha)} v$ olarak tanımlanırsa $\alpha = f\alpha f$ şeklinde istenen elde edilir. $\square$

Tanım 3.14. [10, Tanım 1.2.13] Bir E çizgesi verilsin. Buna göre $\hat{E} = E^1 \cup (E^1)^*$ olmak üzere eğer herhangi iki $u, v \in E^0$ köşeleri için $\eta = h_1 h_2 \dots h_m$ olmak üzere $s(\eta) = u$ ve $r(\eta) = v$ olacak şekilde $h_1, h_2, \dots, h_m \in \hat{E}$ kenarları varsa E ne bağlıdır denir. E nin bağlı bileşenleri $\{E_i\}_{i \in \Lambda}$ çizgeleridir. Öyleki E çizgesi $E = \sqcup_{i \in \Lambda} E_i$ şeklinde E_i bağlı çizgelerinin ayrık bileşimi olarak yazılabilir.

Önerme 3.15. [10, Önerme 1.2.14] Herhangi E çizgesi ve K cismi verilmiş olsun. Buna göre E nin bağlı bileşenleri cinsinden ifadesi $E = \sqcup_{i \in \Lambda} E_i$ olmak üzere $L_K(E) \cong \bigoplus_{i \in \Lambda} L_K(E_i)$ dir.

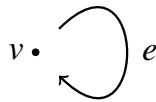
3.1. LEAVITT YOL CEBİRİ ÖRNEKLERİ

Örnek 3.16. [10, Gösterim 1.3.1] R_n ile 1 tane köşe ve n tane bukleden oluşan çizge gösterilir.



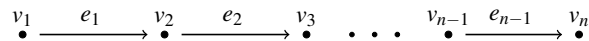
Şekil 3.2. R_n .

Aşağıdaki R_1 çizgesi teoride önemli bir rol oynar.



Şekil 3.3. R_1 .

A_n ile n köşeden ve $n - 1$ kenardan oluşan çizge gösterilir.



Şekil 3.4. E_1 .

Önerme 3.17. [10, Önerme 1.3.2] Herhangi bir pozitif tam sayı $n \geq 2$ ve herhangi bir cisim K olmak üzere $L_K(1, n) \cong L_K(R_n)$ dir.

Tanım 3.18. [10, s.8] Herhangi bir K cismi için Laurent polinomu $xy = yx = 1$ bağıntısını sağlayan x ve y sembolleri tarafından üretilen K -cebiri $K[x, x^{-1}]$ ile gösterilir.

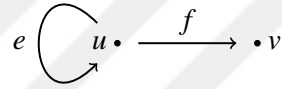
Önerme 3.19. [10, Önerme 1.3.4] K herhangi bir cisim olmak üzere $K[x, x^{-1}] \cong L_K(R_1)$ dir.

İspat. (CK1) koşulundan dolayı $L_K(R_1)$ de $e^*e = v = 1$ elde edilir. Ayrıca v den çıkan tek kenar e olduğundan (CK2) den $L_K(R_1)$ de $ee^* = 1$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.20. [10, Önerme 1.3.5] K herhangi bir cisim ve $n \geq 1$ herhangi bir pozitif tam sayı olsun. Buna göre $M_n(K) \cong L_K(A_n)$ dir.

İspat. $\{f_{i,j} | 1 \leq i, j \leq n\}$ ile $M_n(K)$ daki standart matris birimleri gösterilsin. Buna göre $\varphi : L_K(A_n) \longrightarrow M_n(K)$ dönüşümü $\varphi(v_i) = f_{i,i}, \varphi(e_i) = f_{i,i+1}$ şeklinde tanımlanırsa φ nin bir K -cebir izomorfizması olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Örnek 3.21. [10, Örnek 1.3.6] Aşağıdaki çizgeye Toeplitz çizgesi denir ve E_T ile gösterilir.



Şekil 3.5. E_T .

Önerme 3.22. [10, Önerme 1.3.7] K herhangi bir cisim olmak üzere Leavitt yol cebiri $L_K(E_T)$, birleşmeli $K \langle x, y \rangle / \langle 1 - xy \rangle$ K -cebirine izomorftur.

İspat. $L_K(E_T)$ de $ee^* + ff^* = u$ ve $u + v = 1$ dir. Şimdi $L_K(E_T)$ nin $X = e^* + f^*$ ve $Y = e + f$ elemanları ele alınsın. Buna göre (CK1) ve (CK2) koşullarından $XY = u + v = 1, YX = ee^* + ff^* = u \neq 1$ dir. Ayrıca $L_K(E_T)$ nin X ve Y tarafından üretilen altcebiri $1 - u = v$ yi içerir. Dolayısıyla bu altcebir $e = Yu, f = Yv, e^* = uX$ ve $f^* = vX$ elemanlarını da içerir. Buna göre $\varphi : K \langle U, V \rangle \longrightarrow L_K(E_T)$ dönüşümü $\varphi(U) = e^* + f^*, \varphi(V) = e + f$ olmak üzere φ bir K -cebir izomorfizmasıdır. $\square$

3.2. COHN YOL CEBİRLERİ

Tanım 3.23. [10, Tanım 1.5.1] Herhangi bir çizge E ve herhangi bir cisim K olsun. Buna göre $(E^1)^* = \{e^* | e \in E^1\}$ olmak üzere katsayıları K dan olan E nin Cohn yol cebiri $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ kümesi tarafından üretilen ve (V), (E1), (E2), (CK1) bağıntılarını sağlayan birleşmeli bir K -cebiridir.

Önerme 3.24. [10, Önerme 1.5.5] Herhangi bir çizge E ve herhangi bir cisim K olsun. Buna göre eğer Cohn yol cebiri $C_K(E)$ nin $\{v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* | v \in \text{Reg}(E)\}$ kümesi tarafından üretilen ideali I ile gösterilirse $L_K(E) \cong C_K(E)/I$ elde edilir.

Önerme 3.25. [10, Önerme 1.5.6] Herhangi bir çizge E ve herhangi bir cisim K olsun. Buna göre $\mathfrak{B} = \{\lambda\gamma^* | \lambda, \gamma \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\gamma)\}$ kümesi $C_K(E)$ için bir K -bazıdır.

İspat. A , bazı $\mathfrak{B}$ olan bir K -vektör uzayı olsun ve A üzerinde bilineer bir çarpım aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(\lambda_1\gamma_1^*)(\lambda_2\gamma_2^*) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2'\gamma_2^* & \text{eğer, } \lambda_2 = \gamma_1\lambda_2', \lambda_2' \in \text{Path}(E) \\ \lambda_1(\gamma_1')^*\gamma_2^* & \text{eğer, } \gamma_1 = \lambda_2\gamma_1', \gamma_1' \in \text{Path}(E) \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu çarpımın A üzerinde birleşmeli bir K -cebiri yapıyor olduğunu göstermek için $x = y$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada $x = (\lambda_1\gamma_1^*)(\lambda_2\gamma_2^*)(\lambda_3\gamma_3^*)$ ve $y = [(\lambda_1\gamma_1^*)(\lambda_2\gamma_2^*)](\lambda_3\gamma_3^*)$ dir. $\square$

Önerme 3.26. [10, Önerme 1.5.8] Eğer $v \in \text{Reg}(E)$ olmak üzere $q_v = v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$ olarak tanımlanırsa q_v ler $C_K(E)$ nin idempotentleridir. Dahası her $v, w \in \text{Reg}(E)$ için $q_v C_K(E) q_w = \delta_{v,w} q_v K$ dir.

İspat. Basit bir hesapla $\{q_v | v \in \text{Reg}(E)\}$ kümesinin $C_K(E)$ de ortogonal idempotentlerden oluştuğu gösterilebilir. Buna göre $v \in E^0$ ve $f \in E^1$ olmak üzere eğer $f \notin s^{-1}(v)$ ise her $e \in s^{-1}(v)$ için $e^*f = 0$ dir. Eğer $f \in s^{-1}(v)$ ise $e \neq f$ için $ee^*f = 0$ ve $e = f$ için $ff^*f = f$ elde edilir. Buna göre her $f \in E^1$ için $\sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*f = vf$ ve benzer şekilde $\sum_{e \in s^{-1}(v)} f^*ee^* = f^*v$ elde edilir. Dolayısıyla her $f \in E^1$ ve $v \in \text{Reg}(E)$ için $f^*q_v = 0 = q_v f$ olmak üzere $q_v C_K(E) q_w = K q_v q_w = \delta_{v,w} q_v K$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.27. [10, Tanım 1.5.9] Herhangi bir çizge E ve herhangi bir cisim K olsun. Buna göre $X \subseteq \text{Reg}(E)$ olmak üzere $C_K(E)$ nin $\{q_v | v \in X\}$ idempotentleri tarafından üretilen ideali I^X ile gösterilirse X e göre Cohn yol cebiri $C_K^X(E)$ ile gösterilir ve $C_K^X(E) = C_K(E)/I^X$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre $C_K(E) = C_K^\emptyset(E)$ ve $L_K(E) = C_K^{\text{Reg}(E)}(E)$ dir.

Tanım 3.28. [10, Hatırlatma 1.5.10] E herhangi bir çizge, $X \subseteq \text{Reg}(E)$ ve:

- her $e \in E^1$ için $a_{s(e)}a_e = a_e a_{r(e)} = a_e$ ve $a_{r(e)}b_e = b_e a_{s(e)} = b_e$,
- her $f, v \in E^0$ için $b_f a_v = \delta_{f,v} a_{r(e)}$,
- her $v \in X$ için $a_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e$

ilişkilerini sağlayan ortogonal idempotentlerden oluşan bir $\{a_v | v \in E^0\}$ kümesi ile

$\{a_e|e \in E^1\}$ ve $\{b_e|e \in E^1\}$ kümelerinden oluşan bir K -cebiri A olsun. Buna göre $\varphi : C_K^X(E) \longrightarrow A, \varphi(v) = a_v, \varphi(e) = a_e, \varphi(e^*) = b_e, \text{ her } v \in E^0, e \in E^1$ şeklinde tek bir K -cebir homomorfizması vardır. Bu durum $C_K^X(E)$ nin evrensel özelliği olarak adlandırılır.

Önerme 3.29. [10, Önerme 1.5.10] E herhangi bir çizge, K herhangi bir cisim ve $X \subseteq \text{Reg}(E)$ olsun. Buna göre I^X in bir K -bazı $\{\lambda q_v \mu^* | v \in X, \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) = v\}$ şeklindedir. Ayrıca $v \in X$ olmak üzere $s^{-1}(v)$ kümesinin elemanlarının bir sıralanışı $\{e_1^v, \dots, e_{n_v}^v\}$ olmak üzere $C_K^X(E)$ nin bir bazı $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \setminus \{\lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* \gamma^* | r(\lambda) = r(\gamma) = v\}$ şeklindedir. Burada $\mathfrak{B} = \{\lambda \gamma^* | r(\lambda) = r(\gamma)^*\}$ şeklinde tanımlı $C_K(E)$ nin kanonikal bazıdır.

İspat. Bilindiği üzere $v \in X$ ve $\lambda, \mu \in \text{Path}(E)$ ve $r(\lambda) = v = r(\mu)$ olmak üzere $\lambda q_v \mu^*$ elemanları I^X i üretir. Bu elemanların lineer bağımsız oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Önermenin ikinci kısmı için $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{B}''$ nin $C_K(E)$ nin bir bazı olduğu gösterilmelidir. Açıkça $C_K(E)$ nin bir $\mathfrak{B}$ bazının her λv^* elemanı $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{B}''$ nin elemanlarının bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Diğer taraftan $\mathfrak{B}'$ in elemanlarının sıfırdan farklı bir lineer birleşimi $\lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* v^*$ şeklinde bir terim içermelidir ve buda $\mathfrak{B}''$ nin elemanlarının bir lineer birleşimi olamaz. Dolayısıyla $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{B}'', C_K(E)$ nin bir bazıdır. $\square$

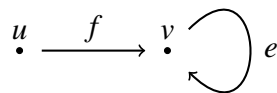
Sonuç 3.30. [10, Sonuç 1.5.12] E herhangi bir çizge, K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $s^{-1}(v), v \in \text{Reg}(E)$ kümesinin elemanlarının bir sıralanışı $\{e_1^v, \dots, e_{n_v}^v\}$ ve $\mathfrak{B} = \{\lambda \gamma^* | r(\lambda) = r(\gamma)^*\}$ olmak üzere $L_K(E)$ nin bir bazı $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \setminus \{\lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* \gamma^* | r(\lambda) = r(\gamma) = v \in \text{Reg}(E)\}$ şeklindedir.

Tanım 3.31. [10, Tanım 1.5.16] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Ayrıca $X \subseteq \text{Reg}(E)$ ve $Y = \text{Reg}(E) \setminus X, Y' = \{v' | v \in Y\}$ olsun. Her $v \in Y$ ve her $e \in r_E^{-1}(v)$ için bir e' tanımlansın. Buna göre $E(X)$ çizgesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E(X)^0 = E^0 \sqcup Y' \text{ ve } E(X)^1 = E^1 \sqcup \{e' | r_E(e) \in Y\}.$$

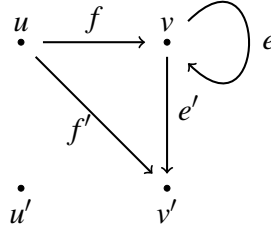
Burada $e \in E^1$ için $r_{E(X)}(e) = r_E(e)$, $s_{E(X)}(e) = s_E(e)$ ve e' için $s_{E(X)}(e') = s_E(e)$ ve $r_{E(X)}(e') = r_E(e)'$ olarak tanımlanır.

Örnek 3.32. [10, Örnek 1.5.17] Aşağıdaki E_2 çizgesi verilsin.



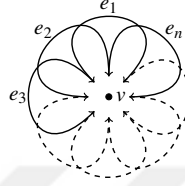
Şekil 3.6. E_2 .

Buna göre $X = \emptyset$ olarak seçilirse $Y = \text{Reg}(E_2) = \{u, v\}$ olmak üzere $E_2(X)$ çizgesi aşağıdaki gibi elde edilir.



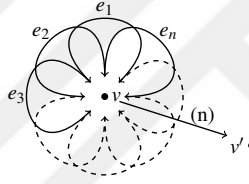
Şekil 3.7. $E_2(X)$.

Örnek 3.33. [10, Örnek 1.5.20] Aşağıdaki R_n çizgesi verilsin.



Şekil 3.8. R_n .

Buna göre $X = \emptyset$ olarak seçilirse $R_n(X)$ çizgesi aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.9. $R_n(X)$.

Teorem 3.34. [10, Teorem 1.5.18] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun.

Buna göre $X \subseteq \text{Reg}(E)$ olmak üzere $C_K^X(E) \cong L_K(E(X))$ dir.

Önerme 3.35. [10, Önerme 1.5.21] E herhangi bir çizge, $X \subseteq \text{Reg}(E)$ ve $Y = \text{Reg}(E) \setminus X$ olsun. Buna göre:

- i. E nin döngü içermeyen bir çizge olması için gerek ve yeter şart $E(X)$ nin döngü içermeyen bir çizge olmasıdır.
- ii. E nin sonlu bir çizge olması için gerek ve yeter şart $E(X)$ nin sonlu bir çizge olmasıdır.
- iii. E nin sıra-sonlu bir çizge olması için gerek ve yeter şart $E(X)$ nin sıra-sonlu bir çizge olmasıdır.
- iv. $E(X)$ çizgesinin batakları E nin batakları ve $\{v' | v \in Y\}$ lerden oluşur.
- v. Eğer v , E de bir kaynak ise $E(X)$ de de bir kaynaktır. Dahası $v \in Y$ ise v' , $E(X)$ de bir izole köşedir. E de herhangi bir izole köşe, $E(X)$ de de izoledir.

3.3. LEAVITT YOL CEBİRLERİNDE YÖNLÜ LİMİTLER

Tanım 3.36. [10, Tanım 1.6.1] Bir çizge homomorfizması $\varphi : F = (F^0, F^1, r_F, s_F) \longrightarrow E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$, aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi^0 : F^0 \longrightarrow E^0$ ve $\varphi^1 : F^1 \longrightarrow E^1$ homomorfizmalarından oluşur.

her $e \in F$ için $r_E(\varphi^1(e)) = \varphi^0(r_F(e))$ ve $s_E(\varphi^1(e)) = \varphi^0(s_F(e))$.

Tanım 3.37. [10, Tanım 1.6.2] Bir $\mathfrak{S}$ kategorisi ele alınsın. Öyleki $\mathfrak{S}$ kategorisinin objeleri (E, X) sıralı ikililerinden oluşsun. Burada E bir çizge ve $X \subseteq \text{Reg}(E)$ dir. Eğer $(F, Y), (E, X) \in \text{Ob}(\mathfrak{S})$ ise $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \longrightarrow (E, X)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathfrak{S}$ de bir morfizma belirtir.

- $\psi : F \longrightarrow E$ bir çizge homomorfizmasıdır. Öyleki $\psi^0 : F^0 \longrightarrow E^0$ ve $\psi^1 : F^1 \longrightarrow E^1$ bileşenleri bire-birdir.
- $\psi^0(Y) \subseteq X$ ve
- her $v \in Y$ köşesi için ψ^1 bileşeni bir $\psi^1 : s_F^{-1}(v) \longrightarrow s_E^{-1}(\psi^0(v))$ eşlemesine indirgenir.

Lemma 3.38. [10, Lemma 1.6.3] Eğer $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \longrightarrow (E, X)$ dönüşümünün $\mathfrak{S}$ de bir morfizma olduğu kabul edilirse $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \longrightarrow C_K^X(E)$ olacak şekilde bir K -cebir homomorfizması vardır.

Önerme 3.39. [10, Önerme 1.6.4] $\mathfrak{S}$ kategorisinde yönlü limitler vardır. Dahası, herhangi bir K cismi için $(E, X) \longmapsto C_K^X(E)$ dönüşümü $\mathfrak{S}$ kategorisinden $K\text{-alg}$ ile gösterilen K -cebirlerin kategorisine sürekli bir fonktor belirtir.

Tanım 3.40. [10, Tanım 1.6.5] $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \longrightarrow (E, X)$ dönüşümü $\mathfrak{S}$ kategorisinde bir morfizma olsun. Buna göre eğer her $v \in F^0$ için $\psi^0(v) \in X$ ve $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ olması $v \in Y$ olmasını gerektiriyorsa ψ morfizmasına tamdır denir.

Lemma 3.41. [10, Lemma 1.6.6] $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \longrightarrow (E, X)$ morfizmi $\mathfrak{S}$ de tam olsun. Buna göre $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \longrightarrow C_K^X(E)$ dönüşümü bir K cebir monomorfizmasıdır.

Tanım 3.42. [10, Tanım 1.6.7] E herhangi bir çizge ve F, E nin bir alt çizgesi olsun. Eğer içirme dönüşümü $(F, \text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)) \longrightarrow (E, \text{Reg}(E))$, $\mathfrak{S}$ de tam ise F ye tamdır denir.

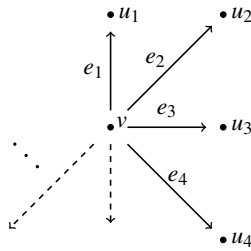
Lemma 3.43. [10, Lemma 1.6.9] $\mathfrak{S}$ deki her (E, X) objesi $\mathfrak{S}$ deki bir yönlü sistem $\{(F_i, X_i) | i \in I\}$ nin yönlü limitidir. Burada F_i sonlu bir çizge ve tüm $(F_i, X_i) \longrightarrow (E, X)$ dönüşümleri $\mathfrak{S}$ de tam morfizmalardır.

İspat. Bilinmektedir ki E sonlu altçizgelerin bir birleşimidir. E nin sonlu bir altçizgesinin G olduğu kabul edilsin. Şimdi E nin bir sonlu altçizgesi F yi aşağıdaki gibi tanımlansın: $F^0 = G^0 \cup \{r_E(e) | e \in E^1 \text{ ve } s_E(e) \in G^0 \cap X\}$ ve $F^1 = \{e \in E^1 | s_E(e) \in G^0 \cap X\}$. Buna göre $F^0 \cap X$ de olup F deki kenarların çıktığı köşelerin oluşturduğu küme tam olarak $G^0 \cap X$ dir ve eğer v bu köşelerden biriyse $s_E^{-1}(v) = s_F^{-1}(v)$ dir. Dolayısıyla içerme dönüşümü $(F, \text{Reg}(F) \cap X) \hookrightarrow (E, X)$, $\mathfrak{F}$ de bir tam morfizmadır. (E, X) in sonlu tam altobjelerinin sonlu birleşimi yine (E, X) in sonlu bir alt objesi olacağından (E, X) , $(F, \text{Reg}(F) \cap X)$ in sonlu altobjelerin bir ailesinin yönlü limitidir. $\square$

Teorem 3.44. [10, Teorem 1.6.10] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $X \subseteq \text{Reg}(E)$ olmak üzere $C_K^X(E) = \varinjlim \{C_K^{\text{Reg}(F) \cap X}(F)\}$, burada $(F, \text{Reg}(F) \cap X)$ ler (E, X) nin sonlu ve tam tüm alt kümeleri üzerinde taranır. Dahası her $C_K^{\text{Reg}(F) \cap X}(F) \longrightarrow C_K^X(E)$ homomorfizmi bire-bir dir. Özel olarak $L_K(E) = \varinjlim \{C_K^{\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)}(F)\}$, burada F ler E nin sonlu ve tam tüm alt çizgeleri üzerinde taranır ve her $C_K^{\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)}(F) \longrightarrow L_K(E)$ homomorfizması bire-bir dir.

Sonuç 3.45. [10, Sonuç 1.6.11] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $X \subseteq \text{Reg}(E)$ olmak üzere $C_K^X(E)$, $K - \text{alg}$ de herbiri sonlu bir çizge üzerinde tanımlı Leavitt yol cebirine izomorf olan alt-cebirlerin yönlü limitidir. Özel olarak $L_K(E)$, herbiri sonlu bir çizge üzerindeki Leavitt yol cebirine izomorf olan birimli alt-cebirlerin yönlü limitidir.

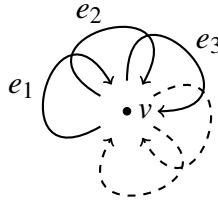
Örnek 3.46. [10, Örnek 1.6.12] Eğer aşağıda verilen çizgeyi $C_{\mathbb{N}}$ ile gösterirsek,



Şekil 3.10. $C_{\mathbb{N}}$.

$L_K(C_{\mathbb{N}}) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} C_K(C_n)$ elde edilir. Burada $C_K(C_n) = C_K^{\emptyset}(C_n) \cong L_K(C_n(\emptyset))$ dir.

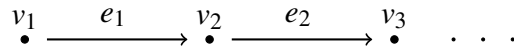
Örnek 3.47. [10, Örnek 1.6.13] Eğer aşağıda verilen çizge $R_{\mathbb{N}}$ ile gösterilirse,



Şekil 3.11. $R_{\mathbb{N}}$.

$L_K(R_{\mathbb{N}}) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} C_K(R_n)$ elde edilir. Burada $C_K(R_n) = C_K^{\emptyset}(R_n) \cong L_K(C_n(\emptyset))$ dir.

Örnek 3.48. [10, Örnek 1.6.14] Eğer aşağıda verilen çizge $A_{\mathbb{N}}$ ile gösterilirse,



Şekil 3.12. $A_{\mathbb{N}}$.

$L_K(A_{\mathbb{N}}) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} L_K(A_n)$ elde edilir.

Önerme 3.49. [10, Önerme 1.6.15] E döngü içermeyen bir çizge olsun. Buna göre $L_K(E)$, $\{L_K(F_i) | i \in I\}$ cebirlerinin yönlü limitidir. Burada F_i ler sonlu döngü içermeyen çizgelerdir.

Sonuç 3.50. [10, Sonuç 1.6.16] E sıra-sonlu bir çizge olsun. Buna göre $L_K(E)$, herbiri E nin sonlu ve tam bir alt çizgesi üzerindeki Leavitt yol cebirine izomorf olan birimli alt cebirlerin birleşimi olarak yazılabilir.

3.4. İDEALLER

Gösterim 3.51. R bir halka veya cebir olsun. Buna göre $X \subseteq R$ olmak üzere R nin X tarafından üretilen ideali $I(X)$ ile gösterilir.

Tanım 3.52. [10, Tanım 2.0.2] $E = (E^0, E^1, r, s)$ herhangi bir çizge olsun.

- $\mu = e_1 e_2 \dots e_n \in \text{Path}(E)$ olsun. Buna göre $\ell(\mu) \geq 1$ olmak üzere eğer $s(\mu) = v = r(\mu)$ ise μ ye v tabanlı kapalı bir yol denir.
- $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$, v tabanlı kapalı bir yol olsun. Buna göre eğer $s(e_i) \neq v, i \geq 2$ ise μ ye v tabanlı basit kapalı yol denir. E de v tabanlı basit kapalı yolların kümesi $\text{CSP}(v)$ ile gösterilir.
- $\mu = e_1 e_2 \dots e_n \in \text{CSP}(v)$ olmak üzere eğer her $i \neq j$ için $s(e_i) \neq s(e_j)$ ise μ ye v tabanlı bir döngü denir.
- Uzunluğu 1 olan döngü bukle olarak adlandırılır.

Tanım 3.53. [10, Tanım 2.0.3] E herhangi bir çizge olsun. Her $v \in E^0$ için $|CSP(v)| = 0$ ya da $|CSP(v)| \geq 2$ ise E çizgesine K -koşulunu sağlıyor denir.

Tanım 3.54. [10, Tanım 2.0.4] $E = (E^0, E^1, r, s)$ herhangi bir çizge olsun. Buna göre E^0 üzerinde bir $\geq$ ön-sıralama aşağıdaki gibi tanımlanır:

$v \geq w$ olması için gerek ve yeter şart $s(\mu) = v, r(\mu) = w$ olacak şekilde $\mu \in Path(E)$ yolunun olmasıdır.

Tanım 3.55. [10, s.24] E herhangi bir çizge ve $v \in E^0$ olmak üzere $T(v) = \{w | w \in E^0, v \geq w\}$ kümesine v nin ağacı denir. Bir $X \subseteq E^0$ alt kümesi için $T(X) = \bigcup_{v \in X} T(v)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.56. [10, Tanım 2.0.5] E bir çizge ve $H \subseteq E^0$ olsun.

- Eğer $v \in H$ ve $w \in E^0$ olmak üzere $v \geq w$ olması $w \in H$ olmasını gerektiriyorsa H ye kalıtsal denir.
- Eğer $v \in Reg(E)$ olmak üzere $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$ olması $v \in H$ olmasını gerektiriyorsa H ye doygun denir.

Tanım 3.57. [10, Tanım 2.0.6] E herhangi bir çizge ve $X \subseteq E^0$ olsun. Buna göre X kümesini içeren E^0 ın en küçük kalıtsal-doygun alt kümesine X in kalıtsal-doygun kapanışı denir ve $\bar{X}$ ile gösterilir.

Lemma 3.58. [10, Tanım 2.0.7] E herhangi bir çizge olsun. Buna göre $X \subseteq E^0$ olmak üzere X in kalıtsal-doygun kapanışı $\bar{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(X)$ dir. Burada;

$$\Lambda_0(X) = T(X) = \{v \in E^0 | x \geq v, \exists x \in X\} \text{ ve}$$

$$\Lambda_n(X) = \{y \in E^0 | 0 < |s^{-1}(y)| < \infty \text{ ve } r(s^{-1}(y)) \subseteq \Lambda_{n-1}(X)\} \cup \Lambda_{n-1}(X), n \geq 1 \text{ dir.}$$

İspat. E^0 kümesinin X i içeren kalıtsal-doygun her alt kümesinin $\sum_{n \geq 0} X_n$ kümesini de içereceği açıktır. Ayrıca her X_n kümesi kalıtsal olduğundan $\sum_{n \geq 0} X_n$ kümesi de kalıtsal olur. Şimdi de $\sum_{n \geq 0} X_n$ nin doygun olduğu gösterilsin. Bunun için bir $v \in Reg(E)$ köşesi seçilsin öyleki $r(s^{-1}(v)) \subseteq \sum_{n \geq 0} X_n$ olsun. Buna göre $X_n \subseteq X_{n+1}$ ve $r(s^{-1}(v))$ kümesi sonlu olduğundan dolayı öyle bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $r(s^{-1}(v)) \subseteq X_N$ dir. Dolayısıyla $v \in X_{N+1}$ olacağından istenen elde edilir. $\square$

3.5. $\mathbb{Z}$ -DERECE

Tanım 3.59. [10, Tanım 2.1.1] G bir grup ve K cismi üzerinde tanımlı bir cebir A olsun.

Buna göre A nın alt cebirlerinin bir ailesi $\{A_\sigma\}_{\sigma \in G}$ olmak üzere

her $\sigma, \tau \in G$ için $A = \bigoplus_{\sigma \in G} A_\sigma$ ve $A_\sigma \cdot A_\tau \subseteq A_{\sigma\tau}$ koşulu sağlanıyorsa A cebirine G -dereceli denir. Bir $x \in A_\sigma$ elemanına σ homojen eleman denir.

Tanım 3.60. [10, s.25] A bir G -dereceli cebir olsun. Buna göre A nın bir I ideali için $y = \sum_{\sigma \in G} y_\sigma \in I$ olması her $\sigma \in G$ için $y_\sigma \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya dereceli ideal denir.

Tanım 3.61. [10, Tanım 2.1.3] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre herhangi bir $v \in E^0$ ve $e \in E^1$ için $\deg(v) = 0, \deg(e) = 1$ ve $\deg(e^*) = -1$ olarak tanımlanır. Herhangi bir tekterimli $kx_1 \dots x_m, k \in K, x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*, 1 \leq i \leq m$ için $\deg(kx_1 \dots x_m) = \sum_{i=1}^m \deg(x_i)$ olarak tanımlanır.

Herhangi bir $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A_n = \text{span}_K(\{x_1 \dots x_m | x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*, \deg(x_1 \dots x_m) = n\})$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.62. [10, Önerme 2.1.4] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $K\hat{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ dir ve bu parçalanma $K\hat{E}$ üzerinde bir $\mathbb{Z}$ -derece tanımlar.

İspat. (V), (E1) ve (E2) ilişkileri tarafından üretilen I ideali dereceli ve dolayısıyla $K < E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* >$ ye izomorf olan $K\hat{E}$ de dereceli olur. $\square$

Sonuç 3.63. [10, Sonuç 2.1.5] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun.

Buna göre $L_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_n$,

burada $L_n = \text{span}_K(\{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in \text{Path}(E), \ell(\gamma) - \ell(\lambda) = n\})$,

$L_K(E)$ üzerinde bir $\mathbb{Z}$ -derece tanımlar.

Tanım 3.64. [10, Tanım 2.2.2] E herhangi bir çizge, $\mu = e_1 e_2 \dots e_n \in \text{Path}(E)$ ve $e \in E^1$ olsun. Buna göre:

- Eğer $s(e) = s(e_i), e \neq e_i$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, n\}$ varsa e ye μ için bir çıkış denir.
- Eğer E deki her döngü için bir çıkış varsa E çizgesi L -koşuluna sahiptir denir.

Lemma 3.65. [10, Lemma 2.2.7] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre c tabanı v olan bir döngü olmak üzere

$$vL_K(E)v = \left\{ \sum_{i=m}^n k_i c^i | k_i \in K, m \leq n; m, n \in \mathbb{Z} \right\} \cong K[x, x^{-1}] \text{ dir.}$$

İspat. $c = e_1 \dots e_n, e_i \in E^1$ olsun. Öncelikle herhangi bir $\gamma \in Path(E), s(\gamma) = v$ yolunun $c^m \tau_q$ şeklinde olduğu gösterilsin. Burada $m \in \mathbb{Z}^+, \tau_q = e_1 \dots e_q, 1 \leq q < n, \tau_0 = v$ ve $deg(\gamma) = mn + q$ dir. Bunun için $deg(\gamma)$ üzerine tümevarım uygulansın. Eğer $deg(\gamma) = 1$ ve $s(\gamma) = s(e_1)$ ise $\gamma = e_1$ dir. Şimdi de sonucun herhangi bir $\lambda \in Path(E), s(\lambda) = v, deg(\lambda) \leq sn + t$ yolu için doğru olduğu kabul edilsin ve herhangi bir $\gamma \in Path(E), s(\gamma) = v$ ve $deg(\gamma) = sn + t + 1$ yolu ele alınsın. Buna göre $\gamma = \gamma' f, \gamma' \in Path(E), s(\gamma') = v, f \in E^1$ ve $deg(\gamma') = sn + t$ olmak üzere tümevarım hipotezinden $\gamma' = c^s e_1 \dots e_t$ elde edilir. c de çıkışı olmadığından dolayı $s(f) = r(e_t) = s(e_{t+1})$ ve dolayısıyla $f = e_{t+1}$ olmak üzere $\gamma = \gamma' e_{t+1} = c^s e_1 \dots e_{t+1}$ elde edilir. Şimdi de $\gamma, \lambda \in Path(E), s(\gamma) = s(\lambda) = v$ yolları ele alınsın. Eğer $deg(\gamma) = deg(\lambda)$ ise $\gamma \lambda^* \neq 0$ ise $\gamma \lambda^* = c^p e_1 \dots e_k e_k^* \dots e_1^* c^{-p} = v$ dir. Diğer taraftan $deg(\gamma) > deg(\lambda)$ ve $\gamma \lambda^* \neq 0$ olduğundan $\gamma \lambda^* = c^{d+q} e_1 \dots e_k e_k^* \dots e_1^* c^{-q} = c^d, d \in \mathbb{N}$ dir. Benzer şekilde $deg(\gamma) < deg(\lambda)$ ve $\gamma \lambda^* \neq 0$ ise $\gamma \lambda^* = c^q e_1 \dots e_k e_k^* \dots e_1^* c^{-q-d} = c^{-d}, d \in \mathbb{N}$ elde edilir. Buna göre herhangi bir $\alpha \in vL_K(E)v$ için $\alpha = \sum_{i=1}^p k_i \gamma_i \beta_i^* + kv, k_i, k \in K, \gamma_i, \beta_i \in Path(E), s(\gamma_i) = s(\beta_i) = v, \text{ her } 1 \leq i \leq p$ olmak üzere $\alpha = \sum_{i=0}^p k_i c^{m_i}, deg(\gamma_i \beta_i^*) = m_i n, m_i \in \mathbb{Z}$ elde edilir. Eğer $\varphi : K[x, x^{-1}] \rightarrow L_K(E)$ dönüşümü $\varphi(1) = v, \varphi(x) = c$ ve $\varphi(x^{-1}) = c^*$ şeklinde tanımlanırsa φ , görüntü kümesi $vL_K(E)v$ olan bir monomorfizmadır. Dolayısıyla $vL_K(E)v, K[x, x^{-1}]$ K -cebiri izomorftur. $\square$

Teorem 3.66. [10, Teorem 2.2.11] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre sıfırdan farklı herhangi bir $\alpha \in L_K(E)$ için öyle $\mu, \eta \in Path(E)$ elemanları vardır ki

- i. $0 \neq \mu^* \alpha \eta = kv; k \in K^\times, v \in E^0$ veya
- ii. $0 \neq \mu^* \alpha \eta = p(c)$, burada c çıkışı olmayan bir döngü ve $p(x) \in K[x, x^{-1}]$ dir.

Sonuç 3.67. [10, Sonuç 2.2.12] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $\alpha \in L_K(E)$ sıfırdan farklı olmak üzere

- i. $0 \neq \alpha \eta \in KE$ olacak şekilde bir $\eta \in Path(E)$ elemanı vardır.
- ii. Eğer $\alpha \in L_K(E)$ homojen ise $\eta \in Path(E)$ homojen olacak şekilde bir $\eta \in Path(E)$ elemanı vardır.

Sonuç 3.68. [10, Sonuç 2.2.13] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Eğer $0 \neq \alpha \in L_K(E)$ homojen ise $0 \neq \mu^* \alpha \eta = kv$ olacak şekilde $\mu, \eta \in \text{Path}(E), k \in K^\times, v \in E^0$ elemanları vardır. Özel olarak $L_K(E)$ nin sıfırdan farklı her dereceli ideali bir köşe içerir.

İspat. Biliyoruz ki KE de $0 \neq \alpha \eta$ homojen olacak şekilde bir $\eta \in \text{Path}(E)$ yolu vardır. Dolayısıyla $\alpha \eta = \sum_{i=1}^n k_i \beta_i, k_i \in K^\times$ dir. Burada β_i ler E de farklı yollardır ve uzunlukları aynıdır. Ancak bu durumda $\beta_1^* \beta_1 = r(\beta_1)$ ve $\beta_1^* \beta_i = 0$, her $2 \leq i \leq n$ olacağından istendiği gibi $\beta_1^* \alpha \eta = k_1 r(\beta_1)$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.69. [10, Önerme 2.2.14] E, K -koşulunu sağlayan herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $L_K(E)$ nin sıfırdan farklı herhangi bir ideali bir köşe içerir.

Teorem 3.70. [10, Teorem 2.2.15] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre A bir $\mathbb{Z}$ -dereceli cebir ve $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ bir dereceli halka homomorfizması olmak üzere eğer her $v \in E^0$ köşesi için $\pi(v) \neq 0$ ise π bire-birdir.

Teorem 3.71. [10, Teorem 2.2.16] E, K -koşulunu sağlayan bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre A bir K -cebir ve $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer her $v \in E^0$ köşesi için $\pi(v) \neq 0$ ise π bire-birdir.

Tanım 3.72. [10, Tanım 2.2.21] E herhangi bir çizge ve E^0 in herhangi bir kalıtsal alt kümesi H olsun. Buna göre E_H ile gösterilen kısıtlı çizge $E_H^0 = H, E_H^1 = \{e \in E^1 | s(e) \in H\}$ ve hedef ve kaynak fonksiyonları, E deki hedef ve kaynak fonksiyonlarının E_H üzerine kısıtlanması olarak tanımlanır.

Örnek 3.73. Aşağıdaki A_3 çizgesi verilsin. Buna göre $H = \{v_2, v_3\}$ olarak alırsak,

$$\bullet \xrightarrow{e_1} \bullet \xrightarrow{e_2} \bullet$$

Şekil 3.13. A_3 .

Kısıtlı çizge E_H aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bullet \xrightarrow{e_2} \bullet$$

Şekil 3.14. E_H .

Lemma 3.74. [10, Lemma 2.4.1] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre E^0 ın kalıtsal bir alt kümesi H olmak üzere $L_K(E)$ de H tarafından üretilen ideal,

$$I(H) = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \lambda_i^* \mid n \geq 1, k_i \in K^\times, \gamma_i, \lambda_i \in \text{Path}(E), r(\gamma_i) = r(\lambda_i) \in H \right\} \text{ dir.}$$

Dahası $\overline{H}$ ile H ın doygun kapanışını gösterirsek $I(H) = I(\overline{H})$ dır.

Lemma 3.75. [10, Lemma 2.4.3] E herhangi bir yönlü çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $L_K(E)$ nin bir ideali I olmak üzere $I \cap E^0, E^0$ ın kalıtsal-doygun bir alt kümesidir.

Tanım 3.76. [10, Tanım 2.9.4] E herhangi bir yönlü çizge olsun. Buna göre $\gamma = e_1 e_2 \dots, r(e_i) = s(e_{i+1}), i \in \mathbb{N}$ yoluna E de bir sonsuz yol denir. $\gamma \in E$ sonsuz yol olarak adlandırılmasına karşın $\gamma \notin \text{Path}(E)$ dir. $\gamma = e_1 e_2 \dots$ sonsuz yolu üzerinde bir köşe ile bir $s(e_i), i \in \mathbb{N}$ köşesi kastedilir. E deki tüm sonsuz yolların kümesi E^∞ ile gösterilir. E de singüler bir köşede biten sonlu yolların kümesi ile E deki sonsuz yolların kümesi birlikte $E^{\leq \infty}$ ile gösterilir.

Tanım 3.77. Bir E çizgesi ve bir $v \in E^0$ köşesi verilsin. Buna göre her $\gamma \in E^{\leq \infty}$ yolu için γ üzerinde $v \geq w$ olacak şekilde bir w köşesi varsa v ye cofinal denir. Eğer her $v \in E^0$ köşesi cofinal ise E ye cofinal çizge denir.

Lemma 3.78. [10, Lemma 2.9.5] Cofinal bir E çizgesi verilsin.

- i. Eğer c bir döngü ise her $u \in E^0$ köşesi c ye bağlanır.
- ii. Eğer v bir bataklık ise her $u \in E^0$ köşesi v ye bağlanır.
- iii. E çizgesinde en fazla bir tane bataklık olabilir.
- iv. Eğer E çizgesinde bataklık varsa E de döngü olamaz.

Lemma 3.79. [10, Lemma 2.9.6] Bir E çizgesi verilsin. Buna göre E^0 ın kalıtsal-doygun alt kümelerinin sadece $\emptyset$ ve E^0 olması için gerek ve yeter şart E nin cofinal olmasıdır.

Teorem 3.80. [10, Teorem 2.9.1] E herhangi bir çizge olsun ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre Leavitt yol cebiri $L_K(E)$ nin basit olması için gerek ve yeter şart E nin cofinal olması ve L -koşulunu sağlamasıdır.

Önerme 3.81. [10, Önerme 2.9.9] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $L_K(E)$ nin her idealinin dereceli olması için gerek ve yeter şart E nin K -koşulunu sağlamasıdır.

Sonuç 3.82. [10, Sonuç 2.9.11] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $L_K(E)$ nin bir I ideali için aşağıdaki önermeler denktir.

- i. I bir dereceli idealdir.
- ii. I idempotentler tarafından üretilir.
- iii. $I = I^2$.
- iv. I bir K -cebiri olarak bir Leavitt yol cebirine izomorftur.

Tanım 3.83. [10, Tanım 3.1.1] R bir halka ve $e \in R$ bir idempotent olsun. Buna göre eğer Re kendisinin özalt direkt toplamına izomorf ise e ye sonsuz idempotent denir. Eğer R nin her sol ideali en az bir sonsuz idempotent içeriyorsa R ye tam-sonsuz basit denir.

Teorem 3.84. [10, Teorem 3.1.10] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $L_K(E)$ nin tam-sonsuz basit olması için gerek ve yeter şart $L_K(E)$ nin basit olması ve E nin döngü içermesidir.

Sonuç 3.85. [10, Hatırlatma 3.1.13] Bir E çizgesi ve herhangi bir K cismi verilsin. Buna göre eğer $L_K(E)$ tam-sonsuz basit ise E bataklık içermez.

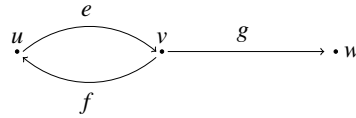
4. LEAVITT YOL CEBİRLERİNDE TAM İDEMPOTENTLER

Bu tez kapsamında varılan sonuçlara bu bölümde yer verilmiştir. Kısaca bu bölümde bir E çizgesi verildiğinde $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinde en az bir tane tam idempotent eleman olabilmesi için E çizgesinin sağlaması gereken koşullar ortaya konulmuştur. Bu bölümdeki sonuçlar “Full idempotents in Leavitt path algebras” başlıklı bir makale olarak "Journal of Algebra and Its Applications" dergisinde yayına kabul edilmiştir [15]. Diğer atıf verilen sonuçlar hakkında daha ayrıntılı bilgi için [2, 4, 14–19] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 4.1. [15, Tanım 3.1] E herhangi bir çizge ve $u, v \in E^0$ olsun. Buna göre $u \geq v$ ve $v \geq u$ yazılabiliyorsa u ile v ye denk köşeler denir ve $u \approx v$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2. [15, Tanım 3.2] E herhangi bir çizge ve $X \subseteq E^0$ olsun. Buna göre $u \in X$ olmak üzere eğer her $v \in X$ için $v \geq u$ olduğunda $u \geq v$ yazılabiliyorsa u köşesine X de maksimaldir denir. Dahası eğer $H \subseteq E^0$ kalıtsal bir küme ise H kümesinin maksimal kümesi $\overrightarrow{H} = \{[u] : u \text{ köşesi } H \text{ de maksimaldir}\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.3. [15, Örnek 3.1]



Şekil 4.1. E_3 .

Burada $u \approx v$ ve $\overrightarrow{E^0} = \{[u]\}$ dir.

Tanım 4.4. [15, Tanım 3.3] E herhangi bir çizge olmak üzere $\mathcal{H}^E$ kümesi $\mathcal{H}^E = \{H \in \mathcal{H}_E : H = \cup_{[u] \in \overrightarrow{H}} T(u) \text{ ve } \overline{H} = E^0\}$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.5. [17, Lemma 2.1] E herhangi bir çizge ve $H \subseteq E^0$ olsun. Buna göre $\overline{H} = I(H) \cap E^0$ dır.

Teorem 4.6. [15, Teorem 3.1] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre $L_K(E)$ nin en az bir tam-idempotentte sahip olması için gerek ve yeter şart maksimal kümesi sonlu olan en az bir $H \in \mathcal{H}^E$ kümesinin olmasıdır.

İspat. Kabul edilsin ki $e \in L_K(E)$ tam idempotent olsun. O zaman [9, Lemma 1.6] den öyle bir $u \in L_K(E)$ idempotentidir ki $u = \sum_{w \in W} w$ olmak üzere $ue = eu = e$ dir. Burada W, E^0 ın sonlu bir alt kümesidir. Buna göre eğer $H = T(W) = \bigcup_{w \in W} T(w)$ olarak alınırsa W sonlu olduğundan dolayı her $w \in W$ köşesi için $w \in T(v)$ olacak şekilde maksimal bir $v \in W$ köşesi vardır. Dolayısıyla $H = \bigcup_{[v] \in \vec{H}} T(v)$ elde edilir ve açıkça $\vec{H}$ sonludur. Şimdi de $\bar{H} = E^0$ olduğu gösterilsin. $u \in I(H)$ ve $e \in L_K(E)$ tam idempotent olduğundan $e \in I(H)$ ve dolayısıyla $L_K(E) = I(e) \subseteq I(H)$ olmak üzere $I(H) = L_K(E)$ elde edilir. Buna göre $\bar{H} = I(H) \cap E^0 = E^0$ şeklinde istenen elde edilir. Şimdi de $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şeklinde sonlu bir maksimal kümesi olan bir $H \in \mathcal{H}^E$ kümesinin olduğu kabul edilsin. Buna göre V nin ürettiği ideal $I(V)$ olmak üzere, $I(V) = I(H) = L_K(E)$ elde edilir. Eğer $u = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ olarak alırsak u bir idempotent ve $uv_i = v_i = v_i u$ olmak üzere $I(u) = I(V) = L_K(E)$ elde edilir. Dolayısıyla $u, L_K(E)$ de bir tam-idempotenttir. $\square$

Sonuç 4.7. [15, Sonuç 3.1] E herhangi bir çizge ve $L_K(E)$ de bir tam idempotent e olsun. O zaman E deki bazı köşelerin toplamı olarak yazılabilen bir u tam- idempotentidir.

Lemma 4.8. [15, Lemma 3.1] E herhangi bir çizge ve $H \subseteq E^0$ kalıtsal bir küme olsun. Buna göre eğer $u \in \bar{H}$ ve u kapalı bir yolun tabanı ise o zaman $u \in H$ dir.

Sonuç 4.9. [15, Sonuç 3.2] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre eğer $E^0 \notin \mathcal{H}^E$ ve E^0 ın kalıtsal her özalt kümesi için $u \notin H$ olacak şekilde kapalı bir yolun tabanı olan bir u köşesi varsa $L_K(E)$ de tam idempotent yoktur.

İspat. Kabul edilsin ki $E^0 \notin \mathcal{H}^E$ ve her $H \subset E^0$ kalıtsal özalt kümesi için $u \notin H$ olacak şekilde kapalı bir yolun tabanı olan bir u köşesi olsun. Varsayalım ki $\mathcal{H}^E \neq \emptyset$ olsun. Buna göre $\bar{H} = E^0$ olacak şekilde en az bir $H \subseteq E^0$ kalıtsal alt kümesi vardır. Kabulden dolayı $H \neq E^0$ dir. O halde H, E^0 ın bir özalt kümesi olmalıdır. Fakat kabulden ve Lemma 4.8 den $\bar{H} \neq E^0$ dolayısıyla $H \notin \mathcal{H}^E$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathcal{H}^E = \emptyset$ ve Teorem 4.6 dan $L_K(E)$ de tam idempotent yoktur. $\square$

Sonuç 4.10. [15, Sonuç 3.3] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre eğer sonsuz sayıda denk olmayan ve kapalı bir yolun tabanı olan maksimal köşe varsa $L_K(E)$ de tam idempotent yoktur.

İspat. Kabul edilsin ki denk olmayan ve kapalı bir yolun tabanı olan sonsuz sayıda maksimal köşe olsun ve bu köşeleri M ile gösterilsin. Eğer $L_K(E)$ nin en az bir tam idempotente sahip olduğu kabul edilirse Teorem 4.6 da ifade edildiği gibi sonlu bir V kümesi bulunur. Buna göre $\bar{V} = E^0$ ve Lemma 4.8 den her $u \in M$ için $u \in T(V)$ ve dolayısıyla $v \geq u$ olacak şekilde en az bir $v \in V$ vardır. Dolayısıyla u maksimal olduğundan $u \geq v$ ve $u \approx v$ elde edilir. Buna göre $u \in M$ ise $v \approx u$ olacak şekilde bir $v \in V$ köşesi vardır. Ancak V sonlu ve M sonsuz olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $L_K(E)$ de tam idempotent olamaz. $\square$

Önerme 4.11. [15, Önerme 3.1] E herhangi bir çizge ve $H \subseteq J \subseteq K \subseteq E^0$ kalıtsal kümeler olsunlar. Buna göre H ın E_J ya göre kalıtsal-doygun kapanışı J ve J nin E_K ya göre kalıtsal-doygun kapanışı K ise H ın E_K ya göre kalıtsal-doygun kapanışı K dir.

İspat. Eğer $X \subseteq E^0$ boş olmayan kalıtsal bir küme ise bir $Y \subseteq E^0$ kümesinin X in doygun kapanışı tarafından içerilmesi için gerek ve yeter şart her $u \in Y$ köşesi için bir $n \geq 0$ tam sayısının olmasıdır. Öyleki E de kaynak köşesi u olan ve uzunluğu en az n olan her p yolu için $r(p) \in X$ dir. Ayrıca $u \in Y$ köşesi singüler ise açıkça $u \in X$ olmalıdır. Buna göre $K = \bar{J}$ daki tüm singüler köşeler J de olmalıdır. Benzer şekilde J kalıtsal olduğundan tüm bu köşeler J de singülerdir ve $J = \bar{H}$ daki tüm singüler köşeler H dedir. Şimdi $\bar{H} = K$ olduğu gösterilsin. K da regüler bir köşe u olsun. E_K da $\bar{J} = K$ olduğundan öyle bir $m \geq 0$ tam sayısı vardır ki kaynak köşesi u olan ve uzunluğu en az m olan E_K daki tüm p yolları için $r(p) \in J$ dir. Eğer $r(p)$ singüler ise açıkça $r(p) \in H$ dir. O halde $s(p) = u, r(p) \in J \setminus H$ olmak üzere uzunluğu m olan p yolları ele alınsın. Burada H kalıtsal olduğundan, tüm bu p yollarının üzerindeki köşeler regüler olmalıdır. Dahası m üzerinde tümevarım uygulanırsa p yollarının sayısının sonlu olduğu görülür. Buna göre tüm p yolları $p_1, \dots, p_k$ şeklinde sıralanırsa $J = \bar{H}$ olduğundan her $r(p_i) = v_i, i = 1, \dots, k$ köşesi için bir $n_i \geq 0$ tam sayısı vardır. Öyle ki $s(q) = v_i$ olmak üzere uzunluğu en az n_i olan tüm q yolları için $r(q) \in H$ dir. Dolayısıyla $n = \max\{n_i : i = 1, \dots, k\}$ olarak tanımlanırsa kaynak köşesi u olan ve uzunluğu en az $m + n$ olan E_K daki tüm μ yolları için $r(\mu) \in H$ dir. Dolayısıyla [16, Lemma 1.4] den $K = \bar{H}$ elde edilir. $\square$

Lemma 4.12. [15, Lemma 3.2] E herhangi bir çizge ve E^0 ın kalıtsal bir özalt kümesi H olsun. Buna göre $\bar{H} = E^0$ olması için gerek ve yeter şart her $u \in E^0$ için bir n_u pozitif tam sayısının olmasıdır. Öyleki u dan çıkan ve uzunluğu en az n_u olan tüm yollar H a bağlanır.

Tanım 4.13. [15, Tanım 3.4] $E = (E^0, E^1, r, s)$ herhangi bir çizge ve E deki tüm regüler köşelerin kümesi S olsun. Buna göre $s^{-1}(S) = \{e \in E^1 : e \in s^{-1}(v), v \in S\}$ olmak üzere $E_{\setminus S}$ çizgesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E_{\setminus S}^0 = E^0 \setminus S$$

$$E_{\setminus S}^1 = E^1 \setminus s^{-1}(S)$$

$$s_{E_{\setminus S}} = s|_{E_{\setminus S}^1}$$

$$r_{E_{\setminus S}} = r|_{E_{\setminus S}^1}$$

Tanım 4.14. [15, Tanım 3.5] E herhangi bir çizge olsun. Buna göre $n \geq 0$ olmak üzere $E_n \subseteq E$ alt çizgeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$E_0 = E$ ve eğer $\mathcal{H}^{E_{n-1}} \neq \emptyset, n \geq 1$ ise bir $H_{n-1} \in \mathcal{H}^{E_{n-1}}$ kümesi için E_{n-1} in H_{n-1} üzerindeki kısıtlı çizgesi G_{n-1} olmak üzere G_{n-1} çizgesine kaynak-eleme uygulanırsa E_n elde edilir.

Lemma 4.15. [15, Lemma 3.3] E herhangi bir çizge olsun. Buna göre E ye kaynak-eleme uygulanarak elde edilen çizge F ile gösterilirse $\overline{F^0} = E^0$ ve $L_K(E) \approx_M L_K(F)$ dir.

İspat. E çizgesinin tüm regüler köşelerinin kümesi S ile gösterilsin. Buna göre tanımdan $S \cup F^0 = E^0$ ve $S = \{y \in E^0 : 0 < |s^{-1}(y)| < \infty, r(s^{-1}(y)) \subseteq F^0, y \notin F^0\}$ elde edilir. Dolayısıyla $F^0 \subseteq E^0$ alt kümesi kalıtsal olduğundan $\Lambda_1(F^0) = \{y \in E^0 : 0 < |s^{-1}(y)| < \infty, r(s^{-1}(y)) \subseteq F^0\} \subseteq \Lambda_0(F^0) = \{y \in E^0 : 0 < |s^{-1}(y)| < \infty, r(s^{-1}(y)) \subseteq F^0\} \supseteq S \cup F^0 = E^0$ ve $\overline{F^0} = E^0$ dir. Buna göre $E^0 = \overline{F^0} = I(F^0) \cap E^0$ olmak üzere $E^0 \subseteq I(F^0)$ ve $I(F^0) = L_K(E)$ elde edilir. Dolayısıyla [17, Lemma 2.4] dan dolayı $L_K(F) = L_K(E_{F^0}) \approx_M I(F^0) = L_K(E)$ elde edilir. $\square$

Lemma 4.16. [15, Lemma 3.4] Herhangi bir R halkası üzerinde P özelliğini $P : "R$ en az bir tam-idempotente sahiptir" olarak tanımlanırsa P özelliği Morita değişmezdir.

İspat. P özelliğini sağlayan herhangi bir halka R olsun. Buna göre $e \in R$ bir tam idempotent olmak üzere eRe köşe halkası birimli bir halka olduğundan eRe en az bir tam-idempotente sahiptir. Dolayısıyla [5, Sonuç 18.35] P özelliği Morita değişmezdir. $\square$

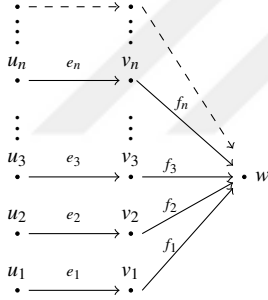
Teorem 4.17. [15, Teorem 3.2] E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. Buna göre aşağıdaki koşullar denktir.

- i. $L_K(E)$ nin en az bir tam idempotenti vardır.
- ii. E nin öyle bir alt çizgesi $E_r (r \geq 0)$ vardır ki $L_K(E_r)$ en az bir tam idempotent içerir.

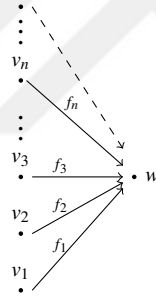
İspat. Eğer $L_K(E)$ de en az bir tam idempotent varsa o zaman $r = 0$ olarak alınır ise istenen elde edilir. Şimdi de bir $E_r, r \geq 0$ tam sayısının olduğu kabul edilsin. Öyle ki $L_K(E_r)$ de en az bir tam idempotent olsun. Buna göre eğer $r = 0$ ise $E_0 = E$ olduğundan $L_K(E) \approx_M L_K(E_0)$ dır. O halde $r \geq 1$ olduğu kabul edilsin. Buna göre $(E_r)^0 \subseteq (G_{r-1})^0 \subseteq (E_{r-1})^0$ olmak üzere $G_{r-1} = E_{H_{r-1}}$ ve $(G_{r-1})^0 = H_{r-1}$ elde edilir. Dolayısıyla $\overline{(G_{r-1})^0} = \overline{(H_{r-1})} = (E_{r-1})^0$ ve Lemma 4.11 den $(E_r)^0$ in G_{r-1} de kalıtsal kapanışı $(G_{r-1})^0$ dır. Buna göre Önerme 4.11 den $(E_r)^0$ in E_{r-1} de doygun kapanışı $(E_{r-1})^0$ dır. Bu şekilde devam edilirse $(E_r)^0$ in $E_0 = E$ de doygun kapanışı E^0 dır. Buna göre $E^0 = \overline{(E_r)^0} = I((E_r)^0) \cup E^0$ olmak üzere $E^0 \subseteq I((E_r)^0)$ ve $I((E_r)^0) = L_K(E)$ elde edilir. Sonuç olarak [17, Lemma 2.4] den $L_K(E_{(E_r)^0}) \approx_M I((E_r)^0) = L_K(E)$ ve Lemma 4.16 dan $L_K(E)$ de bir tam idempotent vardır. $\square$

4.1. ÖRNEKLER

Örnek 4.18. [15, Örnek 4.1]



Şekil 4.2. E_4 .



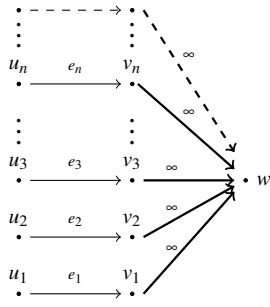
Şekil 4.3. E_5 .

• w

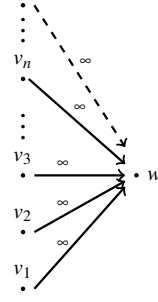
Şekil 4.4. E_6 .

$\overrightarrow{E_4^0} := \{[u_1], [u_2], \dots, [u_n], \dots\}$ olarak seçilirse $E_4^0 \in \mathcal{H}^{E_4}$ dir. Bundan dolayı $H = E_4^0$ ve $G_0 = E_H = E_4$ dir. Dolayısıyla E_4 ne kaynak-eleme uygulanırsa, E_5 elde edilir. Şimdi de $\overrightarrow{E_5^0} := \{[v_1], [v_2], \dots, [v_n], \dots\}$ olarak seçilirse $E_5^0 \in \mathcal{H}^{E_5}$ dir. Benzer şekilde E_5 ne kaynak-eleme uygulanırsa, E_6 elde edilir. Buna göre E_6^0 sonlu olduğundan, $L_K(E_6)$ birimlidir. Dolayısıyla $L_K(E_6)$ de en az bir tam idempotent vardır ve Teorem 4.17 den dolayı, $L_K(E_4)$ de en az bir tam idempotent vardır.

Örnek 4.19.



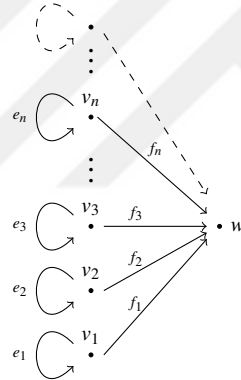
Şekil 4.5. E_7 .



Şekil 4.6. E_8 .

$\vec{E}_7^0 := \{[u_1], [u_2], \dots, [u_n], \dots\}$ olarak alınırsa $E^0 \in \mathcal{H}^{E_7}$ dir. Buna göre $H = E^0$ ve $G_0 = (E_7)_H = E_7$ dir. E_7 çizgesine kaynak-eleme uygulanırsa, E_8 elde edilir. Buna göre E_8 de sonsuz sayıda singüler maksimal köşe olduğundan Teorem 4.6 dan $L_K(E_1)$ de tam idempotent yoktur ve Teorem 4.17 den $L_K(E_7)$ de tam idempotent yoktur.

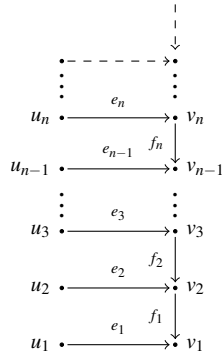
Örnek 4.20. [15, Örnek 4.2]



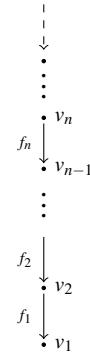
Şekil 4.7. E_9 .

E_9 de kapalı bir yolun tabanı olan sonsuz sayıda denk olmayan maksimal köşe olduğundan Sonuç 4.10 dan $L_K(E_9)$ de tam idempotent yoktur.

Örnek 4.21. [15, Örnek 4.3]



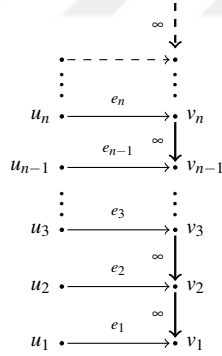
Şekil 4.8. E_{10} .



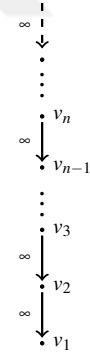
Şekil 4.9. E_{11} .

$\overrightarrow{E_{10}^0} := \{[u_1], [u_2], \dots, [u_n], \dots\}$ olarak alınırsa $E_{10}^0 \in \mathcal{H}^{E_{10}}$ dir. Buna göre $H = E_{10}^0$ ve $G_0 = (E_{10})_H = E_{10}$ dir. E_{10} ye kaynak-eleme uygulanırsa, E_{11} elde edilir. Şimdi de $H_1 := \{v_1\}$ olarak alınırsa Lemma 4.12 den $H_1 \in \mathcal{H}^{E_{11}}$ ve $\overrightarrow{H_1}$ sonludur. Dolayısıyla Teorem 4.6 dan $L_K(E_{11})$ de en az bir tam idempotent vardır ve Teorem 4.17 den $L_K(E_{10})$ de en az bir tam idempotent vardır.

Örnek 4.22.



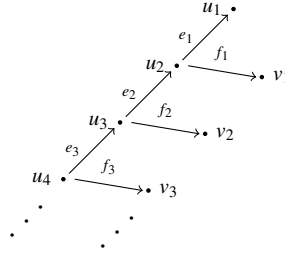
Şekil 4.10. E_{12} .



Şekil 4.11. E_{13} .

$\overrightarrow{E_{12}^0} := \{[u_1], [u_2], \dots, [u_n], \dots\}$ olarak alınırsa $E_{12}^0 \in \mathcal{H}^{E_{12}}$ dir. Buna göre $H = E_{12}^0$ ve $G_0 = (E_{12})_H = E_{12}$ dir. E_{12} ye kaynak-eleme uygulanırsa, E_{13} elde edilir. $\overrightarrow{(E_{13})^0} = \emptyset$ olduğundan dolayı, $(E_{13})^0 \notin \mathcal{H}^{E_{13}}$ dir. Dahası $H \subset (E_{13})^0$ in her özalt kümesi için, singüler bir $v \notin H$ köşesi vardır ve Sonuç 4.9 dan $L_K(E_{13})$ de tam idempotent yoktur. Buna göre Teorem 4.17 den $L_K(E_{12})$ de tam idempotent yoktur.

Örnek 4.23.



Şekil 4.12. E_{14} .

$\overrightarrow{E_{14}^0} = \emptyset$ olduğundan dolayı, $E_{14}^0 \notin \mathcal{H}^{E_{14}}$ ve $H \subset E_{14}^0$ nin kalıtsal her özalt kümesi için, $v \notin H$ şeklinde singüler bir köşe vardır. Dolayısıyla Sonuç 4.9 dan $L_K(E_{14})$ de tam idempotent yoktur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde herhangi bir yönlü E çizgesi ve K cismi verildiğinde $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinde en az bir tane tam idempotent olması için E çizgesinin sağlaması gereken koşullar ortaya konulmuştur. Bu koşulların araştırılmasının altında yatan sebep ise şudur: Varsayalım ki P ve Q halka üzerinde tanımlı iki özellik olsun. Öyleki birimli bir R halkası verildiğinde R nin Q özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart R nin P özelliğini sağlaması olsun. Şimdi P ve Q özelliklerinin Morita değişmez oldukları varsayalım ve R halkasının birimli olmadığı ancak bir tam idempotent elemana sahip olduğu düşünölsün. Bu durumda R halkası birimli olmamasına rağmen eğer P özelliğine sahipse Q özelliğine de sahip olacaktır. Dolayısıyla baştaki R nin birimli olma şartı Morita değişmez özellikler için tam idempotentte sahip olma şartıyla değiştirilerek daha genel bir varsayım elde edilmiş olur. Bu sonuç bize Morita değişmez özellikler için tam idempotent elemanların önemini gösterir.

6. KAYNAKLAR

- [1] G. Abrams, A. Louly, E. Pardo, and C. Smith, “Flow invariants in the classification of Leavitt path algebras,” *Journal of Algebra*, vol. 333, no. 1, pp. 202–231, 2011.
- [2] L. O. Clark and A. Sims, “Equivalent groupoids have Morita equivalent Steinberg algebras,” *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 219, no. 6, pp. 2062–2075, 2015.
- [3] A. Koç and M. Özaydın, “Finite dimensional representations of Leavitt path algebras,” *Forum Mathematicum*, vol. 30, no. 4, pp. 915–928, 2017.
- [4] P. Ara, “The exchange property for purely infinite simple rings,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 132, no. 9, pp. 2543–2547, 2004.
- [5] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*. New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [6] R. Islam. (2018) Morita equivalence. [Online]. Available: <http://alistairsavage.ca/pubs/Islam-MoritaEquivalence.pdf>
- [7] S. M. Lane, *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer, 1978.
- [8] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*. New York, USA: Springer, 2001.
- [9] G. Abrams and G. A. Pino, “The Leavitt path algebra of a directed graph,” *Journal of Algebra*, vol. 293, no. 2, pp. 319–334, 2005.
- [10] G. Abrams, P. Ara, and M. S. Molina, *Leavitt Path Algebras*, ser. Lecture Notes in Math. London, England: Springer, 2017, vol. 2191.
- [11] G. Abrams and G. A. Pino, “The Leavitt path algebra of arbitrary graphs,” *Houston Journal of Mathematics*, vol. 34, no. 2, pp. 423–442, 2008.
- [12] G. Abrams, “Morita equivalences for rings with local units,” *Communications in Algebra*, vol. 11, no. 8, pp. 801–837, 1983.
- [13] T. Bates, J. H. Hong, and W. S. I. Raeburn, “The ideal structure of the C^* -algebras of infinite graphs,” *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 46, no. 4, p. 1159–1176, 2002.
- [14] M. S. Molina and J. Hernández, “Morita equivalence and Morita invariant properties: Applications in the context of Leavitt path algebras,” in *Non-Associative and Non-Commutative Algebra and Operator Theory*, vol. 160, Springer, Cham, November.
- [15] E. Emre, “Full idempotents in Leavitt path algebras,” *Journal of Algebra and Its Applications*, submitted for publication.

- [16] G. Abrams, K. Rangaswamy, and M. S. Molina, “The socle series of a Leavitt path algebra,” *Israel Journal of Mathematics*, vol. 184, pp. 413–435, 2011.
- [17] G. A. Pino, E. Pardo, and M. S. Molina, “Exchange Leavitt path algebras and stable rank,” *Journal of Algebra*, vol. 305, no. 2, pp. 912–936, 2006.
- [18] L. O. Clark, A. an Huef, and P. Luiten-Apirana, “Subsets of vertices give Morita equivalences of Leavitt path algebras,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 96, no. 2, pp. 212–222, 2017.
- [19] P. Colak, “Two sided ideals in Leavitt path algebras,” *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 10, pp. 801–809, 2010.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ekrem EMRE
Doğum Tarihi ve Yeri : Kütahya 1980
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : ekrememre@duzce.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2018
Y. Lisans	Matematik	Sakarya Üniversitesi	2014
Lisans	FEF Matematik	Dumlupınar Üniversitesi	2006
Lise		Tavşanlı Atatürk Lisesi	1997

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A. E. Emre, “Full idempotents in Leavitt path algebras,” *Journal of Algebra and Its Applications*, submitted for publication.