

**T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MÜKEMMEL İLETKEN YARIM UZAYIN
DIŞINDAKİ DAİRESEL SİLİNDİRLERDEN
TM VE TE DALGALARIN SAÇILMASI**

**MUHAMMET SERHAT DÖNMEZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**GEBZE
2018**

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MÜKEMMEL İLETKEN YARIM UZAYIN
DIŞINDAKİ DAİRESEL SİLİNDİRLERDEN
TM VE TE DALGALARIN SAÇILMASI

MUHAMMET SERHAT DÖNMEZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. FATİH DİKMEN

GEBZE
2018

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**SCATTERING OF TM AND TE WAVES
FROM CIRCULAR CYLINDERS ON THE
OUTSIDE OF A PERFECT CONDUCTOR
HALF-SPACE**

MUHAMMET SERHAT DÖNMEZ

**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING**

**THESIS SUPERVISOR
ASSOC. PROF. DR. FATİH DİKMEN**

**GEBZE
2018**


GTÜ FEN BİLİMLERİ Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..13../..06../..2018 tarih ve ..2018../..31 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ..09../..07../..2018 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Muhammet Serhat SÖNMEZ'ın tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) :

Doç. Dr. Fatih DİKMEN



ÜYE

Prof. Dr. İ. Hakki TAYYAR



ÜYE

Dr. Öğretim Üyesi Yücel Enginer

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

ÖZET

Görüntü yöntemi aracılığıyla elde edilen mükemmel iletken düzlem üzerindeki yarım uzayın Green fonksiyonu sayesinde, dairesel empedans silindirlerinden saçılmaya dair integral denklem çözümlerinin uyarlanabileceği bilinmektedir. Bu türden çözümler ile değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile varılan seri çözüm arasındaki ilişki uyarınca bu kanonik çözümlerin de söz konusu yarım uzayda yazılabilmesi imkanı incelenmektedir. Teğet manyetik (TM) ve Teğet Elektrik (TE) kutuplu uyarma altında önce anılan iki çözüm tipi arasındaki ilişki sunulacaktır. Daha sonra yarım uzay problemine denk problemler görüntü yöntemi temelinde tartışılacaktır. Yarım uzay sınırındaki koşulların sağlanmasına ve bu durumda elde edilen çözümlerin işaret ettiği yüzey akımlarına ilişkin sayısal sonuçlar sunulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Teğet manyetik (TM), Teğet Elektrik (TE), Değişkenlerine Ayrıştırma Yöntemi, İntegral Denklemler.

SUMMARY

The solution of the integral equations for scattering by the circular impedance cylinders with the Green function of the half space on the perfect conductor plane is obtained by means of the image method. The relation between this and the separation of variables method explains the possibility of writing the latter in the half space examined. Illuminated transverse magnetically (TM) and transverse electrically (TE), the relationship between the two solution types mentioned above will be presented. Then the equivalence to the half space problem will be discussed through the image method. Numerical results will be presented at the half-space boundary and for the surface currents retrieved.

Key Words: Transverse Magnetically (TM), Transverse Electrically (TE), Separation of Variables Method, Integral Equations.

TEŞEKKÜR

Hayatım boyunca ilgi ve alakalarını hiç eksik etmeden hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde paha biçilemez emeklerin sahibi olan sevgili annem Zehra Dönmez, saygıdeğer babam Hayati Dönmez ve canım ablalarım Esra Şahin ve Büşra Köse'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanmasında bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan sayın Dr. Emrah Sever ve danışmanım sayın Doç. Dr. Fatih Dikmen'e teşekkürü borç bilmek isterim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. DAİRESEL SİLİNDİRDEN SAÇILAN ALAN İFADELERİ	5
2.1. Değişkenlerine Ayrışma Yöntemi ile Dairesel Silindirden Saçılan Alanın Seri İfadesi	5
2.2. Tek Dairesel Silindir için İntegral Denklem ve Seri Çözüm Formülasyonları Arasındaki İlişkiler	7
3. BOŞ UZAYDA PARALEL İKİ DAİRESEL SİLİNDİRDEN SAÇILMA	12
3.1. TM Kutuplu Elektromanyetik Dalga	12
3.1.1. Seri Çözüm	12
3.1.2. İntegral Çözüm	18
3.2. TE Kutuplu Elektromanyetik Dalga	20
3.2.1. Seri Çözüm	20
3.2.2. İntegral Çözüm	22
4. MÜKEMMEL İLETKEN YARIM UZAYDAKİ DAİRESEL SİLİNDİRDEN SAÇILMA	24
4.1. TM Kutuplu Elektromanyetik Dalga	24
4.1.1. Seri Çözüm	24
4.1.2. İntegral Çözüm	31
4.1.3. Nümerik Sonuçlar	32
4.2. TE Kutuplu Elektromanyetik Dalga	41
4.2.1. Seri Çözüm	41
4.2.2. İntegral Çözüm	42

4.2.3. Nümerik Sonuçlar	43
5. ANALİTİK REGÜLARİZASYON METODU	50
6. SONUÇ	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

ε	: Dielektrik Geçirgenlik Sabiti
μ	: Manyetik Geçirgenlik Sabiti
\vec{E}	: Elektrik alan vektörü
\vec{H}	: Manyetik alan vektörü
\vec{K}	: Elektrik yüzey akım yoğunluğu vektörü
\vec{K}_m	: Manyetik yüzey akım yoğunluğu vektörü
k	: Dalga sayısı
ω	: Açısal frekans
LCDS1	: 1. Tür Lineer Cebirsel Denklem Sistemi
LCDS2	: 2. Tür Lineer Cebirsel Denklem Sistemi
TE	: Teğet Elektrik
TM	: Teğet Manyetik

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: Kutupsal koordinatlar.	5
2.2: a) $\rho \geq r$ durumu, b) $\rho \leq r$ durumu.	8
2.3: Toplamsallık teoremi ile ilgili koordinatlar.	9
3.1: TM durumunda iki paralel dairesel empedans silindirin geometrik yapısı.	12
3.2: TE durumunda iki paralel dairesel empedans silindirin geometrik yapısı.	21
4.1: a) TM durumunda yarım uzayda bulunan dairesel empedans silindiri, b) Boş uzayda iki empedans silindiri.	24
4.2: TM durumunda elektrik alanın Fourier katsayıları.	37
4.3: TM durumunda manyetik alanın Fourier katsayıları.	37
4.4: TM durumunda silindirlerin yüzeyinde indüklenen elektrik alan değeri.	38
4.5: TM durumunda silindirlerin yüzeyinde indüklenen manyetik alan değeri.	38
4.6: Dairesel empedans silindirlerin farklı geliş açılarında iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.	39
4.7: Dairesel empedans silindirlerin farklı yarıçap değerlerinde iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.	39
4.8: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlerin farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.	40
4.9: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlerin farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.	40
4.10: a) TE durumunda yarım uzayda bulunan dairesel empedans silindiri, b) Boş uzayda iki empedans silindiri.	41
4.11: TE durumunda manyetik alanın Fourier katsayıları.	46
4.12: TE durumunda elektrik alanın Fourier katsayıları.	46
4.13: TE durumunda silindirlerin yüzeyinde indüklenen manyetik alan değeri.	47
4.14: TE durumunda silindirlerin yüzeyinde indüklenen elektrik alan değeri.	47
4.15: Dairesel empedans silindirlerin farklı geliş açılarında iki boyutlu TE bistatik saçılma analizi.	48
4.16: Dairesel empedans silindirlerin farklı yarıçap değerlerinde iki boyutlu TE bistatik saçılma analizi.	48

- 4.17: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlere farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TE bstatik saçılma analizi. 49
- 4.18: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlere farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TE bstatik saçılma analizi. 49



1. GİRİŞ

Sonsuz geniş bir düzlem civarındaki cisimlerden saçılma problemleri, saçılma elemanı dizileri tarafından mikrodalga ışınlarının yayılması ve kırılması, yer yüzüne yakın nesnelere radar tespiti, kırınımlayıcı optik ızgaraların tasarımı ve düşük hibrid plazma dalgalarının yarı-optik fırlatıcılarının çalışması, radar sistemi tasarımı alanında dağlar ve vadilerden, ormanlardan ve mısır veya buğday alanlarından oluşan arazileri kapsayan engebeli yüzeylerden elektromanyetik dalga saçılmasının incelenmesi gibi çok geniş bir uygulama alanlarına ek olarak yarıiletken endüstrisinde yüzey atık çalışması için de ilgi çekici olmuştur. Benzer şekilde, skaler akustik dalgaların engebeli yüzeylerden saçılması, malzemelerin ultrasonik kontrolü alanlarında ve deniz yatağı engebeliliğinin ve deniz yüzeyi engebeliliğinin etkilerinin hayati bir rol oynadığı sonar çalışmalarında da aynı yaklaşım gerekmektedir [1]-[6].

İntegral denklemler ile elektromanyetik dalgaların saçılması incelemeleri uyarınca iyi bilinmektedir ki, saçılma olayının cereyan ettiği ortamın Green fonksiyonunun bilinmesi anahtar öneme sahiptir. Çünkü arka plandaki uzayda geçerli diferansiyel denklemin temel çözümüdür ve tüm sınır koşullarını sağlar. Öte taraftan dairesel silindireler gibi kanonik cisimlerden saçılma söz konusu olduğunda, integral denklemler ile değişkenlere ayrıştırma yöntemi ile bulunabilen çözümler boş uzayda kolayca gösterilebilen bir ilişkiye sahiptir. Buna dayanarak, boş uzaydan başka ortamda da anılan saçılma problemi için bir açılımın geliştirilebilir olup olmadığı bu tezin inceleme konusunu oluşturmaktadır.

Burada konu edilen, yerin üzerinde saçılma problemlerinin bazılarının modelini oluşturabilecek saçılma konfigürasyonları daha önce de araştırma konusu olmuştur. [1]'de mükemmel iletken bir yer düzlemi üzerinde keyfi tümsek veya içi boş geometrilerden düzlem dalgayı çözmek için yeni bir yöntem tanıtılmıştır. [2]'de çok bağımlı bölgeler için yüzey integral denklemi temelli bir çözüm kurulmuştur. Bu sayede yerel olmayan bir sınır koşulu aracılığıyla, farklı keyfi cisimlerin yüzeylerinden oluşan sistemlerden ışık ve diğer elektromanyetik dalgaların saçılmasının sayısal simülasyonuna olanak verir. Bu bağlamda, her iki ortamın mükemmel iletken olmasıyla bir düzlemin önündeki bir silindirin saçılması incelenerek uzak alanlar ve açıl spektrumlar tartışılmıştır. [3]'de genel olarak yansıtıcı bir yüzeyin önündeki mükemmel iletken bir dairesel silindire çarpan bir düzlem dalganın kırınımının analizi

için yeni bir yöntem sunulmaktadır. Bu yüzey, yansıtıcı yüzeylerin geniş bir sınıfını ele alacak biçimde karmaşık yansıma katsayısı ile karakterize edilmiştir. Bu yüzeyin varlığı, yansıyan alanın silindirik fonksiyonlar cinsinden uygun bir şekilde genişletilmesiyle dikkate alınmıştır. Bu yöntem, gelen alanın kutuplanma durumundan bağımsız olarak hem yakın hem de uzak alandaki saçılma probleminin çözümünü verir. Dielektrik arayüzler için sayısal örnekler sunulmuştur ve karşılaştırmalar literatürde sunulan sonuçlarla yapılmıştır. [4]'de eğik gelen düzlem elektromanyetik dalga nedeniyle, iletken bir yer düzleminin yüzeyinde yer alan veya kısmen gömülü olan sonsuz uzun mükemmel iletken dairesel silindirlere saçılma problemi, görüntü yöntemine dayalı kesin bir prosedürle çözülmüştür. Gelen alan, silindirlerin yokluğunda yer düzleminde yansıyan alan ve farklı silindirlere saçılan alanlar ve bunların görüntüleri silindirik vektör dalga fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Daha sonra, silindirlerin her birinde teğetsel elektrik alanının yok olmasının sınır koşulları uygulanıp bu prosedürün, her bir silindirden kaynaklanan saçılan alanların çift ve tek modlu açılım katsayıları için bir grup sonsuz denklem sistemi elde olunmuştur. Bu denklemler büyük bir sabit sayıda kesilip bu katsayılar bir Gauss eliminasyon prosedürü ile hesaplanmıştır. Bu silindir dizisinden saçılan uzak alan daha sonra, her bir silindirden saçılan alanların katkıları toplanarak belirlenmiştir. Saçılan alandaki değişim, elektriksel yarıçap, silindirler arasındaki mesafe, yükseklik parametresi ve geliş açısı gibi bu silindir dizisinin farklı parametrelerinde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Elektriksel yarıçapı Rayleigh ve alt rezonans bölgelerinde bulunan silindirler olmak üzere üç silindirli konfigürasyonda TM kutuplanma için nümerik sonuçlar sunulmuştur. [5]'de mükemmel bir elektrik iletken (MEİ) zemin düzlemine gömülmüş aşırı doldurulmuş bir kovuktan elektromanyetik saçılmayı çözmek için bir ayrıştırma yöntemi uygulanır. Yüzey eşdeğerliği ilkesi, aşırı doldurulmuş kovuk yüzeyleri üzerindeki akımlar için bir grup elektrik alan integral denklemleri (EAİD) ve kovuk yakınındaki MEİ yer düzlemi yüzeyindeki eşdeğer akımı elde etmek için ayrıştırma yöntemiyle ele alınmıştır. Momentler Yöntemi, saçılan elektrik alanı elde edecek frekans alanındaki EAİD'lerini çözmek için kullanılır. Bu yöntem, TM_z kutuplanması için örneklerle sunulmuştur ve sonuçlar çeşitli diğer çözüm yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. [6]'da birçok ortamda saçılma ve girişim alanlarını tahmin etmek için, saçılma nesnelere için tipik kullanışlı modeller düzlemsel zeminde dielektrik eliptik silindirlerdir. Bu koşullarda elektromanyetik dalgaların alan şiddeti dağılımları, toplamsallık teorileri ile Mathieu fonksiyon genişletmesi tarafından

incelenmiştir. Gelen ve saçılan alanlar, Mathieu fonksiyon serilerine açılıp seri katsayıları, eliptik silindir ve düzlemsel yüzey üzerindeki sınır koşullarının elektromanyetik alan süreklilik denklemleri ile elde edilmiştir. Bu çalışmalar, sonsuz geniş bir düzlem civarındaki bir cisimden saçılma problemini ele alındığında karşımıza çıkan yaklaşımların bir özetini sunmaktadır. Bu çalışmanın amacı, bunların arasında yer alan bazı temel yaklaşımları belirli bir analiz hedefi için bir araya getirmektir.

Bu temel yaklaşımların parçaları ile ilgili çalışmalarını kısaca gözden geçirmek gerekirse; [7]'de iki komşu dairesel empedans silindiri bir sistemden monokromatik elektromanyetik dalga saçılma probleminin çok iyi bilinen analitik formülasyonunun regülarizasyonu sunulmuştur. Bu regülarizasyon işlemi, iki mükemmel iletken dairesel silindirden saçılma probleminin çözümünün iyileştirilmesi ve genişletilmesini kapsar. Bu yayındaki nümerik sonuçlar ile, elde edilen sonsuz cebirsel sistemin çözümünün, çözümün güvenilirliğini sağlanarak, daha düşük bir kesme sayısında nümerik olarak daha güvenli olduğu açığa çıkarılmıştır. [8]'de birkaç eksantrik çok tabakalı homojen dairesel silindirden monokromatik elektromanyetik dalga saçılmasının çok iyi bilinen analitik formülasyonu için yeni regülarizasyon sunulmuştur. Bu analitik formülasyonun regülarizasyonunun kesinlikle gerekli olduğu bulunmuştur. Yapılan iki taraflı regülarizasyon, bahsedilen problemin integral formülasyonuna dayanmaktadır. Alanların kutuplanması, silindirlerin boylama eksenine paraleldir; Bu nedenle, her iki kutuplanma için iki boyutlu problem incelenmiştir. Sonuçta elde edilen cebirsel sistemin koşul sayısı, kesme sayısı arttıkça düzgün bir şekilde sınırlı kalır. Nümerik sonuçlar, saçılma probleminin çeşitli geometrik ve elektriksel parametreleri altında elde edilen yakın ve uzak alanlar gibi mevcut sonuçlarla doğrulanmıştır. Regülarize edilmiş ve edilmemiş sistemlerin koşul sayılarını içeren nümerik sonuçlar ile, yalnızca regülarize edilmiş sistemin, çok düşükten oldukça yüksek frekans aralığına kadar geniş bir frekans aralığında sadece bilgisayarın kapasitesi ile sınırlı olan çözümün fiziksel güvenilirliği garanti edilmesi ile, istenen herhangi bir hassasiyette nümerik olarak kararlı sonuçlar verdiği gösterilmiştir. [9]'da dielektrik silindirlere monokromatik elektromanyetik dalgaların saçılmasını hesaplamak için sınır değer problemlerinin çok iyi bilinen Green formülasyonunun yüksek mertebeden çözümleri sunulmaktadır. Sınırlar sonsuz düzgün kapalı eğriler ile verilir. Bu nedenle, TM ve TE dalga saçılma problemlerinin çözümleri, sınırda periyodik bölge üzerinden Fourier dönüşümü ile elde edilen EAİD/MAİD'lerinin Fourier katsayıları elemanları olan

matris denklemi çözülerek elde edilir. Bu prosedür, bilinmeyen fonksiyonların kompleks üstel olarak seriler biçiminde gösterilimine bağlı olarak, düşünülen problemlerin tüm bölge Galerkin formülasyonuna eşdeğerdir. Cebirsel sistem kesilerek çözülür ve bilinmeyenlerin cebrik üstü yakınsaması önerilen algoritma ile elde edilir. Nümerik sonuçlar, değişkenlerine ayrıştırma yöntemine dayanan dairesel silindirlerin çok iyi bilinen bir algoritması aracılığı ile doğrulanmıştır [7-8]. Nümerik sonuçlar, önerilen kesilmemiş algoritma sayesinde cebrik üstü yakınsamayı göstermektedir. [10] ve [11]'de TM ve TE uyarımları altında düzgün bir şekilde parametreleştirilmiş kesit alanlı eğriler ile empedans silindirleri üzerindeki EAİD ve MAİD dikkate alınmıştır. İntegral denklemlerin çekirdeklerinin doğru hesaplanmasıyla cebrik üstü yakınsama elde etmek mümkündür. Empedans değeri çok küçük veya çok büyük olmadıkça, bu denklemler ikinci türden Fredholm denklemleridir ve kararlı ayrıklaştırma prosedürlerine tabi olması gerekir. Aksi takdirde nümerik kararlılık analitik regülarizasyonu gerektirir. Bu noktalara kanıt gösterecek sayısal sonuçlar verilmiştir.

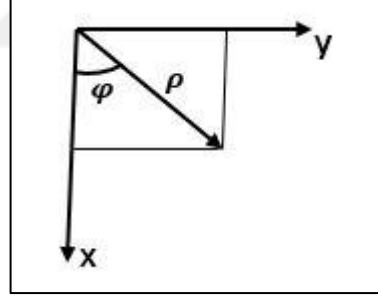
İki boyutta, TM ve TE kutuplu elektromanyetik dalgaların mükemmel iletken bir yarım uzay üzerindeki, empedans dairesel silindirlere saçılması için seri çözümlerin ve sınır integral denklemlerinin nasıl yazılması gerektiği açığa çıkarılması bu tezin çalışma konusunu oluşturmaktadır. İlk olarak bu saçılma problemi için cebrik denklem sistemi, daha önce boş uzay için geliştirilen sistemlerin ışığında [7]-[11], değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile elde edilen sonsuz seriler biçiminde ifade edilen alanlardan hem de Green özdeşlikleri aracılığı ile Helmholtz denklemlerinden elde edilen sınır integral denklemlerinin ayrıklaştırılmasından elde edilecektir. Sonra yarım uzay sınırı üzerindeki koşulu, boş uzayda sağlayan denk problem ve Green fonksiyonu aranacaktır. Daha sonra MATLAB üzerinde boş uzay için geliştirilen değişkenlerine ayrıştırma ve sınır integral denklem çözümleri, bulunan denk problem ve Green fonksiyonuna uyarlanacaktır. Böylece, mükemmel iletken bir yarım uzay üzerindeki sınır koşulları ve dairesel silindir üzerinde indüklenen elektrik ve manyetik yüzey akımları nümerik olarak hesaplanarak sunulacaktır. Her iki çözüm sayesinde ulaşılan elektrik ve manyetik yüzey akımları çözümün doğruluğunu gösterecek karşılaştırmalara imkan verirler. Elde edilen veriler ışığında TM ve TE durumunda mükemmel iletken yarım uzay için hedeflenen açılımın mevcut olduğuna ilişkin sonuçlar tezin konusunu oluşturmaktadır.

2. DAİRESEL SİLİNDİRDEN SAÇILAN ALAN İFADELERİ

2.1. Değişkenlerine Ayırıştırma Yöntemi ile Dairesel Silindirden Saçılan Alanın Seri İfadesi

Bir elektromanyetik dalga probleminin kaynakların uzağındaki çözümü, Helmholtz denkleminin lineer bağımsız homojen çözümlerinin kombinasyonları olarak ifade edilebilir. 2 boyutlu bir engelden saçılan monokromatik dalganın homojen Helmholtz denklemini sağladığı çok iyi bilinmektedir. Bundan dolayı, homojen Helmholtz denkleminin çözümünü bilmek elektromanyetik dalga problemlerinin çözümü için çok büyük önem taşımaktadır. Önemli bir çözüm yöntemi olan değişkenlerine ayırıştırma yöntemini kullanarak bir dairesel silindirden saçılan alanların ifadesine ulaşılabilir [14]-[15].

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \quad (2.1)$$



Şekil 2.1: Kutupsal koordinatlar.

Eşitlik (2.1) ile verilen homojen Helmholtz denklemini silindirik koordinatlarda iki boyutta kutupsal koordinatlarıyla (Şekil 2.1'e bakınız) yazılırsa

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right\} \phi = 0 \quad (2.2)$$

elde edilir. Bilinmeyen fonksiyon değişkenlerine ayırırsa şu hali alır:

$$\phi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \quad (2.3)$$

Eşitlik (2.3) ile verilen çarpımda $R(\rho)$ ve $\Phi(\varphi)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (2.5)$$

eşitliklerini sağlamaları durumunda, Eşitlik (2.3) de, eşitlik (2.2)'yi sağlar.

Eşitlik (2.5)'in çözümü

$$\Phi(\varphi) = A e^{jn\varphi}, \quad n \in Z \quad (2.6)$$

olur. Burada $\Phi(\varphi)$ fonksiyonu periyodik olması gerektiğinden n tam sayı olmak zorundadır.

Eşitlik (2.4) ile verilen Bessel diferansiyel denklemin çözümü de

$$R(\rho) = B J_n(k\rho) + C H_n^{(2)}(k\rho) \quad (2.7)$$

olur.

Değişkenlerinde ayrıştırma yöntemi ile elde edilen Eşitlik (2.6) ve (2.7) çözümlerinin sayesinde homojen Helmholtz denkleminin

$$\phi(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n J_n(k\rho) + R_n H_n^{(2)}(k\rho) \right] e^{jn\varphi} \quad (2.8)$$

çözümüne ulaşılır. Burada

$$\phi^D(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n J_n(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (2.9)$$

$$\phi^{iL}(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (2.10)$$

$e^{j\omega t}$ zaman bağımlılığında, eşitlik (2.9), duran dalgalar biçimindeki alanları temsil eder ve eşitlik (2.10) da ilerleyen dalgalar biçimindeki alanları,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + jk\phi \right) \quad (2.11)$$

ile verilen Sommerfeld ışınım koşulunu sağlayarak saçılan alanları temsil eder. Ayrıca T_n ve R_n , sırasıyla duran ve ilerleyen alanların bilinmeyen katsayılarıdır. Eşitlik (2.9)'daki J_n ve eşitlik (2.10)'daki $H_n^{(2)}$, sırasıyla Bessel fonksiyonu ve ikinci tür Hankel fonksiyonudur ve ortamın dalga sayısını gösteren k da

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (2.12)$$

ile tanımlanır.

2.2. Tek Dairesel Silindir için İntegral Denklem ve Seri Çözüm Formülasyonları Arasındaki İlişkiler

Tek dairesel sınır için gelen alanların ve saçılan alanların ifadesine integral gösterilimde 2 boyutta homojen Helmholtz denklemini sağlayan Green fonksiyonunu yerine yazıp, toplamsallık teoremi uygulayarak ulaşılabılır [16]. Bu bölümde yapılan işlemlerde gelen ve saçılan alanın integral gösterilimi kullanılarak, 2.1 bölümünde değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile bulunan gelen ve saçılan alanın seri ifadelerine nasıl geçişin yapılacağı anlatılacaktır.

Şekil 2.2'deki gibi dairesel silindirlere saçılan alanlara bakarken gözlem noktası olan P 'nin dairesel silindirin içinde veya dışında bir nokta olması anahtar bir öneme sahiptir. Çünkü bu durum dikkate alınarak Green fonksiyonuna toplamsallık teoremi uygulanır.

Saçılan alanlara dair integral gösterilimin genel ifadesi

$$\chi(\rho, \varphi) = \int_C \left[g_{QP} - Z_Q \frac{\partial g_{QP}}{\partial \nu} \right] F(C) dC, \quad P \in \Omega \quad (2.13)$$

ile verilir.

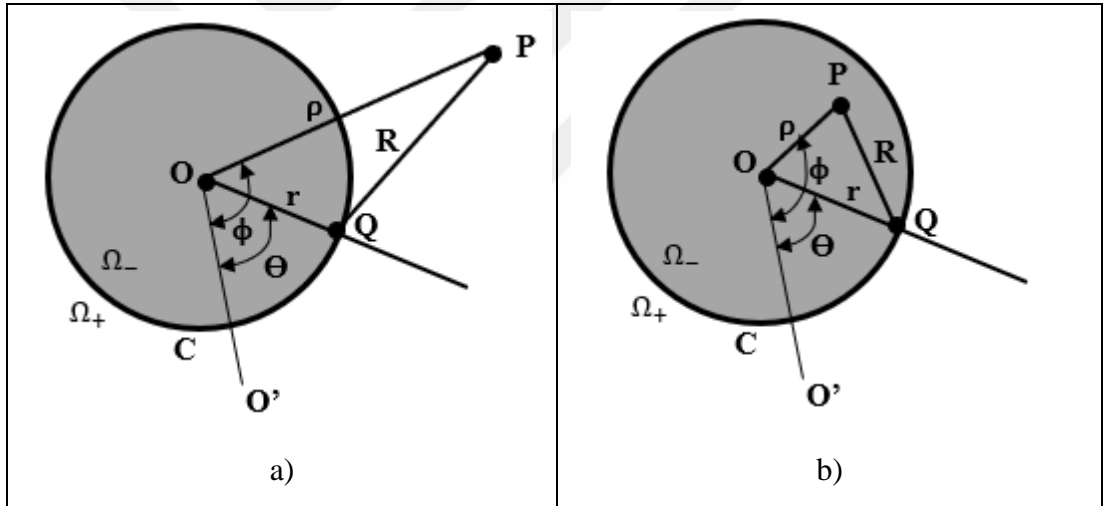
Burada Z_Q empedansı, alan ile alanın normal yöndeki türevinin oranıdır;

$$Z_Q = Z(C) = \Psi(r, \theta) / \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \nu} \quad (2.14)$$

$F(C)$, genliği alanın normal türevine eşit olan eşdeğer yüzey akımıdır ve dairesel silindir yüzeyi üzerinde Fourier serisine açılabilir:

$$F(C) = - \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \nu} \quad (2.15.a)$$

$$F(C) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\tau} \quad (2.15.b)$$



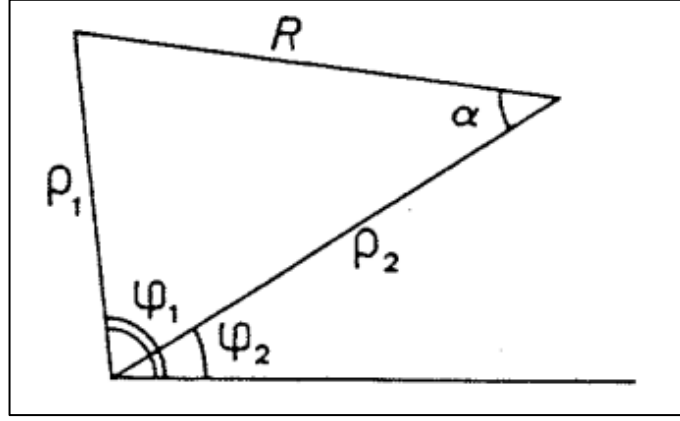
Şekil 2.2: a) $\rho \geq r$ durumu, b) $\rho \leq r$ durumu.

2 boyutta homojen Helmholtz denklemini sağlayan Green fonksiyonu

$$g_{QP} = -(j/4)H_0^{(2)}(kR) \quad (2.16)$$

ile verilir [17].

Eşitlik (2.13)'deki Green fonksiyonu g_{QP} , Şekil 2.2'deki Q noktasında bulunan bir noktasal kaynak tarafından saçılan alan olarak düşünülebilir ve bu seri ifadeyi bulmak için toplamsallık teoremini kullanmak gerekir.



Şekil 2.3: Toplamsallık teoremi ile ilgili koordinatlar.

Şekil 2.3'e istinaden toplamsallık teoremine ;

$$Z_n(kR) = e^{jn\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(k\rho_2) J_m(k\rho_1) e^{-jm(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad \rho_1 \leq \rho_2 \quad (2.17)$$

ulaşılır [18].

Gözlem noktası P'nin sırasıyla dairesel silindirin dışında veya içinde gösterilen Şekil 2.2.a) ve Şekil 2.2.b) referans alınarak eşitlik (2.17) ile ifade edilen toplamsallık teoremi, eşitlik (2.6) ile verilen Green fonksiyonu g_{QP} 'ye uygulanırsa

$$j4g_{QP} = H_0^{(2)}(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) H_m^{(2)}(k\rho) e^{jm[\varphi-\theta]}, \quad \rho \geq r \quad (2.18.a)$$

$$j4g_{QP} = H_0^{(2)}(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m^{(2)}(kr) J_m(k\rho) e^{jm[\varphi-\theta]}, \quad \rho \leq r \quad (2.18.b)$$

seri ifadelerine ulaşılır.

Eşitlik (2.14), (2.15.b) ve (2.18.a), eşitlik (2.13)'de yerlerine yazılıp

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (2.19)$$

Eşitlik (2.19)'da ifade edilen ortogonalliğin de yardımıyla Şekil 2.2.a)'da görülen dairesel silindirin yarıçapı $r = a$ alınarak C eğrisi üzerinden integral alınırsa;

$$\Phi_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2\pi a f_m \widetilde{J}_m(k, a)] H_m^{(2)}(k\rho) e^{jm\varphi}, \quad (\rho \geq r) \quad (2.20.a)$$

$$\Phi_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m H_m^{(2)}(k\rho) e^{jm\varphi}, \quad (\rho \geq r) \quad (2.20.b)$$

seri ifadesi elde edilir. Bu da Bölüm 2.1'de değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile bulunan eşitlik (2.10)'daki saçılan alanın seri ifadesine denktir.

Eşitlik (2.20.a)'da görülen $J_m(\widetilde{k}, a)$ fonksiyonunu daha açık bir şekilde ifade edilirse;

$$j4J_m(\widetilde{k}, a) = J_m(ka) - \frac{1}{2}k[J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)]Z(C) \quad (2.21.a)$$

$$j4J_m(\widetilde{k}, a) = J_m(ka) - kJ_m'(ka)Z(C) \quad (2.21.b)$$

Eşitlik (2.21.a) ve (2.21.b)'ye ulaşılır.

Eşitlik (2.14), (2.15.b) ve (2.18.b), eşitlik (2.13)'de yerlerine yazılıp eşitlik (2.19)'da ifade edilen ortogonalliğin de yardımıyla Şekil 2.2.b)'de görülen dairesel silindirin yarıçapı $r = a$ alınarak C eğrisi üzerinden integral alınırsa;

$$\Phi_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2\pi a f_m \widetilde{H}_m^{(2)}(k, a)] J_m(k\rho) e^{jm\varphi}, \quad (\rho \leq r) \quad (2.22.a)$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m J_m(k\rho) e^{jm\varphi}, \quad (\rho \leq r) \quad (2.22.b)$$

seri ifadesi elde edilir. Bu da Bölüm 2.1'de değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile bulunan Eşitlik (2.9)'daki gelen alanın seri ifadesine denktir.

Eşitlik (2.22.a)'da görülen $\widetilde{H}_m^{(2)}(k, a)$ fonksiyonu daha açık bir şekilde ifade edilirse;

$$j4\widetilde{H}_m^{(2)}(k, a) = H_m^{(2)}(ka) - \frac{1}{2}k[H_{m-1}^{(2)}(ka) - H_{m+1}^{(2)}(ka)]Z(C) \quad (2.23.a)$$

$$j4\widetilde{H}_m^{(2)}(k, a) = H_m^{(2)}(ka) - kH_m^{(2)'}(ka)Z(C) \quad (2.23.b)$$

Eşitlik (2.23.a) ve (2.23.b)'ye ulaşılır.

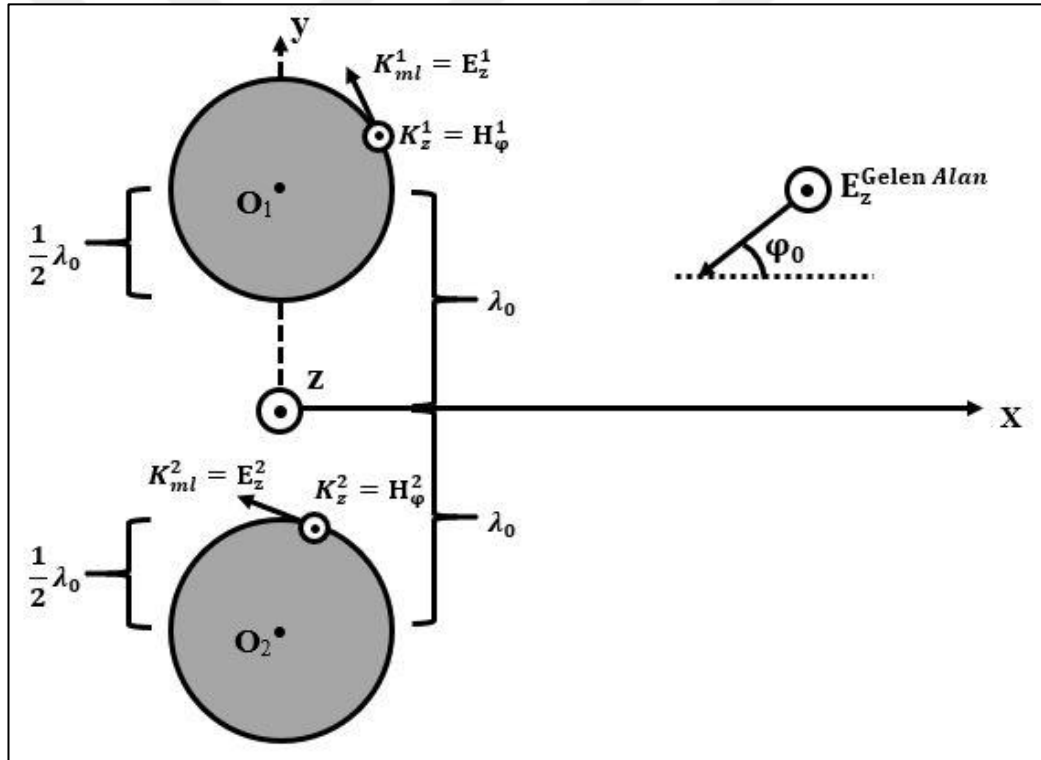


3. BOŞ UZAYDA PARALEL İKİ DAİRESEL SİLİNDİRDEN SAÇILMA

3.1. TM Kutuplu Elektromanyetik Dalga

3.1.1. Seri Çözüm

Ele alınan problemin geometrik yapısı Şekil 3.1 ile verilmiştir. Burada O_z eksenini boyunca homojen olan iki paralel dairesel empedans silindirin oluşturduğu geometri gösterilmiştir. Silindirlerin, E-kutuplu (TM) $E_z^{Gelen Alan}$ gelen alanı ile uyarıldığı ve ω açısal frekans olmak üzere zaman bağımlılığının $e^{j\omega t}$ olduğu düşünülmüştür.



Şekil 3.1: TM durumunda iki paralel dairesel empedans silindirin geometrik yapısı.

Bu empedans silindirlerin sınırları üzerinde sağlanması gereken empedans sınır koşulları

$$\hat{n} \times \vec{E} = \eta_m \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{H}), \quad m = 1,2 \quad (3.1)$$

ile verilir [19]. Burada, \hat{n} silindirin yüzeyinden dışa doğru olan birim vektörü, \vec{E} elektrik alan vektörünü, \vec{H} manyetik alan vektörünü ve η_m de m. silindirin sınırına ilişkin yüzey empedansı değerini temsil eder.

Bilindiği üzere silindirik koordinatlarda, bir elektromanyetik dalga TM ve TE kutuplu dalgaların süperpozisyonu olarak ifade edilebilir [18]. Ayrıca z eksenini boyunca sonsuz uzunluktaki empedans silindirleri üzerindeki tüm fonksiyonlar z'den bağımsız olduğundan problem iki boyuta indirgenir. Bu durumda TM dalgalarının bileşenlerinin tümü, E_z bileşeni cinsinden

$$E_\rho = E_\varphi = H_z = 0; \quad H_\varphi = -\frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}; \quad H_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (3.2)$$

biçiminde ifade edilir. Burada, μ ortamın manyetik geçirgenliğini ve (ρ, φ, z) de ilişkili silindirik koordinatları ifade etmektedir. Ancak problem daha önce de ifade edildiği gibi z'den bağımsız olduğu için bu koordinatlar, (ρ, φ) şeklinde kutupsal koordinatlar cinsinden ifade edilerek iki boyuta indirgenir. Bu durumda her bir silindire ilişkin koordinat sistemi $m = 1,2$ olmak üzere $O_m z$ ile ve koordinat noktaları da (ρ_m, φ_m) şeklinde ifade edilir. Eşitlik (3.2), eşitlik (3.1)'de yerine konulacak olursa

$$\left[E_z^t + \eta_m \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_z^t}{\partial \rho_m} \right]_{\rho_m=a_m} = 0, \quad m = 1,2 \quad (3.3)$$

gibi bir m. silindirin sınırında sağlanması gereken koşula ulaşılır. Eşitlik (3.3)'de a_m , m. silindirin yarıçapını, $E_z^t = E_z^{Gelen} + E_z^{Saçılan}$ olmak üzere gelen ve saçılan alanların toplamını ifade etmektedir ve m. silindirin sınırına gelen düzlemsel dalgaya ilişkin alan ifadesi

$$E_z^{Gelen Alan}(\rho_m, \varphi_m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \quad (3.4)$$

gibi seriler ile gösterilebilir [18], φ_0 gelen düzlemsel dalganın geliş açısı olmak üzere $T_n^{(0)} = e^{jn(\frac{\pi}{2} - \varphi_0)}$ gibi bir bilinen katsayıdır.

2. bölümde bir dairesel silindirden saçılan alanın seri ifadesi daha önce çıkarılmıştı. Bu seri ifadelerini kullanarak

$$E_z^{sc}(\rho_v, \varphi_v) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m}, \quad \rho_v > a_v, \quad v = 1, 2 \quad (3.5)$$

ile herhangi bir (ρ_v, φ_v) noktasındaki saçılan alanların seri ifadesine ulaşılır. Burada, $R_n^{(m)}$ m. silindirden saçılan alanın katsayısını ve a_v ise v indisli silindirin yarıçapını göstermektedir. Açıktır ki, saçılan alanın ifadesi, iki silindirden saçılan alanların toplamı biçiminde olmaktadır.

İki silindir de farklı koordinat sistemine sahip olduklarından, bir silindirin sınırı üzerinde, o silindirin koordinat sistemine göre yazılan sınır koşulunda, diğer silindirden saçılarak bu sınıra gelen alanı ifade etmek için Graf'ın Bessel ve Hankel fonksiyonları için eşitlik (3.6) ile verilen toplamsallık teoremi kullanılır [15].

$$Z_n(k\rho_p) e^{jn\varphi_p} = \begin{cases} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(n-s)\theta_{pq}} J_{n-s}(kd_{pq}) Z_s(k\rho_q) e^{js\varphi_q}, & d_{pq} < \rho_q \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(n-s)\theta_{pq}} Z_{n-s}(kd_{pq}) J_s(k\rho_q) e^{js\varphi_q}, & d_{pq} > \rho_q \end{cases} \quad (3.6)$$

Sınır koşulu uygulanan silindirin koordinat eksenine göre eşitlik (3.6)'da gösterilen toplama teoremi sayesinde diğer bir silindirden saçılan alan yazılır ise

$$H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(n-s)\theta_{mv}} H_{n-s}^{(2)}(k_0 d_{mv}) J_s(k_0 \rho_v) e^{js\varphi_v}, \quad (3.7)$$

$$d_{mv} > \rho_v$$

ile verilen genelleştirilmiş ifadeye ulaşılır. Burada, $(m, v) \in \{1, 2\}$ ve $m \neq v$ olmak üzere v sınır koşulu uygulanacak silindiri, m diğer silindirden saçılan alanı, $\mathbf{d}_{mv} = \mathbf{O}_v - \mathbf{O}_m$ dairesel silindirlerin merkezlerini birleştiren vektörü, d_{mv} bu merkezler arasındaki uzaklığı ve θ_{mv} de bu merkezleri birleştiren doğrunun x eksenine yaptığı açıyı temsil eder. Eşitlik (3.7) ile verilen ifade, silindirlerin sınırlarının çok yakın

civarında, $d > \rho_v$ olduğu her noktada geçerlidir. Böyle bir civar, Şekil 3.1 ile gösterilen geometri için sınırlar kesişmediği sürece a_1 ve a_2 silindirlere yarıçapları olmak üzere $d > a_1 + a_2$ olduğundan her zaman mevcuttur. Bu yüzden, bu yakın civardaki eşitlik (3.5) ile verilen saçılan alan ifadesi, eşitlik (3.7)'nin de yardımıyla yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
& E_z^{SC}(\rho_m, \varphi_m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(v)} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(n-s)\theta_{vm}} H_{n-s}^{(2)}(k_0 d_{vm}) J_s(k_0 \rho_m) e^{js\varphi_m} \right], \\
& m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitlikteki toplamsallık teoremi uygulanan 2. terimde $n \leftrightarrow s$ koyularak yeniden düzenlenir ise

$$\begin{aligned}
& E_z^{SC}(\rho_m, \varphi_m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \\
&+ \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_s^{(v)} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(s-n)\theta_{vm}} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d_{vm}) J_n(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_s^{(v)} e^{j(s-n)\theta_{vm}} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d_{vm}) J_n(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olur. Bu ifade daha da geliştirilmek istenir ise

$$T_n^{vm} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_s^{(v)} e^{j(s-n)\theta_{vm}} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d_{vm}) \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
E_z^{sc}(\rho_m, \varphi_m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(vm)} J_n(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m}, \quad m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v
\end{aligned} \tag{3.11}$$

bağıntısına ulaşılmış olunur.

Eşitlik (3.4) ile verilen gelen düzlemsel dalga ifadesi ile Eşitlik (3.10) ile verilen saçılan alan ifadesi toplanırsa

$$\begin{aligned}
E_z^t(\rho_m, \varphi_m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(vm)} J_n(k_0 \rho_m) e^{jn\varphi_m}, \quad m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ile elektrik alanın toplam ifadesine ulaşılmış olunur ve m. silindirin sınırında sağlanması gereken Eşitlik (3.3) ile verilen sınır koşuluna toplam elektrik alanı veren bu ifade yerine konulursa

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho_m) + R_n^{(m)} H_n^{(2)}(k_0 \rho_m) + T_n^{(vm)} J_n(k_0 \rho_m) \right] e^{jn\varphi_m} \right. \\
&\quad \left. + \eta_m \frac{jk_0}{\omega \mu_0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J'_n(k_0 \rho_m) + R_n^{(m)} H_n^{(2)'}(k_0 \rho_m) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + T_n^{(vm)} J'_n(k_0 \rho_m) \right] e^{jn\varphi_m} \right\} \right] \Big|_{\rho_m=a_m} = 0, \\
&m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ifadesine ulaşılır. Burada $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ boşluktaki dalgasını temsil eder ve $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

ve $\beta = \frac{\eta_m}{\eta_0}$ olmak üzere bu eşitlik daha da genelleştirilmiş şekilde yazılır ise

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ R_n^{(m)} \left[H_n^{(2)}(k_0 a_m) + j\beta H_n'^{(2)}(k_0 a_m) \right] \right. \\
& \quad \left. + T_n^{(vm)} \left[J_n(k_0 a_m) + j\beta J_n'(k_0 a_m) \right] \right\} \\
& = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} \left[J_n(k_0 a_m) + j\beta J_n'(k_0 a_m) \right], \\
& m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v
\end{aligned} \tag{3.14}$$

iki silindirin sınırları için yazılmış Eşitlik (3.14) ile verilen denkleme ulaşılmış olunur. Bu ifade

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{H_n^{(2)}}(a_m) & \overline{J_{n,s}^{\{vm\}}}(a_m) \\ \overline{J_{n,s}^{\{mv\}}}(a_v) & \overline{H_n^{(2)}}(a_v) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} R_n^{(m)} \\ R_n^{(v)} \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -T_n^{(0)} \overline{J_n}(a_m) \\ -T_n^{(0)} \overline{J_n}(a_v) \end{bmatrix}}_b; \tag{3.15}$$

$m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v$

gibi bir matris sistemi olarak yazılır ise birinci tip bir lineer cebrik denklem sistemi (LCDS1) elde edilir. Burada

$$\overline{Z}_n(\rho_m) = Z_n(k_0 \rho_m) + j\beta Z_n'(k_0 \rho_m); \quad m = 1, 2 \tag{3.16}$$

ve

$$\overline{Z_{n,s}^{\{vm\}}}(\rho_m) = \overline{Z}_n(\rho_m) \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(s-n)\theta_{vm}} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d_{vm}); \tag{3.17}$$

$m, v = 1, 2 \text{ ve } m \neq v$

olmak üzere $Z_n(t)$, $J_n(t)$ ve $H_n^{(2)}(t)$ 'yi temsil eder.

Eşitlik (3.15) ile verilen birinci tip bir lineer cebrik denklem sistemi (LCDS1), Bessel ve Hankel fonksiyonlarının kötü davranışları nedeni ile, Analitik Regülerizasyon Metodu (ARM)'nin yardımıyla iyi koşullu bir ikinci tip lineer cebrik denklem sistemine (LCDS2) indirgenmesi gerekir. Kullanılacak yarı analitik ve yarı nümerik yöntemler 5. bölümde tartışılmıştır.

3.1.2. İntegral Denklem Çözüm

Ele alınan problemin geometrik yapısı Şekil 3.1 ile verilmiştir. Tek bir dielektrik dairesel sınır için sınır integral denklemleri, [17]'nin 3. Bölüm'ünde yer verilmiştir. Bu sınır integral denklemleri denklik ilkesi uyarınca genelleştirilerek, bu bölümde ele alınan birden fazla olan empedans sınırlarına ilişkin integral denklemler elde edilmiştir. Öncelikle, problemin doğası gereği dairesel silindirlerin geçirgen sınırlara sahip olduğu düşünülerek integral denklemler elde edilecek ve daha sonra eşitlik (3.1) ile verilen opak empedans sınır koşulu uyarınca bu integral denklemler yeniden düzenlenerek iki empedans silindirine ilişkin integral denklemler elde edilmiş olacaktır. [12]'de dielektrik dairesel silindir ilişkin integral denklemler elde edilmiştir. Kısa ve öz olması açısından sadece, bu integral denklemler sayesinde elde edilecek paralel iki empedans silindirine ilişkin integral denklemlere, yer verilecektir.

O_z eksenini boyunca sonsuz uzunlukta olan silindirler için vektör elektrik yüzey akımı \vec{K} ve vektör manyetik yüzey akımı \vec{K}_m .

$$\vec{K} = K_z \hat{z} + K_l \hat{l}; \quad \vec{K}_m = K_{mz} \hat{z} + K_{ml} \hat{l} \quad (3.22)$$

ile ifade edilir. Burada \hat{z} ve \hat{l} , bileşenleri sırasıyla (K_z, K_{mz}) ve (K_l, K_{ml}) olmak üzere, teğet birim vektörlerini temsil eder. Bu yüzey akımları ile yüzey elektrik alanı \vec{E} ve manyetik alanı \vec{H} arasındaki ilişki

$$\vec{K} = \hat{n} \times \vec{H}; \quad \vec{K}_m = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (3.23)$$

ile gösterilebilir ve \hat{n} silindirin yüzeyinden dışa doğru olan birim vektörünü temsil eder.

TM dalgalarının bileşenlerinin tümü, E_z bileşeni cinsinden

$$E_\rho = E_l = H_z = 0; \quad H_l = -\frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}; \quad H_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilir ve toplam teğet alanları ile yüzey akımları arasındaki ilişki, Eşitlik (3.24) sayesinde, Eşitlik (3.22)'yi Eşitlik (3.23)'te yerine koyarak

$$K_{mz} = K_l = 0; \quad K_{ml} = E_z; \quad K_z = H_l \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.23)'teki alanlar ile yüzey akımları arasındaki ilişki uyarınca, eşitlik (3.1)

$$\vec{K}_m = -\eta \hat{n} \times \vec{K} \quad (3.26)$$

şeklinde tekrar düzenlenebilir. Eşitlik (3.22), Eşitlik (3.26)'da yerine konulursa, Eşitlik (3.25) uyarınca

$$K_{ml} = \eta K_z \quad (3.27)$$

şeklinde yüzey akımları arasındaki ilişki elde edilmiş olur.

Boş uzay için iki boyutlu skaler Helmholtz denkleminin Green fonksiyonu

$$G = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (3.28)$$

ile verilir ve burada $H_0^{(2)}$ ikinci tipte Hankel fonksiyonunu, $R = |q - p|$ gözlem ve kaynak noktaları arasındaki uzaklığı temsil eder.

TM kutuplu düzlemsel dalga ile aydınlatılan iki paralel dairesel empedans silindiri için $i = 1, 2$ ise, yüzey empedans değerleri η_i , gözlem ve kaynak noktaları sırasıyla q_i ve p_i , yüzeyinde indüklenen elektrik ve manyetik yüzey akımları sırasıyla K_{iz} ve K_{iml} olmak üzere, i. dairesel sınır eğrisi C_i üzerinde elektrik alan integral denklemi (EAİD)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta_1 K_{1z}(q) + j\omega\mu_0 \left[\int_{C_1} K_{1z}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p + \int_{C_2} K_{2z}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p \right] \\ & - \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p + \int_{C_2} \eta_2 K_{2z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p \right] \\ & = E_z^{gelen}(q); \quad q \in C_1^+ \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \eta_2 K_{2z}(q) + j\omega\mu_0 \left[\int_{C_1} K_{1z}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p + \int_{C_2} K_{2z}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p \right] \\
& - \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p + \int_{C_2} \eta_2 K_{2z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p \right] \\
& = E_z^{gelen}(q); \quad q \in C_2^+
\end{aligned} \tag{3.30}$$

gibi bir gösterilime sahiptir.

Öte yandan, i. dairesel sınır eğrisi C_i üzerinde manyetik alan integral denklemi (MAİD)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} K_{1z}(q) + \left[\int_{C_1} K_{1z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p + \int_{C_2} K_{2z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p \right] \\
& - \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1z}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p + \int_{C_2} \eta_2 K_{2z}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p \right] \\
& = H_i^{gelen}(q); \quad q \in C_1^+
\end{aligned} \tag{3.31}$$

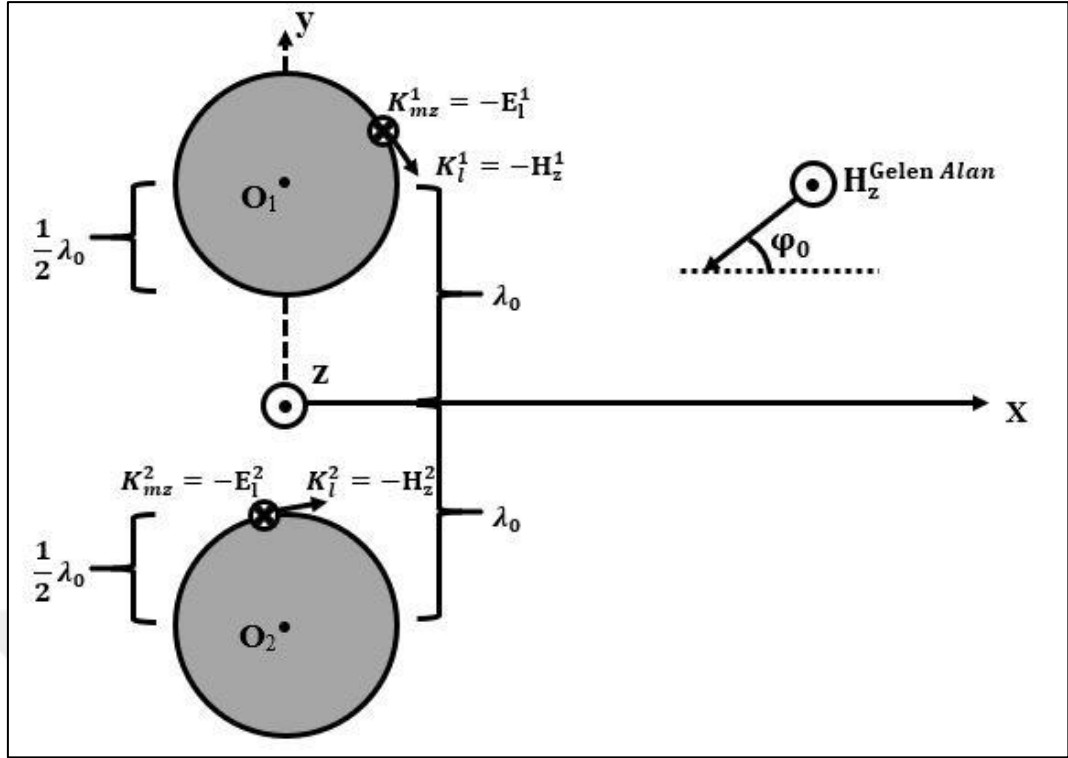
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} K_{2z}(q) + \left[\int_{C_1} K_{1z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p + \int_{C_2} K_{2z}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p \right] \\
& - \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1z}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p + \int_{C_2} \eta_2 K_{2z}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p \right] \\
& = H_i^{gelen}(q); \quad q \in C_2^+
\end{aligned} \tag{3.32}$$

gibi bir gösterileme sahiptir.

3.2. TE Kutuplu Elektromanyetik Dalga

3.2.1. Seri Çözüm

Ele alınan problemin geometrik yapısı Şekil 3.2 ile verilmiştir. Burada \mathbf{O}_z eksenini boyunca homojen olan iki paralel dairesel empedans silindirin oluşturduğu geometri gösterilmiştir. Silindirlerin, H-polarizeli (TE) $H_z^{Gelen Alan}$ gelen alanı ile uyarıldığı ve ω açısal frekans olmak üzere zaman bağımlılığının $e^{j\omega t}$ olduğu düşünülmüştür.



Şekil 3.2: TE durumunda iki paralel dairesel empedans silindirin geometrik yapısı.

TE dalgalarının bileşenlerinin tümü, H_z bileşeni cinsinden

$$H_\rho = H_\varphi = E_z = 0; \quad E_\varphi = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}; \quad E_\rho = -\frac{j}{\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (3.33)$$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik (3.33), silindirlerin sınırları üzerinde sağlanması gereken Eşitlik (3.1) ile verilen empedans sınır koşulunda yerine konulursa

$$\left[H_z^t + \frac{1}{\eta_m} \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z^t}{\partial \rho_m} \right]_{\rho_m=a_m} = 0, \quad m = 1,2 \quad (3.34)$$

m. silindirin sınırında sağlanması gereken sınır koşuluna ulaşılmış olunur. Eşitlik (3.34)'de a_m , m. silindirin yarıçapını, $H_z^t = H_z^{\text{Gelen Alan}} + H_z^{\text{SC}}$ olmak üzere gelen ve saçılan alanların toplamını ifade etmektedir.

TE kutuplu durumda, TM durumunun aksine, Eşitlik (3.34) uyarınca $\beta = \frac{\eta_m}{\eta_0} \rightarrow \beta = \frac{\eta_0}{\eta_m}$ olmak üzere, 3.1.1. bölümde anlatılan TM durumda elde edilen eşitlikler bu bölümde de aynen geçerlidir.

3.2.2. İntegral Denklem Çözüm

TE dalgalarının bileşenlerinin tümü, H_z bileşeni cinsinden

$$H_\rho = H_l = E_z = 0; \quad E_l = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}; \quad E_\rho = -\frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilir ve toplam teğet alanları ile yüzey akımları arasındaki ilişki, Eşitlik (3.35) sayesinde, Eşitlik (3.22)'yi Eşitlik (3.23)'te yerine koyarak

$$K_z = K_{ml} = 0; \quad K_l = -H_z; \quad K_{mz} = -E_l \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.23)'teki alanlar ile yüzey akımları arasındaki ilişki uyarınca, eşitlik (3.1)

$$\vec{K}_m = -\eta \hat{n} \times \vec{K} \quad (3.37)$$

şeklinde tekrar düzenlenebilir. Eşitlik (3.22), Eşitlik (3.37)'da yerine konulursa, Eşitlik (3.36) uyarınca

$$K_{mz} = -\eta K_l \quad (3.38)$$

şeklinde yüzey akımları arasındaki ilişki elde edilmiş olunur.

TE kutuplu düzlemsel dalga ile aydınlatılan iki paralel dairesel empedans silindiri için $i = 1,2$ ise, yüzey empedans değerleri η_i , gözlem ve kaynak noktaları sırasıyla q_i ve p_i , yüzeyinde indüklenen elektrik ve manyetik yüzey akımları sırasıyla K_{il} ve K_{imz} olmak üzere, i . dairesel sınır eğrisi C_i üzerinde elektrik alan integral denklemi (EAİD)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \eta_1 K_{1l}(q) + \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p - \int_{C_2} \eta_2 K_{2l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p \right] \\
& - \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \left[\int_{C_1} K_{1l}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p + \int_{C_2} K_{2l}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p \right] \\
& = E_l^{gelen}(q); q \in C_1^+
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \eta_2 K_{2l}(q) + \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p - \int_{C_2} \eta_2 K_{2l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q} dl_p \right] \\
& - \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \left[\int_{C_1} K_{1l}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p + \int_{C_2} K_{2l}(p) \frac{\partial^2 G(k_0 R_{qp})}{\partial n_q \partial n_p} dl_p \right] \\
& = E_l^{gelen}(q); q \in C_2^+
\end{aligned} \tag{3.40}$$

gibi bir gösterilime sahiptir.

Öte yandan, i. dairesel sınır eğrisi C_i üzerinde manyetik alan integral denklemi (MAİD)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} K_{1l}(q) - j\omega \varepsilon_0 \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1l}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p - \int_{C_2} \eta_2 K_{2l}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p \right] \\
& + \left[\int_{C_1} K_{1l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p + \int_{C_2} K_{2l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p \right] \\
& = H_z^{gelen}(q); q \in C_1^+
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} K_{2l}(q) - j\omega \varepsilon_0 \left[\int_{C_1} \eta_1 K_{1l}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p - \int_{C_2} \eta_2 K_{2l}(p) G(k_0 R_{qp}) dl_p \right] \\
& + \left[\int_{C_1} K_{1l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p + \int_{C_2} K_{2l}(p) \frac{\partial G(k_0 R_{qp})}{\partial n_p} dl_p \right] \\
& = H_z^{gelen}(q); q \in C_2^+
\end{aligned} \tag{3.42}$$

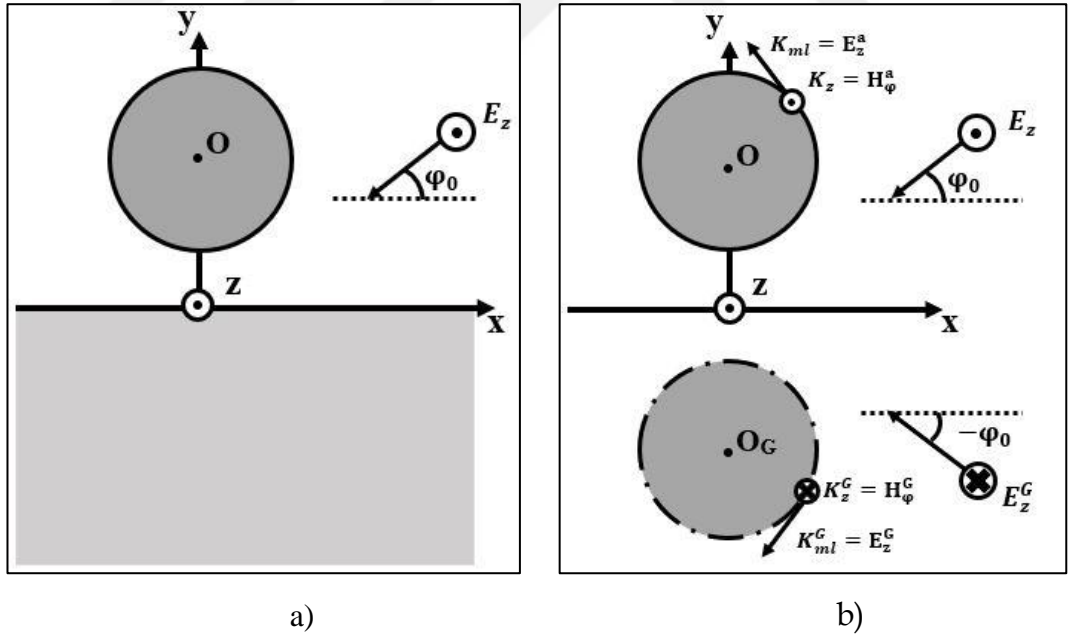
gibi bir gösterilime sahiptir.

4. MÜKEMMEL İLETKEN YARIM UZAYDAKİ DAİRESEL SİLİNDİRDEN SAÇILMA

4.1. TM Kutuplu Elektromanyetik Dalga

4.1.1. Seri Çözüm

Bölüm 2.2.'de Helmholtz denkleminin boş uzay için olan Green fonksiyonu uyarınca yazılan, eşitlik (2.13) ile verilen dairesel silindirden saçılan alanın integral gösterilimi, boş olmayan uzayda da, açıktır ki bu uzaya ilişkin Green fonksiyonu biliniyorsa geçerli kalır. Öncelikle, Şekil 4.1.a ile gösterilen mükemmel iletken bir yarım uzayın dışında bulunan empedans silindirlerden saçılma problemine, boş uzayda bu yarım uzay sınır koşulunu sağlayacak Şekil 4.1.b gibi bir denk problem kurmak gerekmektedir. Bu denk problem görüntü yöntemi aracılığıyla bu yarım uzaydaki silindirin, uzayın diğer yanındaki görüntü silindiri ile kurulur.



Şekil 4.1. a) TM durumunda yarım uzayda bulunan dairesel empedans silindiri, b) Boş uzayda iki empedans silindiri

Bölüm 3.1.1'de incelenen problem ile görüntü yöntemi sayesinde oluşturulan bu denk problem arasındaki tek fark, E-kutuplu (TM) E_z gelen alanı uyarımına ek olarak bu yarım uzaydaki sınır koşulunu sağlamak üzere Şekil 4.1.b'deki E_z^G gibi ikinci bir

uyarım eklemektir. Artık m. silindirin sınırına gelen alan ifadesi, $E_z^{Gelen Alan} = E_z + E_z^G$ olmak üzere

$$E_z^{Gelen Alan} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \quad (4.1)$$

gibi seriler ile gösterilebilir ve denk problem elde edinilmiş olunur [18]. Burada, φ_0 gelen düzlemsel dalğanın geliş açısı olmak üzere $T_n^{(0)} = e^{jn(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)} - e^{jn(\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}$ gibi bir bilinen katsayıdır.

Bu yarım uzayda geçerli Helmholtz denkleminin temel çözümü olan Green fonksiyonu, E-kutuplu (TM) halde Helmholtz denklemini sağlayan ve diğer tüm elektromanyetik alan bileşenlerini yazmaya imkan veren E_z toplam alanının, bu mükemmel iletken yarım uzay sınırında sıfır olması için, aynı sınır koşulunu sağlamalıdır. Görüntü teoremi gereği, boş uzayda Green fonksiyonunun işaret ettiği kaynağın diğer yanındaki görüntüsü sayesinde bu istenen

$$G_{yu} = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R_G) \quad (4.2)$$

biçiminde elde olunur. Burada $R = |q - p|$ olmak üzere gözlem ile kaynak (integrasyon) noktaları arası uzaklığı ve $R = |q - p_G|$ olmak üzere gözlem ile görüntü kaynak noktaları arası uzaklığı temsil eder. Yarım uzaydaki bu Green fonksiyonunu, $\eta = Z_Q$ olmak üzere, Eşitlik (2.13)'te verilen saçılan alanın integral gösterilimde

$$E_z^{sc}(\rho, \varphi) = \int_C \left[G_{yu} - Z_Q \frac{\partial G_{yu}}{\partial r} \right] F(C) dC \quad (4.3)$$

gibi yerine koyarak, silindirik harmoniklerdeki değişim incelenecektir. Bu ifade eşitlik (4.2)'nin sayesinde daha açık bir biçimde yazılırsa

$$E_z^{sc} = \int_C \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R)}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R_G)}_{(2)} \right] \right. \\ \left. - Z_Q \frac{\partial \left[\underbrace{\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R)}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R_G)}_{(2)} \right]}{\partial r} \right\} F(C) dC \quad (4.4)$$

gibi bir ifadeye ulaşılır. Burada (1) ile nitelenen kısım daha önce Bölüm 2.2.'de incelenerek tek dairesel silindirden saçılan alanların silindirik harmonikler cinsinden

$$E_{z1}^{sc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\pi a f_n \widetilde{J}_n(k, a)] H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}, \quad (\rho \geq r) \quad (4.5.a)$$

$$E_{z1}^{sc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}, \quad (\rho \geq r) \quad (4.5.b)$$

gibi bir seri ifadesine ulaşılmıştı. Bu yüzden bu kısımda sadece Eşitlik (4.4)'de verilen (2) ile nitelenen kısım incelenecektir. Şimdi, Eşitlik (2.18.a)'nın yardımıyla (2) ile nitelenen kısım

$$j4G_{yu(2)} = H_0^{(2)}(k_0 R_G) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 r) H_n^{(2)}(k_0 \rho_G) e^{jn[\varphi_G - \theta_G]}, \quad (4.6) \\ \rho_G \geq r$$

gibi seri ifadesine açılır. Bu seri ifade Eşitlik (4.4)'de yerine konulursa

$$j4J_n(\widetilde{k}, r) = J_n(kr) - \frac{1}{2}k[J_{n-1}(kr) - J_{n+1}(kr)]Z(C) \quad (4.7.a)$$

$$j4J_n(\overline{k}, r) = J_n(kr) - kJ_n'(kr)Z(C) \quad (4.7.b)$$

olmak üzere

$$E_{z2}^{S\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho_G) e^{jn\varphi_G} \int_{-\pi}^{\pi} F(C) J_n(\overline{k}, r) e^{-jn\theta_G} dC \quad (4.8)$$

ifadesi elde edilir. Burada $r = a$ ve $dC = r d\theta$ olmak üzere, eşitlik (2.15.b) aracılığıyla

$$E_{z2}^{S\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho_G) e^{jn\varphi_G} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{jm\theta} \right] J_n(\overline{k}, a) e^{-jn\theta_G} a d\theta \quad (4.9)$$

olur. Görüntü yöntemi sayesinde $\theta_G = -\theta$ olmak üzere, bu ifade

$$E_{z2}^{S\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a H_n^{(2)}(k_0\rho_G) e^{jn\varphi_G} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_m J_n(\overline{k}, a) e^{j(m+n)\theta} d\theta \right] \quad (4.10)$$

olur.

Eşitlik (2.19) ile verilen ortogonalliğin yardımıyla bu ifade

$$E_{z2}^{S\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a H_n^{(2)}(k_0\rho_G) e^{jn\varphi_G} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_{-n} J_n(\overline{k}, a) e^{j(m+n)\theta} d\theta \right] \quad (4.11)$$

$$E_{z2}^{S\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\pi a f_{-n} J_n(\overline{k}, a)] H_n^{(2)}(k_0\rho_G) e^{jn\varphi_G} \quad (4.12)$$

olur. Burada

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (4.13)$$

olmak üzere, bu ifade tekrar düzenlenir ise

$$E_{z2}^{SC} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\pi a f_{-n} \widetilde{J_{-n}(k, a)} (-1)^{-n}] H_n^{(2)}(k_0 \rho_G) e^{jn\varphi_G} \quad (4.14.a)$$

$$E_{z2}^{SC} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{-n} (-1)^{-n}] H_n^{(2)}(k \rho_G) e^{jn\varphi_G} \quad (4.14.b)$$

(2) ile nitelenen teriminde artık seri ifadesine ulaşılmış olunur.

Yarım uzay Green fonksiyonu sayesinde dairesel silindirden saçılan alan ifadesi,

$$E_z^{SC} = E_{z1}^{SC} - E_{z2}^{SC} \quad (4.15)$$

olmak üzere

$$E_z^{SC} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{-n} (-1)^{-n+1}] H_n^{(2)}(k_0 \rho_G) e^{jn\varphi_G} \quad (4.16)$$

olur.

Eşitlik (3.7) ile verilen toplamsallık teoremi sayesinde

$$H_n^{(2)}(k_0 \rho_G) e^{jn\varphi_G} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(n-s)\theta} H_{n-s}^{(2)}(k_0 d) J_s(k_0 \rho) e^{js\varphi} \quad (4.17)$$

eşitliği elde edilir. Burada, $\mathbf{d} = \mathbf{O}_G - \mathbf{O}$ dairesel silindirlerin merkezlerini birleştiren vektörü, d bu merkezler arasındaki uzaklığı ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere bu merkezleri birleştiren doğrunun x eksenini ile yaptığı açıyı temsil eder.

Eşitlik (4.17) ile verilen saçılan alan ifadesi, Eşitlik (4.18)'nin de yardımıyla yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
E_z^{S\zeta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{-n} (-1)^{-n+1}] \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(n-s)\theta} H_{n-s}^{(2)}(k_0 d) J_s(k_0 \rho) e^{js\varphi} \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitlikteki toplamsallık teoremi uygulanan 2. terimde $n \leftrightarrow s$ koyularak yeniden düzenlenir ise

$$\begin{aligned}
E_z^{S\zeta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \\
&+ \sum_{s=-\infty}^{\infty} [R_{-s} (-1)^{-s+1}] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(s-n)\theta} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d) J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_{-s} e^{j(s-n)\theta} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d) (-1)^{-s+1} J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olur. Bu ifade daha da genelleştirilmek istenir ise

$$R_n^G = \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_{-s} e^{j(s-n)\theta} H_{s-n}^{(2)}(k_0 d) (-1)^{-s+1} \tag{4.20}$$

olmak üzere

$$E_z^{S\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^G J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \tag{4.21}$$

bağıntısına ulaşılmış olunur.

Eşitlik (4.1) ile verilen gelen düzlemsel dalga ifadesi ile Eşitlik (4.22) ile verilen saçılan alan ifadesi toplanırsa

$$E_z^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^G J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \quad (4.22)$$

ile elektrik alanının toplam ifadesine ulaşılmış olunur ve silindirin sınırında sağlanması gereken Eşitlik (3.3) ile verilen sınır koşulunda toplam elektrik alanı veren bu ifade yerine konulursa

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho) + R_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) + R_n^G J_n(k_0 \rho) \right] e^{jn\varphi} + \eta_m \frac{jk_0}{\omega \mu_0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J'_n(k_0 \rho) + R_n H_n^{(2)'}(k_0 \rho) + R_n^G J'_n(k_0 \rho) \right] e^{jn\varphi} \right\} \right] \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (4.23)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ boşluktaki dalga sayısını temsil eder ve $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ ve $\beta = \frac{\eta_m}{\eta_0}$ olmak üzere bu eşitlik daha da genelleştirilmiş şekilde yazılır ise

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ R_n \left[H_n^{(2)}(k_0 a) + j\beta H_n^{(2)'}(k_0 a) \right] + R_n^G \left[J_n(k_0 a) + j\beta J_n'(k_0 a) \right] \right\} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} \left[J_n(k_0 a) + j\beta J_n'(k_0 a) \right] \quad (4.24)$$

silindirin sınırı için yazılmış Eşitlik (4.25) ile verilen denkleme ulaşılmış olunur. Bu ifade

$$\underbrace{\left[H_n^{(2)}(a) + \bar{J}_{n,s}(a) \right]}_A \underbrace{\left[R_n \right]}_x = \underbrace{\left[-T_n^{(0)} \bar{J}_n(a) \right]}_b; \quad (4.25)$$

gibi bir matris sistemi olarak yazılır ise birinci tip bir lineer cebrik denklem sistemi (LCDS1) elde edilir. Burada

$$\overline{Z}_n(z) = Z_n(k_0z) + j\beta Z'_n(k_0z); \quad (4.26)$$

ve

$$\overline{Z}_{n,s}(z) = \overline{Z}_n(z) \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{j(s-n)\theta} H_{s-n}^{(2)}(k_0d)(-1)^{-s+1} \quad (4.27)$$

olmak üzere $Z_n(z)$, $J_n(z)$ ve $H_n^{(2)}(z)$ 'yi temsil eder.

4.1.2. İntegral Denklem Çözüm

Bölüm 3.1.2'de incelenen problem ile görüntü yöntemi sayesinde oluşturulan Şekil 4.1.b ile gösterilen bu denk problem arasındaki tek fark, E-kutuplu (TM) E_z gelen alanı uyarımına ek olarak bu yarım uzaydaki sınır koşulunu sağlamak üzere Şekil 4.1.b'deki E_z^G gibi ikinci bir uyarım eklemektir. Denk problem için silindirlerin sınırına gelen alan ifadesi daha önce eşitlik (4.1) ile verilmişti ve bu gelen alan ifadesini yerine koyarak artık denk problem elde edilir.

TM durumunda mükemmel iletken yarım uzay için olan Green fonksiyonu eşitlik (4.2) ile gösterilmişti. Bu yarım uzay Green fonksiyonunu, eşitlik (3.29) ile verilen C_1 eğrisi sınırı üzerinden yazılmış olan EAİD'de görülen Green fonksiyonunda yerine koymakla, artık görüntü yöntemi sayesinde oluşturulan denk problemdeki görüntü silindirini kullanmadan, bu integral denklem çözülebilir duruma gelir. Bu yarım uzay Green fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar ve denk problem ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak birbirleriyle uyumlu olduğu ileriki 4.1.3. Bölümünde gösterilecektir.

Eşitlik (4.2) ile verilen Green fonksiyonu, Eşitlik (3.29) ile verilen (EAİD)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta K_z(q) + j\omega\mu_0 \left\{ \int_C K_z(p) G_{yu} dl_p \right\} - \left\{ \int_C \eta K_z(p) \frac{\partial G_{yu}}{\partial n_p} dl_p \right\} \\ & = E_z^{gelen}(q); \quad q \in C^+ \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitliği elde edilir. Burada η yarım uzayın dışındaki esas empedans silindirin empedans değeri olmak üzere, TM durumunda $K_{ml} = \eta K_z$ olur.

Aynı şekilde, eşitlik (4.2) ile verilen Green fonksiyonu, Eşitlik (3.31) ile verilen (MAİD)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} K_z(q) + \left[\int_C K_z(p) \frac{\partial G_{yu}}{\partial n_q} dl_p \right] - \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[\int_C \eta K_z(p) \frac{\partial^2 G_{yu}}{\partial n_q \partial n_p} dl_p \right] \\ & = H_l^{gelen}(q); \quad q \in C^+ \end{aligned} \quad (4.29)$$

eşitliği elde edilir.

4.1.3. Nümerik Sonuçlar

Dairesel sınırlar söz konusu olduğunda, bilinmeyenlere ilişkin cebrik denklem sistemi, Bölüm 4.1.1.'de anlatıldığı üzere, hem Helmholtz denkleminde değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile elde edilen sonsuz seriler biçiminde ifade edilen alanlardan hem de Bölüm 4.1.2.'de anlatıldığı üzere, Green özdeşlikleri aracılığı ile Helmholtz denkleminde elde edilen sınır integral denklemlerinin ayrıklaştırılmasından elde edilebilir. Bu cebrik denklem sistemlerinin çözümlerinde uygulanacak yöntemler 5. bölümde tartışılmıştır.

Bu bölümde silindirlerin yüzeyin indüklenen akım yoğunlukları hem Seri Çözüm ile hem de İntegral Çözüm ile elde edilerek, birbiriyle karşılaştırma yapılacaktır.

Eşitlik (3.25) ile verilen toplam teğet alanları ile yüzey akımları arasındaki ilişki uyarınca, silindirlerin yarıçapları a olmak üzere, görüntü yöntemi aracılığıyla oluşturulan Seri Çözüm denklemi için yarım uzayın dışındaki silindirin yüzeyinde indüklenen akımlar

$$E_z^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J_n(k_0 a) + R_n^{(1)} H_n^{(2)}(k_0 a) + R_n^{(21)} J_n(k_0 a) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.30)$$

$$K_{m1l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[k_n^{(m1l)} \right] e^{jn\varphi}$$

$$H_\varphi^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{j\eta_0} \left(T_n^{(0)} J'_n(k_0 a) + R_n^{(1)} H_n^{(2)'}(k_0 a) + R_n^{(21)} J'_n(k_0 a) \right) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.31)$$

$$K_{1z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[k_n^{(1z)} \right] e^{jn\varphi}$$

olur. Öte taraftan diğer uzaydaki görüntü silindirindeki akımlar

$$E_z^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J_n(k_0 a) + R_n^{(2)} H_n^{(2)}(k_0 a) + R_n^{(12)} J_n(k_0 a) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.32)$$

$$K_{m2l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[k_n^{(m2l)} \right] e^{jn\varphi}$$

$$H_\varphi^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{j\eta_0} \left(T_n^{(0)} J'_n(k_0 a) + R_n^{(2)} H_n^{(2)'}(k_0 a) + R_n^{(12)} J'_n(k_0 a) \right) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.33)$$

$$K_{2z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[k_n^{(2z)} \right] e^{jn\varphi}$$

olur.

Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'de sırasıyla elektrik ve manyetik alanın Fourier katsayılarını verir. Bu şekillerde, değişkenlerine ayrıştırma yöntemi (DAY) ile elde edilen seri çözüm sayesinde boş uzay denk probleminde üst uzaydaki esas yüzeyin Fourier katsayılarını, (DAY Görüntü) değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile elde edilen seri çözüm sayesinde boş uzay denk probleminde alt uzaydaki görüntü yüzeyinin Fourier katsayılarını, (DAY Yarım Uzay) mükemmel iletken yarım uzay

Green fonksiyonu sayesinde ulaşılan seri çözümlerle yüzeyde elde edilen Fourier katsayılarını, elektrik veya manyetik alan integral denklemi (EAİD veya MAİD) ile elde edilen çözümler sayesinde boş uzay denk probleminde üst uzaydaki esas yüzeyin Fourier katsayılarını, (EAİD,MAİD Görüntü) elektrik veya manyetik alan integral denklemi ile elde edilen çözümler sayesinde boş uzay denk probleminde alt uzaydaki görüntü yüzeyinin Fourier katsayılarını, (EAİD,MAİD Yarım Uzay) mükemmel iletken yarım uzay Green fonksiyonu sayesinde ulaşılan EAİD veya MAİD ile elde edilen çözümlerle yüzeyde elde edilen Fourier katsayılarını temsil eder.Öte taraftan Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’de ise sırasıyla silindirin yüzeyinde indüklenen manyetik ve elektrik yüzey akım yoğunluğunu gösterir.

Mükemmel iletken yarım uzayın dışındaki empedans dairesel silindiri için bîstatik radar kesit alanı

$$\sigma_{2-B} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(2\pi\rho \frac{|E_z^{s\zeta}|^2}{|E_z^{gelen}|^2} \right) \quad (4.34)$$

ile elde edilir [18]. Burada, saçılan alan bu yarım uzay sınırı üstündeki esas silindirden saçılan alan ve alt uzaydaki görüntü silindirinden saçılan alan dikkate alınarak yazılır. $E_z^{s\zeta}$ saçılan alanlara çok uzakta bakıldığı için esas ve görüntü silindirinden saçılan alanlar tek bir koordinat eksenine dikkate alınarak yazılır ise

$$E_z^{s\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(1)} H_n^{(2)}(k_0\rho) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(2)} H_n^{(2)}(k_0\rho) e^{jn\varphi} \quad (4.35)$$

elde edilir. E_z^{gelen} gelen alan bu yarım uzay sınır koşulunu sağlayacak şekilde uzayın diğer tarafındaki görüntü uyarıcısı alınmadan sadece esas uyarıcı dikkate alınarak yazılır ise

$$E_z^{gelen} = e^{jk_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (4.36)$$

ulaşılır. Görüntü uyarıcısının etkisi saçılan alanların bilinmeyen katsayıları hesaplanırken dikkate alınır. Burada, eşitlik (4.35) ile verilen saçılan alandaki Hankel fonksiyonu için

$$H_n^{(2)}(k_0\rho) = \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0\rho}} j^n e^{-jk_0\rho} \quad (4.37)$$

ile verilen büyük argüman yaklaşıklığı [18] yapıldıktan sonra eşitlik (4.34)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \sigma_{2-B} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(2\pi\rho \frac{\left| \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0\rho}} e^{-jk_0\rho} \right|^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(1)} j^n e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(2)} j^n e^{jn\varphi} \right|^2}{\left| e^{jk_0 \cos(\varphi-\varphi_0)} \right|^2} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

ulaşılır ve bu ifade düzenlenirse

$$\sigma_{2-B} = \frac{2\lambda_0}{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(1)} e^{jn(\varphi+\frac{\pi}{2})} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n^{(2)} e^{jn(\varphi+\frac{\pi}{2})} \right|^2 \quad (4.39)$$

olur.

Eşitlik (4.39) temel alınarak uzak alan analizi bistatik radar kesit alanı hesaplanmıştır ve Şekil 4.6'dan görüldüğü üzere geliş açısının bütünleyeninde tepe değerine ulaşmaktadır ki bu sonsuz geniş düzlemde yansıma içgörüsü doğrultusunda bir sonuçtur.

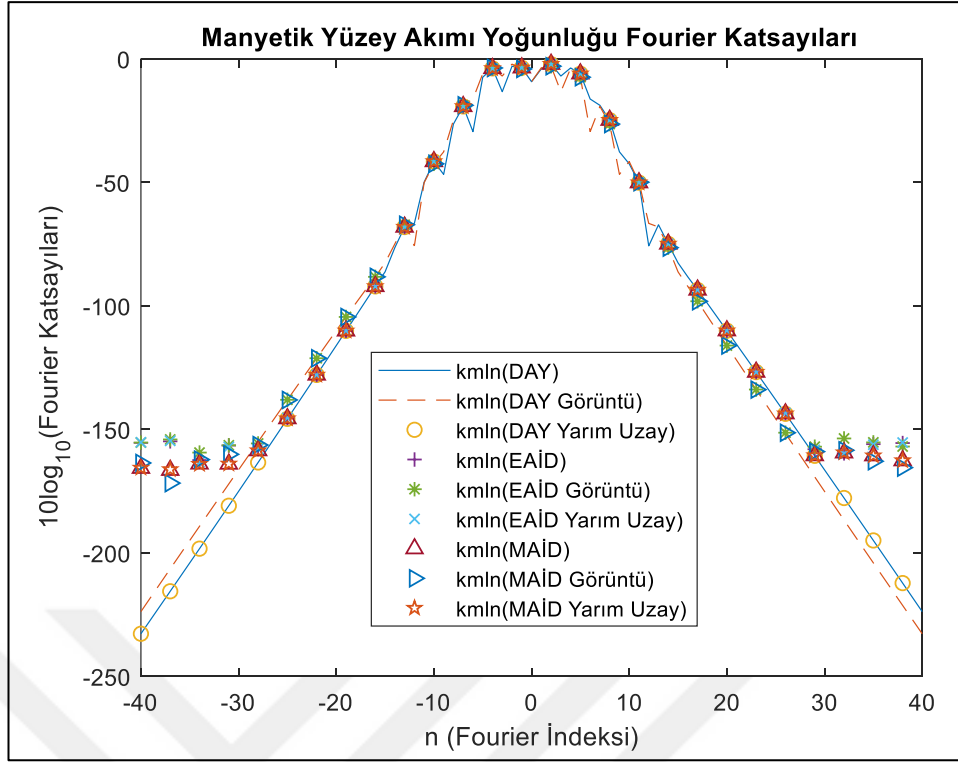
Şekil 4.7'de mükemmel iletken yarım uzaya dik aydınlatma halinde buradaki dairesel empedans silindirin farklı yarıçap değerlerinde uzak alan analizi bistatik radar kesit alanı aracılığı ile yapılarak, dairesel silindirin mükemmel iletken uzay sınıra uzaklığının etkileşimi gösterilmiştir.

Şekil 4.8'de dairesel empedans silindirin empedans değeri değiştirilerek dik aydınlatma halinde bistatik radar kesit alanı hesaplanıp cismin görünürlüğü üzerinde etkisinin ne olduğu gözlemlenmiştir. Elektronik harp sistemlerinde radar kesit alanının düşük olması tercih sebebidir. Şekil 4.8'den görüldüğü üzere dairesel silindirin yüzey empedansının $\eta_m = (1,25) * \eta_0$ olduğu durumda bistatik radar kesit alanının en düşük değerlere ulaştığı ve en iyi sonucun bu değerde verdiği bulunmuştur. Ayrıca, Şekil 4.8'de dairesel silindirin mükemmel iletken olduğu yüzey empedansının $\eta_m = 0$

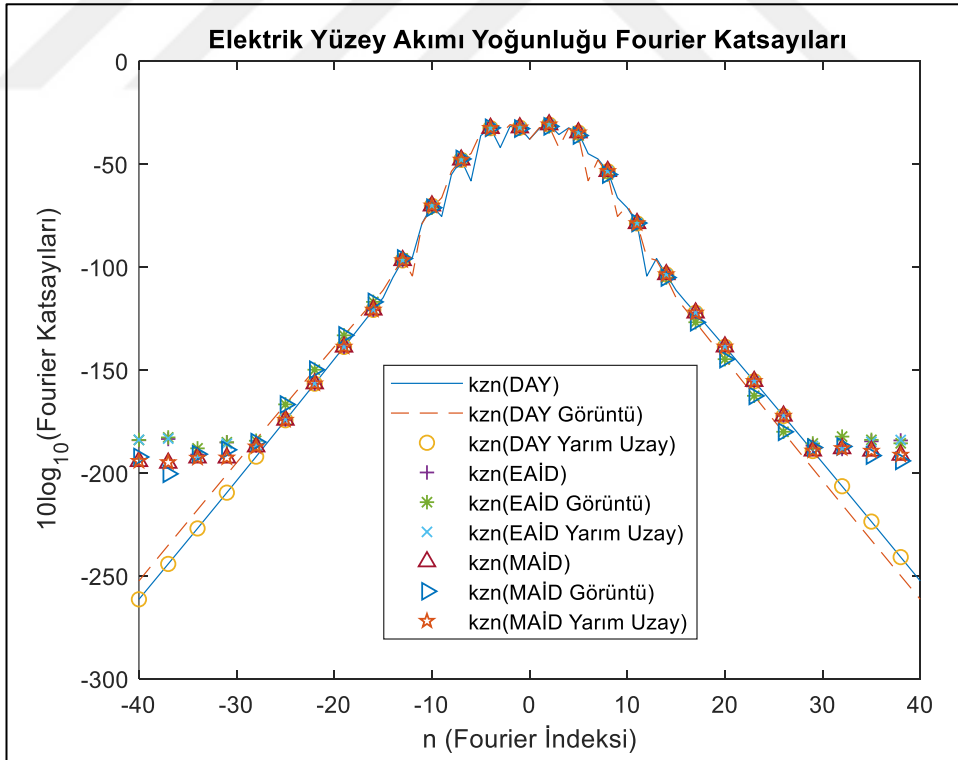
değerinde uzak alan analizi yapılmıştır ve radar kesit alanının en yüksek değere bu empedans değerinde ulaşarak en kötü sonucun dairesel silindirin mükemmel iletken olması durumunda olduğu bulunmuştur.

Şekil 4.9'da ise aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ olduğu durum için radar kesit alanı hesaplanarak geliş açısı değişiminin cismin görünürlüğü üzerinde etkisinin ne olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.9'dan görüldüğü üzere dairesel silindirin yüzey empedansının $\eta_m = (1,0) * \eta_0$ olduğu durumda bistatik radar kesit alanının en düşük değerlere ulaştığı ve en iyi sonucun bu değerde verdiği bulunmuştur. Ayrıca, Şekil 4.9'da dairesel silindirin mükemmel iletken olduğu yüzey empedansının $\eta_m = 0$ değerinde uzak alan analizi yapılmıştır ve radar kesit alanının en yüksek değere bu empedans değerinde ulaşarak en kötü sonucun yine dairesel silindirin mükemmel iletken olması durumunda olduğu bulunmuştur.

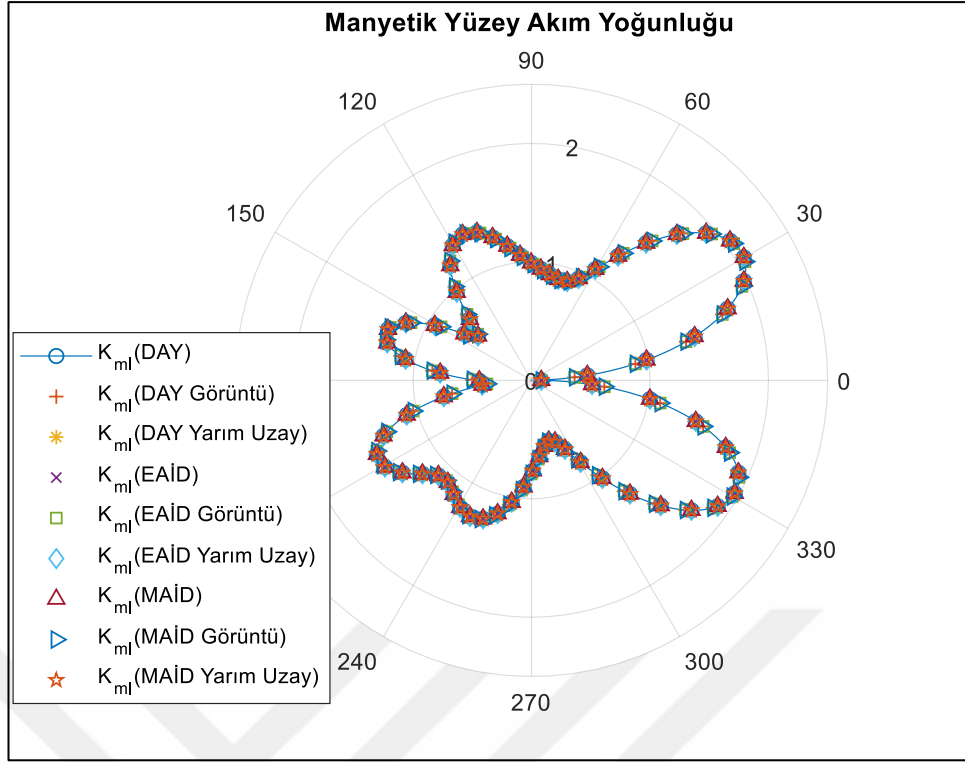
Seri çözüm için denk problemde Matlab ortamında oluşturulan algoritmada ile nümerik sonuçlara ulaşma süresi, yarım uzay Green fonksiyonu kullanılarak oluşturulan algoritma ile nümerik sonuçlara ulaşma süresinden yaklaşık yarım saniye kadar daha geçtir ki bu da saçıcı cismin çok büyük olduğu durumlarda önemli bir parametredir. Ayrıca, integral çözüm ile elde edilen nümerik sonuçlara ulaşma süresi, seri çözüm ile elde edilen nümerik sonuçlara ulaşma süresinden yine yaklaşık yarım saniye kadar daha geçtir. Öte taraftan integral çözümde, seri çözümde denk problem algoritması ile yarım uzay Green fonksiyonu algoritması arasında kurulan ilişki bahsedilen çözümde de aynen geçerlidir.



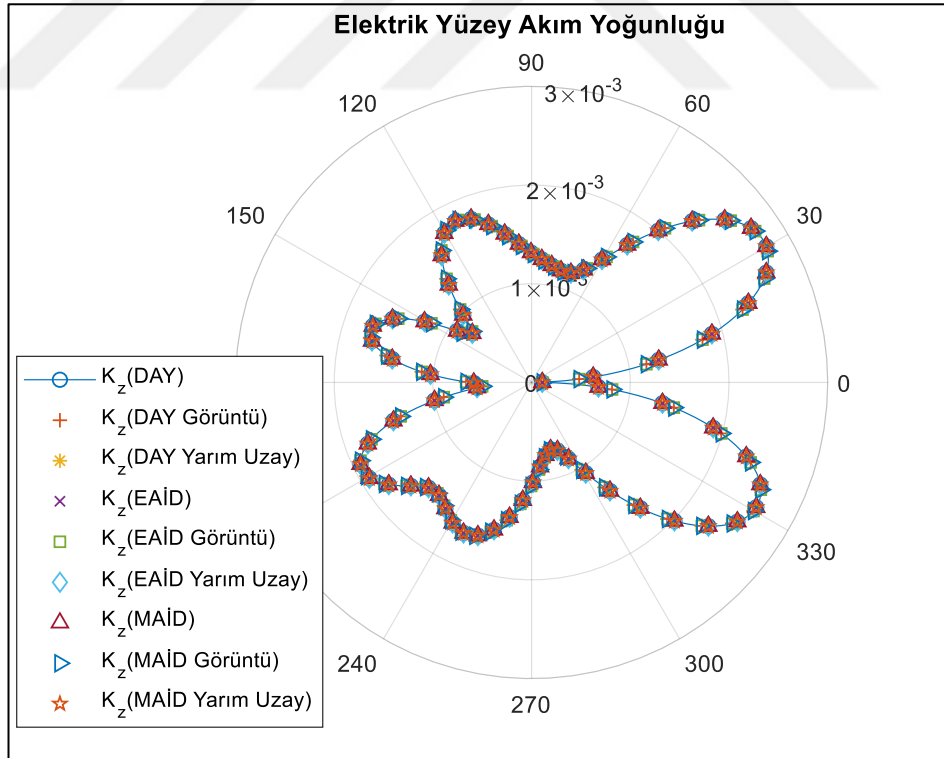
Şekil 4.2: TM durumunda elektrik alanın Fourier katsayıları.



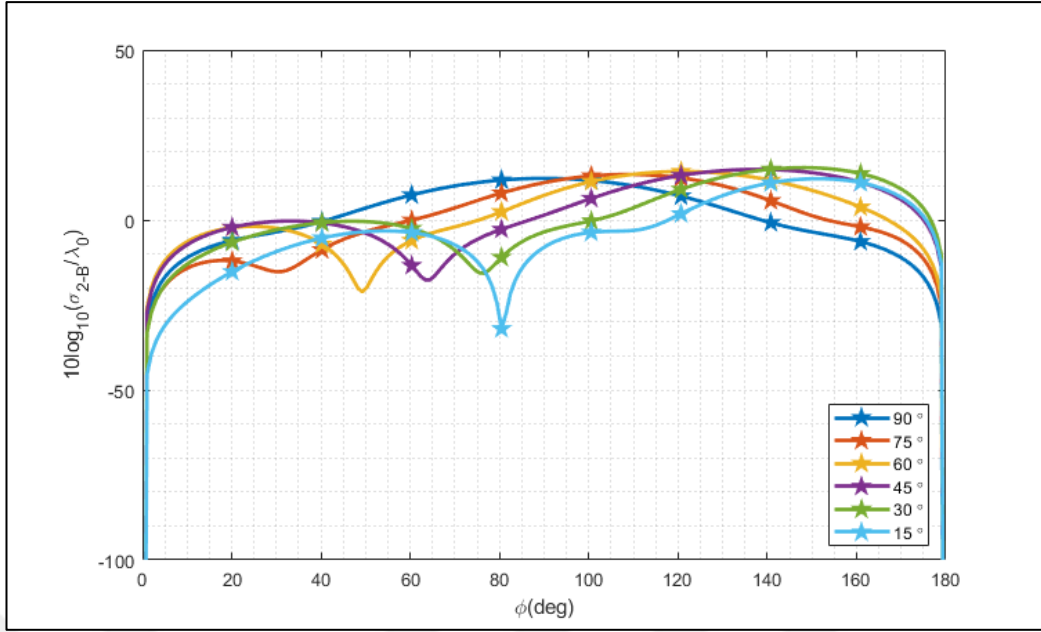
Şekil 4.3: TM durumunda manyetik alanın Fourier katsayıları.



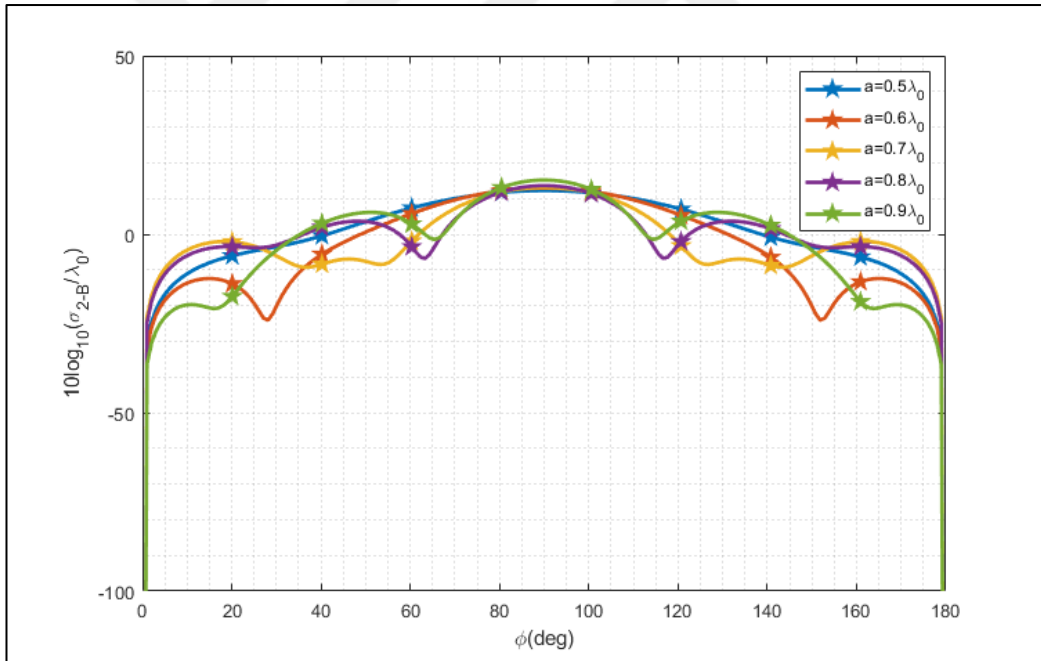
Şekil 4.4: TM durumunda silindirin yüzeyinde indüklenen elektrik alan değeri.



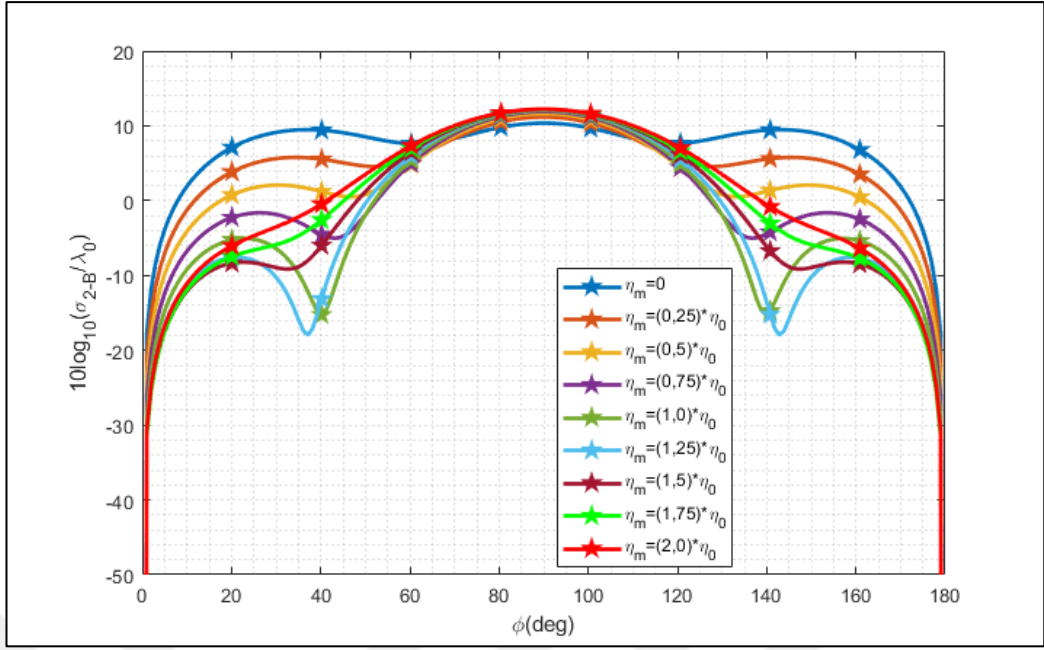
Şekil 4.5: TM durumunda silindirin yüzeyinde indüklenen manyetik alan değeri.



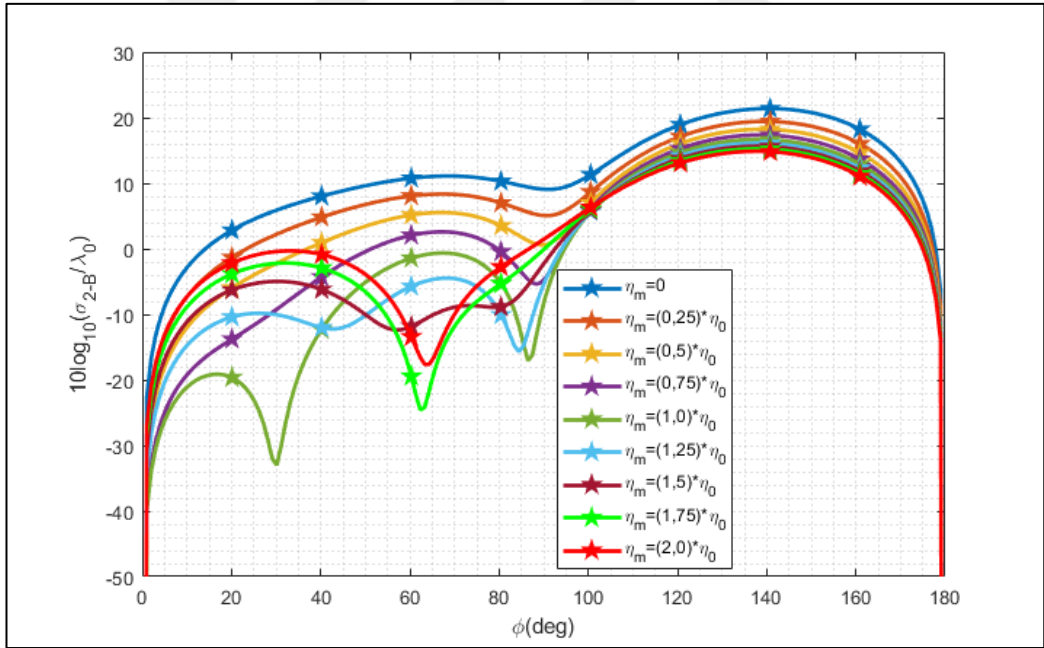
Şekil 4.6: Dairesel empedans silindirlerin farklı geliş açılarında iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.



Şekil 4.7: Dairesel empedans silindirlerin farklı yarıçap değerlerinde iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.



Şekil 4.8: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlerin farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.

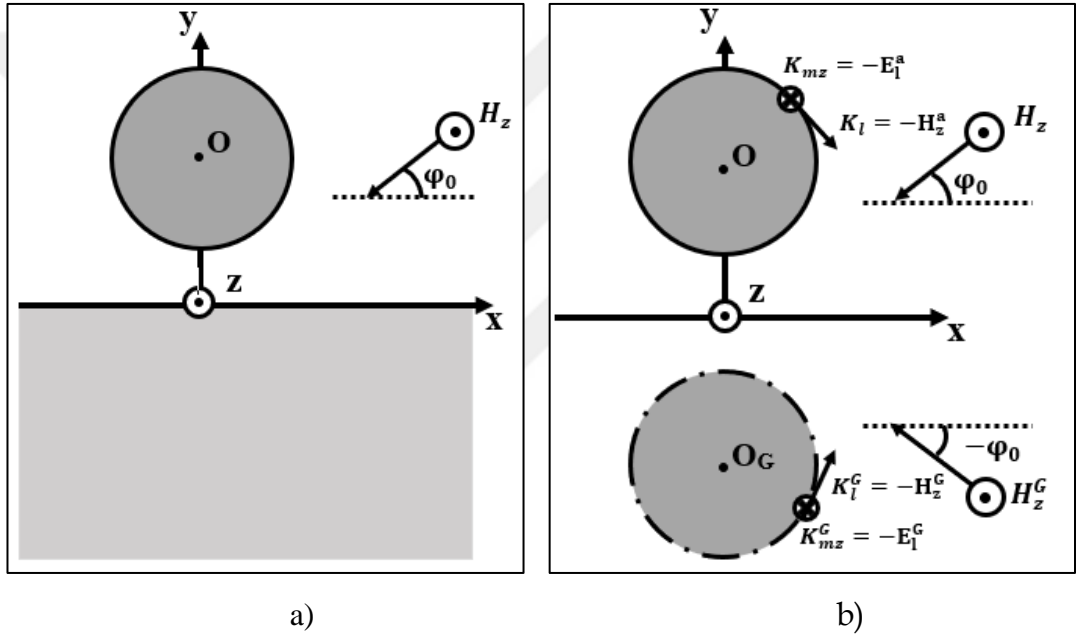


Şekil 4.9: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlerin farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TM bistatik saçılma analizi.

4.2. TE Kutuplu Elektromanyetik Dalga

4.2.1. Seri Çözüm

Şekil 4.10.a ile gösterilen mükemmel iletken bir yarım uzayın dışında bulunan empedans silindirlere saçılma problemine, boş uzayda bu yarım uzay sınır koşulunu sağlayacak Şekil 4.10.b gibi bir denk problem kurmak gerekmektedir. Bu denk problem görüntü yöntemi aracılığıyla bu yarım uzaydaki silindirin, uzayın diğer yanındaki görüntü silindiri ile kurulur.



Şekil 4.10. a) TE durumunda yarım uzayda bulunan dairesel empedans silindiri, b) Boş uzayda iki empedans silindiri.

Bölüm 3.2.1’de incelenen problem ile görüntü yöntemi sayesinde oluşturulan bu denk problem arasındaki tek fark, H-kutuplu (TE) H_z gelen alanı uyarımına ek olarak bu yarım uzaydaki sınır koşulunu sağlamak üzere Şekil 4.10.b’deki H_z^G gibi ikinci bir uyarım eklemektir. Artık m. silindirin sınırına gelen alan ifadesi, $H_z^{Gelen Alan} = H_z + H_z^G$ olmak üzere

$$H_z^{Gelen Alan} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^{(0)} J_n(k_0 \rho) e^{jn\varphi} \quad (4.40)$$

gibi seriler ile gösterilebilir ve denk problem elde edilmiş olur [18]. Burada, φ_0 gelen düzlemsel dalganın geliş açısı olmak üzere $T_n^{(0)} = e^{jn(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)} + e^{jn(\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}$ gibi bir bilinen katsayıdır.

Bu yarım uzayda geçerli Helmholtz denkleminin temel çözümü olan Green fonksiyonu, H-kutuplu (TE) halde Helmholtz denklemini sağlayan ve diğer tüm elektromanyetik alan bileşenlerini yazmaya imkan veren H_z toplam alanının, bu mükemmel iletken yarım uzay sınırına gelen toplam manyetik alanın iki katı olması için, aynı sınır koşulunu sağlamalıdır. Görüntü teoremi gereği, boş uzayda Green fonksiyonunun işaret ettiği kaynağın diğer yanındaki görüntüsü sayesinde bu istenen

$$G_{yu} = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R) + \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R_G) \quad (4.41)$$

gibi elde olunur. Burada $R = |q - p|$ olmak üzere gözlem ile kaynak(integrasyon) noktaları arası uzaklığı ve $R = |q - p_G|$ olmak üzere gözlem ile görüntü kaynak noktaları arası uzaklığı temsil eder. Yarım uzaydaki bu Green fonksiyonunu eşitlik (2.13)'te verilen saçılan alanın integral gösterilimde

$$H_z^{sc}(\rho, \varphi) = \int_C \left[G_{yu} - Z_Q \frac{\partial G_{yu}}{\partial r} \right] F(C) dC \quad (4.42)$$

gibi yerine koyarak, silindirik harmoniklerdeki değişim incelenecektir. Bu bölümde incelen değişimle ile 4.1.1. Bölümünde incelenen değişimlerdeki tek fark, artık $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, $\beta = \frac{\eta_0}{\eta_m}$ ve $(-1)^{-n, -s+1} \rightarrow (-1)^{-n, -s}$ olmak üzere, 4.1.1 Bölümündeki formülasyonlarda E Elektrik alanı yerine H Manyetik alanını eklemektir.

4.2.2. İntegral Denklem Çözüm

Bölüm 3.2.2'de incelenen problem ile görüntü yöntemi sayesinde oluşturulan Şekil 4.10.b ile gösterilen bu denk problem arasındaki tek fark, H-kutuplu (TE) H_z gelen alanı uyarımına ek olarak bu yarım uzaydaki sınır koşulunu sağlamak üzere Şekil 4.10.b'deki H_z^G gibi ikinci bir uyarım eklemektir. Denk problem için silindirlerin

sınırına gelen alan ifadesi daha önce eşitlik (4.40) ile verilmişti ve bu gelen alan ifadesini yerine koyarak artık denk problem elde edilir.

Şimdi, TE durumunda mükemmel iletken yarım uzay için olan Green fonksiyonu eşitlik (4.41) ile gösterilmişti. Bu yarım uzay Green fonksiyonunu, eşitlik (3.39) ile verilen C_1 eğrisi sınırı üzerinden yazılmış olan EAİD'de görülen Green fonksiyonunda yerine koyarak, artık görüntü yöntemi sayesinde oluşturulan denk problemdeki görüntü silindirini kullanmadan, bu integral denklem çözülebilir duruma gelir. Bu yarım uzay Green fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar ve denk problem ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak uyumlu olduğu ileriki 4.2.3. Bölümünde gösterilecektir.

Eşitlik (4.41) ile verilen Green fonksiyonu, eşitlik (3.39) ile verilen (EAİD)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\eta K_l(q) + \left[\int_C \eta K_l(p) \frac{\partial G_{yu}}{\partial n_q} dl_p \right] - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left[\int_C K_l(p) \frac{\partial^2 G_{yu}}{\partial n_q \partial n_p} dl_p \right] \\ = E_l^{gelen}(q); q \in C^+ \end{aligned} \quad (4.43)$$

eşitliği elde edilir. Burada η yarım uzayın dışındaki esas empedans silindirin empedans değeri olmak üzere, TE durumunda $K_{mz} = -\eta K_l$ olur.

Aynı şekilde, eşitlik (4.41) ile verilen Green fonksiyonu, eşitlik (3.41) ile verilen (MAİD)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}K_l(q) - j\omega\epsilon_0 \left[\int_C \eta K_l(p) G_{yu} dl_p \right] + \left[\int_C K_l(p) \frac{\partial G_{yu}}{\partial n_p} dl_p \right] \\ = H_z^{gelen}(q); q \in C^+ \end{aligned} \quad (4.44)$$

eşitliği elde edilir.

4.2.3. Nümerik Sonuçlar

Dairesel sınırlar söz konusu olduğunda, bilinmeyenlere ilişkin cebrik denklem sistemi, Bölüm 4.2.1.'de anlatıldığı üzere, hem Helmholtz denkleminde

değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile elde edilen sonsuz seriler biçiminde ifade edilen alanlardan hem de Bölüm 4.2.2.'de anlatıldığı üzere, Green özdeşlikleri aracılığı ile Helmholtz denkleminde elde edilen sınır integral denklemlerinin ayrıştırılmasından elde edilebilir. Bu cebrik denklem sistemlerinin çözümlerinde uygulanacak yöntemler 5. bölümde tartışılmıştır.

Bu bölümde silindirlerin yüzeyin indüklenen akım yoğunlukları hem Seri Çözüm ile hem de İntegral Çözüm ile elde edilerek, birbiriyle karşılaştırma yapılacaktır.

Eşitlik (3.36) ile verilen toplam teğet alanları ile yüzey akımları arasındaki ilişki uyarınca, silindirlerin yarıçapları a olmak üzere, görüntü yöntemi aracılığıyla oluşturulan seri çözüm denklemi için yarım uzayın dışındaki silindirin yüzeyinde indüklenen akımlar

$$H_z^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J_n(k_0 a) + R_n^{(1)} H_n^{(2)}(k_0 a) + R_n^{(21)} J_n(k_0 a) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.45)$$

$$K_{1l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-k_n^{(1l)} \right] e^{jn\varphi}$$

$$E_\varphi^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[j\eta_0 \left(T_n^{(0)} J'_n(k_0 a) + R_n^{(1)} H_n^{(2)'}(k_0 a) + R_n^{(21)} J'_n(k_0 a) \right) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.46)$$

$$K_{m1z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-k_n^{(m1z)} \right] e^{jn\varphi}$$

olur. Öte taraftan diğer uzaydaki görüntü silindirindeki akımlar

$$H_z^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^{(0)} J_n(k_0 a) + R_n^{(2)} H_n^{(2)}(k_0 a) + R_n^{(12)} J_n(k_0 a) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.47)$$

$$K_{2l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-k_n^{(2l)} \right] e^{jn\varphi}$$

$$E_{\varphi}^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[j\eta_0 \left(T_n^{(0)} J'_n(k_0 a) + R_n^{(2)} H_n^{(2)}(k_0 a) \right. \right. \\ \left. \left. + R_n^{(12)} J'_n(k_0 a) \right) \right] e^{jn\varphi} \quad (4.48)$$

$$K_{m2z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-k_n^{(m2z)} \right] e^{jn\varphi}$$

olur.

Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de sırasıyla manyetik ve elektrik alanın Fourier katsayılarını verir. Öte taraftan Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'de ise sırasıyla silindirlerin yüzeyinde indüklenen elektrik ve manyetik yüzey akım yoğunluğunu gösterir.

Eşitlik (4.39) temel alınarak uzak alan analizi bistatik radar kesit alanı hesaplanmıştır [18] ve Şekil 4.15'ten görüldüğü üzere geliş açısının bütünleyeninde tepe değerine ulaşmaktadır ki bu sonsuz geniş düzlemden yansıma içgörüsü doğrultusunda bir sonuçtur.

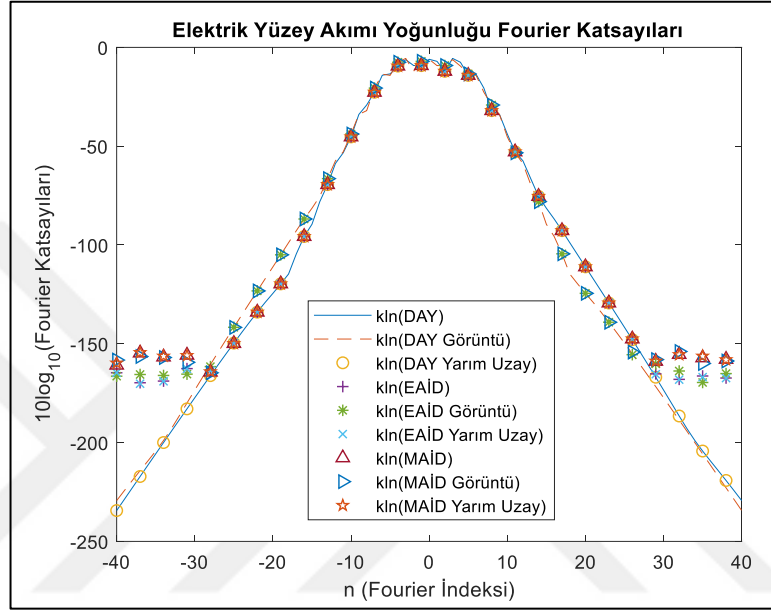
Şekil 4.16'te mükemmel iletken yarım uzaya dik aydınlatma halinde buradaki dairesel empedans silindirin farklı yarıçap değerlerinde uzak alan analizi bistatik radar kesit alanı aracılığı ile yapılarak, dairesel silindirin mükemmel iletken uzay sınıra uzaklığının etkileşimi gösterilmiştir.

Şekil 4.17'de dairesel empedans silindirin empedans değeri değiştirilerek dik aydınlatma halinde bistatik radar kesit alanı hesaplanıp cismin görünürlüğü üzerinde etkisinin ne olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.17'den görüldüğü üzere dairesel silindirin yüzey empedansının $\eta_m = (0,5) * \eta_0$ olduğu durumda bistatik radar kesit alanının en düşük değerlere ulaştığı ve en iyi sonucun bu değerde verdiği bulunmuştur. Ayrıca, Şekil 4.17'de dairesel silindirin mükemmel iletken olduğu yüzey empedansının $\eta_m = 0$ değerinde uzak alan analizi yapılmıştır ve radar kesit alanının en yüksek değere bu empedans değerinde ulaşarak en kötü sonucun dairesel silindirin mükemmel iletken olması durumunda olduğu bulunmuştur.

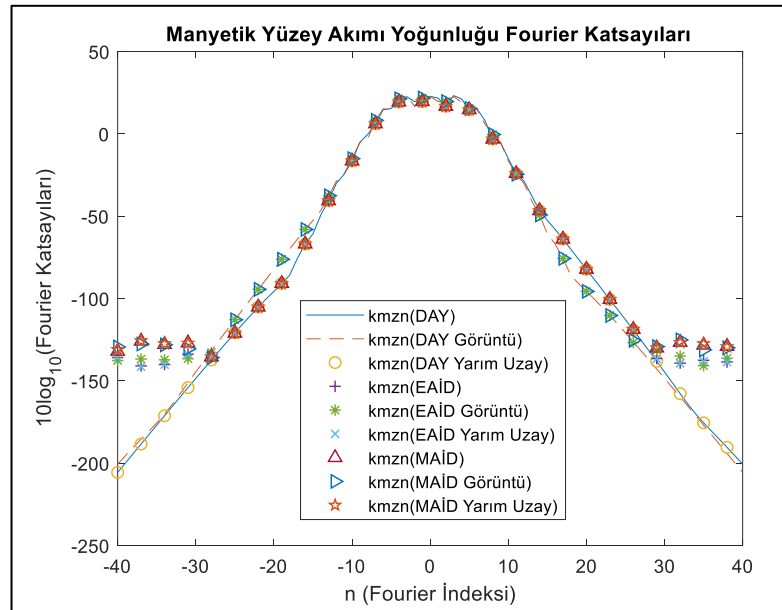
Şekil 4.18'de ise aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ olduğu durum için radar kesit alanı hesaplanarak geliş açısı değişiminin cismin görünürlüğü üzerinde etkisinin ne olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.18'den görüldüğü üzere dairesel silindirin yüzey empedansının $\eta_m = (2,0) * \eta_0$ olduğu durumda bistatik radar kesit alanının en düşük değerlere ulaştığı ve en iyi sonucun bu değerde verdiği bulunmuştur. Ayrıca, Şekil

4.18'de dairesel silindirin mükemmel iletken olduğu yüzey empedansının $\eta_m = 0$ değerinde uzak alan analizi yapılmıştır ve radar kesit alanının en yüksek değere bu empedans değerinde ulaşarak en kötü sonucun yine dairesel silindirin mükemmel iletken olması durumunda olduğu bulunmuştur.

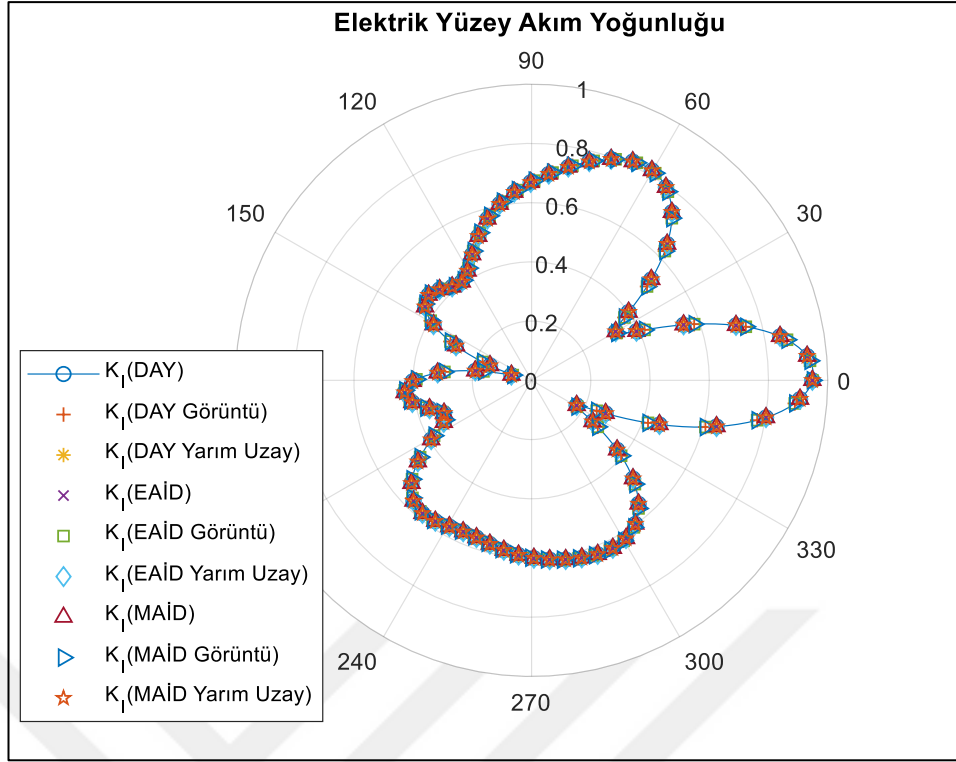
TM durumunda nümerik sonuçlara ulaşma süreleri arasında kurulan ilişki TE durumunda da aynen geçerlidir.



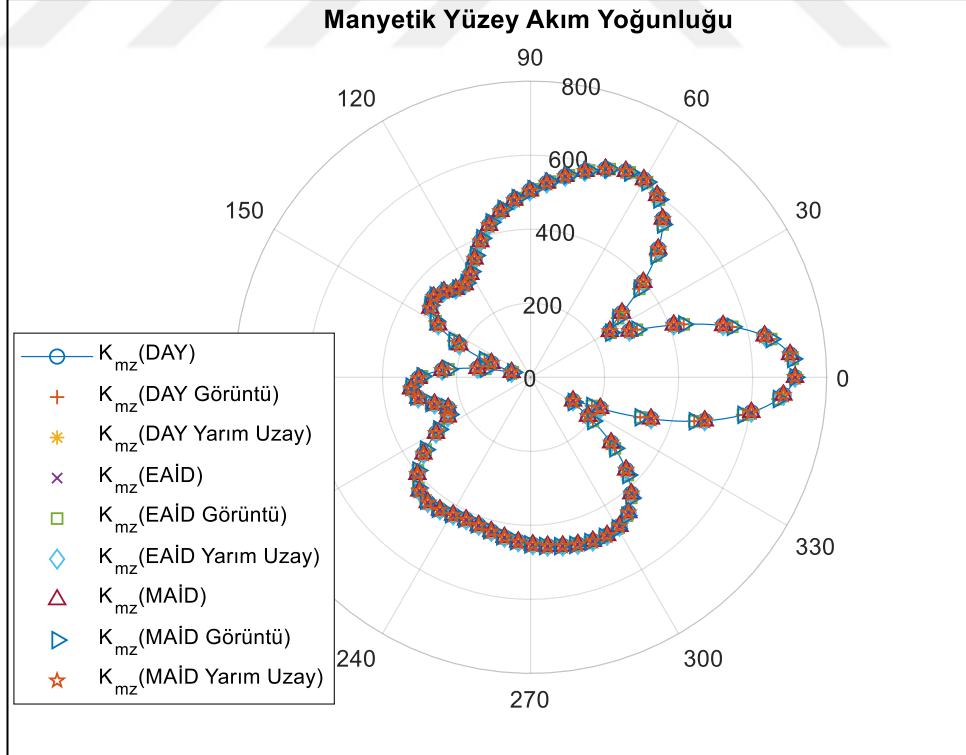
Şekil 4.11: TE durumunda manyetik alanın Fourier katsayıları.



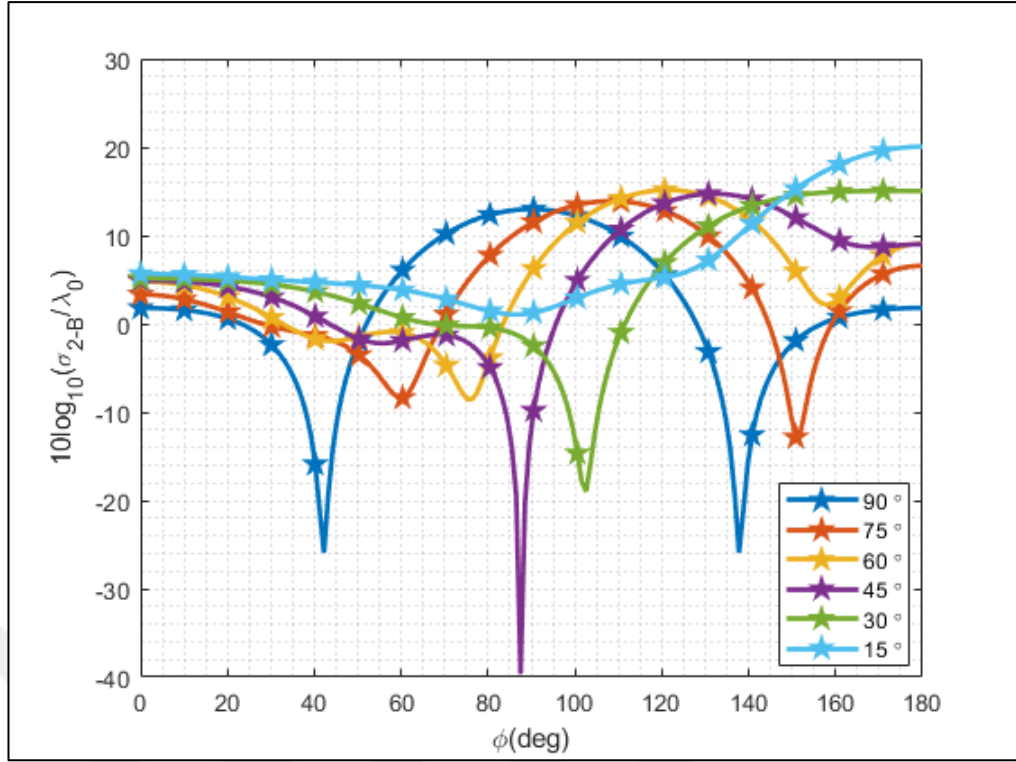
Şekil 4.12: TE durumunda elektrik alanın Fourier katsayıları.



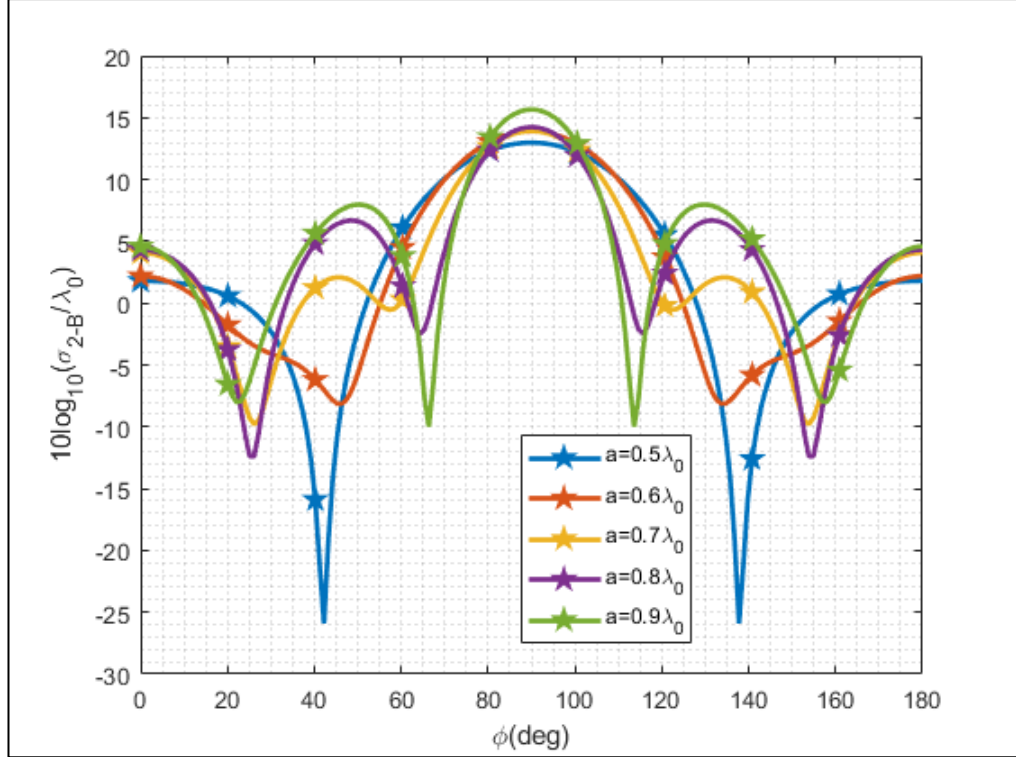
Şekil 4.13: TE durumunda silindirlerin yüzeyinde indüklenen manyetik alan değeri.



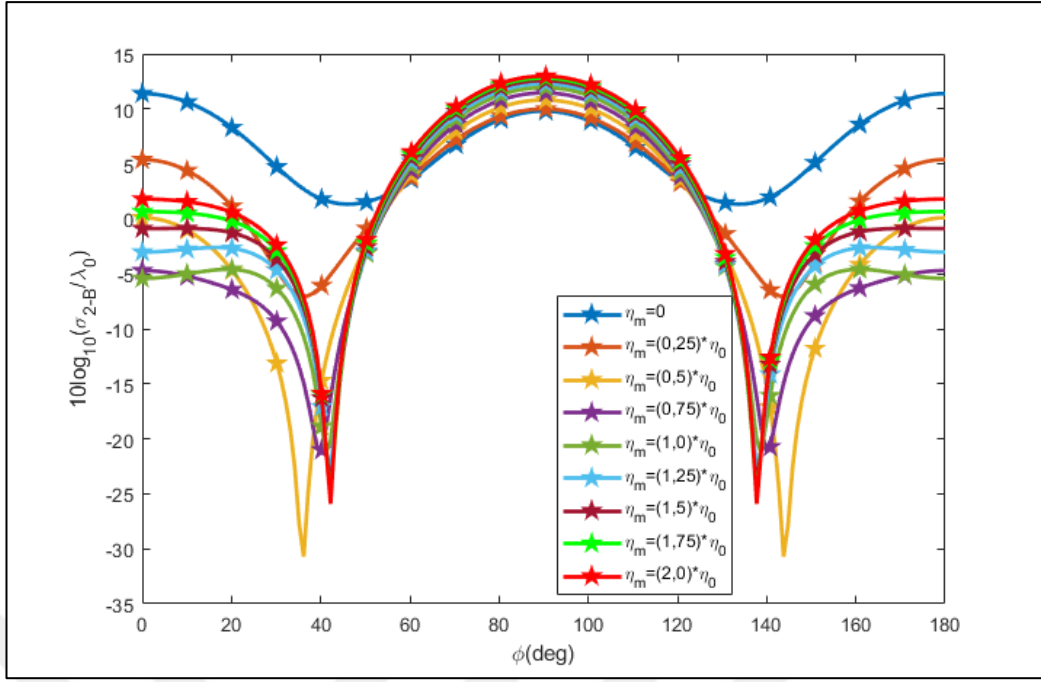
Şekil 4.14: TE durumunda silindirlerin yüzeyinde indüklenen elektrik alan değeri.



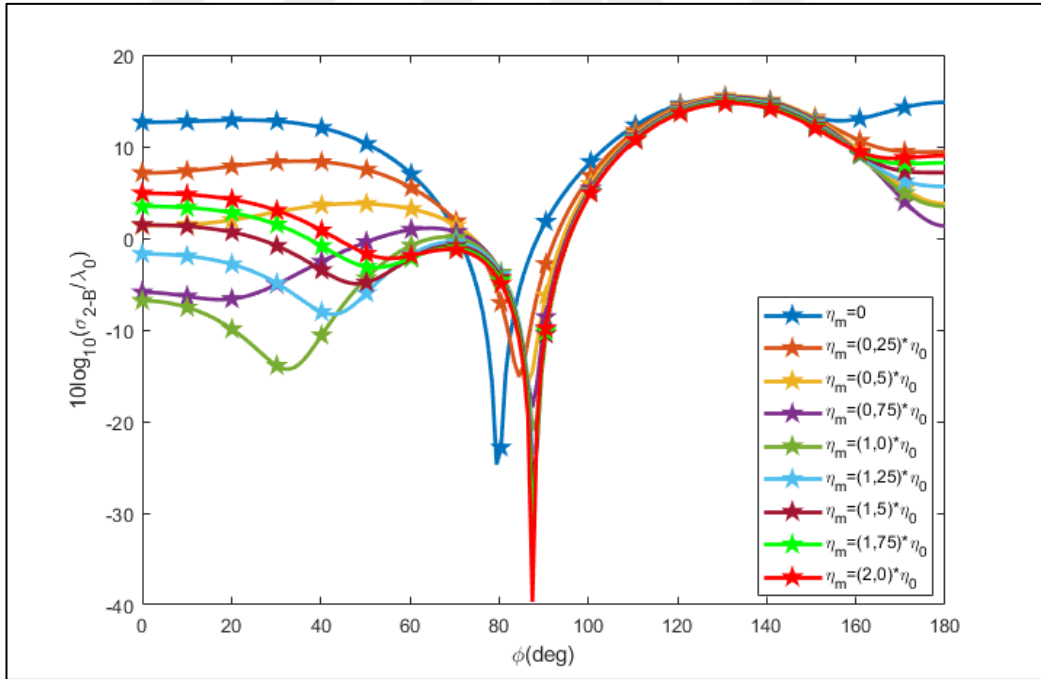
Şekil 4.15: Dairesel empedans silindirlerin farklı geliş açılarında iki boyutlu TE bistatik saçılma analizi.



Şekil 4.16: Dairesel empedans silindirlerin farklı yarıçap değerlerinde iki boyutlu TE bistatik saçılma analizi.



Şekil 4.17: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlere farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TE bistatik saçılma analizi



Şekil 4.18: Aydınlatmanın $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ olduğu durum için dairesel empedans silindirlere farklı empedans değerlerinde iki boyutlu TE bistatik saçılma analizi

5. ANALİTİK REGÜLARİZASYON METODU

Dairesel sınırlar söz konusu olduğunda, bilinmeyenlere ilişkin cebrik denklem sistemi hem Helmholtz denkleminde değişkenlerine ayırıştırma yöntemi ile elde edilen sonsuz seriler biçiminde ifade edilen alanlardan hem de Green özdeşlikleri aracılığı ile Helmholtz denkleminde elde edilen sınır integral denklemlerinin ayrıştırılmasından elde edilebilir. Fakat bu iki yöntem sonucunda elde edilen cebrik denklem sistemleri $Ax = b$ şeklinde sayısal uygulamalar açısından kötü koşullu olan birinci tip lineer cebrik denklem sistemleridir (LCDS1). Bu denklem sistemi l_2 uzayında (serideki terimlerin karelerinin toplamının sonlu olduğu Hilbert uzayında) sonsuz bir sistemdir ve A matrisinin tersinin alınmasına duyarlılığı oldukça kötüdür. Bu nedenle bu sistem nümerik olarak çözülmeye çalışıldığında denklem sistemi sonsuz uzunlukta alınamayacağından matrisin belli bir değerde kesilmesi gerekecektir. Bu durumda elde edilen sistem kesme sayısına son derece bağımlı ve kararsız bir sistem olacaktır. Böyle bir sistemin doğrudan çözülmesi ile elde edilen sonucun gerçek çözüm ile hiçbir ilgisi olmayabilir. Bu türden bir sistemin kullanıcısı elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu ekstra kontroller ile test etmelidir. Şöyle ki, bu matrisin kötü koşullu bir matris olduğunun analizi, matrisin koşul sayısına veya rankına bakılarak yapılabilir. Dolayısıyla bu türden kötü bir sistem (LCDS1) Analitik Regülarizasyon Yöntemi ile I birim matris, H ise l_2 uzayında kompakt olan bir operatör olmak üzere, l_2 uzayında sınırlı olan, $(I + H)y = g$ biçiminde iyi koşullu olan ikinci tip bir lineer cebrik sistemine (LCDS2) dönüştürülmektedir. Bu yöntem yaklaşık olarak 30 yıllık geçmişini olan ve geniş bir sınıftaki kırımın problemlerine uygulanan güçlü, yarı analitik yarı nümerik bir yöntemdir. Buradaki regülarizasyon işlemi temelde, $LAR = I + H$ verecek şekilde, sağdan ve soldan uygulanacak olan bu R ve L operatörlerinin belirlenmesine dayanmaktadır. Burada R operatörü, tersi mevcut olan ve $R^{-1}x = y$ eşitliğini sağlayan bir operatördür [21]. Bu operatörü belirleme işlemi, saçılan alanların katsayılarının davranışını temel alan ve bu davranışa uygun olarak yapılan bir ölçekleme işlemidir. Bu operatör belirlendikten sonra L operatörü $LAR = I + H$ verecek biçimde belirlenir. [7]'de LCDS1'in kötü koşullu, kesme sayısına son derece bağımlı olduğu ve kararsız bir sistem olduğu buna karşılık regülarizasyon sonucu elde edilen (LCDS2)'nin iyi koşullu ve kararlı olduğu ve

sistemin çözümünün kesme sayısından bağımsız olduğu sayısal sonuçlar ile gösterilmiştir.

z doğrultusunda fiziksel şartlarda homojen, z yönünde sadece elektrik/manyetik alan bileşenleri var ve manyetik/elektrik alana tüm bileşenler kesit, yani x-y düzlemine teğet ise bu durum teğet manyetik/elektrik (TM/TE) olarak adlandırılır. Bu uyarma altında dairesel empedans sınırlarına ilişkin, bu sınırlardan elektromanyetik dalgaların saçılması problemine, homojen Helmholtz denkleminin Sommerfeld ışınım koşullarını sağlayan çözümlerini Green teoremleri yardımı ile integral gösterimlere kavuşturup, bu sınırdaki integral denklemler aracılığıyla çözüm aranır [17], [22]. Bu denklemler skaler denklemlerdir ve elektromanyetik alanlar söz konusu olduğunda elektrik/manyetik alan integral denklemlerinden (EAİD/MAİD) kaynaklanır. Bu integral denklemleri gelen alanın kutuplanmasına göre çeşitlenirler. Böylece EAİD-TM, MAİD-TM, MAİD-TE, EAİD-TE olmak üzere Bölüm 4.1.2. ve 4.2.2.'deki gibi dört skaler denklem ortaya çıkar. Bu integral denklemlerinin Galerkin yöntemi ile çözümü için bu integral denklemlerinin çekirdeklerinin düzgün ve tekil kısımlarına ayrıştırılması ve tekilliğe denk analitik ifadeler ile düzgünleştirilmesi gerekmektedir. Bu sayede, integral denklem, düzgün fonksiyonların iki boyutlu Fourier seri açılımları yardımı ile sonsuz bir cebrik denkleme indirgenir [22]-[23]. Daha sonra bu sonsuz cebrik denklem sistemi kesilerek nümerik olarak çözülür. Ayrıca integral denklemlerin tüm bölge Galerkin yöntemi ile cebrik denklemlere dönüştürülmesi ve konvolüsyon teoreminin kullanılması ile 2-boyutlu sınır değer kırım problemi için üstel yakınsak bir algoritma kurulabildiği [9]-[12]'de gösterilmiştir.

Bu tezde, anılan yöntem mükemmel iletken yarım uzayın dışında bulunan dairesel sınırlı empedans sınırlarına ilişkin, değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile elde edilen seri gösterimlerden oluşan sistemlere ve Green özdeşlikleri ile elde edilen integral denklemlerin tüm bölge Galerkin metodu ile ayrıştırılması ile elde edilen sistemlere uygulanarak, boş uzayda bu iki çözüm arasında [7], [11]'de kurulmuş ilişki böylece mükemmel iletken yarım uzayda elde edilir.

6. SONUÇ

Mükemmel iletken yarım uzay üzerindeki dairesel empedans silindirineline ilişkin seri ve integral çözümleri elde edilmiştir. Seri çözümün, görüntü silindirinin, integral çözümün de Green fonksiyonunun boş uzayda temsil ettiği çizgisel kaynağın görüntüsünün işin içine katılmasını gerektirdiği ilkeleri başarıyla uygulanmıştır. Böylece bu iki çözüm arasındaki boş uzayda kurulmuş ilişkinin mükemmel iletken yarım uzay için sonuçları elde olunmuştur. Boş uzaydaki reel koordinatlarda yer alan bu görüntü ile geliştirilecek metodoloji, daha sonra katmanlı yapıların yer aldığı uzayın ayrık karmaşık değerli, karmaşık koordinatlardaki görüntüleri cinsinden yazılan Green fonksiyonu için de uygun hale getirilmiştir [20].

KAYNAKLAR

- [1] Saynak U., Kızılay A., (2016), “Computation of the scattered fields from an arbitrary discontinuity on a perfectly conducting ground plane by a decomposition method”, Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 24, 1838-1846.
- [2] Madrazo A., Nieto-Vesperinas M., (1995), “Scattering of electromagnetic waves from a cylinder in front of a conducting plane”, Journal of Optical Society of America A, 12, 1298-1309.
- [3] Borghi R., Gori F., Santarsiero M., Frezza F., Schettini G., (1996), “Plane-wave scattering by a perfectly conducting circular near a plane surface: cylindrical-wave approach”, Journal of Optical Society of America A, 13, 483-493.
- [4] Rao R. C., Barakat R. (1994), “Plane wave scattering by a finite array of conducting cylinders partially buried in a ground plane: TM polarization”, Pure and Applied Optics, 3, 1023-1047.
- [5] Saynak U., Kızılay A., (2016), “Computation of the scattered fields from an overfilled cavity embedded in a perfectly conducting ground plane”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 30, 1217-1226.
- [6] Miyazaki Y., Hashimoto T., Takahashi K. (2009), “Electromagnetic Analysis of Propagation and Scattering Fields in Dielectric Elliptic Cylinder on Planar Ground”, PIER Online, 5, 684-689.
- [7] Sever E., Dikmen F., Suvorova O. A., Tuchkin Y. A. (2016), “An analytical formulation with ill-conditioned numerical scheme and its remedy: scattering by two circular impedance cylinders”, Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 24, 1194-1207.
- [8] Dikmen F., Sever E., Vatansever S., Tuchkin Y. A., (2015), “Well-conditioned algorithm for scattering by a few eccentrically multilayered dielectric circular cylinders”, Radio Science, 50, 99-110.
- [9] Sever E., Dikmen F., Tuchkin Y. A., (2017), “Superalgebraically Converging Galerkin Method for Electromagnetic Scattering by Dielectric Cylinders”, Radio Science, 52, 1282-1292.
- [10] Sever E., Dikmen F., Tuchkin Y. A., Sabah C. (2017), “Numerically Stable Algorithms for Scattering by Impedance Cylinders”, International Journal of Mechanics, 11, 64-68.
- [11] Sever E., Tuchkin Y. A., Dikmen F., (2018), “On a superalgebraically converging, numerically stable solving strategy for electromagnetic scattering by impedance cylinders”, Journal of Computational Electronics, 17, 427-435.

- [12] Sever E., (2018), “Eş Merkezli Olmayan Çok Tabakalı Dairesel Silindirlere Saçılan Alanlar için Analitik Regülerizasyon Algoritması”, Doktora Tezi, Gebze Teknik Üniversitesi.
- [13] Vatansever S., (2013), “Eksantrik Katmanlı ve Komşu Dielektrik Silindirlere Dalga Saçılması”, Yüksek Lisans Tezi, Gebze Teknik Üniversitesi.
- [14] Stratton J. A., (1941), “Electromagnetic Theory”, 1st Edition, McGraw-Hill.
- [15] Chew W. C., (1990), “Waves and Fields in Inhomogeneous Media”, 1st Edition, New York: Van Nostrand Reinhold.
- [16] Bates R., (1975), “Analytic constraints on electromagnetic field computations”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 23(8), 605-623.
- [17] Morita N., Kumagai N., Mautz J.R., (1990), “Integral Equations for Electromagnetics”, 1st Edition, Artech House.
- [18] Balanis C. A., (1989), “Advanced Electromagnetic Engineering”, 1st Edition, John Wiley and Sons. Inc.
- [19] Senior T. B., Volakis J. L., (1995), “Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics”, 1st Edition, The Institution of Electrical Engineers.
- [20] Aksun M. I., Çalışkan F., Gürel L. (2002), “An Efficient Method for Electromagnetic Characterization of 2-D Geometries in Stratified Media”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 50, 1264-1274.
- [21] Ivanov E. A., (1968), “Diffraction of Waves from Two Bodies”, Nauka i Tekhnika, Minsk, (Rusça ve İngilizce çevirisi NASA TT F-597 olmak üzere).
- [22] Poyedinchuk A. Y., Tuchkin Y. A., Shestopalov V. P., (2000), “New Numerical-Analytical Methods in Diffraction Theory”, Mathematical and Computer Modeling, 32, 1029-1046.
- [23] Hu F. Q., (1994), “A Spectral Boundary Integral Equation Method for 2D Helmholtz Equation”.

ÖZGEÇMİŞ

Muhammet Serhat Dönmez, 1993 yılında Kadıköy’de doğdu. Lise öğrenimini Gebze Anibal Anadolu Lisesi’nde 2011 yılında tamamladı. Aynı yıl okumaya hak kazandığı Gazi Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü’nde 2015 yılında onur derecesiyle mezun oldu. 2016 yılında Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans öğrencisi olarak kabul edildi. Muhammet Serhat Dönmez, halen aynı bölümde öğretim hayatına devam etmektedir. İlgi alanları arasında, nümerik elektromanyetik yer almaktadır. Şu anda TÜBİTAK BİLGEM-İLTAREN bünyesinde araştırmacı olarak çalışmaktadır.