EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

SAHLQVİST FORMÜLLERİ VE TAMLIK

Gülşah DARILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403. 05. 01

Sunuş Tarihi: 09. 01. 2007

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bornova - İZMİR

Gülşah DARILMAZ tarafından Yüksek Lisan Tezi olarak sunulan "**Sahlqvist Formülleri ve Tamlık**" başlıklı bu çalışma, Ege Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmenliği ile Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönetmenliği'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 09.01.2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri		İmza
Jüri Başkanı	: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER	…………………….
Paportör Üye	: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER	…………………….
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat ATMACA	…………………….

ÖZET

SAHLQVIST FORMÜLLERI VE TAMLIK

DARILMAZ, Gülşah
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER
Ocak 2007, 57 sayfa

Giriş ve Ön Bilgiler bölümleri dışında bu tez, esas olarak iki bölümden oluşmaktadır.

3. bölümde; modeller teorisinin kısa bir tanıtımı yapıldıktan sonra; çeşitli normal modal lojikler tanımlanmıştır. Bu lojiklerden özellikle $\boldsymbol{S}4$ üzerinde durulmuş ve kanonik modeller aracılığıyla McKinsey-Tarski Teoremi çerçevesinde tamlığı ele alınmıştır.

4. bölümde önce çeşitli normal modal lojiklerin belirli çatı sınıflarına göre tamlığı gösterilmiş ve örneklenmiştir. Sonra Sahlqvist Algoritması ayrıntılı tanıtılmış ve Sahlqvist Teoremi genel bir örnek üzerine dayalı olarak ispatlanmıştır. Algoritmanın etkinliği üç örnekle gözler önüne sergilenmiştir.

Anahtar sözcükler: Sahlqvist formülleri, tamlık, modal lojik.

ABSTRACT

SAHLQVIST FORMULAS AND COMPLETENESS

DARILMAZ, Gülşah
Master Thesis in Mathematics Department
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER
January 2007, 57 pages

In addition to Introduction and Preliminaries Chapters the thesis consists essentially of two chapters.

Chapter 3 starts with a brief presentation of model theory. Then various normal modal logics are defined; one is particularity interested with the logic $\boldsymbol{S}4$, and concerning it, by means of canonical models its completeness is stated in McKinsey-Tarski theorem.

In Chapter 4, firstly the completeness of several normal modal logics with respect to certain class of frames is shown and examples are given. Then Sahlqvist Algorithm is described in great detail, and Sahlqvist Theorem is proved via a general Sahlqvist formula. The effectiveness of algorithm is illustrated by three fundamental examples.

Key words: Sahlqvist formulas, completeness and modal logics.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olan, özellikle kıymetli görüşlerinden yararlandığım ve yakın ilgisini esirgemeyen sayın **Prof. Dr. Mehmet Terziler**' e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

İÇİNDEKİLER (devam)

1. GİRİŞ

Modal lojik çok basit bir ifadeyle; önermeler lojiğine bir ya da daha fazla operatör eklenerek oluşturulan lojik olarak tanımlanabilir. Ancak bu doğru bir yaklaşımı yansıtmaktan çok uzaktır. Modal lojik o kadar dinamik bir lojiktir ki günümüzde sadece teorik matematiğin değil ama uygulamalı bilimlerde de etkinlik kazanmıştır. Birinci mertebe lojik günlük matematikte yeterli olmakla birlikte, ifade gücünün zayıflığı bir yana, kuvvetli matematiksel yapıların oluşturulmasında etkisiz kalır. Modal lojik bunu çok rahat yerine getirir.

Lojiklerin tamlık ve saptanabilirlikleri uğraşılan öncelikli problemlerdir. Bunları çözmenin karmaşık ve zahmetli yolları vardır. Sahlqvist algoritması, çok genel olmasa da, tamlık için son derece pratik ve şaşılacak derecede yalın bir çözüm sunar.

Bu tezde; tek modaliteli temel modal dilde yazılmış formüller Sahlqvist dengine dönüştürüldükten sonra karşılığı olan birinci-mertebe özelliklere, oradan da, tamlığa geçilmiştir. İkinci ve daha yüksek mertebeden özelliklere karşılık gelebilecek Sahlqvist formüllerinin irdelenmesine tezin sonuç kısmında değinilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Tezin anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

2. 1 Önermeler Lojiği

Tanım 2.1.1 (Önermeler lojiğinin dili)

Önermeler lojiğinin dili aşağıdaki nesnelerden oluşur:

(i) Önerme harfleri veya önerme değişkenleri yada atomic önermeler denilen ve $p_1, p_2, \ldots$ ve çoğu zaman $p, q, r, s, \ldots$ şeklinde yazılan harflerin bir P kümesi;

(ii) Boole bağlaçları adı verilen ve $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \bot$ ile gösterilen işlemler.

Bu işlemler P kümesi üzerinde sırasıyla 1-li, 2-li, 2-li ve 2-li işlemlerdir. $\bot$ ve $\top$ önerme sabitleri sırasıyla *yanlışlığı* ve *doğruluğu* ifade ederler. $\neg$ bağlacı *bir önermenin değilini, olumsuzunu,* $\wedge$ bağlacı *iki önermenin evetlemesini*, $\vee$ bağlacı *iki önermenin veyalamasını* ve $\rightarrow$ bağlacı ise *iki önermenin koşullandırılmasını amaçlar.* Bağlaçların kullanımı atomic önermelerden itibaren bileşik önermelerin oluşturulmasını amaçlar. $\vee$ bağlacı *içleyici* anlamında işlev yürütür. Bu terminoloji doğruluk kavramı bağlamında açıklanacaktır.

Önermeler lojiği 2-değerli bir lojiktir; başka bir ifadeyle, bir atomik önerme ya doğru ya da yanlış değerini alır. Buna göre, n tane atomik önermeden oluşturulmuş bir bileşik önermenin 2^n tane doğruluk değeri vardır.

$P := \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ tanımlansın. CP, bağlaçlar yardımıyla P den itibaren oluşturulan bileşik önermelerin kümesini göstersin.

Tanım 2.1.2 Bir $\varphi \in CP$ önermesinin doğruluk değeri her zaman doğru ise φ ye bir *totoloji* (*hep doğru*) ve her zaman yanlış ise φ ye bir *çelişki* (*hep yanlış*) denir.

Örnekler 2.1.3 $p \vee \neg p, q \rightarrow p \vee \neg p, p \rightarrow p$ hep doğru önermeler iken; $r \wedge \neg r, r \vee \neg r \rightarrow r \wedge \neg r$ hep yanlış önermelerdir.

Önermeler lojiğinin aksiyomları oluşturulurken bağlaçların tümüne gerek yoktur. Bileşik bir önermeyi yazmak için $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}$ ya da $\{\neg, \rightarrow\}$ ikililerinden biri yeterlidir. Bu nedenle, örneğin, $\{\neg, \rightarrow\}$ seçilirse önermeler lojiği sadece aşağıdaki aksiyomlarla yetinir:

$L1$: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$L2$: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

$L3$: $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$

Eğer beş bağlacın hepsini kullanmak gerekseydi, o zaman on tane aksiyom oluşturulurdu ve bu durumda Hilbert Önermeler Lojiği'nden söz edilirdi.

Önermeler lojiğinin tek türetim kuralı Modus Ponens (Onaylama Yöntemi) kuralıdır: p ve $p \rightarrow q$ önermelerinden q önermesi sonuçlandırılır. Daha açık söylemek gerekirse bu kural; p doğru ve $p \rightarrow q$ doğru durumunda q önermesinin de doğru olmasını gerektirir.

Böylece bir lojik; belirli bir dilde yazılmış formüllerin bir kümesidir öyle ki bu formüllerden bazılarına hipotezler veya aksiyomlar denir ve diğerleri de türetim kuralları yardımıyla oluşturulur.

Gözlemler 2.1.4

(i) Bir türetim kuralı bir aksiyom gibi algılanabildiğinden, oluşturulduğu alanda her zaman doğrudur.

(ii) Aksiyom sayıları sonsuz çokluktadır, çünkü $L1, L2, L3$ ifadelerinin herbirinin sonsuz çoklukta nüshası vardır. Önemli olan aksiyomların birbirlerinden bağımsız biçimde oluşturulabilmesidir.

(iii) Önermeler lojiği *güçsüz* bir lojiktir, ancak başka lojiklerin inşasında taban lojik görevini yüklenir. Güçsüzlüğünü, örneğin, şu önerme ortaya çıkarır:

Goldbach Tahmini: 2 den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir.

Yaklaşık 250 yıldan beri bu tahminin ne de olumsuzunun (yadsınmasının) çözümü bulunamamıştır. Bu iddia p ile gösterilirse o zaman $p \vee \neg p$ bir totoloji değildir. Buna göre yaşamda karşılaşılan problemlere yaklaşımlarda önermeler lojiği yetersiz kalmaktadır.

(iv) Önermeler lojiğinde yeni buluşlar artık mümkün değildir (Hodges, 1993).

Bu lojik hakkında ayrıntılı bilgi edinmek isteyenler, özellikle, (Bell et al., 1991) kaynağına başvurabilir.

2. 2 Modal Lojik

Önermeler lojiğinden daha *güçlü* lojikler oluşturulabilir. Bunu yerine getirmenin en yalın yolu; önermeler lojiği diline yeni bağlaçlar veya operatörler eklemeden geçer. Bu denemeyi ilk gerçekleştiren (Lewis, 1918) olmuş ve önermeler lojiğinin diline *olanaksızdır* anlamında bir 1-li I operatörü (modalitesi) eklemiştir. Lewis, daha sonra ϕ, ψ yi kesin gerektirir anlamını ifade eden $\phi \prec \psi$ şeklinde gösterilen $\prec$ 2-li operatörü $I(\phi \wedge \neg\psi)$ olarak tanımlamıştır. 1932 yılında Lewis'in düşüncelerinden hareketle Lewis ve Langford (Lewis et al., 1932), önermeler lojiği dilinde ilkel olarak $\Diamond$ (diamond) operatörünü *olabilir* anlamında katarak $\phi \prec \psi$ formülünü $\neg\Diamond(\phi \wedge \neg\psi)$ şeklinde tanımlamışlardır. Lewis'in oluşturduğu aksiyomatik sistem günümüz anlamında tuhaflıklar içermektedir.

Tuhaflık; oluşturulan sistemin matematikde üreteceği sonuçlarla ilişkilidir. Önermeler lojiği diline eklenecek her türden operatör bize daha güçlü lojikler verecek midir? Bunun öyle olmadığı açıktır.

2. 2. 1 Modal Lojiğin Tanımı

Modal lojik nedir? sorusunun kesin bir yanıtı yoktur (Blackburn et al., 2001). Bununla birlikte, uygulandığı alanlar göz önünde bulundurulduğunda, modal lojik hakkında şunlar rahatlıkla söylenebilir:

(a) Modal diller bağıntısal yapılar için yalın ancak ifade gücü yüksek dillerdir.

(b) Modal diller bağıntısal yapılarda iç, yerel bakış açısı sağlayan dillerdir.

Başka bir deyişle; yüklemler mantığındaki niceleyicilerin aksine modal dillerin operatörleri, *görebildikleri* veya *ulaşabildikleri* dünyaları *nicelerler*. İleride bu kavram açıklığa kavuşturulacaktır.

(c) Modal diller izole (statik, durağan) formel sistemler değil, aksine dinamik dillerdir.

Açıklamak gerekirse, modal diller salt kuramsal matematikte uygulama bulan diller değildir; onların en etkili ve üretken oldukları alan günümüz bilgisayar bilimleridir. Önermesel Dinamik Lojik bilgisayar dilini kullanan kuvvetli bir lojiktir.

Modal diller sayesinde – klasik matematikte hiç bir zaman yer almayan – zaman matematikte kendine yer bulmuş ve Zaman Lojiği'nin doğuşuna neden olmuştur. Modal lojiğin Bilgisayar Bilimlerindeki uygulamaları (Hult et al., 2000) kaynağında bulunabilir.

2. 2. 2 Temel Modal Dil

Bu tezde sadece tek modaliteli modal dil ele alınacağından, tanımı verilecek dile temel modal dil adı verilecektir.

Tanım 2.2.2.1 Temel modal dil; önermeler lojiği diline 1-li bir $\Diamond$ modal operatörü eklenerek elde edilen dildir.

İlkel bağlaçlar olarak $\neg, \vee$ alınırsa, o zaman bu dilin formülleri rekürsif olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

1. Her bir $p \in P$ bir modal formüldür;

2. $\perp$ sabiti bir modal formüldür;

3. $\varphi \in CP$ ise $\neg\varphi$ bir modal formüldür;

4. $\varphi, \psi \in CP$ ise $\varphi \vee \psi$ bir modal formüldür;

5. $\varphi \in CP$ ise $\Diamond\varphi$ bir modal formüldür;

6. 1. – 5. dışında modal formül oluşturma kuralı yoktur.

Birinci mertebe varlıksal ve evrensel niceleyicilerin aralarındaki *dual* bağıntıya benzer bir bağıntı $\Diamond$ operatörü ile duali $\Box$ arasında da vardır:

$\varphi \in CP$ için x bir değişken olmak üzere

$$\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$$

denkliğine benzer olarak

$$\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$$

tanımı yapılabilir. $\Diamond$ 1-li operatörüne elmas (diamond) ve $\Box$ li modalitesine de kutu (box) adı verilir.

Birinci mertebe lojikte $\exists$ ve $\forall$ niceleyicilerinin anlamları belirli iken, $\Diamond$ ve $\Box$ operatörlerinin yorumları değişkendir. Farklı yorumlarına biraz sonra değinilecektir. Ancak son zamanlarda çok yaygın araştırma konusu olarak modal lojik ile topolojik uzaylar arasında çok sıkı bağlar elde edilmiştir. Bu bağlamda $\Box$ operatörü topolojik iç Int ve $\Diamond$ operatörü de topolojik kapanış Cl olarak yorumlanır.

İleride ele alınacak çok temel S4 lojiği tüm topolojik uzayların lojiğidir. Bu sonucu ilk kez McKinsey ve Tarski, S4 lojiğinin adını açık biçimde anmadan, elde etmiştir. Daha fazla ayrıntı için (McKinsey et al., 1944) kaynağına başvurulabilir.

Örnek 2.2.2.2 $\Diamond$, dolayısıyla $\Box$, operatörünün farklı yorumları verilebilir.

(i) Olabilirlik yorumu: $\varphi \in CP$ için $\Diamond\varphi$ modal formülü φ nin yerine getirebileceğini ifade eder. Buna göre $\Box\varphi$ φ nin *zorunlu* olarak getirilebileceğini söyler. Eğer $\varphi, \psi \in CP$ için $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ ve $\psi \to \Diamond\psi$ formüllerinin yorumları istenseydi ilki "zorunlu olan olasıdır" ve ikincisi "her ne ise olasıdır" anlamlarını taşırdı. $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ formülü "her ne ise zorunlu olarak olasıdır" durumunu anlatır.

Bu ve benzeri yazılacak formüllerin *olabilirlik* ve *zorunluluk* kavramlarının ne demek istediğini yansıtacak mıdır? Bu sorunun kökeninde tarihsel ve felsefi tartışmalar yatar; burada ayrıntıya hiç girilmeyecektir.

(ii) Bilgi (epistemic) yorumu: $\varphi \in CP$ için $\Box\varphi$ şu şekilde yorumlanır: "Ajan φ nin ne olduğunu biliyor". $\Box\varphi$ yerine $K\varphi$ (K: know'dan geliyor) yazmak gelenektir. Örneğin, $K\varphi \to K$ formülü, bu yorumu altında, doğru olmalıdır: "Ajan gerçekten φ yi biliyorsa φ biliniyordur".

(iii) İspatlanabilirlik yorumu: $\varphi \in CP$ için $\Box\varphi$ "φ ispatlanabilirdir" olarak yorumlanır. Bu yorum daha ziyade sayılar teorisi ile ilgilidir. Daha fazla ayrıntıya girmeksizin, bu alanda $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ Löb formülü çok merkezil bir rol oynar. Tezin konusunu oluşturan Sahlqvist formülleri bağlamında, Löb formülü bir Sahlqvist formülünün dengi olarak yazılamayacaktır.

2. 3 Modeller ve Çatılar

2.2.1 (a) ve (b) de değinildiği gibi, modal diller bağıntısal yapılarda yorumlanacaktır. Bu yorum model ve çatı düzeyinde olmak üzere iki farklı biçimde ele alınacaktır. Model düzeyindeki yorum gerçekleme (satisfaction) veya doğruluk (truth) kavramı; çatı düzeyindeki yorum geçerlilik (validity) kavramını ortaya atmaları açısından çok önem taşımaktadır.

2. 3. 1 Modeller ve Gerçekleme

Temel modal dil için önce çatı, model ve gerçekleme tanımları verilecektir.

Tanım 2.3.1.1 W boştan farklı bir küme ve R,W üzerinde bir 2-li bağıntı olmak üzere $\mathfrak{I} = \langle W, R \rangle$ ikilisine bir çatı denir.

$\mathfrak{I}$ bir çatı ve $V : P \to \mathcal{P}(W)$ şeklinde bir fonksiyon olmak üzere $\mathsf{M} = \langle \mathfrak{I}, V \rangle$ ikilisine temel modal dil için bir model denir.

$p \in P$ için $V(p)$, p nin modelde doğru olduğu kümeyi belirler. V fonksiyonuna valuation denir. M modeline $\mathfrak{I}$ çatısı üzerine kurulu model adı verilir.

Gözlemler 2.3.1.2

(i) Her bir $p \in P$ için $V(p) \subseteq W$, W üzerinde 1-li bir bağıntı olduğu düşünülürse temel dil için modeller $(W,\ R,\ V(p),\ V(q),\ V(r),\ \ldots)$ biçimli bağıntısal yapılar olarak kabul edilebilir. Bu nedenle bir model, 2-li bir bağıntı yanında sayılabilir çoklukta 1-li bağıntıları olan bir çatıdan başka bir şey değildir.

(ii) Bir model ve bir çatı yapısal açıdan benzerlik gösterselerde, çatılar ilginç olan matematiksel nesnelerin şekilleri olarak daha fazla bilgi içerebilirler.

Şimdi modal dilin modellerde nasıl yorumlanması gerektiğinin tanımı verilecektir.

Tanım 2.3.1.3 $w \in W$ ve $\varphi \in CP$ olsun. φ nin $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ modelinin w noktasında gerçeklenebildiği (doğru olduğu) φ nin karmaşıklığı üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

- $\mathcal{M}, w \Vdash p$ (eye) $w \in V(p)$, $p \in P$;
- $\mathcal{M}, w \nVdash \perp$,
- $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\psi$ (eye) $\mathcal{M}, w \nVdash \psi$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash \psi \vee \chi$ (eye) $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$ veya $\mathcal{M}, w \Vdash \chi$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ (eye) Rwv; $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$ olacak şekilde $v \in W$ vardır.

Açıklamalar 2.3.1.4

(i) Tanımda yer alan $\Vdash$ sembolü yerine $\vDash$ literatürde çok sık geçer. $w \Vdash \phi$ gösterilimi, ϕ formülünün modelin w noktasında doğru olduğunu söyler.

(ii) Kısaltma olarak kullanılan (eye) [eğer ve yalnız eğer], if and only if için yapılan (iff) kısaltmasının benzeridir.

(iii) Tanım 2.3.1.3 den $\Box$ operatörünün gerçeklenmesi şöyle elde edilebilir:

- $\mathrm{M}, w \Vdash \Box\psi$ (eye) Rwv şeklindeki her $v \in W$ için $\mathrm{M}, v \Vdash \psi$ dir.

(iv) 2.2.1 (b) de dile getirilen yerel bakış açısı burada açıklık kazanır, şöyleki: $\Diamond\psi$ ve $\Box\psi$ formüllerinin bir $w \in W$ noktasında doğruluğu w nın ancak R bağıntısı aracılığıyla *görebildiği* yerlerde söz konusudur.

(v) $\nVdash$ notasyonu $\Vdash$ nin gerçeklenmediğini ifade eder.

Tanım 2.3.1.5 $\varphi \in CP$ ve her $w \in W$ için $\mathrm{M}, w \Vdash \varphi$ ise φ formülü M modelinde *evrensel* veya *global doğrudur,* denir. M modeline de φ nin doğru olduğu bir nokta varsa φ, M modelinde *gerçeklenebilirdir*, denir. Olumsuzu gerçeklenen bir formüle de *yanlışlanabilir* veya *çürütülebilir* formül adı verilir.

Örnek 2.3.1.6 $W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ olsun ve Rwv şöyle tanımlansın: "$w \neq v$ ve w, v yi böler". $\mathfrak{I} = \langle W, R\rangle$ çatısı üzerinde bir V valuationu $V(p) = \{4, 8, 12, 24\}$, $V(q) = \{6\}$ gibi tanımlanarak $\mathrm{M} = \langle \mathfrak{I}, V\rangle$ modeli verilsin. O zaman aşağıdakiler kolaylıkla gerçeklenebilir:

a) $\mathrm{M}, 4 \Vdash \Box p$,

b) $\mathrm{M}, 6 \Vdash \Box p$,

c) $\mathfrak{M}, 2 \nVdash \Box p$,

d) $\mathfrak{M}, 2 \Vdash \Diamond(q \wedge \Box p) \wedge \Diamond(\neg q \wedge p)$.

2. 3. 2 Çatılar ve Geçerlilik

2.3.1.1. de modellerin bir çatı ve bir valuationdan oluşan bileşik nesneler olduğu görüldü. Ama çoğu zaman valuationların doğrudan etkilerini göz ardı etmek önem taşıyacaktır. Bu tercih bir çatıdaki geçerlilik kavramına neden olacaktır.

Tanım 2.3.2.1 $\varphi \in CP$ ve $\Im = \langle W, R \rangle$ verilsin. $\Im$ üzerine kurulu her $\langle \Im, V \rangle$ modelinin w noktasında φ formülü doğru ise φ, $\Im$ nin w *noktasında geçerlidir* denir ve $\Im, w \Vdash \varphi$ yazılır; $\Im$ deki her noktada geçerli olan bir φ formülüne $\Im$ de *geçerli* denir ve $\Im \Vdash \varphi$ yazılır. $\boldsymbol{F}$ bir çatılar sınıfı olsun. φ formülü $\boldsymbol{F}$ deki her $\Im$ çatısında geçerli ise φ, $\boldsymbol{F}$ *sınıfında geçerlidir* denir ve $\boldsymbol{F} \Vdash \varphi$ yazılır. $\boldsymbol{F}$ sınıfında geçerli formüllerin kümesine $\boldsymbol{F}$ nin *lojiği* denir ve $\bigwedge_{\boldsymbol{F}}$ ile gösterilir.

Uyarı 2.3.2.2 Birçok açıdan geçerlilik doğruluktan farklılık gösterir. Bunu görmenin en iyi yolu bir örnek vermektir. $w \Vdash \varphi \vee \psi$, tanım uyarınca, $w \Vdash \varphi$ veya $w \Vdash \psi$ durumlarını verir; yani w noktasında φ doğrudur veya ψ doğrudur. Ancak $\varphi \vee \psi$ nin bir $\Im$ çatısındaki geçerliliği aranıyorsa bu ya φ nin ya da ψ nin $\Im$ üzerinde geçerli olduğu anlamına gelmez; $p \vee \neg p$ formülü bir karşıt örnek oluşturur.

Örnek 2.3.2.3

(i) Yüklemler mantığında $P(x)$ ve $Q(x)$ iki 1-li yüklem olmak üzere

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

denkliği iyi bilinmelidir.

2.2.2 de dile getirildiği üzere $\exists$ ile $\Diamond$ arasındaki benzerlik burada bir örnekle ele alınacaktır.

$p, q \in P$ için $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ formülü tüm çatılar üzerinde geçerlidir.

Gerçekten, $\Im$ keyfi bir çatı ve $w, \Im$ de bir nokta; V de $\Im$ üzerinde bir valuation olsun. O zaman $(\Im, V), w \Vdash \Diamond(p \vee q)$ ise $(\Im, V), w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$ olduğu gösterilmelidir. $w \Vdash \Diamond(p \vee q)$ ise tanımdan $v \Vdash p \vee q$, Rwv olacak şekilde bir $v \in W$ vardır. Buradan $v \Vdash p$ veya $v \Vdash q$ olur. O halde $w \Vdash \Diamond p$ veya $w \Vdash \Diamond q$ elde edilir. Her iki halde $w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$ bulunur.

(ii) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ yada denk olarak $\Box p \to \Box\Box p$ formülü tüm çatılar üzerinde geçerli değildir. Bunu görmek için bir $\Im$ çatısı, çatıda bir w noktası ve $\Im$ üzerinde bir valuation bulmak yeterlidir öyle ki $(\Im, V), w \nVdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ olsun. $W = \{0,1,2\}$, $R = \{(0,1),\ (1,2)\}$ ve $V(p) = \{2\}$ seçimi altında $0 \Vdash \Diamond\Diamond p$ iken $0 \nVdash \Diamond p$ elde edilir, çünkü $(0,2) \notin R$ dir.

Buna karşın $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ formülü geçişken çatıların sınıfında geçerlidir. Böylece R bağıntısının taşıyacağı özellikler çatıların sınıflandırılmasında önemli rol oynayacaktır.

3. KRİPKE MODELLERİ

3. 1 Giriş

Saul Kripke lojiğin çok farklı alanlarına temel katkılarda bulunmuştur. Bazılarını anmak gerekirse; yüksek mertebeden rekürsion teorisindeki "Kripke-Platek aksiyomları", sezgi analizindeki "Brouwer-Kripke şeması" ve salt gerektirme bağlacı üzerine kurulmuş lojik fragmanı için "Kripke saptama yöntemi". Ancak Kripke'nin ünlenmesini sağlayan buluşlarının temelini modal ve ilgili klasik-dışı lojik için oluşturduğu ve adını taşıyan "Kripke modelleri"dir. Bu konuda ayrıntılı bilgiler (Bull et al., 1984) ve (Garson, 1984) kaynaklarında bulunabilir.

3. 2 Modeller Teorisinin Kısa Tanıtımı

Genel olarak klasik önermeler lojiği bağlamında bir M modeli; P nin her bir atomunu T veya F doğruluk değerini atayan bir V valuationundan başka bir şey değildir. Bu fonksiyon CP üzerine aşağıdaki şekilde genişletilebilirdir.

(0) $M \vDash p$ (eye) $V(p) = T$;

(1) $\varphi \in CP$ için $M \vDash \neg\varphi$ (eye) $M \nvDash \varphi$;

(2) $\varphi, \psi \in CP$ için $M \vDash \varphi \wedge \psi$ (eye) $M \vDash \varphi$ ve $M \vDash \psi$;

(3) $\varphi, \psi \in CP$ için $M \vDash \varphi \vee \psi$ (eye) $M \vDash \varphi$ veya $M \vDash \psi$;

(4) $\varphi, \psi \in CP$ için $M \vDash \varphi \to \psi$ (eye) $M \vDash \varphi$ ise $M \vDash \psi$ dir.

II. Bölümde kullanılan $\Vdash$ sembolü yerine, önermeler lojiğinde $\vDash$ kullanılması yaygındır.

Tanım 3.2.1 Tüm modellerde doğru olan bir formüle *geçerli* ve bir modelde doğru olan formüle de *gerçeklenebilir* formül denir.

Bu tanıma göre şu yalın sonuç tartışmasız doğrudur: φ geçerlidir (eye) $\neg\varphi$ gerçeklenemezdir. Sonra bir formülün bir modeldeki doğruluğu; V fonksiyonunun formülde geçen atomlara atayacağı değerlere bağlı olacaktır. Bu değerlerin sadece sonlu sayıda kombinasyonu olduğundan, şu temel sonuç elde edilmiş olur.

Olgu 3.2.2 Önermeler lojiğinde bir φ formülünün geçerli olup olmadığı belirlenebilirdir. Daha uygun bir terminoloji ise

"*Klasik önermeler lojiği için geçerlilik saptanabilirdir*"

şeklindedir.

Modeller teorisinin gelişiminden önce önermeler lojiği için bir çok *ispat yöntemleri* ortaya atılmıştır. Böyle bir yöntemde aksiyomlar ve türetim kuralları devreye girerler. Bir *ispat* her bir terimi bir aksiyom veya türetim kurallarıyla daha önceki teoremlerden elde edilen bir formüller dizisidir. İspattaki son terime bir *teorem* denir. Bazen ispatı olan bir formüle de bir teorem adı verilir.

Tanım 3.2.3 $\varphi \in CP$ olsun. $\neg\varphi$ nin bir ispatı yoksa φ formülüne *tutarlıdır* denir.

Modeller teorisi ispat yöntemlerinin kabul edilebilirliğinin bir ölçütünü verebilir. Örneğin Modus Ponens kabul edilebilir bir ispat kuralıdır. Rasgele kurallar yazılabilir, ancak kabul edilebilir olmalarını denetleme işlevini modeller teorisi üzerine alabilir.

Tanım 3.2.4 Her ispatlanabilir formül geçerli ise bu yönteme *sağlam (sound)* ve her geçerli formül ispatlanabilirse yönteme *tam (complete)* denir.

Bu iki kavram son derece önemlidir. Sağlamlığın yerine getirilmesi rutin bir işlem gerektirirken, tamlık kapsamlı bilgi ve beceri gerektirir. Bu konuya ileride değinilecektir.

3. 3 Modal Lojik Nedir?

Önermeler lojiği düzeyinde, en yalın ve saf haliyle, modal lojik önermeler lojiğine *gerekliliği* ifade eden bir $\Box$ sembolü ekler. $\Diamond$ *olabilirlik* sembolü $\neg\Box\neg$ nin bir kısaltılmışı olarak kullanılabilir. Lewis ve Lewis-Langford'un çalışmaları dışında, başlangıçta $\Box$ operatörü ispatlanabilirlik (veya geçerlilik) ve $\Diamond$ operatörü de tutarlılık (veya gerçeklenebilirlik) olarak anlaşılmıştır. Bu iki operatörün farklı yorumlarına II. Bölümde değinilmişti.

Operatörlerin farklı yorumlarını bir bütün olarak ele alan (Gödel, 1932); tüm sistemlere ek bir kural ilave etmiş ve bu kurala Gereklilik veya Genelleştirme ya da Gödel kuralı adını vermiştir:

$$(N) \qquad \frac{\varphi}{\Box\varphi}.$$

Bundan sonra minimal lojik tanımı verilebilir.

3. 3. 1 Normal Modal Lojik

Bir $\boldsymbol{F}$ çatılar sınıfı verilmiş olsun. Acaba $\boldsymbol{F}$ üzerinde geçerli formüllerin kümesini; yani $\bigwedge_{\boldsymbol{F}}$ yi, doğuran sintaktik mekanizmalar var mıdır? Bu sorunun yanıtı normal modal lojik kavramı bünyesinde yer alır.

Tanım 3.3.1.1 Aksiyomları tüm önermeler lojiğinin totolojileri ve

$$(K) \qquad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

$$(Dual) \qquad \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \,;$$

türetim kuralları

- Modus Ponenes (MP) : φ ve $\varphi \to \psi$ den ψ sonuçlanır;

- Tek düze ikame: φ verildiğinde φ nin atomları yerine keyfi formüller ikame edilerek elde edilen ψ formülü geçerlidir;

- Genelleştirme: φ verildiğinde $\Box\varphi$ geçerlidir;

olan modal lojiğe *minimal modal lojik* denir ve $\boldsymbol{K}$ ile gösterilir.

Gözlemler 3.3.1.2

(a) K aksiyomu adını Kripke'den alır. Bunun nedeni; Kripke'nin modeller teorisi üzerine yaptığı çalışmalarda $\Box$ operatörünün $\rightarrow$ bağlacı üzerine dağılması vazgeçilmez bir özellik olarak direnmesinden kaynaklanır.

(b) Tekdüze ikame kısaca *Subst* kuralı diye; Genelleştirme de N kuralı olarak adlandırılır.

(b) $\boldsymbol{K}$ nın totolojileri modaliteler içerebilir; $p \vee \neg p$ nin takliti olarak $\Diamond p \wedge \neg \Diamond p$ bir totolojidir. Totolojiler tüm çatılarda geçerli formüllerdir.

(c) Modus Ponens kuralı geçerliliği korur; yani $\Vdash \varphi$ ve $\Vdash \varphi \rightarrow \psi$ ise $\Vdash \psi$ vardır. Bu vazgeçilmez bir özelliktir. Keza *Subst* kuralı da geçerliliği korur.

(d) N kuralı da geçerliliği korur, ancak hem N hem de *Subst* gerçeklenebilirliği korumazlar!

(e) $\boldsymbol{K}$ lojiğinin minimalliği şu anlamda kavranmalıdır: $\boldsymbol{K}$ nın tüm aksiyomları geçerlidir ve üç türetim kuralı geçerliliği korur; dolayısıyla $\boldsymbol{K}$ - ispatlanabilir tüm formüller geçerlidir. Daha yaygın bir terminoloji kullanılırsa bunlar $\boldsymbol{K}$ nın tüm çatılar sınıfına göre sağlam olduğunu söyler. Bunun tersi de doğrudur: bir $\varphi \in CP$ formülü geçerli ise φ $\boldsymbol{K}$ - ispatlanabilirdir. Bu ise $\boldsymbol{K}$ nın tüm çatılar sınıfına göre tam olduğunu ifade eder. Kısaca $\boldsymbol{K}$ lojiği tam anlamıyla geçerli formülleri doğuran lojiktir.

Örnek 3.3.1.3 $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box (p \wedge q)$ formülü tüm çatılarda geçerli olduğu için $\boldsymbol{K}$ - ispatlanabilir olmak zorundadır. Geçekten $\boldsymbol{K}$ lojiğinin aksiyomları ve kuralları kullanılarak bir ispat aşağıdaki gibi verilebilir.

1. $\vdash p \to (q \to (p \wedge q))$	Önermesel totoloji
2. $\vdash \Box (p \to (q \to (p \wedge q)))$	N (1)
3. $\vdash \Box (p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	K aksiyomu
4. $\vdash \Box (p \to (q \to (p \wedge q))) \to (\Box p \to \Box (q \to (p \wedge q)))$	$Subst$ (3)
5. $\vdash \Box p \to \Box (q \to (p \wedge q))$	$MP(2,4)$
6. $\vdash \Box (q \to (p \wedge q)) \to (\Box q \to \Box (p \wedge q))$	$Subst$ (3)
7. $\vdash \Box p \to (\Box q \to \Box (p \wedge q))$	Syllogism (5,6)
8. $\vdash (\Box p \wedge \Box q) \to \Box (p \wedge q))$	Önermeler Lojiği (7)

Tanım 3.3.1.4 Bir *normal modal lojik* Λ; tüm totolojileri, (K) ve $(Dual)$ aksiyomlarını içeren ve $MP, Subst, N$ kurallarına kapalı bir formüller kümesidir.

Minimal normal lojik $\boldsymbol{K}$ lojiğidir.

Bazı önemli aksiyomlar $\boldsymbol{K}$ ya eklenirse matematiksel ve de teknolojik anlamda lojikler elde edilebilir. Bu aksiyomlardan bazılarının, özellikle, topolojik uzayların lojiği olduğu ilk kez (Gabelia, 2001) da ele alınmıştır.

3. 4 Minimal Lojiğin Bazı Genişlemeleri

K minimal lojiğine bazı aksiyomlar eklenirse, belirli çatı sınıflarını karakterize eden lojikler elde edilebilir. Burada çok temel aksiyomlar ele alınacaktır. $\varphi \in CP$ için

$$T: \Box\varphi \to \varphi$$

$$4: \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$B: \varphi \to \Box\Diamond\varphi$$

aksiyomları $\Im = \langle W, R \rangle$ çatısının R bağıntısının, sırasıyla, yansıyan, geçişken ve simetrik olduklarını ifade ederler. Buna göre

$\boldsymbol{K} \oplus T$ lojiği tüm yansıyan çatılar sınıfını betimler.

$\boldsymbol{K} \oplus 4$ lojiği tüm geçişken çatılar sınıfını betimler.

$\boldsymbol{K} \oplus B$ lojiği tüm simetrik çatılar sınıfını betimler.

Bu aksiyomların birbirlerine eklenmesi sonucu çok anlamlı lojikler elde edilir:

$\boldsymbol{K4} = \boldsymbol{K} \oplus 4$

$\boldsymbol{S4} = \boldsymbol{K} \oplus T \oplus 4$

$\boldsymbol{S}5 = \boldsymbol{K} \oplus T \oplus 4 \oplus B.$

K nın yaygın genişlemeleri aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir:

Yaygın Modal Aksiyom Taslakları

İsim	Aksiyom	Çatı Koşulu
K	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	
T	$\Box\varphi \to \varphi$	Yansımalı
4	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	Geçişmeli
B	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	Simetrik
D	$\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	Serisel: $\forall w \exists v (Rwv)$
5	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	Euclidean: $Rwu \wedge Rwv \to Ruv$
GL	$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$	R geçişken ve R^{-1} iyi-temellendirilmiş (1)
Grz	$\Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \varphi$	R önsıralı ve $R^{-1} - Id$ iyi-temellendirilmiş (2)
H	$\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)$	$Rwu \wedge Rwv \to Ruv \vee Rvu$
M	$\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$	2. mertebeden bir özellik
G	$\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	$Rwu \wedge Rwv \to \exists x (Rux \wedge Rvx)$

Yaygın Normal Modal Lojikler

İsim	Aksiyom	Çatı Koşulu
K	-	Tüm Çatılar
T	T	Yansıma
K4	4	Geçişken
S4	$T,4$	Önsıralama
S5	$T,5$ veya $D,B,4$	$R = W \times W$
S4.3	$T,5,H$	Tam Önsıralama
S4.1(3)	$T,4,M$	Önsıralama, $\forall w \exists u (Rwu \wedge \forall v (Ruv \rightarrow u = v))$
S4.2	$T,4,G$	Yönlü önsıralama
GL	GL veya $4,GL$	Sonlu sıkı kısmi sıralama
Grz, ***S4****Grz*	Grz veya $T,4,Grz$	Sonlu kısmi sıralama
D	D	Serisel
D45	$D,4,5$	Geçişken, serisel ve Euclidean

(1) $\Im = \langle W, R \rangle$ çatısında $\cdots Rw_2w_1 \wedge Rw_1w_0$ şeklinde hiç bir sonsuz yol yoksa R bağıntısına *iyi-temellendirilmiş* bir bağıntı denir. W sonlu ve R geçişken olmak üzere R iyi-temellendirilmiştir (eye) R yansımasızdır, sonucu vardır.

(2) $Id = \{(w,w) : w \in W\}$ bağıntısıdır.

(3) ***S4.1*** modal lojiği atomlu uzayların bir lojiğidir [Gabelia, 2001]. McKinsey M aksiyomu birinci mertebe dengi olmayan 2.mertebeden bir formüldür.

$\boldsymbol{S}4$ lojiği; modal lojiğin çeşitli alanlarındaki uygulamaları ve ifade edilebilirliği için temel lojiktir. Kapanış cebirleri ve genelde topoloji, özelde Alexandroff topolojileri ile olan ilişkileri $\boldsymbol{S}4$ lojiğinin hala gündemde olmasını sağlar. Bu konudaki çalışmalar için (Aiello et al., 2003), (Bezhanishvili et al., 2005), (Haim, 2000) kaynaklarına başvurulabilir. Adı geçen bu çalışmalarda $\boldsymbol{S}4$ ile ilgili bazı ilginç sonuçlar vermek aydınlatıcı olabilir.

Teorem 3.4.1 $\boldsymbol{S}4$ sonlu iyi-bağlantılı topolojik uzayların lojiğidir.■

İyi-bağlantılı bir uzay; U ve V iki açık olmak üzere X topolojik uzayı $X = U \cup V$ olarak yazılabiliyorsa $X = U$ veya $X = V$ özelliğini sağlayan bir uzaydır. İyi-bağlantılılık kavramının bağlantılılık kavramından daha kuvvetli olduğu açıktır.

Teorem 3.4.2 (McKinsey ve Tarski) $\boldsymbol{S}4$ lojiği herhangi bir metrik, ayrılabilir ve kendi-içinde yoğun uzayın lojiğidir.■

Sonuç Teorem 3.4.3 $\boldsymbol{S}4$ lojiği $\mathbb{R}$ sayı doğrusu, $\boldsymbol{C}$ Cantor uzayına ve Alexandroff topolojik uzaylarına göre tamdır.■

Bir lojiğin bir çatılar sınıfına göre sağlamlığı ve tamlığı ileride özet olarak ele alınacaktır.

3. 5 Kripke Semantiği ve Kripke Modeller

Bölüm II de verilen çatı ve model tanımları, aslında, Kripke'ye aittir. Bu tanımları farklı ancak denk biçimde vermek mümkündür.

Temel modal dilin $\neg, \rightarrow$ Boole bağlaçları ve $\Box$ operatöründen oluştuğunu varsayalım.

3. 5. 1 Temel Tanımlar

W boş olmayan bir küme ve R, W üzerinde bie 2-li bağıntı olmak üzere $\Im = \langle W, R \rangle$ ikilisine bir *Kripke çatı* veya *modal çatı* denir. W (world) kümesinin elemanlarına *dünyalar* veya *noktalar* ya da *düğümler*; R bağıntısına ise *erişebilirlik*, *ulaşılabilirlik* ya da *görme* bağıntısı adı verilir.

Birli $\Box$ operatörü 2-li R bağıntısı yorumlayacaktır.

Bir *Kripke model* bir $\langle W, R, \Vdash \rangle$ sıralı 3-lüsüdür öyle ki $\langle W, R \rangle$ bir Kripke çatı ve $\Vdash$, W nın elemanları ile modal formüller arasında aşağıdakileri sağlayan bir bağıntıdır: $\varphi, \psi \in CP$ ve $w, u \in W$ için

$w \Vdash \neg\varphi$ (eye) $w \nVdash \varphi$;

$w \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ (eye) $w \nVdash \varphi$ veya $w \Vdash \psi$;

$w \Vdash \Box\varphi$ (eye) $\forall u (Rwu \rightarrow u \Vdash \varphi)$.

$w \Vdash \varphi$ w, φ *yi gerçekler* veya φ, w *da gerçeklenir* ya da w, φ *yi zorlar* şeklinde yorumlanır. $\Vdash$ bağıntısına *geçekleme bağıntısı* veya *değerlendirme* ya da *forcing bağıntısı* denir.

Bir formülün bir çatıda, bir modelde ve bir çatı ya da modeller sınıfında *geçerliliği* aynen Bölüm II deki gibi tanımlanır.

3. 5. 2 Kanonik Modeller

Her hangi bir L normal modal lojiği için L nin ve sadece onun teoremlerini geçerli kılan bir Kripke modeli (kanonik modeli) maksimal tutarlı kümeler kullanılarak inşa edilebilir. Kanonik Kripke modellerinin rolü Lindenbaum-Tarski cebirininkine tamamen benzerdir. Daha çok bilgi için (Blackburn et al., 2001) ile (Bell et al., 1991) kaynaklarına başvurulabilir.

Tanım 3.5.2.1 Σ temel dilde yazılmış bir formüller kümesi olsun. L lojiğinin aksiyomları ve Modus Ponens kuralı kullanımıyla Σ dan çelişki türetilemiyorsa Σ kümesine L*-tutarlı* küme denir. Σ yı kapsayan hiç bir L-tutarlı küme yoksa, Σ ya bir *maksimal* L*-tutarlı* (*MCS*) küme adı verilir.

L lojiğinin bir kanonik modeli bir $\langle W, R, \Vdash \rangle$ Kripke modelidir öyle ki W tüm $L-MCS$ lerin kümesi olsun ve R ile $\Vdash$ bağıntıları aşağıdaki biçimde işlev görsün.

RXY (eye) her $\varphi \in CP$ için $\Box\varphi \in X$ ise $\varphi \in Y$ dir;

$X \Vdash \varphi$ (eye) $\varphi \in X$ dir.

Zorn Lemması uyarınca; her bir L-tutarlı küme bir $L - MCS$ küme içindedir; özellikle L de ispatlanamayan her formül kanonik modelde gerçeklenemez.

Tanım 3.5.2.2 P Kripke çatıların bir özelliği ve Σ bir formüller kümesi olsun.

a) Σ, P yi sağlayan her çatıda geçerli;

b) Σ kümesini kapsayan her hangi bir L normal modal lojiği için L nin kanonik modeli P yi sağlıyor

ise Σ formüller kümesi P özelliğine göre *kanoniktir*, denir.

Bu tanımdan bazı önemli sonuçlar ortaya çıkar.

a. Σ_i kanonik modeller ise $\bigcup_i \Sigma_i$ kanoniktir.

b. Kanonik formüllerin aksiyomlaştırdığı bir lojik Kripke tamdır.

c. $T, 4, B, D, 5, H$ ve her türlü kombinasyonları kanoniktir.

d. GL ve Grz aksiyomları kanonik değildir.

e. M McKinsey aksiyomunun kendisi kanonik değildir; ancak $M + \boldsymbol{S4.1}$ veya $M + \boldsymbol{K4.1}$ kanoniktir (Goldblatt, 2003).

Genelde bir aksiyomun kanonik olup olmadığını yerine getiren bir algoritma, yöntem yoktur. Başka bir deyişle, şu önemli sonuç vardır:

Olgu Bir aksiyomun kanonikliği, genel olarak, saptanamazdır.

Bununla birlikte H. Sahlqvist (Sahlqvist, 1973); Sahlqvist formülleri denilen çok geniş bir formüller sınıfının zarif bir algoritma ile kanonik olduğunu gerçeklemiştir. Bu algoritmaya göre

- Bir Sahlqvist formülü kanoniktir;
- Bir Sahlqvist formülüne karşılık gelen çatılar sınıfı birinci-mertebe tanımlanabilirdir;
- Bir Sahlqvist formülüne karşılık gelen çatı koşulunu hesaplayan bir algoritma vardır.

Bu gerçekten çok güçlü bir ölçüttür; örneğin, kanonik olduğu söylenen yukarıdaki aksiyomların tümü aslında Sahlqvist formüller(ine denk) dir.

Tezin ana temasını oluşturan bu algoritma ayrıntılı olarak Bölüm IV de ele alınacaktır.

4. SAHLQVİST ALGORİTMASI (TEKNİĞİ)

Bu bölümde; verilen bir modal formüle karşılık gelen bir çatı koşulu bulmanın yolu aranacaktır. Bölüm 3 de söz edilen kanonik formüllerin özünde Sahlqvist formülleri olduğu görülecektir. Temel modal dil bağlamında yalın veya basit Sahlqvist formüllerinin, genelde, bir birinci-mertebe dengi vardır. Ancak aşağıdaki teoremin de ifade ettiği gibi keyfi bir temel dil formülünün birinci-mertebe karşılığı her zaman olmayabilir.

Teorem (Chagrova) Bir temel modal formülün birinci-mertebe karşılığı olduğu saptanamazdır.

Sahlqvist tekniğini görmeden ve Sahlqvist Tekabül Teoreminin ispatına geçmeden önce sağlamlık ve tamlık kavramlarına biraz ayrıntılı değinmek yararlı olacaktır.

4. 1 Sağlamlık ve Tamlık

Tanım 4.1.1 S bir çatılar veya modeller sınıfı ve L bir normal modal lojik olsun. Her φ formülü ve her $\Im \in \mathsf{S}$ yapısı için $\vdash_L \varphi \;\Rightarrow\; \Im \Vdash \varphi$ ise S sınıfına göre L lojiği *sağlamdır* denir.

Tanım 4.1.2 S bir çatılar veya modeller sınıfı ve L bir lojik olsun. Her hangi bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$ formüller kümesi için $\Gamma \Vdash_{\mathsf{S}} \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_L \varphi$ ise L lojiği S sınıfına göre *kuvvetli tamdır*; buna karşın, $\mathsf{S} \Vdash \varphi \Rightarrow \vdash_L \varphi$ ise L, S ye göre *zayıf tamdır*, denir.

Bölüm III de verilen bazı temel lojiklerin kuvvetli tamlıkları burada kanıtlanacaktır. Aşağıdaki önerme bu ispatlarda önemli bir rol oynayacaktır.

Önerme 4.1.3 Bir L lojiği bir S yapılar sınıfına göre kuvvetli tamdır (eye) formüllerin her L-tutarlı kümesi bir $\mathfrak{I} \in \mathsf{S}$ üzerinde gerçeklenebilirdir. L, S ye göre zayıf tamdır (eye) her L-tutarlı formül bir $\mathfrak{I} \in \mathsf{S}$ üzerinde gerçeklenebilirdir.

(İspatı için (Blacburn et al., 2001) e başvurulabilir.)

Teorem 4.1.4 (Kanonik Model Teoremi) Her normal modal lojik kanonik modeline göre kuvvetli tamdır.

İspat Γ, L normal modal lojiğinin tutarlı bir kümesi olsun. Lindenbaum Lemması uyarınca Γ bir L-*MSC* Γ^+ kümesine genişletilebilirdir. O zaman M^L, kanonik model olmak üzere, $\mathsf{M}, \Gamma^+ \Vdash \Gamma$ olduğu açıktır. (Daha fazla ayrıntı için bkz (Blacburn et al., 2001)).■

4. 2 Uygulamalar

Burada $\boldsymbol{K}$ ve $\boldsymbol{K}4$ lojiklerinin tanımladıkları çatı sınıflarına göre kuvveti tam oldukları ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.1 $\boldsymbol{K}$ lojiği tüm çatıların sınıfına göre kuvvetli tamdır.

İspat Önerme 4.1.3 e göre bu sonucu ispatlamak için $\mathsf{M}, w \Vdash \Gamma$ olacak şekilde $\boldsymbol{K}$-tutarlı bir Γ formüller kümesi, bir çatı üzerine kurulu bir M modeli ve M de bir w dünyası bulmak yeterlidir. Oysa bu çok açıktır, çünkü M yi $\boldsymbol{K}$ için kanonik model ve Γ^+ yı da Γ yı genişleten her hangi bir $\boldsymbol{K}$-*MSC* küme almak yeterlidir. O zaman Kanonik Model Teoremi $\mathsf{M}^{\boldsymbol{K}}, \Gamma^+ \Vdash \Gamma$ sonucu hemen sağlar.■

Teorem 4.2.2 $\boldsymbol{K}4$ lojiği geçişken çatıların sınıfına göre kuvveti tamdır.

İspat Γ bir $\boldsymbol{K}4$-tutarlı formüller kümesi olsun. O zaman ispatı yerine getirmek için

(1) $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$

(2) $\Im$ geçişken

olacak şekilde bir $\mathcal{M} = \langle \Im, V \rangle$ modeli ve bir $w \in \mathcal{M}$ dünyası bulmak yeterlidir.

$\mathcal{M}^{\boldsymbol{K}4} = \langle W^{\boldsymbol{K}4}, R^{\boldsymbol{K}4}, V^{\boldsymbol{K}4} \rangle$, $\boldsymbol{K}4$ için kanonik model ve Γ^+, Γ yı genişleten bir $\boldsymbol{K}4$-*MSC* kümesi olsun. Kanonik Model Teoremine göre $\mathcal{M}^{\boldsymbol{K}4}, \Gamma^+ \Vdash \Gamma$ vardır. O halde (1) koşulu sağlanmış olur.

(2) için $\langle W^{\boldsymbol{K}4}, R^{\boldsymbol{K}4} \rangle$ çatısının geçişken olduğu gösterilmelidir. $w, v, u \in W^{\boldsymbol{K}4}$ ve $R^{\boldsymbol{K}4}wv$, $R^{\boldsymbol{K}4}vu$ verilsin. $\varphi \in u$ varsayalım. $R^{\boldsymbol{K}4}vu \Rightarrow$ $\Diamond\varphi \in v$ ve $R^{\boldsymbol{K}4}wv$ de $\Diamond\Diamond\varphi \in w$ durumunu gerektirir. Ama w bir $\boldsymbol{K}4$-*MSC* dir, buradan w, $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$ yi içerir; böylece *MP* nin uygulaması ile $\Diamond\varphi$ yi içerir. Başka bir deyişle $R^{\boldsymbol{K}4}wv$ ve $R^{\boldsymbol{K}4}vu$, $R^{\boldsymbol{K}4}wu$ verir.■

Teorem 4.2.3

i) T yansıyan çatıların sınıfına göre;

ii) $\boldsymbol{KB}$ simetrik çatıların sınıfına göre;

iii) $\boldsymbol{S}4$ önsıralı çatıların sınıfına göre;

iv) $\boldsymbol{S5}$ bağıntısı denklik bağıntısı olan çatıların sınıfına göre

kuvvetli tamdır.

İspatı için (Blackburn et al., 2001) e başvurulabilir.

Buna karşın ***KL*** lojiği hiçbir çatı sınıfına göre ne sağlam ne de kuvvetli tamdır. Bu nedenle ***KL*** lojiği kanonik değildir. Ancak ***KL*** tüm sonlu geçişken ağaçlar sınıfına göre zayıf tamdır. (Bir ağaç; köklü ve her noktasının altında kalan kümenin sonlu ve tam sıralı olduğu bir çatıdır.)

4. 3 Sahlqvist Tekniği

Bu kesimde Sahlqvist'in ortaya attığı bir algoritma yardımıyla; bir modal formüle karşılık gelen çatı koşulu elde edilecektir.

Burada, geçici olarak, $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Box$, $\Diamond$ operatörleri ilkel kabul edilecektir. Ancak $\varphi \to \psi$, $\neg(\varphi \wedge \neg \psi)$ için bir kısaltma olacaktır.

4. 3. 1 Temel Kavramlar

Tanım 4.3.1.1 $p \in P$ verilsin.

(i) $\Box\Box\cdots\Box p$ biçimli bir formüle bir *kuvvetli pozitif formül* denir; $\Box\Box\cdots\Box$ zinciri boş olabilir.

(ii) $\neg$ bağlacını içermeyen bir formüle *pozitif formül* denir.

(iii) Bir pozitif formülün değillenmişine bir *negatif formül* denir.

(iv) Sadece $\wedge$ ve $\Diamond$ operatörlerini kullanan negatif ve kuvvetli pozitif formüllerden oluşan bir formüle *çözülmüş formül* denir.

(v) Bir *Sahlqvist formülü* değillenmiş çözülmüş bir formüldür.

Örnekler 4.3.1.2

Temel modal dilde yazılmış formüllerin Sahlqvist denkleri bulunabilir. $\equiv$ formüller arasındaki mantıksal denkliği gösterecektir.

a) $\Box p \to p$ nin dengi.

$\Box p \to p \equiv \neg\Box p \vee p \equiv \neg([\Box p] \wedge [\neg p])$ bir Sahlqvist formülüdür, çünkü $\Box p$ bir kuvvetli pozitif; $[\neg p]$ negatif olduğundan $\neg$ ile $\wedge$ bağlaçlarının kullanımı Sahlqvist formülünü verir.

b. $\Box p \to \Box\Box p$ nin dengi.

$$\Box p \to \Box\Box p \equiv \neg\Box p \vee \neg\Box\Box p$$

$$\equiv \neg([\Box p] \wedge \neg[\Box\Box p])$$

$$\equiv \neg([\Box p] \wedge [\neg\Box\Box p])$$

bir Sahlqvist formülüdür, çünkü $[\Box p]$ kuvvetli pozitif; $[\neg\Box\Box p]$ negatif olduğu için $\neg$ ile $\wedge$ nin kullanımı Sahlqvist formülü tanımı gerçekler.

3. $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ nin dengi.

$$\Diamond p \to \Box\Diamond p \equiv \neg\Diamond p \vee \Box\Diamond p$$

$$\equiv \neg(\Diamond[p] \wedge [\neg\Box\Diamond p])$$

$$\equiv \neg(\Diamond[p] \wedge [\neg\neg\Diamond\neg\Diamond p])$$

$$\equiv \neg(\Diamond[p] \wedge \Diamond[\neg\Diamond p])$$

bir Sahlqvist formülüdür, çünkü bir çözülmüş formülün değillemesi olarak yazılmıştır.

4. $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ nin dengi.

$$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \equiv \neg(\Diamond\Box p \vee \Box\Diamond p)$$

$$\equiv \neg(\Diamond[\Box p] \wedge [\neg\Box\Diamond p])$$

bir Sahlqvist formülüdür, çünkü çözülmüş bir formülün değilidir.

Ancak $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ Löb Aksiyomu bir Sahlqvist formülüne denk değildir.

4. 3. 2 Sahlqvist Formülünün Diğer Tanımları

Sahlqvist formülünün literatürde bir çok denk tanımları vardır. Sahlqvist daki formülünün farklı tanımları verilmiştir. Burada ele alınan tanım çok daha yalın ve pratik anlamda yeterince elverişlidir:

Herhangi bir *gerçek* Sahlqvist formülü burada verilen Sahlqvist formüllerinin bir evetlemesine denk olacaktır.

Sahlqvist 1975 yılında yayınlanan çalışmasında

"*Her hangi bir Sahlqvist formülü bir çatı koşuluna karşılık gelir*"

teoremini basit bir algoritmayla kanıtlamıştır. Ancak teoremin ispatı çok kapsamlı olduğu için bu tezde bir örnekle yetinilmeye gidilecektir.

Sahlqvist tekniği modal lojik için gerçek bir mücevherdir. İspatı örneklerken bazı lemma ve önbilgilere ihtiyaç olacaktır.

Önbilgi 4. 3. 2.1 Bir formül pozitif ise monotondur.

Tanım 4.3.2.2 $\Im = \langle W, R \rangle$ bir çatı ve $h, h' : P \to \mathcal{P}(W)$ atamaları verilsin. Her $p \in P$ için $h(p) \subseteq h'(p)$ ise $h \leq h'$ yazılacaktır. Böylece h', h den büyüktür ya da h, h' nün bir daralmasıdır.

Lemma 4.3.2.3 φ bir pozitif formül, $\Im = \langle W, R \rangle$ bir çatı ve $h, h' : P \to \mathcal{P}(W)$ $h \leq h'$ şeklinde atamalar olsun. O zaman her $t \in W$ için

$$(W, R, h), t \vDash \varphi \;\;\Rightarrow\;\; (W, R, h'), t \vDash \varphi$$

dir.

Bu sonuç φ nin *monoton* olduğunu söyler.

İspat φ nin karmaşıklığı üzerinde tümevarım yapılır.

- $\varphi : p$ ise

$$(W, R, h), t \vDash p \Rightarrow t \in h(p) \Rightarrow t \in h'(p) \Rightarrow (W, R, h'), t \vDash p$$

elde edilir.

- $\varphi : \top, \bot, \wedge, \vee$ durumları aşikardır. φ pozitif olduğu için $\varphi = \neg \psi$ durumu söz konusu değildir.

- $\varphi : \Box \psi$ ise o zaman $(W, R, h), t \vDash \Box \psi$ ise Rtu şeklindeki her $u \in W$ için $(W, R, h), u \vDash \psi$ tanım gereği vardır. Tümevarım hipotezinden $(W, R, h'), u \vDash \psi$ olduğu için de $(W, R, h'), t \vDash \Box \psi$ elde edilir.

- $\varphi : \Diamond \psi$ için benzer bir ispat yapılır.■

Önbilgi 4. 3. 2. 4 Standart Çeviri

Modal formüllerden birinci-mertebe yüklemler lojiği formüllerine geçiş yapılabilir. Bu çeviri, aslında, Kripke semantiğini tamamen yansıtır.

x bir değişken ve φ, serbest değişken sayısı en çok 1 olan bir formül olsun. φ formülü tümevarımla bir birinci-mertebe $\varphi^*(x)$ formülüne çevrilebilir:

- P, p ye karşılık gelen 1-li bağıntı sembolü olmak üzere bir p atomu $P(x)$ e çevrilir. O halde $p^* = P(x)$ dir;

- $\top^* = \top$, $\bot^* = \bot$ dır;

- $(\neg\varphi)^* = \neg(\varphi^*)$ dır;

- $(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$ ve $(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$ dır;

- R ulaşılabilirlik bağıntısı için bir sembol ve y yeni bir değişken olmak üzere, $(\Box\psi)^* = \forall y(Rxy \to \psi^*(y))$ ve $(\Diamond\psi)^* = \exists y(Rxy \wedge \psi^*(y))$ olur.

Buna göre aşağıdaki örnekler açık olmalıdır:

$(\Box p \to p)^* = (\forall y(Rxy \to P(y))) \to P(x)$ olur, burada x tek serbest değişkendir.

$(\Box(p \vee p))^* = \forall y(Rxy \to (P(y) \vee \exists z(Ryz \wedge Q(z))))$. Gene burada da x tek serbest değişkendir.

Bazen $(\Diamond\varphi \rightarrow \psi)^* = \exists y(Rxy \wedge \varphi^*(y)) \rightarrow \psi^*(x)$ örneğinde olduğu gibi kısmen çeviri yapmak uygun olacaktır.

4. 3. 3 Sahlqvist Teoremi (1975)

φ bir Sahlqvist formülü olsun. Bir çatıda geçerli ve φ ye karşılık gelen bir birinci mertebe çatı özelliğinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul φ nin bu çatıda geçerli olmasıdır.

Bu teorem son derece yalın olmanın yanında türünün en keskin sonucudur. Bu teorem kolaylıkla katlı modaliteli ve zaman lojiklerine de genişletilebilir.

Sahlqvist şu çarpıcı sonucu da kanıtlamıştır: “Bir Sahlqvist formülünün tüm nüshalarını Hilbert sistemine bir aksiyom olarak eklendiğinde karşılık gelen çatı koşullu çatılar sınıfına göre sağlam ve tam yeni bir Hilbert sistemi elde edilir.”

Teoreminin İspatı İspatı çok genel bir örneğe dayandırılarak ele alınacaktır.

C pozitif bir formül olmak üzere

$$\varphi = \Diamond(\Diamond[q] \wedge \Diamond([\neg C] \wedge \Diamond[\Box\Box p])) \wedge \Diamond\Diamond[\Box p]$$

çözülmüş formülünü göz önünde bulundurulsun.

$\neg\varphi$ Sahlqvist formülü bir $\Im = \langle W, R\rangle$ çatısında geçerli olsun. O zaman $\Im$ üzerinde kurulmuş bir $\mathrm{M} = \langle \Im, h\rangle$ modeli ve $t \in W$ için $\mathrm{M}, t \vDash \varphi$ vardır; yani $\mathrm{M}, t \vDash \Diamond(\Diamond[q] \wedge \Diamond([\neg C] \wedge \Diamond[\Box\Box p])) \wedge \Diamond\Diamond[\Box p]$ olur. φ de yer alan $\Diamond$ operatörünün 6 geçişi $\Im$ çatısında t ile ilintili 6 tane dünyanın olduğunu ifade eder ve bu dünyaların her birinde aşağıdaki türden belirli bir formül doğru olur:

- Ya $\Box\Box \cdots \Box p$ gibi kuvvetli pozitif bir formül,

- Ya da $\neg C$ gibi negatif bir formül.

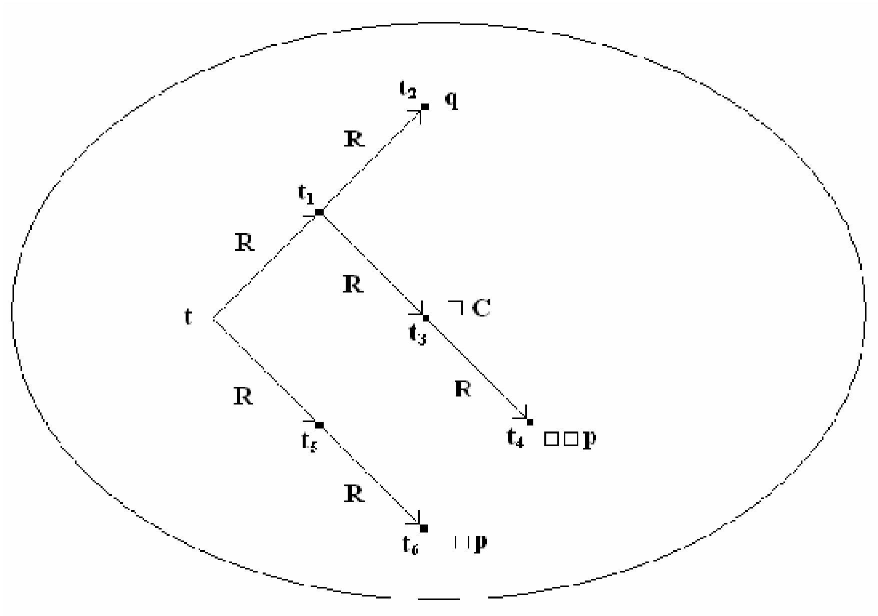
φ nin $\varphi^{*}(t)$ standart çevirisi, burada, modeldeki dünyaların isimlerini elde etmede yardımcı olur. Kuvvetli pozitif ve negatif formüllere dokunmadan sadece çözülmüş kısmın çevirisinin yapılması gereği doğacaktır.

$\varphi^{*}(t)$ $t_1,\ t_2,\ \ldots\ ,\ t_6$ dünyalarının olduğunu söylemektedir:

$Rtt_1,\ Rt_1t_2,\ \mathrm{M}, t_2 \vDash q$ (yani $Q(t_2)$),

$Rt_1t_3,\ \mathrm{M}, t_3 \vDash \neg C,\quad Rt_3t_4,\ \mathrm{M}, t_4 \vDash \Box\Box p$,

$Rtt_5,\ Rt_5t_6,\ \mathrm{M}, t_6 \vDash \Box p.$



4. 3. 3. 1 Atamanın Daraltılması

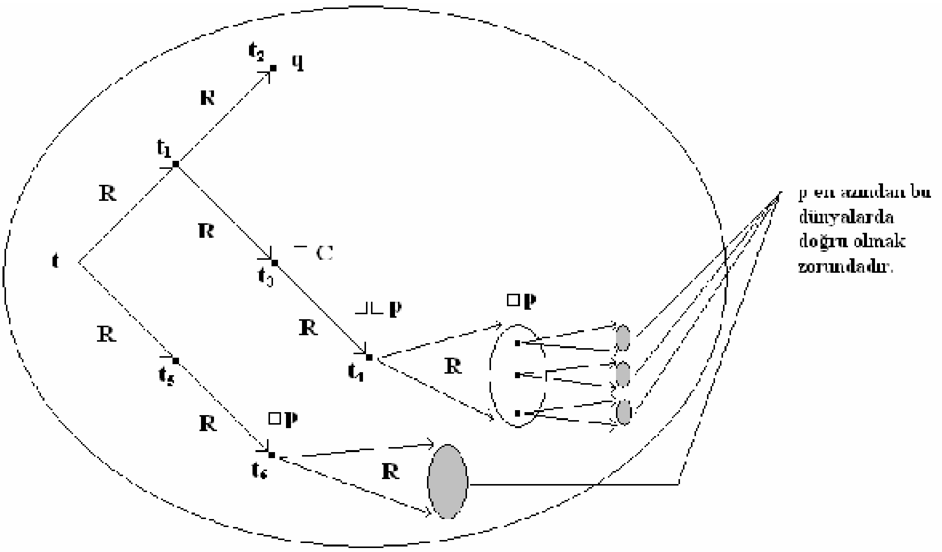
Lemma 4.3.2.3 e göre h *daraltılırsa* (yani atomlar daha az sayıdaki dünyada doğru yapılırsa), o zaman negatif formüllerin tümü (burada sadece $\neg C$) yer aldıkları dünyalarında doğru kalırlar. Örneğin, p ve q ye daraltılırsa $\neg(\Diamond p \wedge \Box q)$ negatif formülü doğru kalırdı.

Öyleyse φ formülünü t de doğru yapacak en küçük atama ne olmalıdır? Bu sorunun yanıtı tüm pozitif formülleri ($\Box\Box\cdots\Box p$ gibi) dünyalarında doğru olacak şekilde koruyan en küçük atama olmalıdır.

$\Box\Box p$ nin t_4 dünyasında doğru olması demek, “t_4 den 2-R adımlı her dünyada p gerçeklenir” demektir. Buna göre, p, t_4 den 2-adımla ulaşılabilen x dünyalarına daraltılsa bile $\Box\Box p$, t_4 de doğru olmayı sürdürecektir. Bu dünyalar

$$\exists y(Rt_4 y \wedge Ryx)$$

formülünü sağlayan dünyalardır.



$\Box p$, t_6 da da doğru korunmalıdır. O halde, aynı nedenle, p, Rt_6x şeklindeki tüm x dünyalarında doğrudur. q, t_2 de doğru tutulmalıdır. O halde q, $x = t_2$ durumunu sağlayan tüm dünyalarda doğru yapılmak zorundadır.

4. 3. 3. 2 Tembel Atama

Modeldeki dünyalarında kuvvetli pozitif formülleri doğru olarak tutabilmek için *p* ve *q* bu dünyalarda doğru yapılırsa o zaman φ, *t* de doğru kalacaktır. Böyle bir atamaya *tembel* denir; bu h' ile gösterilsin. Bu atama birinci mertebe tanımlanabilirdir:

- *p, x* dünyasında doğru yapıldı (eye) $\exists y(Rt_4 y \wedge Ryx) \vee Rt_6 x$ çatıda doğrulandı;

- *q, x* dünyasında doğru yapıldı (eye) $x = t_2$ çatıda doğrulandı.

Bu koşullar atomsuz birinci mertebe koşullardır. Buna göre h' tembel ataması; φ^* deki atomların standart çevirileri yerine tembel birinci-mertebe ifadeleri alınarak sadeleştirilebilir.

4. 3. 3. 3 $\varphi^*(t)$ Çevirisinin Sadeleştirilmesi

Sadeleştirme için aşağıdaki adımlar izlenir:

- φ nın $\varphi^*(t)$ standart çevirisi yapılır. Kuvvetli pozitif kısımların çevirisi göz ardı edilirken, negatif kısımların çevirisi mutlaka yapılmalıdır.

- İsimlendirilmiş dünyalar için tüm $\exists$ niceleyicileri, anlam değişikliği olmaksızın, öne çekilir.

• Her $P(x)$ yerine tembel ifadesi alınır; burada

$$\exists y(Rt_4 y \wedge Ryx) \vee Rt_6 x$$

dır.

• Benzer biçimde $P(y)$ yerine

$$\exists z(Rt_4 z \wedge Rzy) \vee Rt_6 y$$

alınır; burada değişkenlerin çarpışmaması için $\exists y$ $\exists z$ ile değiştirilmiştir.

• Aynı şekilde $P(z), P(t), P(t_4)$ v.s. için tembel ifadeler yazılır.

• $Q(x)$ yerine $x = t_2$, $Q(y)$ yerine $y = t_2$, v.s. alınır.

• $\Box\Box\cdots\Box p$ biçimli kuvvetli pozitif formüllerinin yerine pekala $\top$ alınabilir, çünkü h' tembel ataması bu tür formüllerin doğru olması için seçilmiştir; bu yüzden bu adım yasal olduğu kadar formülü kısaltır da.

Sadeleştirmenin ürettiği sonuç formül $\alpha(t)$ ile gösterilsin.

4. 3. 3. 4 Teoremin İspatının Sonuçlandırılması

Şu ana kadar elde edilenler ışığında aşağıdakiler denktirler:

(i) Bir $\langle h \rangle$ ataması ve $t \in W$ için $(\mathfrak{I}, h), t \vDash \varphi$ dir,

(ii) Bir $t \in W$ ve $t_1, \ \ldots \ , \ t_6$ *modeli* için $(\mathfrak{I}, h'), t \vDash \varphi$ dıır; h' nün bu modele bağlı olduğu kuşkusuzdur;

(iii) Bir $t \in W$ için (klasik lojikte) $\mathfrak{I} \vDash \alpha(t)$ dir.

Buna göre $\neg\varphi$, $\mathfrak{I}$ de geçerlidir (eye) $\mathfrak{I} \vDash \forall t \neg \alpha(t)$ sonucu vardır.

Neticede $\neg\varphi$ orijinal Sahlqvist formülü $\forall t \neg \alpha(t)$ birinci-mertebe çatı koşuluna *karşılık* gelir.

Böylece bu genel örneğe dayandırılmış Sahlqvist Teoreminin ispatı tamamlanmış olur.■

α formülünün inşasının algoritmik oluşu, algoritmanın pratik uygulanabilirliği açısından, algoritma adımlarının açık bir şekilde özetlenmesini gerektirir.

4. 3. 3. 5 Sahlqvist Algoritmasının Adımları

Sahlqvist algoritması bir Sahlqvist formülünün geçerliliğine denk bir çatı koşulu ortaya çıkarır. (Her zaman verilen bir formülün Sahlqvist dengini bulmak mümkündür, ancak bazen bunun için çok fazla uğraşmak gerekebilir.) Örneğin, $\Box p \rightarrow p \equiv \neg([\Box p] \wedge [\neg p])$ Sahlqvist formülünün geçerliliğine karşılık gelen çatı koşulunun $\forall x Rxx$ yansımalılık olduğu örnekler kısmında gösterilecektir.

φ çözülmüş bir formül olmak üzere, $\neg\varphi$ Sahlqvist formülüne karşılık gelen çatı koşulunu belirleyen algoritmanın adımları şunlardır:

- φ nin negatif ve kuvvetli pozitif parçalarının belirlenmesi (bu belirleme her zaman tek türlü olmayabilir);

- φ nin t gibi bir dünyada gerçeklendiğinin ne anlama geldiğini gösteren bir şekil çizilir. Dünyalara $t_1, t_2, \ldots$ gibi isimler verilir; aralarındaki *R*-bağıntıları yazılır ve hangi kuvvetli pozitif formüllerin hangi dünyalarda doğru olduğunu belirlenir;

- Kuvvetli pozitif formülleri dünyalarında doğru yapan tembel atamayı gerçeklenir. Bu atama için isimlendirilmiş dünyalara göre birinci-merteben bir ifade elde edilir;

- Değişkenler için isimlendirilmiş dünyaların isimlerini kullanarak φ nin $\varphi^*(t)$ standart çevirisini gerçekleyin. Kuvvetli pozitif parçaların çevirisi yapılmadan aşağıdakiler yerine getirilir:

- Negatif formüllerin dışındaki $\Diamond$ operatöründen kaynaklanan tüm $\exists$ niceleyicileri, isimlendirilmiş dünyalar için, $\varphi^*(t)$ formülünün önüne çekilir. Bu işlem yaşamsaldır!

- Kuvvetli pozitif formüllerin neden olduğu parçalar belirlenir ve yerlerine $\top$ yazılır;

• Negatif formüllerdeki atomlardan kaynaklanan geriye kalan tüm $P(x),\ Q(y),\ \ldots$ yüklemlerinin yerine tembel atamadan elde edilen birinci-mertebe ifadeler yazılır;

• Mümkünse, sadeleştirmeler yapılır.

Bu adımlar sonucu elde edilen şey; belirli bir atama altında bir t dünyasındaki $\Im$ çatısında φ nin doğru olduğunu ifade eden birinci-mertebe $\alpha(t)$ formülüdür.

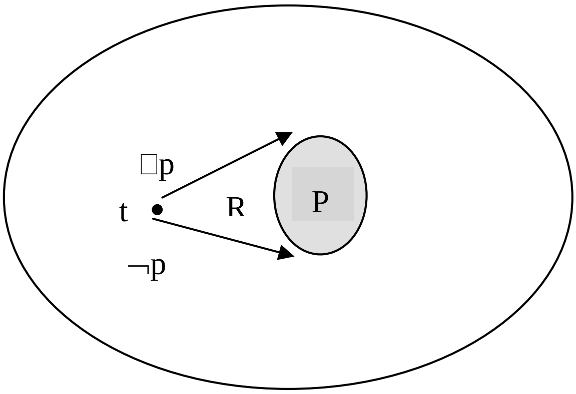
Neticede $\neg\varphi$, $\Im$ çatısında geçerlidir (eye) $\forall t \neg\alpha(t)$ formülü $\Im$ çatısında geçerlidir sonucuna ulaşılır. $\forall t \neg\alpha(t)$, istenilen çatı koşulunu verir.

4. 3. 3. 6 Algoritmanın Uygulamaları: Örnekler

4. 3. 3. 6. 1 Yansımalılık

$\Box p \to p$ nin Sahlqvist denginin $\neg([\Box p] \wedge [\neg p])$ olduğuna daha önce değinilmişti.

Bu formül bir $\Im$ çatısında geçerli değildir (eye) $(\Im, h), t \vDash [\Box p] \wedge [\neg p]$ olacak biçimde h, t vardır. Formülde $\Diamond$ operatörü geçmediği için *model* veya örnek dünya sadece t nin kendisidir. Rtx olduğunda $\Box p$ nin t de doğru olması için tembel atama p yi x de doğru yapar. Bu p nin bir tanımı olarak kullanılsın.



$\Box\, p \wedge \neg p$ nin $(\Box\, p)^{*}(t) \wedge \neg P(t)$ standart çevirisinde

• $\Box p$ parçası yerine $\top$ yazılır (tembel atama bu parçayı her zaman doğru yapar);

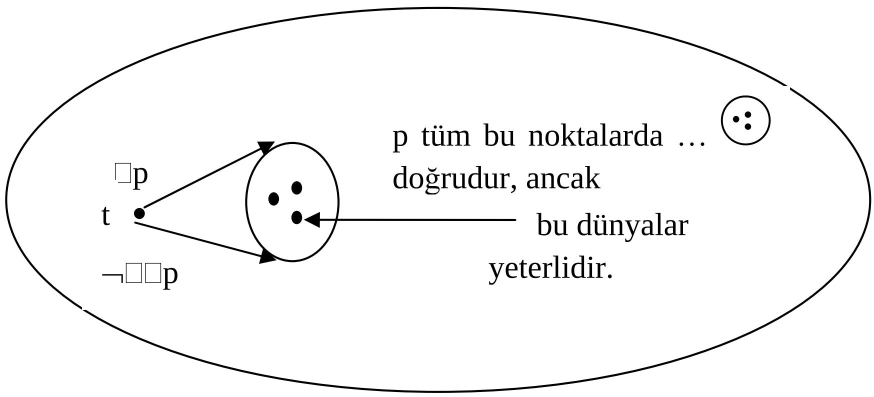
• $\neg P(t)$ negatif parçada $P(t)$ yerine, $x = t$ olarak, $R(t, x)$ tembel tanımı yazılır.

Buradan $\top \wedge \neg R(t,t)$ ifadesi sonuçlanır. Böylece $\Box\, p \wedge \neg p$ bir atama altında t de doğrudur (eye) $\Im \vDash \neg R(t,t)$ dir.

Neticede $\Box\, p \to p$ formülü $\Im$ çatısında geçerlidir (eye) $\Im \vDash \forall t \neg\neg R(t,t)$, yani $\Im \vDash \forall t R(t,t)$ dir. Bu ise R nin yansıyan olduğunu gösterir!

4. 3. 3. 6. 2 Geçişkenlik

- Algoritmayı denetlemeden önce $\Box p \to \Box\Box p$ formülünün Sahlqvist dengi $\neg([\Box p] \wedge [\neg \Box\Box p])$ olarak bulunur. Bu formül bir $\Im$ çatısının t noktasında geçerli değilse, o zaman $[\Box p] \wedge [\neg \Box\Box p]$ yi t de doğru yapan h vardır. Verilen formülde $\Diamond$ operatörü geçmediği için, örnek dünya gene t nin kendisidir.



$\Box p$ yi t de doğru yapmak için p nin Rtx şeklinde her hangi bir x dünyasında doğru olması yeterlidir. Buna göre tembel atama p yi x de doğru yapar (eye) Rtx doğrudur. $[\Box p] \wedge [\neg \Box\Box p]$ nin t deki standart çevirisi için $R(t,x)$, p nin tanımı olarak kullanılır:

$$([\Box p] \wedge [\neg \Box\Box p])^*(t) \equiv (\Box p)^*(t) \wedge \neg \forall u(Rtu \to \forall v(Ruv \to P(v))).$$

- $\Box p$ yerine $\top$ alınabilir (tembel atama onu doğru olmaya zorlar);

- $P(v)$ yerine P nin v deki tembel ataması, yani Rtv alınır.

O zaman

$$\top \wedge \neg \forall u(Rtu \to \forall v(Ruv \to Rtv))$$

ve sadeleştirerek

$$\neg \forall u(Rtu \to \forall v(Ruv \to Rtv))$$

elde edilir. Bu formül $\alpha(t)$ ile gösterilsin. Böylece, $\Box p \wedge \neg \Box\Box p$ bir atama altında t dünyasında doğrudur (eye) $\mathfrak{I} \vDash \alpha(t)$ dir. Neticede; $\Box p \to \Box\Box p$, $\mathfrak{I}$ de geçerlidir (eye) $\mathfrak{I} \vDash \forall t \neg \alpha(t)$ dir. Açılırsa

$$\mathfrak{I} \vDash \forall tuv(Rtu \wedge Ruv \to Rtv)$$

elde edilir ve bu da $\mathfrak{I}$ nin geçişkenliğinden başka bir şey değildir.

4. 3. 3. 6. 3 Simetri (Varyantı)

Bir çatının simetri özelliği aslında $p \to \Box\Diamond p$ aksiyomu ile ifade edilir. Burada ise p yerine $\neg p$ alınarak simetri özelliğinin bir varyantı göz önünde bulundurulacaktır.

- $\neg p \to \Box\Diamond\neg p$ nin Sahlqvist dengi

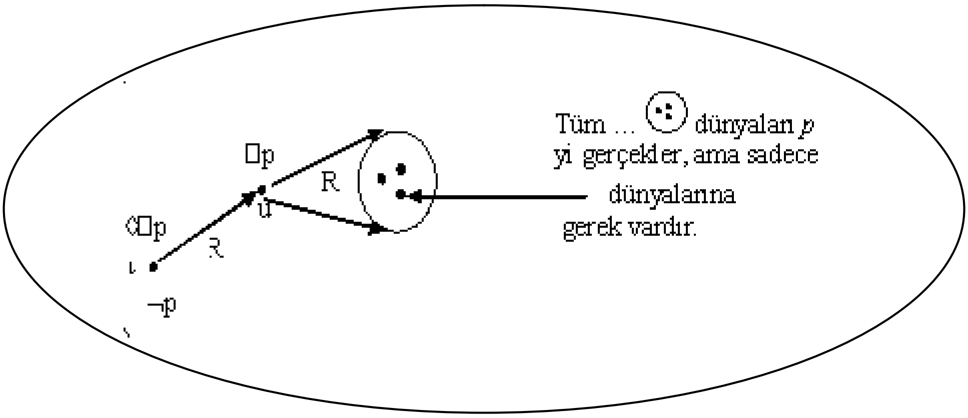
$$\neg p \to \Box\Diamond\neg p \quad \equiv \neg(\neg p \wedge \neg\Box\Diamond\neg p)$$

$$\equiv \neg(\neg p \wedge \neg\neg\Diamond\neg\Diamond\neg p)$$

$$\equiv \neg(\neg p \wedge \Diamond\Box p)$$

olarak bulunur.

$A = [\neg p] \wedge \Diamond[\Box p]$ olsun. Burada bir tek $\Diamond$ operatörü geçtiği için t ye örnek dünya sadece bir tanedir! Başka bir deyişle, şekildeki *model*, örnek mevcut ise, *A*, $\Im$ nin t noktasında doğru olacaktır.



Tembel atama *p* yi *x* de doğru yapar (eye) Rux dir.

- A nın standart çevirisi aşikardır:

$$A^*(t) \quad = ([\neg p] \wedge \Diamond[\Box p])^*(t)$$

$$= \neg P(t) \wedge \exists u(Rtu \wedge (\Box p)^{*}(t)).$$

u, şekilde isimlendirilmiş bir dünya olduğu için mantıksal denklik korunarak $\exists u$, formül önüne çekilebilir:

$$\exists u(\neg P(t) \wedge Rtu \wedge (\Box p)^{*}(u)).$$

Şimdi $P(t)$ yerine tembel atama Rtu ve $(\Box p)^{*}(u)$ yerine de $\top$ alınırsa

$$\exists u(\neg Rut \wedge Rtu \wedge \top)$$

ya da $\exists u(\neg Rut \wedge Rtu)$ elde edilir. Böylece A bir atama altında t dünyasında doğrudur (eye) A formülü gerçeklenirdir.

Neticede; $\neg A, \Im$ de geçerlidir (eye)

$$\Im \vDash \forall t \neg \exists u(\neg Rut \wedge Rtu),$$

ya da,

$$\Im \vDash \forall tu(Rtu \rightarrow Rut)$$

dir. Bu ise R nin simetrik olduğunu söyler!

$\neg \exists t(\neg Rut \wedge \exists u(Rtu \wedge \top))$ formülünde u serbest olduğu için $\exists u$ öne çekilebilmiştir!

5. SONUÇ

Sahlqvist algoritması, aslında, konu ile bağlantılı ilk algoritma değildir. Gerçekten, Jónsson-Tarski (Jónsson et al., 1952) yansıyan ve geçişken çatıların birinci-mertebe dengini örneklemişlerdir. Fitch (Fitch, 1973) in yazdığı bir makale van Benthem'i – Sahlqvist'den habersiz – bugün Sahlqvist Teoremi denilen sonucu ispatlamaya yöneltmiştir.

Tezde ele alınan Sahlqvist formülleri tek modaliteye dayanan *basit* formüllerdir. Ancak genellemeye gidilirse sorunların ortaya çıktığı görülür. İncelemeler *global* ve *local* olarak ele alınır. Örneğin, $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ (M) Mckinsey formülü bir Sahlqvist formülüne denk değildir; (M) birinci-mertebe bir koşul ifade etmez. Keza (M)$\wedge$(4) birleşmesinin dahi bir Sahlqvist formülüne denk olmadığı gösterilebilir. Bunun için (M)$\wedge$(4) formülünün *local* bir birinci-mertebe karşılığı olmadığını kanıtlamak yeterlidir. Sahlqvist formüllerinin global ve yerel açılardan çalışması için (Kracht, 1993) kaynağına başvurulabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aiello, M. and alias; 2003, Reasoning about space: The modal way, J. Logic Computat, Vol. 13, No.6.

Bell, J. L. and Machover, M.; 1991, A Course in Mathematical Logic, Third Edition, North-Holland Publishing Company,.

Bezhanishvili, G. and Gehrke, **M**.; 2005, Completeness of $\boldsymbol{S}4$ with respect to $\mathbb{R}$, Annals of Pure and Applied Logic, 131, 287-301.

Bull, R.A. and Segerberg, K.; 1984, Basic Modal Logic, Gabbay and Guenthner Handbook of Philosophical Logic, 2, 1-88.

Blackburn, P., de Rijke, M. and Venema, Y.; 2001, Modal Logic, Cambridge University Press.

Fitch, F.; 1973, A correlation between modal reduction principles and properties of relations, Journal of Philosophical Logic, 2, 97-101.

Gabelia, D.; 2001, Modal Definability in Topology, Master’s Thesis, ILLC, University of Amsterdam.

Garson, J. W.; 1984, Quantification in Modal Logic, Gabbay and Guenthner Handbook of Philosophical Logic, 2, 249-308.

KAYNAKLAR (devam)

Goldblatt, **R.**; 2003, Mathematical Modal Logic: a view of its evolution, Journal of Applied Logic 1, 309-392.

Gödel, K.; 1932, Eine Interpretation des intuitionischen Aussagen Kalküls, Ergebnisse eines mathematicshen Kolloquiums 4, 39-40.

Haim, M.; 2000, Duality for Lattices with operator: A modal logic approach, Master's Thesis, University of Amsterdam.

Hodges, W., 1993, Model Theory, Chapter I, Cambridge Press.

Hult, M. R. A. and Ryan, M. D.; 2000, Logic in Computer Science, Cambridge University Press.

Jónsson, B. and Tarksi, A.; 1952, Boolean algebras with operators, Part I in American Journal of Mathematics, 73, 891-939 and Part II in the same journal, vol:74, 127-162.

Kracht, M. ; 1993, How completeness and correspondence theory got married, Diamonds and Defaults, Synthese Library, vol 299, Kluver Academic Publishers.

KAYNAKLAR (devam)

Lewis, C. I.; 1918, A Survey of Symbolic Logic, University of California Press.

Lewis, C. I. and Langford, C. H.; 1932, Symbolic Logic, Dover.

McKinsey, J. C. C. and Taski, A.; 1944, The Algebra of Topology, Annals of Mathematics, pp 141-191.

Sahlqvist, H.; 1973, Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic in Kranger, pp. 110-143.

ÖZGEÇMİŞ

03.09.1981 yılında İzmir'de doğdu. İlköğrenimine İzmir Levent İlk Okulunda başladı. Orta öğrenimini İzmir Ziya Gökalp İlköğretim Okulu ve lise öğrenimini İzmir 50. Yıl Lisesinde tamamladı. Ege Üniversitesi Rektörlüğü Yabancı Diller Bölümünde bir yıl yabancı dil (İngilizce) hazırlık kurslarına devam etti. 2004 tarihinde Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulamalı Ağırlıklı Matematik Lisans öğretim programından mezun oldu.