CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMARANDACHE HALKALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan : Umut KURAN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

MANİSA 2007

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMARANDACHE HALKALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK – Umut KURAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Tezin Savunulduğu Tarih : 13. 07. 2007

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ (Celal Bayar Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (Balıkesir Üniversitesi)

: Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEMİR (Celal Bayar Üniversitesi)

MANİSA 2007

İÇİNDEKİLER **Syf.**

Semboller

$\subset$,	Alt küme
$\not\subset$,	Alt küme değil
$\varnothing$,	Boş küme
$\in$,	Eleman
$\notin$,	Eleman değil
$(A,\leq)$,	Kısmi sıralı küme
$\mathbb{C}$,	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$,	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$,	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$,	Tamsayılar kümesi

Teşekkür

Bu tezin çalışılmasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr.Mustafa KAZAZ' a teşekkürlerimi sunuyorum.

Özet

Bu tezde, W.B.KANDASAMY' e ait olan ' Smarandache Halkaları' kavramı üzerine çalışılmıştır. Bu tezde ilk olarak latis ve halkalarla ilgili bazı temel tanımları vereceğiz.Daha sonra bir S-halkanın tanımını verip, S-halkalarla ilgili özellikleri inceleyeceğiz.Fakat, esas olarak S-halkaların alt yapılarını, S-halkalardaki elemanların özelliklerini ve S-halkalardaki özel elemanları ele alacağız. Son olarak, özel tür S-halkaların tanımlarını verip onlarla ilgili birçok ilginç sonuç bulacağız.

Abstract

İn this thesis, we worked on the concept of 'Smarandache Rings' which belongs to W.B.KANDASAMY. We first give some basic definitions about lattices and rings. Then we give definition of a S-ring and find many properties about it. But we mainly concentrate on properties of elements in S-rings, substructures of S-rings and special elements in S-rings.Finally, we define special kinds of S-rings and find many interesting results about them.

BÖLÜM-1

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

1.0 GİRİŞ

Bu tez, 5 bölümde incelenmiştir.

Birinci bölümde, latis kavramı ve halka teorideki halka, birimli halka, değişmeli halka,grup halkası gibi bazı temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, bir S-halkanını tanımı verilerek S-halkalarla ilgili birçok örnek yapılmıştır.Ayrıca, S-halkalardaki; S-birim eleman, S-idenpotent eleman, S-sıfır bölen gibi ilginç özellikteki elemanlar tanımlanmış ve bunlarla ilgili birçok örnek yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, S-halkaların, S-alt halka, S-ideal gibi bazı alt yapıları tanımlanmıştır.Ayrıca, S-modülün tanımı verilerek bu kavram örneklerle açıklanmıştır.Üçüncü bölümün sonunda, S-A.C.C ve S-D.C.C kavramları tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, S-halkalardaki; S-nilpotent eleman, S- yarı idenpotent eleman, pseudo komütatif çift gibi birtakım özel elemanlar tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde, S-halkalarla ilgili birçok farklı özellik bulunmuştur.Bunun sonucu olarak özel tipte S-halkalar elde edilmiştir.Bu S-halkalar örneklerle açıklanıp, bunlarla ilgili birçok ilginç sonuç elde edilmiştir.

1.1 LATİSLER

Bu bölümde, temel olarak latis kavramı ve grup halkaları ile ilgileneceğiz.

Tanım 1.1 : A ve B boştan farklı iki küme olsun. Bu takdirde, A' dan B' ye bir R bağıntısı $A \times B$ ' nin bir alt kümesidir. A' dan A' ya bir bağıntıya ise kısaca A üzerinde bir bağıntı denir. Eğer, $(a,b)\in R$ ise aRb yazarız ve b elemanı a elemanına R bağıntısı ile bağlıdır şeklinde ifade ederiz. Eğer, b , a'ya R bağıntısı ile bağlı değilse $a \not R\, b$ yazarız. Boş olmayan bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı aşağıdaki tanımlardan bazılarını sağlayabilir :

- Eğer, her $a\in A$ için, aRa ise R yansıyandır.
- Eğer, her $a,b\in A$ için, aRb olması bRa olmasını gerektiriyorsa R simetriktir. Eğer, her $a,b\in A$ için, aRb ve bRa olması $a=b$ olmasını gerektiriyorsa R ters simetriktir denir.
- Eğer, her $a,b,c\in A$ için, aRb ve bRc olması aRc olmasını gerektiriyorsa R geçişmelidir.

- Eğer, A üzerindeki bir R bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli ise R ‘ ye bir denklik bağıntısı denir. Bu durumda, A kümesinde bir a elemanına R bağıntısı ile bağlı olan tüm elemanların kümesine a ’nın denklik sınıfı denir ve $[a]=\{b\in A \mid aRb\}$ ‘ dir.

Tanım 1.1.2 : Eğer, bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı yansımalı, ters simetrik ve geçişmeliyse R ’ ye bir kısmi sıralama bağıntısı denir. (A,R) ’ ye ise bir kısmi sıralı küme veya poset denir.

Tanım 1.1.3 : $\leq$, A üzerindeki bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer, her $a,b\in A$ için, $a\leq b$, $b\leq a$ oluyorsa, $\leq$ bağıntısına bir tam sıralama veya latis sıralama bağıntısı denir.

Örneğin, $\{-7,3,2,5,11\}$ kümesi, $\leq$ bağıntısına göre bir tam sıralı kümedir. $(A,\leq)$ bir poset olsun. Eğer, diğer bütün elemanlar a ’ dan küçükse a ’ ya en büyük eleman denir. Daha açık olarak, $a\in A$ iken her $x\in A$ için, $x\leq a$ ise a ’ ya, A ’nın en büyük elemanı denir. $b\in A$ için, eğer, her $x\in A$ iken $b\leq x$ ise b ’ye A ’nın en küçük elemanı denir. Eğer, her $x\in A$ için, $c\leq x$ olması $c=x$ olmasını gerektiriyorsa $c\in A$ ‘ ya, A ‘ nın bir maksimal elemanı denir. Benzer olarak, her $x\in A$ için, $x\leq d$ olması $x=d$ olmasını gerektiriyorsa, $d\in A$ ’ ya, A ’ nın minimal elemanı denir.

Gösterilebilirki, $(A,\leq)$ bir en büyük ve bir en küçük elemana sahiptir. Bununla birlikte, maksimal veya minimal elemanlar olmayabilir, bir tane olabilir veya birkaç tane olabilir. Her en büyük eleman maksimal ve her en küçük eleman minimaldir.

Tanım 1.1.4 : $(A,\leq)$ bir poset ve $B\subseteq A$ olsun. Bu takdirde,

a) $a\in A$ ‘nın, B ’ nin bir üst sınırı olması için gerek ve yeter şart her $b\in B$ için $b\leq a$ olmasıdır.

b) $a\in A$ ‘nın, B ’ nin bir alt sınırı olması için gerek ve yeter şartı her $b\in B$ için, $a\leq b$ olmasıdır.

c) B ‘nin alt sınırlarının en büyüğü varsa buna B ’nin infimumu denir ve inf B ile gösterilir.

d) B ’nin üst sınırlarının en küçüğü varsa buna B ’ nin supremumu denir ve sup B ile gösterilir.

Tanım 1.1.5 : $(L,\leq)$ bir poset olsun. Eğer, her $x,y\in L$ çifti için, sup{ x,y } ve inf{ x,y } varsa $(L,\leq)$ bir latis sıralıdır.

Tanım 1.1.6 : Bir cebirsel latis, $(L,\cup,\cap)$, üzerinde $\cap$ ve $\cup$ gibi iki tane ikili işlem tanımlanmış ve aşağıdaki özellikleri sağlayan boş olmayan bir L kümesidir.

$L_1 \qquad x \cap y = y \cap x \quad ve \quad x \cup y = y \cup x$

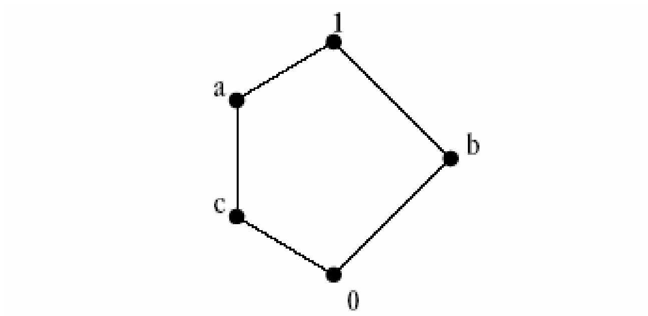
$L_2 \qquad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \quad ve \quad (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

$L_3 \qquad x \cap (y \cup x) = x \quad ve \quad x \cup (x \cap y) = x$

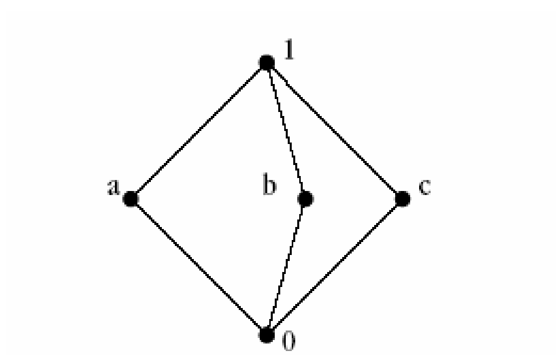
L_3'ü kullanırsak, $x \cap x = x \cap (x \cup (x \cap x)) = x$ olup, $x \cap x = x$ ve $x \cup x = x$' dir. L_1 değişme özelliği, L_2 birleşme özelliği ve L_3 yutma özelliğidir.

Tanım 1.1.7 : L bir latis olsun. Eğer, her $x, y, z \in L$ için, $x \leq z$ olması, $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$ olmasını gerektiriyorsa L' ye modüler denir.

Sonuç 1.1.1 : Aşağıdaki şekilde verilen latis modüler olmayan bir beşgen latistir :



Şekil 1.1.1



Şekil 1.1.2

Sonuç 1.1.2 : Şekil 1.1.2' deki, elmas latis olarak bilinen latis modülerdir.

Tanım 1.1.8 : Eğer, her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L' ye bir dağılmalı latis denir.

$1-)\ x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ ve

$2-)\ x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$'dir.

Şekil 1.1.2' de verilen latis, dağılmalı olmayan en küçük modüler latistir.

Tanım 1.1.9 : S , bir L latisinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer, S , L' deki $\cap$ ve $\cup$'in S üzerindeki kısıtlanmasına göre bir latisse, S' ye L' nin bir alt latisi denir.

Sonuç 1.1.3 : Her dağılmalı latis modülerdir.

Sonuç 1.1.4 : Bir latisin modüler olması için gerek ve yeter şart onun alt latislerinden hiçbirinin beşgen latise izomorfik olmamasıdır.

1.2 GRUP HALKALARI

Tanım 1.2.1 : Boştan farklı bir G kümesi üzerinde bir $\circ$ işlemi tanımlanmış olsun.Eğer, G kümesi $\circ$ işlemine göre aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa G' ye bir grup denir.

1) G kümesi $\circ$ işlemine göre kapalıdır.
2) $\circ$ işleminin birleşme özelliği vardır.
3) G kümesinin $\circ$ işlemine göre bir etkisiz(birim) elemanı vardır.
4) G'nin her elemanının $\circ$ işlemine göre bir tersi vardır.

Tanım 1.2.2 : Boş olmayan bir H kümesi üzerinde $\circ$ ve $*$ işaretleri ile gösterilen iki işlem tanımlanmış olsun.Eğer, iki işlemli $(H,\circ,*)$ yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu yapıya bir halka denir.

1) $(H,\circ)$ bir değişmeli gruptur.
2) H kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.
3) $*$ işleminin birleşme özelliği vardır.
4) $*$ işleminin $\circ$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

Tanım 1.2.3 : $(H,\circ,*)$ bir halka olsun. Eğer, $*$ işleminin değişme özelliği varsa halkaya bir değişmeli halka denir.

Tanım 1.2.4 : $(H,\circ,*)$ bir halka olsun. Eğer, halkanın $*$ işlemine göre bir birim elemanı varsa halkaya birimli bir halka denir.

Tanım 1.2.5 : G bir çarpımsal grup ve R bir birimli komütatif halka olsun. Bu takdirde, RG grup halkası, $\alpha_i \in R$ ve $g_i \in G$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bütün sonlu $\sum_i \alpha_i g_i$ toplamlarını içeren bir halkadır.

$i-)$ $i = 1,2,....,n$ ve $g_i \in G$ için, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$

$ii-)$ $g_i \in G$ için, $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) g_i$

$iii-)$ $g_i h_j = m_k \quad ve \quad \Upsilon_k = \sum \alpha_i \beta_j$ olmak üzere;

$$\left(\sum_i \alpha_i g_i\right)\left(\sum_j \beta_j h_j\right) = \sum_k \Upsilon_k m_k$$

$iv-)$ Her $r_i \in R$ ve $m_i \in G$ için, $r_i m_i = m_i r_i$

$v-)$ $r_i, r \in R$ ve $\sum r_i g_i \in RG$ için, $r\sum_{i=1}^{n} r_i g_i = \sum_{i=1}^{n}(rr_i)\, g_i$

$R\,G$'nin bir halka olduğunu görmek kolaydır. Bu halkanın sıfırı, toplamsal birim olan $0 \in R$' dir. $1 \in R$ olduğundan, $G = 1.G \subset RG$ ve e, G' nin birimiyken, $\mathrm{Re} = R \subseteq RG$' dir. Eğer, G grubunun yerine bir S yarıgrubu alırsak, $R\,S$, S yarı grubunun R halkası üzerindeki yarıgrup halkası olur.

Örnek 1.2.1 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ halkası ve $G = \left\langle g \,\middle|\, g^5 = 1 \right\rangle$ grubu olmak üzere $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası, komütatif olan ve sıfır bölenlere sahip bir halkadır.Örneğin, $(g+1)$ bir sıfır bölendir.

$g^5 + 1 = (g+1)\left(1 + g + g^2 + g^3 + g^4\right) = 0$'dır.

Şunu söylememiz gerekir ki, eğer R bir halka ve G herhangi bir sonlu grup veya sonlu mertebeli elemanlara sahip bir grupsa $R\,G$ grup halkası aşikâr olmayan sıfır bölenlere sahiptir.

Eğer, G bir torsion serbest komütatif grup ve K, karakteristiği sıfır olan bir cisimse $K\,G$ grup halkası hiçbir sıfır bölene sahip değildir.

BÖLÜM – 2

SMARANDACHE HALKALARI VE ÖZELLİKLERİ :

Bu bölümde Smarandache halkalarıyla ilgili birçok yeni kavramı tanıyacağız. Önce, S – halka kavramını tanımlayacağız. Daha sonra S-halkalardaki; S-idenpotent, S-birim, S-sıfır bölen gibi birtakım özel elemanlardan bahsedeceğiz. S-halkalardaki; S-alt halka, S-ideal gibi alt yapıları oluşturup, S-nilpotent, S- yarı nilpotent, S- quasi komütatif eleman gibi birçok farklı elemanı tanımlayacağız. Bu kavramlarla ilgili birçok örnek yapıp onlarla ilgili bazı ilginç sonuçlar elde edeceğiz.

2.1 Örneklerle Smarandache Halkasının Tanımı :

Bu bölümde Smarandache halkalarının tanımını verip onu örneklerle açıklayacağız.

Tanım 2.1.1 : R bir halka olsun. Eğer, R' nin R'deki işlemlere göre cisim olan bir öz alt kümesi varsa R' ye bir S-halka denir.

Örnek 2.1.1 : $F\ [x]$ bir F cismi üzerindeki polinom halka olsun. Bu takdirde, $F\ [x]$ bir S-halkasıdır.

Örnek 2.1.2 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,.....,11\}$ halkasını alalım. 4 ,elemanının ürettiği ideali alalım. $A = \langle 4 \rangle = \{0,4,8\}$, bir cisimdir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_{12}$ bir S-halka'dır.

Örnek 2.1.3 : $\mathbb{Z}_6 = \{0,.....,5\}$ halkası bir S-halkadır.Çünkü, $A = \{0,2,4\}$, $\mathbb{Z}_6$'nın cisim olan bir özalt kümesidir.

Örnek 2.1.3' ten görüyoruz ki, cismin birimi halkanın birimi olmak zorunda değildir. Ayrıca, şunuda söyleyelimki, bütün halkalar birer S-halka olmak zorunda değildir. Bundan sonra bu S-halkaları, S-halka I olarak adlandıracağız.

Tanım 2.1.2 : R bir halka olsun. Eğer R aşağıdaki şartları sağlayan bir A özalt kümesine sahipse R'ye bir ikinci aşamadan S-halka veya S-halka II denir :

1) A toplamaya göre bir komütatif gruptur.
2) A çarpmaya göre bir yarı gruptur.
3) $a,b,\in A$ için ; $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$'dır.

Teorem 2.1.1 (W.B.Kandasamy) : Eğer, R bir S-halka I ise R bir S-halka II' dir.

İspat : S-halka I ve S-halka II' nin tanımlarından, her S-halka I, S-halka II' nin bütün şartlarını sağladığından bir S-halka II' dir.

Teorem 2.1.2 (W.B.K.): Her S - halka II genelde bir S -halka I olmak zorunda değildir.

İspat : $\mathbb{Z}[x]$ polinom halkasını alalım. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]$ olduğundan, $\mathbb{Z}[x]$ bir S -halka II'dir. Fakat $\mathbb{Z}[x]$ bir S -halka I değildir.

Tanım 2.1.3 : R bir halka olsun. Eğer, R bir Smarandache halkası ve R'nin cisim veya tamlık bölgesi olan en az bir A özalt kümesi varsa R'ye bir Smarandache komütatif halka II (S -komütatif halka II) denir. Eğer, R'nin cisim veya tamlık bölgesi olan bir A özalt kümesi yoksa R'ye bir Smarandache komütatif olmayan halka II (S -komütatif olmayan II) denir.

Teorem 2.1.3 (W.B.K.): R bir halka olsun. R'nin bir S -komütatif halka II olması için gerek ve yeter şart R'nin tamlık bölgesi olan en az bir özalt kümeye sahip olmasıdır.

İspat : R bir S -komütatif halka II olsun. Böylece, R tamlık bölgesi olan bir A özalt kümesine sahiptir.Tersine, kabul edelimki, R tamlık bölgesi olan bir A özalt kümesine sahip olsun. Böylece, S -halka II'nin tanımından R bir S -komütatif halka II dir.

Teorem 2.1.4(W.B.K.): R bir halka olsun. Eğer, R'nin tamlık bölgesi olan bir A özalt kümesi varsa R'ye bir S -komütatif olmayan halka II denir.

İspat : R'nin tamlık bölgesi olan en az bir özalt kümeye sahip olması için R bir S -komütatif halka II olacak fakat R'nin bir S -halka II olması için R bölüm halkası olan en az bir özalt kümeye sahip olmalıdır. Bu yüzden iddaa sağlanır.

Bu tanımlardan ve sonuçlardan, görüyoruz ki, her ne kadar R bir komütatif olmayan halka olsa bile R bir S -komütatif halka II olabilir.

Örnek 2.1.4:

$\mathbb{Q}R = \left\{ a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \,\middle|\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}, i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \right\}$
quaternionlar halkası olsun.

Açıkça, $\mathbb{Q}R$ bir S -komütatif halka II' dir ve $\mathbb{Q}R$ ayrıca bir S -halka I'dir. Çünkü, $\mathbb{Q}$ bir cisim ve $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}R$' dir.

Tanım 2.1.4 : R bir halka olsun. R bir S -halka I veya S -halka II iken R' nin Smarandache karakteristikleri , R'nin özalt kümesi olan bir cismin karakteristiği veya R'nin özalt kümesi olan bir tamlık bölgesinin karakteristiği veya R'nin bir özalt kümesi olan bir bölme halkasının karakteristiğidir.Bunun için, S -halka I veya S -halka II olan bir R halkası için onunla bağlantılı birden fazla S -karaktersitiğe sahip olabiliriz.

Teorem 2.1.5 (W.B.K): R bir komütatif sonlu halka olsun. Eğer, R bir S -halka II ise R bir S -halka I'dır.

İspat : Her sonlu tamlık bölgesi bir cisim olduğundan, S -halka I ve S -halka II tanımlarına baktığımızda açıktır ki her S -halka II bir S -halka I'dir.

Teorem 2.1.6(W.B.K): Eğer, R bir S -halka I (veya S -halka II) ve $R[x]$, R üzerinde bir polinom halkaysa $R[x]$ bir S -halka I (S -halka II) 'dir.

İspat : R bir S -halka I(veya S -halka II) ise $A \subset R$ (A bir cisim, bir tamlık bölgesi veya bir bölüm halkasıdır.) böylece $A[x] \subset R[x]$ bir tamlık bölgesi veya bir bölüm halkasıdır. Bu yüzden R bir S -halka II veya $A \subset R[x]$' dir. Yani,Eğer, R bir S -halka I ise $R[x]$' de bir S -halka I'dir.

Teorem 2.1.7 (W.B.K): F bir cisim ve G herhangi bir grup olsun. Bu takdirde, $F\ G$ grup halkası bir S -halka I'dir.

İspat : F bir cisim ve $F \subset FG$ olduğundan, $F\ G$ 'nin bir S -halka I olduğu açıktır.

Teorem 2.1.8(W.B.K) : F bir cisim ve S birim elemana sahip herhangi bir yarı grup olsun. Bu takdirde, $F\ S$ yarı grup halkası bir S -kalka I 'dir.

Teorem 2.1.9(W.B.K): $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve G herhangi bir grup olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}G$ grup halkası bir S -halka II'dir ve bir S -halka I değildir.

İspat : $\mathbb{Z}$ ' in $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}G$ olacak şekilde bir tamlık bölgesi olması gerçeğinden açıktır ki, $\mathbb{Z}G$ bir S -halka II'dir.

Sonuç : $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve G komütatif olmayan bir grup (S bir komütatif olmayan monoid) bu takdirde, $\mathbb{Z}G$ grup halkası bir S -halka II'dir.

Teorem 2.1.10(W.B.K): $M_{nxn} = \{a_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ matrisler halkası olsun. M_{nxn} bir S -halka II'dir.

İspat : $A = \{a_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ve $a_{ij} = 0, i \neq j\} \cup (0)$ olsun. A sadece köşegen matrisleri içerir. A bir tamlık bölgesidir. Böylece, M_{nxn} bir S -halka II'dir ve bir S -halka I değildir.

2.2. HALKALARDA SMARANDACHE BİRİMLERİ :

Bu bölümde, halkalarda Smarandache birimi kavramına gireceğiz. Fakat, S -birimlere girmek için S -halkaya ihtiyacımız yoktur. S -birimleri keyfi bir halka için tanımlayacak ve ilginç sonuçlar bulacağız. $x^2 = 1$ formundaki birimlerin asla S -birimler olamayacağını ispatlayacağız. Rasyonel ve reel sayılar cisimlerindeki her birimin birer S -birim olduğu ispatlayacağız.

Tanım 2.2.1 : R birimli bir halka ve $x \in R - \{1\}$ olsun. Bu takdirde, eğer bir $y \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, x' e bir Smarandache birim (S -birim) denilir :

1. $xy = 1$

2. $a,b \in R - \{x, y, 1\}$ için:

(i) $x\,a = y$ veya $a\,x = y$ veya

(ii) $y\,b = x$ veya $b\,y = x$ ve (iii) $a\,b = 1$.

ÖRNEK 2.2.1 : $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,...,8\}$ mod 9 'da çarpmaya göre bir halka olup, $2 \in \mathbb{Z}_9$ bir S -birimdir. Çünkü, $5 \in \mathbb{Z}_9$ için $25 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ ve $7,4 \in \mathbb{Z}_9$ için $74 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ iken $27 \equiv 5(\mathrm{mod}\,9)$ ve $54 \equiv 2(\mathrm{mod}\,9)$ ' dur.

ÖRNEK 2.2.2 : $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,...,4\}$ olsun. Bu takdirde, $3 \in \mathbb{Z}_5$, bir S -birimdir. Çünkü, $23 = 1(\mathrm{mod}\,5)$ ve $4 \in \mathbb{Z}_5$ için , $24 = 3(\mathrm{mod}\,5)$, $34 = 2(\mathrm{mod}\,5)$ ve $4^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ ' dir.

TEOREM 2.2.1 (W.B.K): Bir halkadaki her S -birim bir birimdir fakat bir halkadaki tüm birimler genel olarak bir S -birim olmak zorunda değildir.

İSPAT : S -birim tanımından her S -birimin bir birim olduğu açıktır.Fakat , her birim bir S -birim olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösterelim. $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,...,8\}$ halkasını alalım.Açıkça, $74 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ olduğundan, 7 bir birimdir fakat bir S -birim değildir. Çünkü, $ab \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ iken, $7a \equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$ veya $4b \equiv 7(\mathrm{mod}\,9)$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Z}_9 \setminus \{4,7\}$ bulamayız.

ÖRNEK 2.2.3 : $\mathbb{Z}_{15} = \{0,1,...,14\}$ halkasını alalım. $28 \equiv 1(\mathrm{mod}\,15)$, $4^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,15)$ ve $24 \equiv 8(\mathrm{mod}\,15)$ olduğundan, $2 \in \mathbb{Z}_{15}$ bir S -birimdir.

UYARI : $x^2 = 1$' in bir S -birim olamayacağını ispatlayacağımızdan tanımda $y \neq x$ olduğunu söylemek gerekli değildir. Ayrıca, $a, b \in R - \{x, y, 1\}$ demekle a ve b ' nin farklı olmasını beklemiyoruz.Yani, $a = b$ olabilir.Bunu bir örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 2.2.4 : $\mathbb{Z}_{15} = \{0,1,...,14\}$ halkasını alalım. $4^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,15)$ olup , $4a \equiv 4(\mathrm{mod}\,15)$ veya $4b \equiv 4(\mathrm{mod}\,15)$, $ab \equiv 1(\mathrm{mod}\,15)$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Z}_{15}$ bulamayız.

TEOREM 2.2.2(W.B.K) : R, 1 birimine sahip bir halka olsun.Eğer, $x \in R$-$\{1\}$, $x\,y = 1$ olacak şekilde bir S -birimse $x \neq y$ 'dir.

İSPAT : $x \in R \setminus \{1\}$ bir S -birim olsun.Tanımdan, $x\,y = 1$' dir öyleki, $a, b \in R - \{x, y, 1\}$ için , $x\,a = y$ veya $a\,x = y$ ve $a\,b = 1$' dir.Eğer, $x = y$ ise $x^2 = 1$ ve $x\,a = x$ yani $x^2 a = x^2$ olur. Bu da $a = 1$ demektir. Bu da S -birimin tanımıyla çelişir.

ÖRNEK 2.2.5 : $R_{2x2} = \{(a_{ij} \;|a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}\}$ bileşenleri $\mathbb{Z}_2$ cisminden alınan bütün 2×2'lik matrislerin koleksiyonu olsun. R_{2x2} matris toplamı ve matris çarpımı işlemlerine göre bir halka oluşturur. R_{2x2}'deki birimler:

$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$ olup,

$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$'dir.

ve $\begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$ çarpımsal birimken $\begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$'dir.

Kolayca gösterilebilir ki, $\begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ S-birim değillerdir. R_{2x2} 'deki elemanların hiçbirinin S-birim olmadığı görülebilir fakat R_{2x2}'nin 5 farklı birimi vardır.

Bu örnekten aşağıdaki gözlemleri elde ederiz :

$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$ olup açıkça, $x = y = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$'dır.

Eğer, $a, b \in R \setminus \{x, y, 1\}$ olduğunu kabul etmezsek, a =1 veya b =1,

$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$ durumunda olabilir.

Bunun için, bir R halkasındaki $x^2 = 1$ olan her x elemanı bir S-birim olacaktır. Ayrıca, $\begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$ bir örnektir, eğer $a, b \in R \setminus \{x, y, 1\}$ olduğunu kabul etmez ve eğer $x = \begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$ alırsak; $x = a = \begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}$ alarak , $\begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} = y$ elde ederiz.

Bunun için tanım 2.2.1' deki varsayımlar S-birimleri birimlerden önemli ölçüde farklı tuttuğundan önemlidir.

Teorem 2.2.3(W.B.K) : $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ halkasındaki her birim bir S-birim değildir.

İspat: $n-1 \in \mathbb{Z}_n$ elemanını alalım $(n-1)\;(n-1) = 1(\text{mod}\, n)$ olduğundan, bir birimdir.Fakat, teorem 2.2.2'den bir S-birim değildir. Bunun için, karakteristiği p olan bir asal cisimde (p bir asal sayı) her eleman bir birimdir fakat karakteristiği sıfır olan asal cisimlere zıt olarak $\mathbb{Z}_p$'deki her eleman bir S-birim değildir.

Teorem 2.2.4(W.B.K) : $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismindeki her birim bir S-birimdir.

İspat : $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi olsun. m herhangi bir tamsayı olsun.

$m\frac{1}{m}=1, m\frac{1}{m^2}=\frac{1}{m}, m^2\frac{1}{m}=m$ ve $\frac{1}{m^2}m^2=1$'dir. Eğer, $m=\frac{p}{q}(q\neq 0)$ ise $m_1=\frac{q}{p}$ alalım.

Buradan, $m_1 m=1$'dir. $\frac{p}{q}\frac{q^2}{p^2}=\frac{q}{p}$ ve $\frac{q}{p}\frac{p^2}{q^2}=\frac{p}{q}$ ve $\frac{p^2}{q^2}\frac{q^2}{p^2}=1$' dir. Bu nedenle, $\mathbb{Q}$'daki her birim bir S-birimdir.

Teorem 2.2.5 (W.B.K) : Eğer, F karaktersitiği sıfır olan bir asal cisimse her birim bir S-birimdir.

İspat : Karakteristiği sıfır olan bütün asal cisimler $\mathbb{Q}$'ya izomorfik olduğundan ispat elde edilir.

Örnek 2.2.6 : $G=\{g \mid g^2=1\}$ ve Q, karakteristiği sıfır olan bir cisim olsun. $QG=\{\alpha+\beta g \mid \alpha,\beta\in Q\}$ grup halkası için , $g\in QG$ ve $g^2=1$ fakat g bir S-birim değildir.

Tanım 2.2.2 : S bir halka olsun. Eğer, S'deki her eleman bir S-birimse bu takdirde S'ye bir Smarandache birim bölgesi(S-birim bölge) denir.

Eğer, S hiç S-birime sahip değilse, S'ye bir Smarandache birim serbest halka (S-birim serbest halka)denir.

Örnek 2.2.7 : $\mathbb{Q}$ bir S-birim bölgedir.

Örnek 2.2.8 : $\mathbb{R}$ bir S-birim bölgedir.

Örnek 2.2.9 : p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}_p$ bir S-birim serbest bölgedir.

TEOREM 2.2.6 : $p>3$ bir asal sayı ve $G=\langle g \mid g^p=1\rangle$ mertebesi p olan bir devirli grup olsun.Bu takdirde, $G\setminus\{1\}$'in her elemanı $\mathbb{Z}_3G$ grup halkasının bir S-birimidir.

İSPAT : $G\subset\mathbb{Z}_3G$ olup, her $g\in G$ için $g\in\mathbb{Z}_3G$ olduğu açıktır. $G=\{1,g,\ldots,g^{p-1}\}$'dir. $x\in G\setminus\{1\}$ olsun.Bu takdirde, $1\leq i\leq p-1$ olmak üzere, $x=g^i$ şeklindedir. x'in bir S-birim olduğunu göstermek için öncelikle $x\,.\,y=1$ olacak şekilde bir $y\in G\setminus\{1,x\}$ olduğunu göstermeliyiz. $x\,.\,y=1$ ise $g^i y=1$ olur.Bu da $y=g^{p-i}$ olması demektir. $1\leq i\leq p-1$

olduğundan, $y \in \{g,...,g^{p-1}\}$ olur.O halde, $x \,.\, y = 1$ olacak şekilde bir $y \in G \setminus \{1, x\}$ vardır.Şimdi, $a\,x = y$ olacak şekilde bir $a \in G \setminus \{1, x, y\}$ olduğunu gösterelim. $a\,g^i = g^{p-i}$ ise $a = g^{p-2i}$ olur.Öte yandan, $a \neq x$ ve $a \neq y$'dir.Çünkü, eğer, $a = x$ olsaydı, $g^{p-2i} = g^i$ olurdu.Yani, $p-2i = i$ ve dolayısıyla $p = 3i$ olurdu.Fakat, p bir asal sayı olduğundan, $p \neq 3i$'dir.Benzer şekilde, $a \neq y$ olduğunu gösterelim.Eğer, $a = y$ olsaydı, $g^{p-2i} = g^{p-i}$ olurdu.Dolayısıyla, $p-2i = p-i$ ve buradan da $i = 2i$ elde edilirdi.Yani, $1 = 2$ olurdu ki buda imkansızdır.O halde, $a\,x = y$ olacak şekilde bir $a \in G \setminus \{1, x, y\}$ vardır.Şimdi, x'in bir S-birim olduğunu göstermek için, son olarak $a\,b = 1$ olacak şekilde bir $b \in G \setminus \{1, x, y\}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $a\,b = 1$ ise $g^{p-2i}\,b = 1$ ve $b = g^{2i}$ olur.Öte yandan, $b \neq x$ ve $b \neq y$' dir.Çünkü, $b = x$ veya $b = y$ olsaydı sırasıyla; $1 = 2$ veya $p = 3i$ olurdu. $1 \neq 2$ ve p bir asal sayı olduğundan, bu iki durumda gerçekleşemez.Dolayısıyla, $a\,b = 1$ olacak şekilde bir $b \in G \setminus \{1, x, y\}$ vardır.O halde, x bir S-birimdir. x, $G \setminus \{1\}$'den alınan keyfi bir eleman olduğundan, $G \setminus \{1\}$'deki her eleman bir S-birimdir.

TEOREM 2.2.7 : p bir asal sayı ve $G = \left\langle g \,\middle|\, g^p = 1 \right\rangle$ mertebesi p olan bir devirli grup olsun. Bu takdirde, $p-1$, $\mathbb{Z}_p G$ grup halkasının S-birim olmayan bir birimidir.

İSPAT : $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$ olup, $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p G$' dir .O halde, $p-1 \in \mathbb{Z}_p G$' dir. $(p-1)(p-1) = p^2 - 2p + 1$ ve $p^2 - 2p + 1 \equiv 1 \pmod{p}$'dir. O halde, $p-1$, $\mathbb{Z}_p G$' nin bir birimidir. Fakat, $(p-1)\,y \equiv 1 \pmod{p}$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{Z}_p G \setminus \{1, p-1\}$ yoktur. O halde, $p-1$, $\mathbb{Z}_p G$' nin bir S-birimi olamaz. Dolayısıyla, $p-1$, $\mathbb{Z}_p G$ grup halkasının S-birim olmayan bir birimidir.

2.3 HALKALARDA SMARANDACHE SIFIR BÖLENLERİ :

Bu bölümde, halkalarda Smarandache sıfır bölen kavramına girip her S-sıfır bölenin bir sıfır bölen olmadığını göstereceğiz.

Tanım 2.3.1 : R bir halka olsun. Eğer, $xy = 0$ iken $a, b \in R \setminus \{0, x, y\}$ için;

1. $xa = 0$ veya $ax = 0$ ve
2. $yb = 0$ veya $by = 0$ ve

3. $ab \neq 0$ veya $ba \neq 0$ oluyorsa, $x, y \in R$'ye Smarandache sıfır bölen denir.

Örnek 2.3.1 : $\mathbb{Z}_{20} = \{0,1,....,19\}$ halkasını alalım. Açıkça, $10,16$ bir S-sıfır bölendir.Çünkü, $5,6 \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}$ için;

$5.16 \equiv 0$ (mod 20)

$6.10 \equiv 0$ (mod 20)

$6.5 \equiv 10$ (mod 20)'dir.

Örnek 2.3.2 : $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,....,9\}$ halkasını alalım. Açıkça, $2.5 \equiv 10 = 0(\mathrm{mod}10)$ bir sıfır bölendir fakat bir S-sıfır bölen değildir.

Teorem 2.3.1 (W.B.K): R bir halka olsun. Her S-sıfır bölen bir sıfır bölendir fakat genel olarak bir sıfır bölen bir S-sıfır bölen değildir.

İspat : S-sıfır bölen tanımından, eğer x, y bir S-sıfır bölense bir sıfır bölendir. Fakat, örnek 2.3.2' den, gördük ki, $2.5 = 0(\mathrm{mod}10)$, $\mathbb{Z}_{10}$' da bir sıfır bölendir fakat bir S-sıfır bölen değildir.

Örnek 2.3.3 : $S_{2x2} = \left\{ \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\} \right\}$ olsun. Açıkça S_{2x2} bir matris halkasıdır.

$\begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$ olduğundan,

$\begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix} \in S_{2x2}$, S_{2x2}'nin sıfır bölenidir.

$x = \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} \in S_{2x2}$ alalım

$\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$ fakat $\begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$ fakat $\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$'dır.

Sonuç olarak,

$\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$'dır.

Bunun için, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_{2x2}$ halkasının bir S -sıfır bölenidir.

Örnek 2.3.4 : $R_{3x3} = \left\{ \left(a_{ij} \right) \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\} \right\}$ olsun. R_{3x3} mod 4' teki matris çarpımına göre bir halkadır.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, R_{3x3}$'te bir sıfır bölendir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ve \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 'dır.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in R_{3x3}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ve} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 'dır.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 'dır.Fakat,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ve

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 'dır.

Böylece, $\begin{pmatrix} 100 \\ 000 \\ 002 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 000 \\ 010 \\ 022 \end{pmatrix}$, R_{3x3}'te S -sıfır bölenleridir.

Teorem 2.3.2(W.B.K): R komütatif olmayan bir halka olsun.

$a,b \in R \setminus \{0,x,y\}$ olmak üzere $x,y \in R \setminus \{0\}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir S -sıfır bölen olsun.

$1.ax = 0 \quad ve \quad xa \neq 0$

$2.yb = 0 \quad ve \quad by \neq 0$

$3.ab = 0 \quad ve \quad ba \neq 0$

Bu takdirde, $(xa+by)^2 = 0$ yani, $xa+by$, R'nin bir nilpotent elemanıdır.

İspat : $x,y \in R \setminus \{0\}$ bir sıfır bölen olsun.Yani, $xy = 0 = yx$ olsun. $a,b \in R \setminus \{0,x,y\}$ ve $ax = 0, xa \neq 0, yb = 0, by \neq 0, ab = 0 \ ve \ ba \neq 0$ olsun.

$(xa+by)^2 = xaby + byxa + xaxa + byby$'dir. $xy = yx = 0, ab = 0, yb = 0 \ ve \ ax = 0$ olduğunu kullanarak $xa+by$'nin mertebesi 2 olan bir nilpotent eleman olduğunu elde ederiz.

Tanım 2.3.2 : R bir komütatif halka olsun. Eğer, R'nin hiçbir S -sıfır böleni yoksa R'ye bir Smarandache tamlık bölgesi (S - tamlık bölgesi) denir.

Teorem 2.3.3 (W.B.K): R bir tamlık bölgesi olsun. Bu takdirde, R bir S -tamlık bölgesidir.

İspat : S -tamlık bölgesinin tanımından ispat açıktır.

Tanım 2.3.3 : R bir komütatif olmayan halka olsun. Eğer, R'nin hiç S -sıfır böleni yoksa R' ye bir Smarandache bölme halkası (S -bölme halkası) denir.

Örnek 2.3.5 : Açıkça, $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ bir S -tamlık bölgesidir. Ayrıca, $2.2 = 0(\text{mod}\,4)$ olduğundan, $\mathbb{Z}_4$ bir tamlık bölgeside değildir.

Sonuç 2.3.1 : Bütün bölüm halkaları S -bölüm halkalarıdır.

İspat : S -bölüm halkasının tanımından açıktır.

2.4. HALKALARDA SMARANDACHE İDENPOTENTLER :

Bu bölümde, halkalardaki Smarandache idenpotent ve Smarandache co-idenpotent kavramlarına değinip eğer bir halka Smarandache idenpotentlere sahipse en azından iki sıfır bölene sahip olduğunu ispatlayacağız. Eğer, G sonlu bir grup ve karakteristiği sıfır olan bir cisimse $K\,G$ grup halkasının aşikâr olmayan Smarandache idenpotentlere sahip olduğunu ispatlayacağız. Son olarak, karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerindeki bir G torsion serbest komütatif grubunun $K\,G$ grup halkasının Smarandache idenpotente sahip olmadığını göstereceğiz.

Tanım 2.4.1 : R bir halka olsun. x, R'nin aşikar olmayan bir idenpotent elemanı olsun. Bu takdirde, bir $a \in R \setminus \{0,1,x\}$ için;

(i) $a^2 = x$ ve (ii) $xa = a$ $(ax = a)$ veya $ax = x$ $(xa = x)$ şartları sağlanıyorsa x'e R'nin bir Smarandache idenpotent elemanı denir.

Tanım 2.4.2 : $x \in R \setminus \{0,1\}$, R'nin bir Smarandache idenpotenti olsun. Yani, $x^2 = x$ ve bir $y \in R \setminus \{0,1,x\}$ için, $y^2 = x$ ve $yx = x$ veya $xy = y$ olsun. Bu takdirde, y'ye bir Smarandache co-idenpotent deriz ve ikiliyi (x, y) ile belirtiriz.

Örnek 2.4.1 : $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,....,5\}$ halkasını alalım. $4^2 \equiv 4(\bmod 6)$ ve $2 \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{4\}$ için $2^2 \equiv 4(\bmod 6)$ ve $2.4 \equiv 2(\bmod 6)$ olduğundan, $4 \in \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_6$' nın bir S-idenpotentidir. $3^2 \equiv 3(\bmod 6)$ olup $3 \in \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_6$'nın bir idenpotentidir fakat $\mathbb{Z}_6$'nın bir S-idenpotenti değildir.

Teorem 2.4.1(W.B.K) : Her S-idenpotent bir idenpotentdir fakat her idenpotent genel olarak bir S-idenpotent değildir.

İspat : Her S-idenpotentin bir idenpotent olduğu tanımından açıktır.Fakat, bunun tersi doğru olmayabilir.Örneğin, örnek 2.4.1'deki $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,....,5\}$ halkasında, $3 \in \mathbb{Z}_6$ elemanı bir idenpotenttir. Fakat bir S-idenpotent değildir.

Örnek 2.4.2 : $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,....,9\}$ halkasını alalım. $5^2 \equiv 5(\bmod 10)$ ve $6^2 \equiv 6(\bmod 10)$ olduğundan 5 ve 6, $\mathbb{Z}_{10}$'nun idenpotentleridir. 5 bir S-idenpotent değildir fakat 6 bir S-idenpotenttir. Çünkü, $6^2 \equiv 6(\bmod 10)$ ve $4 \in \mathbb{Z}_{10}$ için $4^2 \equiv 6(\bmod 10)$ ve $4.6 \equiv 4(\bmod 10)$'dur.

Teorem 2.4.2(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-idenpotente sahipse R en az iki aşikâr olmayan sıfır bölene sahiptir.

İspat : $a \in R$ bir S-idenpotent olsun. Böylece, $a^2 = a$ ve bir $b \in R \setminus \{a,0,1\}$ için, $b^2 = a$ ve $ab = b$'dir. Buradan, $(a-1)b = 0$ olur. Ayrıca, $a^2 = a$ olması $a(a-1) = 0$ olmasını gerektirir.

Açıkça, $b \neq 0 \ ve \ a \neq 1$'dir. Bu da istenendir.

Sonuç 2.4.1: Eğer, R bir komütatif halka ve R, S-idenpotentlere sahipse R en azından üç sıfır bölene sahiptir.

İspat : Teorem 2.4.2'den iki sıfır böleni biliyoruz. $a^2 = a$ ve $b^2 = a$ olduğundan $a^2 - b^2 = 0$ ve böylece $(a-b)(a+b) = 0$ olur. $a \neq b$ olduğundan, bir başka sıfır bölen elde ederiz. $b \neq 1$ ve $a \neq b$ olduğundan, bu üç sıfır bölende farklıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.4.3 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,....,11\}$ halkasını alalım. Açıkça, 4 ve 9 halkanın aşikâr olmayan idenpotentleridir ve her ikiside S-idenpotenttir. Çünkü $4^2 \equiv 4(\text{mod}12)$ ve $8 \in \mathbb{Z}_{12}$ için, $8^2 \equiv 4(\text{mod}12)$ ve $4.8 \equiv 8(\text{mod}12)$ 'dir. Ayrıca, $9^2 \equiv 9(\text{mod}12)$ ve $3 \in \mathbb{Z}_{12}$ için, $3^2 \equiv 9(\text{mod}12)$ ve $9.3 \equiv 3(\text{mod}12)$'dir. Bu da istenendir. Bu nedenle, her idenpotenti S-idenpotent olan halkalarada sahibiz.

Örnek 2.4.4 : $\mathbb{Z}_{15}\{0,....,14\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{15}$'in aşikâr olmayan idenpotentleri sadece 6 ve 10'dur. Açıkça, 6, $\mathbb{Z}_{15}$'in bir S-idenpotentidir. Çünkü $9 \in \mathbb{Z}_{15}$ için, $9.6 \equiv 9(\text{mod}15)$ ve $9^2 \equiv 6(\text{mod}15)$ 'dir. Ayrıca, $10 \in \mathbb{Z}_{15}$ bir S-idenpotenttir. Çünkü, $10^2 \equiv 10(\text{mod}15)$, $5^2 \equiv 10(\text{mod}15)$ ve $5.10 \equiv 5(\text{mod}15)$ 'dir.

Teorem 2.4.3(W.B.K) : $\mathbb{Z}_n = \{0,1,...,n-1\}$ halkası olsun. p bir asal sayı ve $n = 2p$ ise $\mathbb{Z}_n$, S-idenpotent olmayan idenpotentlere sahiptir.

İspat : p bir asal tek sayı, $n = 2p$ ve $\mathbb{Z}_n = \{0,1,....,n-1\}, n$ modülündeki tamsayıların halkasıolsun. $p^2 \equiv p(\text{mod}\,2p)$ ise $p^2 + p \equiv 0(\text{mod}\,2p)$ yani $p(p+1) \equiv 0(\text{mod}\,2p)$'dir. $p \in \mathbb{Z}_{2p}$ bir idenpotenttir fakat bir S-idenpotent değildir.Çünkü, $mp \equiv m, m^2 \equiv p$ olacak şekilde, $a, m \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus \{p,0,1\}$ yoktur. Fakat, eğer p asalsa $m^2 \equiv p$ imkansızdır. Bunun için, p asal bir sayı ise p, $\mathbb{Z}_{2p}$'nin S-idenpotent olmayan bir idenpotenttir.

Örnek 2.4.5 : $\mathbb{Z}_{30} = \{0,....,29\}$ halkasını alalım. Bu halkada, 6, 10, 15, 16, 21 ve 25 aşikâr olmayan idenpotentlerdir. $6^2 \equiv 6(\text{mod}\,30)$, $24^2 \equiv 6(\text{mod}\,30)$ ve $6.24 \equiv 24(\text{mod}\,30)$ olduğundan, $6 \in \mathbb{Z}_{30}$ bir S-idenpotenttir.Benzer olarak 20, $b \in \mathbb{Z}_{30} \setminus \{0,1,10\}$ 'nün rolünü üstlendiğinden 10 bir S-idenpotenttir. 15 bir S-idenpotent değildir. 16 bir S-idenpotenttir.

Çünkü, 14, b gibi davranıyor.Yani,

$16^2 \equiv 16(\bmod 30)$, $14^2 \equiv 16(\bmod 30)$ ve $14.16 \equiv 14(\bmod 30)$'dur. 21 bir S -idenpotenttir.

Çünkü, 9, b'nin rolünü üstleniyor. 5, b'nin rolünü üstlendiğinden, 25 bir S -idenpotenttir.

Bu örnekten aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

1. $15 \in \mathbb{Z}_{30}$ bir S -idenpotent olmadığından $\mathbb{Z}_{30}$'daki bütün idenpotentler S -idenpotent değildir.

2. Sıralı çiftlerdeki idenpotentlerin toplamı 31'i veriyor. ((6, 25), (10, 21) ve (15, 16)).

S -idenpotent ve S -co-idenpotentlerin toplamı 30'u veriyor.((6, 24), (10, 20) ve (16, 14)).

3. İdenpotentlerin S -idenpotent olması için bütün durumlarda $a, b \in \mathbb{Z}_{30}$ olması gerekir öyleki $a + b = 30, a^2 \equiv a, b^2 \equiv a$ ve $ab \equiv b$ olmalıdır .

Örnek 2.4.6 : $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_4$'ün hiç idenpotenti yoktur. Bu yüzden, hiç S -idenpotentide yoktur.

Örnek 2.4.7 : $\mathbb{Z}_{16} = \{0,.....,15\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{16}$ hiç idenpotente sahip değildir. Bunun için, S -idenpotente de sahip değildir.

Örnek 2.4.8 : $\mathbb{Z}_{27} = \{0,.....,26\}$ halkası hiçbir idenpotente ve S -idenpotente sahip değildir.

Örnek 2.4.9 : $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ karakteristiği 3 olan asal cisim olsun. $G = \{g \mid g^2 = 1\}$ mertebesi 2 olan devirli grup olsun. $\mathbb{Z}_3 G = \{0,1,2,g,2g,1+g,1+2g,2+g,2+2g\}$'dir. Açıkça, $(2+2g)^2 = 2+2g$ ve $(2+2g)(1+g) = 2+2g$ olduğundan, $2+2g$, $\mathbb{Z}_3 G$' nin bir Smarandache idenpotent (S -idenpotent) elemanıdır.

Örnek 2.4.10 : $G = \{g \mid g^2 = 1\}$ mertebesi 2 olan devirli grup ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi olsun. $\mathbb{Q}G$, G grubunun $\mathbb{Q}$ üzerindeki grup halkası olmak üzere, $\frac{1}{2}(1+g)$, $\mathbb{Q}G$'nin bir idenpotentidir. $b = -\frac{1}{2}(1+g) \in \mathbb{Q}G$ elemanı için $b^2 = \frac{1}{2}(1+g)$ ve $ab = b$'dir. Böylece, $\frac{1}{2}(1+g)$ bir S -idenpotenttir.

Örnek 2.4.11 : $1 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$

olmak üzere, $S_3 = \{1, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ derecesi 3 olan simetrik grup olsun. $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, karakteristiği 2 olan asal cisim olsun. Açıkça, $\mathbb{Z}_2 S_3$'ün grup halkası S-idenpotent olan idenpotentlere sahiptir. $\left(1+P_4+P_5\right)^2=\left(1+P_4+P_5\right)=a$ ve $b=1+P_1+P_2\in\mathbb{Z}_2 S_3$ alalım. $b^2=1+P_4+P_5$ ve $ab=a$'dır. Böylece, $1+P_4+P_5$ bir S-idenpotenttir.

Teorem 2.4.4(W.B.K) : R bir halka ve $a\in R$ bir S-idenpotent olsun. a'nın S-co-idenpotentleri genel olarak tek değildir.

İspat : Örmek 2.4.11'e bakarsak $1+P_4+P_5$'in S-co-idenpotentinin tek olmadığı görülür.

Örnek 2.4.12 : $\mathbb{Z}_{105}=\{0,...,104\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{105}$'teki idenpotentler; 15,21,36,70,85 ve 91'dir. Bütün bu idenpotentler, S-idenpotenttirler.

15 için S-co-idenpotent 90; 21 için 84; 36 için 69; 70 için 35; 85 için 20 ve 91 için 14'tür.

Teorem 2.4.5(W.B.K) : F bir cisim olsun. F hiçbir S- idenpotente sahip değildir.

İspat : Bir cisim aşikâr olmayan idenpotentlere sahip olmadığından bir cisim bir S-idenpotente sahip değildir.

Teorem 2.4.6(W.B.K) : F karakteristiği sıfır olan bir cisim ve G mertebesi sonlu olan herhangi bir grup olsun. Bu takdirde, $F\ G$ grup halkası S-idenpotentlere sahiptir.

İspat : $F\ G$, G'nin F üzerindeki grup halkası olsun. G'nin mertebesi sonlu olsun. G'nin mertebesi için iki olasılık vardır: ya G'nin mertebesi asaldır ya da G'nin mertebesi asal değildir. G'nin mertebesi bir p asal sayısı olsun. $\alpha=\frac{+1}{p}\left(1+g+g^2+...+g^{p-1}\right)$ elemanını alalım. $\alpha^2=\alpha$ olduğundan, α, $F\ G$'nin bir idenpotentidir. $\alpha=\frac{-1}{p}\left(1+g+...+g^{p-1}\right)$ alırsak açıkça $b^2=\alpha$ ve $\alpha b=b$'dir. Eğer, G'nin mertebesi asal olmayan sonlu bir sayıysa, G bir H alt grubuna sahiptir ve mertebesi m'dir. $a=\frac{1}{m}\sum_{h_i\in H}h_i$ için, $a^2=a$ ve $b=\frac{-1}{m}\sum_{h_i\in H}h_i$ öyleki $b^2=a$ ve $ab=b$'dir.

Teorem 2.4.7(W.B.K): F karakteristiği sıfır olan bir cisim ve G, mertebesi sonlu olan elemanlara sahip bir grup olsun. Bu takdirde, $F\ G$ grup halkası $F\ G$'nin S-idenpotenti olan idenpotentlere sahiptir.

İspat : $F\ G$, G grubunun F üzerindeki grup halkası olsun. Verilen G grubu sonlu mertebeye sahip olan bir elemana sahip olsun.Yani, $g \in G$ için, $g^m = 1(m < \infty)$ olsun. $a^2 = a$ olacak şekilde, $a = \frac{1}{m}(1 + g + g^2 + ... + g^{m-1})$ ve $b = \frac{-1}{m}(1 + g + g^2 + ... + g^{m-1})$ alalım. Bu takdirde, $b^2 = a$ ve $ab = b$'dir. Bu da istenendir.

Teorem 2.4.8(W.B.K): F karakteristiği sıfır olan bir cisim ve G bir torsion serbest komütatif grup olsun. Bu takdirde, $F\ G$ grup halkası hiç S-idenpotente sahip değildir.

İspat : F karakteristiği sıfır olan bir cisim ve G bir torsion serbest komütatif grup olsun. $F\ G$ grup halkasının sıfır böleni yoktur fakat bir halka için S-idenpotente sahip olmak şunu garanti ediyorki, halka en azından iki sıfır bölene sahiptir. Böylece, $F\ G$ bir tamlık bölgesi olduğundan bu grup halkası S-idenpotentlere sahip olamaz.

3.BÖLÜM

SMARANDACHE HALKALARINDA ALT YAPILAR VE SMARANDACHE MODÜLLERİ

3.1. S-HALKALARDA ALT YAPILAR

Bu bölümde , S -halka I ve S -halka II ‘deki alt yapılardan bahsedeceğiz. Bu S -halka I ve S -halka II ‘de, Smarandache halkaları, Smarandache idealleri ve Smarandache pseudo idealleri kavramlarına girerek, örneklerle açıklayacağız. Ayrıca, bu bölümde onlarla ilgili bazı ilginç sonuçlar bulacağız.

Tanım 3.1.1 : S bir halka ve A, S ’nin bir alt halkası olsun. Eğer, A, cisim olan bir B özalt kümesine sahipse, S ’nin bu A özalt kümesine S ’nin bir Smarandache alt halkası (S -alt halka) denir.

Teorem 3.1.1(W.B.K) : S bir halka olsun. Eğer, S bir S -alt halkaya sahipse S bir S -halka I‘dir.

İspat : Açıktır ki, eğer halka bir A S -alt halkasına sahipse A ayrıca S ’de bir alt cisim olan bir cisim içerir. Dolayısıyla, S bir S -halka I olur.

Kabul edelim ki S bir S -halka olsun. S ’de daima bir S -alt halka bulmak olası olmayabilir veya daha açık olarak bir S -halka I’in her alt halkası genel olarak S ’in bir S -alt halkası olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.1 : $\mathbb{Z}_6 = \{0,....,5\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_6$ bir S -halka I‘dir. Fakat, $\mathbb{Z}_6$ ’nın hiçbir S -alt halkası yoktur.

Örnek 3.1.2 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,....11\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{12}$ bir S -halkadır. Gerçekten, $P = \{0,2,4,6,8,10\}$, $\mathbb{Z}_{12}$ ’nin bir alt halkası ve $A = \{0,4,8\}$ alırsak (burada A, $\mathbb{Z}_{12}$ ’nin bir alt cismi), $A = \{0,4,8\}$, P ’nin cisim olan bir öz alt kümesidir.Dolayısıyla, P, $\mathbb{Z}_{12}$ ’nin bir S -alt halkası olur.

Teorem 3.1.2(W.B.K) : R bir S -halka I olsun. R alt halkalara sahip olabilir fakat S -alt halkalara sahip olmayabilir.

İspat : $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,....,5\}$ bir S -halka I’dir. Açıkça, $\mathbb{Z}_6$, $S_1 = \{0,3\}$ ve $S_2 = \{0,2,4\}$ alt halkalarına sahiptir fakat hiçbir S -alt halkaya sahip değildir.

Tanım 3.1.2 : R bir halka ve A, R ’ nin bir ideali olsun. Eğer, A ’nın cisim olan bir öz alt kümesi varsa A ’ya bir Smarandache ideali denir.

Örnek 3.1.3 : $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,....,5\}$ S-halkasını alalım. Açıkça, $I = \{0,3\}$ ve $J = \{0,2,4\}$, $\mathbb{Z}_6$'nın idealleridir fakat hiçbiri $\mathbb{Z}_6$'nın bir S-ideali değildir.

Teorem 3.1.3(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-ideale sahipse R bir S-halkadır. Tersine, eğer R bir S-halkaysa R'deki her idealin R'nin bir S-ideali olduğunu söyleyemeyiz.

İspat : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-ideale sahipse biliyoruz ki R, cisim olan bir A özalt kümesine sahiptir. Böylece, R bir S-halka olur.

R'nin ideallerinin R'nin S-idealleri olmak zorunda olmadığını göstermek için R bir S-halka olsun. Bunu bir örnekle ispatlayalım. $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,....,5\}$ S-halkasını alalım. Açıktır ki, bu S-halka hiçbiri R'nin S-ideali olmayan ideallere sahiptir.

Örnek 3.1.4 : $\mathbb{Z}_{10} = \{0,...,9\}$ halkasını alalım.Açıkça, $\mathbb{Z}_{10}$ hiçbir S-ideale sahip olmayan bir S-halkadır.

Tanım 3.1.3 : $(A,+,.)$bir S-halka olsun. B, A'nın cisim olan bir özalt kümesi olsun. A'nın boş olmayan bir S alt kümesi aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa S'ye, A'nın B ile ilgili bir Smarandache pseudo sağ ideali (S-pseudo sağ ideal) denir.

1-) $(S,+)$ bir komütatif gruptur.

2-) $b \in B$ ve $s \in S$ için $sb \in S$'dir.

Benzer şekilde Smarandache pseudo sol ideali (S-pseudo sol ideal) tanımlanabilir. A'nın boş olmayan bir S alt kümesi, hem S-pseudo sol ideal hem de S-pseudo sağ ideal ise S'ye bir Smarandache pseudo ideali (S-pseudo ideal) denir.

Örnek 3.1.5 : $\mathbb{Q}[x]$rasyonel sayılar üzerindeki polinom halkası olsun. Açıkça, $\mathbb{Q}[x]$ bir Smarandache halkasıdır. $S = \langle n(x^2+1) | n \in \mathbb{Q} \rangle$ toplama işlemi altında üretilmiş kümesini düşünelim. $\mathbb{Q}S \subset S$ ve $S\mathbb{Q} \subset S$'dir. Böylece, S, $\mathbb{Q}[x]$'in $\mathbb{Q}$ ile ilgili bir pseudo idealidir.

Teorem 3.1.4(W.B.K) : R, herhangi bir S-halka olsun. R'nin herhangi bir ideali R'nin bir S-pseudo idealidir fakat genelde R'nin her S-pseudo ideali R'nin bir ideali değildir.

İspat : R bir S-halka olsun. $\varnothing \neq B, B \subset R$ olacak şekilde bir B cismi vardır. I, R'nin bir ideali olsun. Böylece, $IR \subset I$ ve $RI \subset I$'dır. $B \subset R$ olduğundan, $BI \subset I$ ve $IB \subset I$ 'dır. Bu yüzden, I, B ile ilgili bir S-pseudo idealidir.

Tersini ispatlamak için, örnek 3.1.5'te verilen S-halkayı düşünelim.

Açıkça, S bir S-pseudo idealidir fakat $x\,S$, S'de içerilmediğinden S, $\mathbb{Q}[x]$'in bir ideali değildir. Bu da istenendir.

Örnek 3.1.6: $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi olsun. $\mathbb{R}[x]$ polinom halkasını alalım. Açıkça, $\mathbb{R}[x]$ bir S-halkadır. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}[x]$ ve $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ 'de içerilen cisimlerdir. Toplamsal üretilmiş bir $S=\langle n(x^2+1) | n\in\mathbb{Q}\rangle$ grubunu düşünelim. S, $\mathbb{Q}$ ile ilgili bir S-pseudo idealidir fakat $\mathbb{R}$ ile ilgili bir S-pseudo ideali değildir.

Teorem 3.1.5 (W.B.K): R bir S-halka olsun. Kabul edelim ki, A ve B, R'nin iki alt cismi ve S, A ile ilgili bir S-pseudo ideali olsun. S genel olarak, B ile ilgili bir S-pseudo ideali olmak zorunda değildir.

İspat : Örnek 3.1.6'dan görüyoruz ki, S, $\mathbb{Q}$ cismi için bir S-pseudo idealdir fakat $\mathbb{R}$ cismi için bir S-pseudo ideali değildir .

Örnek 3.1.7 : $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını alalım. Açıkça, $\mathbb{Z}_{12}$ bir S-halkadır. Çünkü, $4^2\equiv 4(\mathrm{mod}\,12)$ çarpımsal birim gibi davrandığından, $A=\{0,4,8\}$, $\mathbb{Z}_{12}$'de bir cisimdir. $S=\{0,6\}$, A ile ilgili S-pseudo idealidir. Fakat, S ayrıca $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin bir idealidir. $\mathbb{Z}_{12}$'nin her ideali ayrıca $\mathbb{Z}_{12}$'nin A ile ilgili bir S-pseudo idealidir.

Örnek 3.1.8 : M_{2x2} bileşenleri $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ asal cisminden alınan $2x2$'lik matrislerin kümesi olsun.

$$M_{2\times 2}=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix},\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}\right\}$$

kümesi matrislerin toplamı ve çarpımına göre bir halkadır. $A=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\right\}$, M_{2x2}'de bir cisim olduğundan, M_{2x2} bir S-halkadır. $S=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\right\}$, A ile ilgili bir S-pseudo sol idealidir fakat A ile ilgili bir S-pseudo sağ ideali değildir. Çünkü, $\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\notin S$'dir.

Ayrıca, $B=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\right\}$ bir cisimdir. $S=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\right\}$, B ile ilgili bir sol idealdir fakat B ile ilgili bir sağ ideal değildir. $C=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\right\}$ bir cisimdir. Açıkça, S, C ile ilgili bir S-pseudo sol ideal değildir. Fakat, S, C ile ilgili bir S-pseudo sağ idealdir.

Uyarı : Bir S kümesi, birden fazla cisimle ilgili bir S-pseudo ideali olabilir. $S=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\right\}$, hem A hemde B ile ilgili bir S-pseudo sol idealdir. Aynı S kümesi $C=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\right\}$ cismiyle ilgili bir S-pseudo sol ideali değildir fakat S, C ile ilgili bir S-pseudo sağ idealidir. Bunun için, aynı S kümesi ilgili olduğu cisme bağlı S-pseudo sol ideal (veya sağ ideal) olabilir. Açıkça, S, $D=\left\{\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\right\}$ cismiyle ilgili bir S-pseudo idealidir.

Tanım 3.1.4 : R bir halka olsun. I, R'nin bir S-ideali olsun. Eğer, J, R'nin bir başka Smarandache idealiyken $aJ \subset I$ olması $J=I$ olmasını gerektiriyorsa, I'ya R'nin bir Smarandache minimal ideali (S-minimal ideal) denir.

Tanım 3.1.5 : R bir S-halka ve M, R'nin bir S-ideali olsun. Eğer bir başka N S-ideal için $M \subset N \subset R$ olması $M=N$ veya $N=R$ olmasını gerektiriyorsa M'e bir Smarandache maksimal ideal (S-maksimal ideal) denir.

Örnek 3.1.9: $\mathbb{Z}_{15}=\{0,....,14\}$ halkasını alalım. Açıkça, $I=\{0,3,6,9,12\}$, $\mathbb{Z}_{15}$'in bir S-maksimal ideali olan bir S-idealidir.

Örnek 3.1.10 : $\mathbb{Z}_{14}=\{0,....,13\}$ halkasını alalım. $I=\{0,2,4,6,8,10,12\}$, $\mathbb{Z}_{14}$'ün bir Smarandache maksimal idealidir.

Örnek 3.1.11 : $\mathbb{Z}_{12}=\{0,....,11\}$ halkasını alalım. $I=\{0,2,4,6,8,10\}$ S-maksimal ideal olan bir S-idealdir. $J=\{0,4,8\}$ minimal ideal olan bir idealdir.

Tanım 3.1.6 : R bir S-halka ve I, A ile ilgili bir S-pseudo ideali olsun. Eğer, I_1, A ile ilgili bir başka S-pseudo ideali ve $(0)\subset I_1 \subset I$ olması $I=I_1$ veya $I_1=(0)$ olmasını gerektiriyorsa I'ya R'nin bir Smarandache minimal pseudo ideali (S-minimal pseudo ideal) denir.

Tanım 3.1.7 : R bir S-halka olsun. $A \subset R$ ve eğer M_1, A ile ilgili bir başka S-pseudo ideali ve $M \subset M_1$ iken $M = M_1$ ise M'e , A cismiyle ilgili bir Smarandache maksimal pseudo ideali (S-pseudo maksimal ideal) denir.

Tanım 3.1.8 : R bir S-halka ve I , bir $A \subset R$ cismiyle ilgili bir S-pseudo ideali olsun. Eğer, I bir eleman tarafından üretiliyorsa, I'ya A cismiyle ilgili bir Smarandache devirli pseudo ideali (S-devirli pseudo ideal) denir.

Tanım 3.1.9 : R bir S-halka ve I , R'nin bir A cismiyle ilgili S-pseudo ideali olsun.Eğer, $xy \in I$ olması $x \in I$ veya $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa I'ya A cismiyle ilgili bir Smarandache asal pseudo ideali (S-asal pseudo ideal) denir.

Örnek 3.1.12 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim olsun $\mathbb{Z}_2[x]$ derecesi 3 ve 3'ten küçük olan polinomların halkası yani $\mathbb{Z}_2[x] = \{0,1,x,x^2,......,1+x,1+x^2,......,1+x+x^2+x^3\}$ olsun. Açık olarak, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_2$ cismini içerdiğinden bir S-halkadır. $S = \{0,(1+x),(1+x^3),(x+x^3)\}$, $\mathbb{Z}_2$ ile ilgili olan fakat $\mathbb{Z}_2[x]$ ile ilgili olmayan bir S-pseudo idealidir.

Örnek 3.1.13 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim olsun. $S_3 = \{1,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$ derecesi 3 olan simetrik grup olsun. $\mathbb{Z}_2S_3$, S_3 grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki grup halkası olsun. $\mathbb{Z}_2S_3$ bir S-halkadır. $A = \{0,P_4+P_5\}$ bir cisimdir. $S = \{0,1+P_1+P_2+P_3+P_4+P_5\}$ $\mathbb{Z}_2S_3$'ün alt kümesi olsun. S, A ile ilişkili bir S-pseudo ideal ve ayrıca S, $\mathbb{Z}_2$ ile ilişkili bir S-pseudo idealdir.

Teorem 3.1.6(W.B.K) : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim ve G mertebesi n olan herhangi bir sonlu grup olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2G$ halkası $\mathbb{Z}_2G$'nin idealleri olan S-pseudo ideallerine sahiptir.

İspat : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan bir cisim ve $\mathbb{Z}_2G$ grup halkası bir S-halkadır. $G = \{g_1,g_2,....,g_{n-1},1\}$, G'nin bütün elemanlarının kümesi olsun. $S = \{0,1+g_1+...+g_{n-1}\}$, $\mathbb{Z}_2$ ile ilgili bir S-pseudo idealidir. Ayrıca, S, $\mathbb{Z}_2G$ 'nin bir idealidir.

Tanım 3.1.10 : R bir S-halka II ve A, R'nin bir özalt kümesi olsun. Eğer, A, R'nin bir alt halkası ve A kendi başına bir S-halka II ise A'ya R'nin bir Smarandache alt halka II (S-alt halka II) denir.

Örnek 3.1.14 : $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir S-halka II'dir ve $\mathbb{Z}$, S-althalka II'ye sahiptir. Açıkça, $\mathbb{Z}$ asla bir S-halka I olamaz veya bir S-althalka I'e sahip olamaz.

Tanım 3.1.11 : $\mathbb{Z}[x]$ polinom halkası olsun. $\mathbb{Z}[x]$ bir S-halka II'dir. Ayrıca, $\mathbb{Z}[x]$ bir S-althalka II'ye sahiptir.

Örnek 3.1.15 : $p > 3$ bir asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z} = \{0, \pm p, ..., \pm np, ...\}$ halkasını alalım. Bu takdirde, $2p\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z}$ ve $2p\mathbb{Z}$ bir S-alt halka II'dir.

Tanım 3.1.12 : R bir S-halka II ve I, R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer,

1-) I bir S-alt halka II ve

2-) $A \subset I$, I'da bir tamlık bölgesi veya bölme halkası olmak üzere her $a \in A$ ve $i \in I$ için $ai \in I$ ise I'ya R'nin bir Smarandache sağ ideal II (sağ ideal II) denir. Benzer şekilde, Smarandache sol ideal II(S-sol ideal II) tanımlaabilir. Eğer, I hem S-sağ ideal II hemde S-sol ideal II ise I'ya R'nin A ile ilgili bir Smarandache ideal II(S-ideal II) denir.

Tanım 3.1.13 : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-halka I ve R hiç S-ideale sahip değilse R'ye bir Smarandache basit halka I (S-basit halka I) denir.

Tanım 3.1.14 : R bir S-halka olsun. Eğer, R hiçbir S-pseudo ideale sahip değilse R'ye bir Smarandache pseudo basit halka (S-pseudo basit halka) denir.

Tanım 3.1.15 : R bir S-halka II olsun. Eğer, R hiçbir iki taraflı S-ideale sahip değilse R' ye bir Smarandache basit halka II (S-basit halka II) denir.

Örnek 3.1.16 : $\mathbb{Z}$ bir S-basit halka II değildir.

Örnek 3.1.17 : $\mathbb{Z}_6 = \{0, ..., 5\}$ bir S-basit halka II'dir.

Örnek 3.1.18 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0, ..., 11\}$ S-basit halka II olmayan bir S-halka II'dir.

Tanım 3.1.16 : R bir S-halka I ve I, R'nin bir S-ideali olsun. $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$'ya R'nin I ile ilgili bir Smarandache bölme halkası I (S-bölme halkası I) denir.

Tanım 3.1.17 : R bir S-halka ve I, R'nin bir S-pseudo ideali olsun. $R/I = \{a + I : a \in R\}$'ya R'nin I ile ilgili bir Smarandache pseudo bölme halkası I (S-pseudo bölme halkası) denir.

Tanım 3.1.18 : R bir S-halka II ve I bir S-ideal II olsun. Bu takdirde, $R/I = \{a + I : a \in R\}$, R'nin bir Smarandache bölme halkası II (S-bölme halkası II) olarak adlandırılır.

3.2. SMARANDACHE MODÜLLERİ :

Bu bölümde, Florentin Smarandache tarafından verilen Smarandache R-modül tanımını hatırlayacağız ve Smarandache modül II ve Smarandache pseudo modülü tanımlamaya geçeceğiz. Onları örneklerle açıklayacağız ve onlarla ilgili bazı ilginç sonuçlar vereceğiz.

Tanım 3.2.1 : R komütatif birimli bir halka ve S, A'nın cisim olan bir öz alt kümesi olsun. Bu takdirde, S, A'da bir S-cebir ise (A,+, .) modülüne bir Smarandache R-modül (S-R modül) denir.

Örnek 3.2.1 : $\mathbb{R}[x]$, katsayıları $\mathbb{R}$ cisminden alınan x değişkenine bağlı polinom halka olsun. $\mathbb{Q}[x]$ bir S-cebir olduğundan bir S-$\mathbb{R}$ modüldür.

Örnek 3.2.2 : $R=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ halkasını alalım. $S=\mathbb{Q}\times\{1\}\times\{1\}\subset R$ bir cisimdir. $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\{1\}$, S üzerindeki bir S-R modüldür.

Modülün tanımını bir kere daha hatırlatmak gerekirse: " A bir halka olsun. Bir A-modül veya bir sol A-modül, A'ya bir sol operatör olarak sahip olan bir toplamsal komütatif M grubudur. Yani, $x,y\in M$ ve her $a\in A$ için, $a(x+y)=ax+ay$'dir. Benzer olarak sağ A-modül tanımlanabilir. Eğer, M hem sol hemde sağ A-modül ise M'e bir A-modül denir."

Bu tanımıda hatırladıktan sonra ilk olarak S-modül I'den bahsedip daha sonra S-modül II ve S-pseudo modülleri tanımlamaya geçebiliriz. Şimdi S-modüllerin aşağıdaki durumlarına bakalım:

1. Bir B alt cismiyle ilgili bir S-modül başka bir C alt cismi üzerinde bir S-modüle dönüştürülemiyebilirler.
2. Ayrıca, S-modüllere her alt cisim üzerinde S-modül olarak sahip olabiliriz.

Tanım 3.2.2 : R bir S-halka I ve B boştan farklı toplamsal bir komütatif grup olsun. Eğer, $D\subset A$, D bir cisim ve $DB\subset B$ ve $BD\subset B$ ise yani, bd, her $d,c\in D$ ve $b\in B$ için $b(d+c)=bd+bc$ olacak şekilde B'nin içindeyse, B'ye bir S-alt halka I ile ilgili bir Smarandache sağ modül I (S-sağ modül I) denir. Eğer, B, ilgili olduğu aynı S-alt halka I üzerinde hem bir S-sağ modül I hemde bir S-sol modül I ise bu takdirde, B'ye bir Smarandahe modül I (S-modül I) denir.

Örnek 3.2.3 : $A=(M_{nxn},+,.)$, bileşenleri $\mathbb{Q}$'dan alınan $n\times n$'lik matrislerin kümesi olsun. Şimdi bir S-halka olan IR kümesini düşünelim. A, $\mathbb{Q}$ alt cismi üzerinde bir S-modüldür.

Açıkça, A ,IR üzerinde bir S -modül değildir. Ayrıca, eğer, $B=(M_{nxn},+,.)$ bileşenleri $\mathbb{Z}$'ten alınan $n\times n$'lik matrislerin kümesi alınırsa, görürüz ki B ,IR'nin herhangi bir alt cismi üzerinde bir S -modül I değildir. Bu örnekten hareketle bu problemin üstesinden gelmek için S -modül II'yi tanımlayalım.

Tanım 3.2.3 : R bir S -halka II ve B boştan farklı bir toplamsal komütatif grup olsun. Eğer, $D\subset A$, D bir bölüm halkası veya bir tamlık bölgesi , $DB\subset B$ ve $BD\subset B$ ise yani bd , her $d,c\in D$ ve $b\in B$ için $b(d+c)=bd+bc$ olacak şekilde B'nin içindeyse B'ye bir S -alt halka II ile ilgili bir Smarandache sağ modül II (sağ modül II) denir. Eğer, B , ilgili olduğu aynı S -alt halka II üzerinde hem bir S -sağ modül hem de S -sol modül II ise bu takdirde B'ye bir Smarandache modül II (S -modül II) denir.

Örnek 3.2.4 : $\mathbb{Z}$ bir S -halka II ve $M=M_{2x2}=\{(a_{ij})|a_{ij}\in 2\mathbb{Z}\}$ olsun. M , S -halka II ile ilişkili olan bir S -modül II'dir. $A=2\mathbb{Z}$ olsun. Açıkça, M ayrıca, S -alt halka II üzerinde bir S -modül II'dir. $A_1=4\mathbb{Z}$ veya $A_2=8\mathbb{Z}$ 'dir. Fakat, M ayrıca herhangi bir $A_p=p\mathbb{Z}$ üzerinde bir S -modül II'dir. Bu yüzden, M_{2x2} , $\mathbb{Z}$'deki herhangi bir S -alt halka II üzerinde bir S -modül II'dir.

Örnek 3.2.5 : $\mathbb{Z}[x]$ bir S -halka II ve $M=\mathbb{Z}[x]$, sadece çift dereceli polinomların halkası olsun. Bu takdirde, M , $\mathbb{Z}$ S -alt halkası üzerinde bir S -modül II'dir fakat tamlık bölgesi olarak $A=${katsayıları $2\mathbb{Z}$'ten alınan bütün tek dereceli polinomlar} ve $Y=${ $\mathbb{Z}$ üzerinde derecesi tek olan bütün polinomlar} alırsak, M , S -alt halka üzerinde bir S -modül II değildir. Bunun için, görüyoruz ki, her S -ideal II bir S -modül II'dir.

Tanım 3.2.4 : $(A,+,.)$ bir S -halka olsun. B , A'nın cisim olan bir özalt kümesi olsun. Bu takdirde, aşağıdaki üç şartı sağlayan bir M kümesine, A'nın B ile ilgili bir Smarandache pseudo sağ modülü (S -pseudo sağ modül) denir:

1. (M ,+) bir toplamsal komütatif grup,
2. $b\in B$ ve $m\in M$ için $mb\in M$,
3. $m_1,m_2\in M$ ve $b\in B$ için $(m_1+m_2)b=m_1b+m_2b$'dir.

Eğer , M hem S -pseudo sağ modül hem de S -pseudo sol modül ise M'e B ile ilgili bir Smarandache pseudo modül (S -pseudo modül) denir.

Burada ayrıca şunu belirtmek istiyoruz ki, eğer M_1, B ile ilgili bir S -pseudo modül iken, A'nın başka bir B_1 alt cismiyle ilgili bir S-pseudo modül olmak zorunda değildir. Bundan dolayı, görüyoruz ki, bir halka da farklı alt cisimleri bağlantılı farklı S-pseudo modüllere sahip olabiliriz.

Örnek 3.2.6 : $\mathbb{Z}_{24} = \{0, ..., 23\}$ halkasını alalım. $I = \{0, 2, ..., 22\}$, $\mathbb{Z}_{24}$'ün bir S-pseudo modülü olduğu gibi aynı zamanda bir S-pseudo ideal II'dir. Çünkü, $\{0, 8, 16\}$ karakteristiği 3 olan bir alt cisimdir, $16^2 \equiv 16(\text{mod } 24)$, $16x8 \equiv 8(\text{mod } 24)$ ve $8x8 \equiv 16(\text{mod } 24)$'tür. $\mathbb{Z}_{24}[x]$, $P = \{0, 8, 16\} \subset \mathbb{Z}_{24}$ cismiyle ilişkili bir S-pseudo modüldür.

Örnek 3.2.7 : $\mathbb{Z}_2 S_4$ derecesi 4 olan simetrik grubun $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerindeki grup halkası olsun. $M = \left\{0, \sum g \left(g \in S_4\right)\right\}$ olsun. M , $\mathbb{Z}_2$ üzerinde bir S-modül II'dir. M , $\mathbb{Z}_2 A_4$ üzerinde bir S-modül II'dir. Açıkça, M ayrıca bir S-ideal II ve $\mathbb{Z}_2 S_4$'ün bir S-pseudo idealidir.

3.3 S-A.C.C VE S-D.C.C ŞARTLARINI SAĞLAYAN HALKALAR

Bu bölümde, Smarandache A.C.C ve Smarandache D.C.C kavramlarını tanımlayacak ve onlarla ilgili bazı ilginç sonuçlar bulacağız.

Tanım 3.3.1 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin I_j S-ideallerinin her artan $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset .....$ zinciri sona eriyorsa, yani, bir $r \geq 1$ tamsayısı için $I_r = I_{r+1} = ...$ oluyorsa, R halkasına Smarandache artan zincir şartını (S-A.C.C) sağlıyor denir. Benzer olarak, eğer R'nin N_j S-ideallerinin her azalan $N_1 \supset N_2 \supset ..... \supset N_k \supset ...$ zinciri sona eriyorsa R'ye Smarandache azalan zincir şartını (S-D.C.C) sağlıyor denir. Benzer olarak, bir halkanın S-sağ idealleri ve S-sol idealleri için Smarandache –A.C.C ve Smarandache D.C.C'yi tanımlayabiliriz.

Tanım 3.3.2 : R bir halka olsun.Eğer, S-sol idealler üzerinde (veya S-idealler üzerinde) S-A.C.C sağlanıyorsa R halkasına bir Smarandache sol Noetherian (veya sadece Smarandache Noetherian) (S-Noetherian) denir.

Tanım 3.3.3 : Eğer, bir R halkasının S-sol idealleri (veya S-idealler) için S-D.C.C şartı sağlanıyorsa R'ye Smarandache sol Artinian (veya sadece Smarandache Artinian) (S-Artinian) denir.

Örnek 3.3.1 : $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,...,5\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_6$ bir S-halkadır fakat hiç S-ideale sahip değildir.

Örnek 3.3.2 : $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını ele alalım. $\mathbb{Z}_{12}$'nin idealleri:

$\{0\}, I_1 = \{0,2,4,6,8,10\}, I_2 = \{0,3,6,9\}, I_3 = \{0,6\}$ ve $I_4 = \{0,4,8\}$'dir.

I_2 bir S-ideal değildir. Fakat, $A = \{0,4,8\}$, I_1'de bir cisim olduğundan I_1 bir S-idealdir.

Böylece, $(0) \subset I_1 \subset \mathbb{Z}_{12}$ olduğundan, halka üzerinde S-A.C.C şartı sağlanır.

Örnek 3.3.3 : $G = \left\langle g \,\middle|\, g^{12} = 1 \right\rangle$ olmak üzere $\mathbb{Z}_2G$ grup halkasını alalım. $\mathbb{Z}_2G$'nin idealleri:

$I_0 = \{0, 1 + g + ... + g^{11}\}$ (Bu ideal bir S-ideal değildir) ve I_2 = $\mathbb{Z}_2G$'nin Augmentation ideali (I_2 bir S-idealdir.Çünkü, karakteristiği 2 olan $\{0, g^8 + g^4\}$ cismini içerir.) Böylece,

$(0) \subset I_2 \subset \mathbb{Z}_2G$' dir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_2G$ S-A.C.C şartını sağlar.

4.BÖLÜM

HALKALARIN BAZI ÖZEL TİPLERİ VE S-HALKALARDAKİ ÖZEL ELEMANLAR

4.1 HALKALARIN BAZI ÖZEL TİPLERİ

Bu bölümde, ilk olarak S-grup halkaları ve S-yarı grup halkalarını tanımlayıp, bunlarla ilgili bazı ilginç sonuçlar elde edeceğiz. Daha sonra, S-halkalardaki; S- nilpotent eleman, S-pseudo komütatif çift gibi birtakım özel elemanları tanımlayarak, bunları örneklerle açıklayacağız.

Teorem 4.1.1(W.B.K) : R bir cisim ve G herhangi bir grup olsun. Bu takdirde, $R\,G$ grup halkası bir S-halkadır.

İspat : R bir cisim ve $R \subset RG$ olduğundan, $R\,G$ bir S-halkadır.

Örnek 4.1.1 : $\mathbb{Z}_5 S_3$ grup halkası açıkça bir S-halkadır.

Fakat , bütün grup halkaları genelde S-halkalar olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.2 : $G = \left\langle g \middle| g^2 = 1 \right\rangle$ ve açıkça $\mathbb{Z}_4 G$ grup halkası bir S-halka değildir.

Teorem 4.1.2 (W.B.K): K bir cisim ve S ,birimli herhangi bir yarıgrup olsun. Bu takdirde, $K\,S$ yarı grup halkası bir S-halkadır.

Fakat, her yarı grup halkası genelde S-halka olmak zorunda değildir.

Tanım 4.1.1 : S herhangi bir yarıgrup olsun. Eğer, S, S'deki işlemlere göre grup olan bir özalt kümeye sahipse S'ye bir Smarandache yarı grubu (S-yarıgrup) denir.

Tanım 4.1.2 : S bir S-yarıgrup olan bir yarı grup ve K'da herhangi bir cisim olsun. Bu takdirde, $K\,S$ yarı grup halkası bir Smarandache yarı grup halkası olarak adlandırılır. Böylece, görüyoruz ki, bir yarı grup halkası bir grup halkasını öz alt küme olarak içeriyorsa, $K\,S$'ye bir Smarandache yarı grup halkası diyoruz. Şunu belirtelim ki, $K\,S$'nin bir Smarandache yarı grup halkası olduğunu söylediğimizde $K\,S$'nin bir S-halka olmasını beklemiyoruz.

Örnek 4.1.3 : $S = \{0, 1, a, b\}$ aşağıdaki tabloyla verilen bir yarı grup olsun :

*	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	1

$\{1, b\}$, S'de bir grup olduğundan, S bir S-yarıgruptur. $\mathbb{Z}_4 S$ yarı grup halkasını düşünelim. Açıkça, $\mathbb{Z}_4 S$, S-halka olmayan bir S-yarı grup halkadır.

Teorem 4.1.3(W.B.K) : Bütün S -yarı grup halkalar genelde S -halkalar değildirler.

İspat : Örnek 4.1.3'ten ispat açıktır.

Tanım 4.1.3 : G bir grup ve K bir S -halka olsun. Bu takdirde, $K\,G$ grup halkası Smarandache grup halkası (S -grup halkası) olarak adlandırılır.

Uyarı : K sadece bir S -halkadır. K bir cisimse $K\,G$ grup halkası daima bir S -halkadır. G herhangi bir grup ise $\mathbb{Z}$ bir S -halka l olmadığından, $\mathbb{Z}G$'nin bir S -grup halkası olmadığını görüyoruz.

Teorem 4.1.4(W.B.K) : K herhangi bir cisim veya birimli herhangi bir komütatif halka olsun. $S\ (n)$ simetrik grup olmak üzere, $K\ S\ (n)$ bir S -yarı grup halkasıdır.

İspat : Herhangi bir n tamsayısı için, n. dereceden simetrik grup olan S_n , $S\ (n)$'in grup olan bir özalt kümesi olduğundan $S\ (n)$ bir S -yarıgruptur. Bu da istenendir.

Teorem 4.1.5(W.B.K) : G herhangi bir grup ve $\mathbb{Z}_n$, bir $m \in \mathbb{Z}_n$ için, $m^2 \equiv m \pmod{n}$ ve $m + m \equiv 0 \pmod{n}$ olacak şekilde bir halkaysa, $\mathbb{Z}_n G$ bir S -grup halkasıdır.

İspat : Bir $m \in \mathbb{Z}_n$ için, $m^2 \equiv m \pmod{n}$ ve $m + m \equiv 0 \pmod{n}$ iken $A = \{0, m\}$, $\mathbb{Z}_n$'nin bir alt cismi olduğundan, $\mathbb{Z}_n$ bir S -halka olur. Böylece, $\mathbb{Z}_n G$ bir S -grup halkası olur. Bu da istenendir.

Teorem 4.1.6(W.B.K) : $M_{nxn} = \left\{ (a_{ij}) \middle| a_{ij} \in F, F \text{ bir cisim veya bir } S-\text{halkadır} \right\}$ bir S -halkadır.

İspat : $A = \left\{ (a_{ij}) \middle| \begin{array}{l} \text{eğer}, F \text{ bir cisimse } a_{11} \neq 0 \text{ ve bütün } a_{ij} \in F \text{ sıfırdır veya} \\ B \subset F, F\text{'in bir altcismiyken } F \text{ bir } S-\text{halka ise } a_{ij} \in B \end{array} \right\} \cup \{(0)\}$ olsun.

($\{(0)\}$, nxn'lik sıfır matrisini belirtsin) kolayca gösterilebilir ki, A, M_{nxn}' de bir alt cisimdir. Bunun için M_{nxn} bir S -halkadır.

Örnek 4.1.4 : $M_{2x2} = \left\{ (a_{ij}) \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ açıkça bir S -halkadır.

4.2 S-HALKALARDAKİ ÖZEL ELEMANLAR

Bu bölümde, Smarandache nilpotent elemanlar, Smarandache yarı idenpotent, Smarandache pseudo komütatif çift, Smarandache pseudo komütatif halka, Smarandache kuvvetli düzgün halkalar, Smarandache quasi komütatif halka gibi kavramlar ele alınacaktır.

Tanım 4.2.1 : R bir halka olsun. $0 \neq x \in R$ bir nilpotent eleman olsun. Eğer, $x^n = 0$ ve herhangi bir $m > 1$ tamsayısı için $y^m \neq 0$ ve $x^r y = 0$ veya $yx^s = 0$ $(r, s > 0)$ olacak şekilde bir $y \in R \setminus \{0, x\}$ varsa x'e bir Smarandache nilpotent eleman (S-nilpotent eleman) denir.

Örnek 4.2.1 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,....,11\}$ halkasını alalım. Açıkça, $6^2 \equiv 0(\bmod 12)$ ve $6.8 \equiv 0(\bmod 12)$'dir. Fakat herhangi bir m>0 için $8^3 \equiv 8(\bmod 12)$ olduğundan $8^m \neq 0$ (mod12)'dir. Bunun için 6 $\mathbb{Z}_{12}$'nin bir S-nilpotent elemanıdır.

Örnek 4.2.2 : $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,...,7\}$ halkasını ele alalım. $2^3 \equiv 0(\bmod 8)$, $4^2 \equiv 0(\bmod 8)$ ve $6^3 \equiv 0(\bmod 8)$'dir. Bunlar nilpotenttirler fakat hiçbiri S-nilpotent değildir.

Teorem 4.2.1(W.B.K) : R bir halka olsun. R'nin her S-nilpotent elemanı R'nin bir nilpotent elemanıdır. Fakat, genelde R'nin her nilpotent elemanı R'nin bir S-nilpotent elemanı olmak zorunda değildir.

İspat : S-nilpotent elemanın tanımından görüyoruz ki her S-nilpotent eleman R'nin bir nilpotent elemanıdır. Tersinin her zaman doğru olmadığı örnek 4.2.2'den açıktır.

Tanım 4.2.2 : Bir R halkasının bir $\alpha \neq 0$ elemanı bir yarı idenpotent olarak adlandırılır ancak ve ancak α, R'nin, $\alpha^2 - \alpha$ tarafından üretilen iki taraflı herhangi bir öz idealine ait değilse, yani $\alpha \notin R(\alpha^2 - \alpha)R$ veya $R = R(\alpha^2 - \alpha)R$ dır. Ayrıca, 0, yarı idenpotentlerle birlikte sayılabilir.

Tanım 4.2.3 : R bir halka ve $\alpha \in R \setminus \{0\}$ olsun. Eğer, $\alpha^2 - \alpha$ tarafından üretilen ideal yani $R(\alpha^2 - \alpha)R$ bir S-ideal I ve $\alpha \notin R(\alpha^2 - \alpha)R$ veya $R = R(\alpha^2 - \alpha)R$ ise α'ya bir Smarandache yarı idenpotent I(S-yarıidenpotent I) eleman denilir. Eğer, $\alpha^2 - \alpha$ tarafından üretilen ideal yani, $R(\alpha^2 - \alpha)R$ bir S-ideal II ve $\alpha \notin R(\alpha^2 - \alpha)R$ veya $R = R(\alpha^2 - \alpha)R$ ise α'ya bir Smarandache yarı idenpotent II (S-yarı idenpotent II) eleman denir.

Teorem 4.2.2(W.B.K) : Bir R halkasının her yarı idenpotenti genelde R'nin bir S-yarı idenpotenti olmak zorunda değildir.

İspat : $\mathbb{Z}_{24}$ yarı halkasını alalım. $4 \in \mathbb{Z}_{24}$ bir yarı idenpotenttir. Çünkü, $\alpha = 4^2 - 4$, $I = \{0,12\}$ idealini üretir. Açıkça, I bir S-ideal değildir ve 4 bir S-yarı idenpotent değildir fakat 4 sadece bir yarı idenpotenttir. Bunun için, her yarı idenpotent bir S-yarı idenpotent olmayabilir.

Teorem 4.2.3(W.B.K) : R bir halka olsun. Bu takdirde, her S-yarı idenpotent I, R'nin bir yarı idenpotentidir.

İspat : Biliyoruz ki, eğer, $\alpha \in R \setminus \{0\}$ bir S-yarı idenpotentse; $R(\alpha^2-\alpha)R$, R'nin bir S- ideal I'i iken, $\alpha \notin R(\alpha^2-\alpha)R$ veya $R = R(\alpha^2-\alpha)R$'dir. Fakat, bütün S-idealler idealdirler. Bu da istenendir.

Örnek 4.2.3 : $4 \in \mathbb{Z}_{24} = \{0,1,......,23\}$ halkasını alalım. $5 \in \mathbb{Z}_{24}$,$\mathbb{Z}_{24}$'ün bir S-yarı idenpotent I'dir. $\alpha^2 - \alpha = 5^2 - 5 = 20$ 'dir. $\langle \alpha^2 - \alpha \rangle = \langle 20 \rangle = \{0,20,16,12,4,8\} = I$'dır.

Açıkça, $\{0,8,16\} = J \subset I$ karakteristiği 3 olan asal cisme izomorfik olan bir cisimdir. $16^2 \equiv 16 (\mathrm{mod}\, 24)$ birim gibi davranır. $5 \notin I$'dır ve böylece 5, $\mathbb{Z}_{24}$'ün bir S-yarı idenpotent I'dir.

Tanım 4.2.4 : R komütatif olmayan bir halka olsun. $x, y \in R, xy = yx, x \neq y$ ve x ile y halkanın biriminden farklı olsun. Eğer, her $a \in R$ için, $xay = yax$ ise x, y çiftine, R' nin bir pseudo komütatif çifti denir. Eğer, bir R halkasında, her komütatif çift R'nin bir pseudo komütatif çifti oluyorsa R'ye bir pseudo komütatif halka denir. Açıkça, her komütatif halka aşikâr olarak pseudo komütatiftir.

Tanım 4.2.5 : R bir halka ve A, R'nin bir S-alt halkası olsun. $x, y \in A$ elemanlarının $xy = yx$ olacak şekildeki bir çiftine , eğer , her $a \in A$ için $xay = yax$ şartı sağlanıyorsa, bir Smarandache pseudo komütatif çift (S-pseudo komütatif çift) denir. Eğer, bir A, S-althalkasında, her komütatif çift A' nın bir S-pseudo komütatif çifti oluyorsa, A'ya bir Smarandache pseudo komütatif halka (S-pseudo komütatif halka) denir.

Teorem 4.2.4(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-pseudo komütatif halka ise bu takdirde, R bir S-halkadır.

Tanım 4.2.6 : R, komütatif olmayan bir halka olsun. $x, y \in R, x \neq y$ ve $xy = yx$ olsun. Eğer, her $s \in B$ için $xsy = ysx$ oluyorsa, x, y eleman çiftine R'nin bir B S-alt halkasına göre Smarandache pseudo komütatif çift (S-pseudo komütatif çift) denir.

Teorem 4.2.5(W.B.K) : R S-pseudo komütatif olan bir komütatif çifte sahip bir halka olsun. Bu takdirde R bir S-halkadır.

İspat : S-pseudo komütatif çiftin tanımından, R halkasının bir S-halka olması gerektiği görülür.

Teorem 4.2.6 (W.B.K) : $\mathbb{Z}_p S_n$, S_n grubunun $\mathbb{Z}_p$ asal cismi üzerindeki grup halkası olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_p S_n$ S -pseudo komütatif halkadır.

İspat : $\mathbb{Z}_p S_n$ bir S -halkadır. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 12.......n \\ 12.......n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234......n \\ 2314......n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234.......n \\ 3124.......n \end{pmatrix} \right\}$, S_n'nin bir alt grubu olduğundan, $A = \mathbb{Z}_p B$, $\mathbb{Z}_p S_n$'in bir S -alt halkasıdır. $x = \begin{pmatrix} 1234.....n \\ 2314.....n \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 1234.....n \\ 3124.....n \end{pmatrix}$ alırsak, görürüz ki, her $a \in \mathbb{Z}_p B = A$ için $xay = yax$ ve $xy = yx$'dir. Bu da istenendir.

Teorem 4.2.7(W.B.K) : Bir S -pseudo komütatif halka genel olarak bir pseudo komütatif halka olmak zorunda değildir.

İspat : Tereom 4.2.6'da kullanılan $\mathbb{Z}_p S_n$ grup halkası bir S -pseudo komütatif halkadır fakat açıkça bir pseudo komütatif halka değildir. Bu da istenendir.

Teorem 4.2.8(W.B.K) : R bir halka olsun. $Z(R)$, R'nin merkezini belirtmek üzere, $Z(R)$, R'nin aşikâr olmayan bir S -alt halkasıdır. Bu takdirde, R bir S -pseudo komütatif halkadır.

İspat : S -pseudo komütatif halkanın tanımından, R'nin teorem 4.2.6 'daki şartları sağladığını görüyoruz. Bunun için, R bir S -pseudo komütatif halkadır.

Tanım 4.2.7 : R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için, eğer $(xy)^n = xy$ olacak şekilde bir $n = n(xy) > 1$ tamsayısı varsa R'ye bir kuvvetli düzgün halka denir.

Tanım 4.2.8 : R bir halka olsun. Eğer, R, her $x, y \in B$ için $n = n(xy) > 1$ olacak şekilde bir tamsayıyken $(xy)^n = xy$ olacak şekilde bir B S-alt halkası içeriyorsa, R'ye bir Smarandache kuvvetli düzgün halka (S -kuvvetli düzgün halka) denir.

Teorem 4.2.9(W.B.K) : R kuvvetli düzgün bir halka olsun. Bu takdirde, R aşikâr olmayan S -alt halkaya sahip olan bir S -kuvvetli düzgün halkadır.

İspat : Kuvvetli düzgün halka ve S -kuvvetli düzgün halkanın tanımından ispat açıktır.

Teorem 4.2.10(W.B.K) : $\mathbb{Z}_p$ asal cisim ve S birimli sıralı bir yarı grup olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_p S$ yarı grup halkası bir S -kuvvetli düzgün halkadır fakat kuvvetli düzgün halka değildir.

İspat : $\mathbb{Z}_p S$ yarı grup halkasıdır. $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p S$'in bir S-alt halkasıdır. Açıkça, $\mathbb{Z}_p S$ bir S-kuvvetli düzgün halkadır.

Şimdi $\mathbb{Z}_p S$'in bir kuvvetli düzgün halka olmadığını gösterelim.

$\alpha_i \neq 0, \beta_j \neq 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, $\alpha = \sum \alpha_i S_i$ ve $\beta = \sum \beta_j h_j$ olmak üzere, $\alpha, \beta \in RS$ olsun. $s_1, ..., s_n$ ve $h_1, ..., h_m$'in farklı olduğu ve $s_1 < s_2 < ..... < s_n$ ve $h_1 < h_2 < ..... < h_m$ olduğu kabul ediliyor. S'nin bir sıralı yarı grup olduğu verilmişti. Bunun için, $(\alpha\beta)^p$'de, $(s_1 h_1)^p$ en küçük ve $(s_n h_m)^p$ en büyük elemana sahibiz. Böylece, $(\alpha\beta)^p \neq \alpha\beta$'dır. Bu yüzden, bu yarı grup halkası kuvvetli düzgün bir halka değildir sadece bir S-kuvvetli düzgün halkadır.

Tanım 4.2.9 : R bir halka olsun. $\gamma > 1$ ve her $a, b \in R$ çifti için $ab = b^\gamma a$ oluyorsa R'ye bir quasi komütatif halka denir.

Teorem 4.2.11 (W.B.K) : R bir quasi komütatif halka olsun. Bu takdirde, her $a, b \in R$ çifti için bir $s \in R$ vardır öyle ki $a^2 b = bs^2$'dir.

İspat : R bir quasi komütatif halka olduğundan, $\gamma \geq 1$ ve her $a, b \in R$ çifti için $ab = b^\gamma a$'dır.

$a^2 b = ab^\gamma a = ab\left(b^{\gamma-1} a\right) = b^\gamma a b^{\gamma-1} a = b\left(b^{\gamma-1} a\right)^2 = bs^2$'dir .

Teorem 4.2.12 (W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, $a, b \in R$ elemanlarının bir çifti için $a^2 b = bs^2$ olacak şekilde bir $s \in R$ varsa, bu takdirde bir $\gamma > 1$ için $ab = b^\gamma a$ olmak zorunda değildir.

İspat: Karakteristiği 2 olan $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ asal cismini ve

$S_3 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\}$ simetrik grubunu alalım. $\mathbb{Z}_2 S_3$, S_3 grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki grup halkası olsun. γ çift bir sayıyken, $P_1 P_2 = P_2^\gamma P_1$ olması imkansızdır. Eğer, γ tekse $P_1 P_2 = P_5 \neq e P_1 = P_1$ ve bu takdirde, $P_2^\gamma = P_2$ olur ve böylece $P_2 P_1 = P_4$ ve $P_4 \neq P_5$'tir. Bunun için, $\mathbb{Z}_2 S_3$ quasi komütatif değildir.

Tanım 4.2.10 : R bir halka olsun. R'nin herhangi bir A S-alt halkası için, $\gamma \geq 1$ ve her $a, b \in A$ için $ab = b^\gamma a$ oluyorsa R'ye bir Smarandache quasi komütatif halka (S-quasi komütatif halka) denir.

Teorem 4.2.13 (W.B.K) : Eğer R bir S -quasi komütatif halka ise R bir S -halkadır.

İspat : S -quasi komütatif halkanın tanımından açıktır.

Teorem 4.2.14 (W.B.K) : Her S -halka genelde bir S -quasi komütatif halka değildir.

İspat : $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,...,5\}$ bir S -halkadır. Fakat, hiçbir S -alt halkaya sahip değildir. Dolayısıyla, S -quasi komütatif halka değildir.

Teorem 4.2.15 (W.B.K) : G bir torsion serbest komütatif olmayan grup ve R , quasi komütatif olan herhangi bir S -halka olsun. Bu takdirde, $R\ G$ grup halkası S -quasi komütatiftir.

İspat : R quasi komütatif olan bir S -halka olduğundan R , S -quasi komütatiftir. $R \subset RG$'dir ve böylece R quasi komütatif olan bir S -alt halkadır.Dolayısıyla, $R\ G$ bir S -quasi komütatif halkadır.

Tanım 4.2.11 : Bir R halkasının bir x elemanı , eğer, $x^n - x$, R'nin bir nilpotent elemanı ise yarı nilpotent olarak adlandırılır. Eğer $x^n - x = 0$ ise $x \in R$'ye bir aşikâr yarı nilpotent denir.

Teorem 4.2.17 (W.B.K) : Eğer, x , bir R halkasının bir nilpotent elemanı ise bu takdirde, x , R'nin bir yarı nilpotent elemanıdır.

İspat : $x \in R$ nilpotent olsun. Böylece, $x^n = 0$'dır ve açıkça $x^n - x = -x$ olur. Böylece, $(-x)^n = 0$ olur. Bu da istenendir.

Teorem 4.2.18 (W.B.K) : R bir halka olsun. R'deki bir birimsel eleman aynı zamanda bir yarı nilpotent eleman olabilir.

İspat : $\mathbb{Z}_2G, G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ grubunun $\mathbb{Z}_2G, G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ cismi üzerindeki grup halkası olsun. Açıkça, $g \in \mathbb{Z}_2G$ ve $g^2 = 1$'dir. Böylece g bir birimsel elemandır. Fakat, $g^2 - g = 1 + g$ ve $(1+g)^2 = 0$ olduğundan, $1+g$ bir nilpotenttir. Bu da istenendir.

Teorem 4.2.19 (W.B.K) : R bir halka olsun. Bu takdirde, R'deki her idenpotent bir yarı nilpotenttir.

Teorem 4.2.20 (W.B.K) : K , karakteristiği sıfır olan bir cisim ve G , bir torsion serbest komütatif grup olsun. Bu takdirde, $K\ G$ grup halkası aşikâr olmayan hiçbir yarı nilpotente sahip değildir.

İspat : $K\ G$ bir tamlık bölgesi olduğundan, $K\ G$ hiçbir sıfır bölene sahip değildir. Böylece, $K\ G$ yarı nilpotentlere sahip olamaz.

Tanım 4.2.12 : R bir halka olsun. Bir $x \in R$ için $x^n - x$ bir S -nilpotent ise x'e bir Smarandache yarı nilpotent (S -yarı nilpotent) eleman denir.

BÖLÜM 5

SMARANDACHE HALKALARIYLA İLGİLİ ÖZEL ÖZELLİKLER

5.1 SMARANDACHE HALKALARIYLA İLGİLİ ÖZEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde, Smarandache halkalarıyla ilgili hiçbir kitapta bulunmayan özel özelliklere gireceğiz. Bu bölümdeki esas amacımız, halkalar üzerinde birçok yeni Smarandache kavramını tanımlamak ve bu kavramları örneklerle açıklamaktır.

Tanım 5.1.1 : Eğer bir R halkası sıfırdan farklı hiçbir nilpotent elemana sahip değilse bu R halkasına indirgenmiştir denir.

Örnek 5.1.1 : $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir indirgenmiş halkadır.

Örnek 5.1.2 : p bir asal sayı olmak üzere, katsayıları $\mathbb{Z}_p$ 'den alınan $\mathbb{Z}_p[x]$ polinom halkası bir indirgenmiş halkadır.

Örnek 5.1.3 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,...,11\}$ halkası indirgenmiş halka değildir.Çünkü, $6^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 'dır.

Tanım 5.1.2 : R bir halka olsun. Eğer R hiçbir S -nilpotent elemana sahip değilse, R 'ye bir Smarandache indirgenmiş halka (S -indirgenmiş halka) denir.

Örnek 5.1.4 : $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ halkası hiçbir S -nilpotent elemana sahip olmadığından bir S -indirgenmiş halkadır.

Örnek 5.1.5 : $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,....,8\}$ halkası, $3^2 \equiv 0 \pmod 9$ ve $6^2 \equiv 0 \pmod 9$ olan nilpotent elemanlara sahip olup S -nilpotent elemana sahip olmadığından bir S -indirgenmiş halkadır.

Teorem 5.1.1(W.B.K) : Eğer R bir indirgenmiş halkaysa R bir S -indirgenmiş halkadır. Fakat, eğer R bir S -indirgenmiş halkaysa R bir indirgenmiş halka olmak zorunda değildir.

İspat : Eğer R bir indirgenmiş halkaysa R hiçbir nilpotente sahip değildir. Böylece R, S -nilpotente sahip olamaz. Dolayısıyla, R bir S -indirgenmiş halkadır. Tersine, eğer, R bir S -indirgenmiş halkaysa R bir indirgenmiş halka olmak zorunda değildir. $\mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_9$ halkaları için, ikiside S -indirgenmiş halkalardır fakat indirgenmiş halakalar değildirler.

Tanım 5.1.3 : R bir halka olsun. Eğer her $x \in R$ için $x^2 = 0$ ise R halkasına bir sıfır kare halka denir.

Tanım 5.1.4 : R bir halka olsun. Eğer, R, bir A S -alt halkasına sahip ve A 'da bir sıfır kare halka olan bir B alt halkasına sahipse, R 'ye bir Smarandache sıfır kare halka (S -sıfır kare halka) denir.

Örnek 5.1.6 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,...,11\}$ halkasını alalım. $A = \{0,4,8\}, I = \{0,2,4,6,8,10\}$'nin cisim olan bir öz alt kümesi olduğundan, $I = \{0,2,4,6,8,10\}$ S-alt halka olan bir alt halkadır. $P = \{0,6\}$, I'da bir sıfır kare alt halkadır. Böylece, $\mathbb{Z}_{12}$ bir sıfır kare halka değildir. Fakat, bir S-sıfır kare halkadır.

Teorem 5.1.2(W.B.K) : Bir sıfır kare halka asla bir S-sıfır kare halka olamaz.

İspat : R bir sıfır kare halka olsun. Yani, her $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Böylece, eğer, R, A gibi bir S-alt halkaya sahipse, bu takdirde A cisim olan bir alt kümeye sahip olmak zorundadır. Fakat, A'da asla her $a \in A$ için $a^2 = 0$ olamaz. Bu da istenendir.

Teorem 5.1.3(W.B.K) : Bir S-sıfır kare halka asla bir sıfır kare halka olamaz.

İspat : Eğer, R bir S-sıfır kare halka ise bu takdirde cisim olan bir özalt kümeye sahiptir ve bir cisimde her $a \in R$ için $a^2 = 0$ olamaz. Örnek 2.10.6'dan, $\mathbb{Z}_{12}$ bir S-sıfır kare halkadır. Fakat, $\mathbb{Z}_{12}$ bir sıfır kare halka değildir. Çünkü, $\mathbb{Z}_{12}$'de karesi sıfırdan farklı birçok elemana sahibiz.

Örnek 5.1.7 : $\mathbb{Z}_{12}$ bir halka ve G herhangi bir grup olmak üzere G'nin $\mathbb{Z}_{12}$ üzerindeki $\mathbb{Z}_{12}G$ grup halkasını alalım. Bu durumda, $\mathbb{Z}_{12}G$ bir S-sıfır kare halkadır.

Teorem 5.1.4(W.B.K) : R, karakteristiği sıfır olan bir S-komütatif halka olsun. A, R'nin B S-alt halkasının bir alt halkası olmak üzere, eğer, R bir S-sıfır kare halka ise bu takdirde her $x, y \in A$ için, R'de $xy = 0$'dır.

İspat : A, R'nin B S-alt halkasının bir alt halkası ve R bir S-sıfır kare olsun. Yani, her $x \in A$ için $x^2 = 0$ ve $A \subset R$ olsun. $x, y \in A$ olsun. $(x+y)^2 = 0$'dır. Yani, $2xy = 0$'dır.Böylece, $xy = 0$ olur. Bu da istenendir.

Teorem 5.1.5(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-komütatif halka değil ve R'nin bir B S-alt halkasının A alt halkasıda komütatif olmamak üzere R bir S-sıfır kare halka ise bu takdirde, A'daki her çift anti-komütatiftir.

İspat : R bir S-sıfır halka olsun. Yani , R bir B S-alt halkasına sahip olsun öyleki $A \subset B$ ve A, B'nin bir sıfır kare halka olan bir alt halkası olsun. Eğer, A komütatif değil fakat bir sıfır kare halkaysa her $x \in A$ için $x^2 = 0$ 'dır. Böylece, $(x+y)^2 = 0$'dır. Ve $x^2 = y^2 = 0$ olduğundan, $xy + yx = 0$'dır. O halde, A'daki elemanlar anti-komütatiftir.

Teorem 5.1.6(W.B.K) : R karakteristiği sıfır olan birimli bir komütatif halka ve G bir komütatif grup (veya S birimli komütatif bir yarı grup) olsun. Bu takdirde, $R\ G$ ($R\ S$) bir S-sıfır kare halkadır. ancak ve ancak A, $R\ G$'nin bir B S-alt halkasının bir alt halkası olmak üzere $A^2 = 0$ 'dır. (yani, $A \subset B \subset RG(RS)$ 'dir.

İSPAT : Teorem 5.1.4'ten, her $x, y \in A$ için $xy = 0$'dır. Bunun için, $A^2 = 0$'dır. Tersine, eğer $A^2 = 0$ ve A, $R\ G$ 'nin bir B S-alt halkasının bir alt hakasıysa, $R\ G$ bir S-sıfır kare halkadır.

Tanım 5.1.5 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her özalt halkası bir sıfır kare halka ise R'ye bir iç sıfır kare halka denir.

Örnek 5.1.8 : $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ bir iç sıfır kare halkadır. Çünkü, $\mathbb{Z}_4$'ün tek alt halkası $\{0,2\}$ 'dir ve $\{0,2\}$ bir sıfır kare halkadır.

Tanım 5.1.6 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her A S-alt halkası , $B \subset A$ olacak şekilde bir iç sıfır kare halka olan bir B alt halkasına sahipse R'ye bir Smarandache iç kare halka (S-iç kare halka) denir.

Örnek 5.1.9 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,....,11\}$ bir S-iç sıfır kare halkadır. Çünkü, $A_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$, $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin bir S-alt halkası olup, bir iç sıfır kare halka olan $B = \{0,6\}$'yı içerir. Açıkça, $\mathbb{Z}_{12}$ bir iç sıfır kare halka değildir, fakat bir S-iç kare halkadır.

Teorem 5.1.7(W.B.K) : R bir iç sıfır kare halka olsun. Bu takdirde, R genelde bir S-iç sıfır kare halka olmak zorunda değildir. Üstelik, eğer R bir S-iç sıfır kare halkaysa R bir iç sıfır kare halka değildir.

İspat : Yukarıdaki örnekten, R bir iç sıfır kare halkaysa R bir S-iç sıfır kare halka olamaz. Çünkü, R, $A \subset R$ olacak şekilde bir A S-alt halkasına sahip olmalıdır. Bu takdirde, A, cisim olan bir özalt kümeye sahiptir. Böylece, eğer R bir S-iç sıfır kare halka ise asla bir iç sıfır kare halka değildir.

Tanım 5.1.7 : R bir halka olsun. Eğer, R, A'nın bir B alt halkası bir sıfır kare halka olacak şekilde en az bir A S-alt halkasına sahipse R'ye bir Smarandache zayıf iç sıfır kare halka (S-zayıf iç sıfır kare halka) denir.

Teorem 5.1.8(W.B.K) : R bir S-iç sıfır kare halka olsun. Bu takdirde, R bir S-zayıf iç sıfır kare halkadır.

Teorem 5.1.9(W.B.K) : G herhangi bir grup ve R bir S-iç sıfır kare halka olsun. Bu takdirde, $R\ G$ grup halkası bir S-zayıf iç sıfır kare halkadır.

İspat : $R \subset RG$ olduğundan, R bir S-iç sıfır kare halkadır. Böylece, $R\ G$ bir S-zayıf iç sıfır kare halkadır.

Örnek 5.1.10 : G bir torsion serbest komütatif grup ve R bir S -iç sıfır kare halka olsun. Bu takdirde, $R\ G$ grup halkası sadece bir S -zayıf iç sıfır kare halkadır.

Tanım 5.1.8 : S , sıfıra sahip çarpımsal bir yarı grup olsun. Eğer, P , S 'nin yarı grubu olan bir özalt kümesi ise ve P 'de :

1. her $p \in P$ için $p^2 = 0$ ve
2. her $p_i, p_j \in P$ için $p_i p_j = p_j p_i = 0$ şartları sağlanıyorsa S 'ye bir Smarandache null yarı grubu (S -null yarı grubu) denir.

Örnek 5.1.11 : $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ çarpımsal yarı grubunu alalım. $\mathbb{Z}_4$ bir S -null yarı grubudur. Çünkü, $P = \{0,2\}$ ve $2^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$'tür.

Örnek 5.1.12 : $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,...,5\}$ çarpımsal yarı grubu bir S -null yarı grubu değildir.

Örnek 5.1.13 : $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,...,7\}$ çarpımsal yarı grubunu alalım. $P = \{0,4\}$ alırsak, $4^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$ olduğundan, $\mathbb{Z}_8$ bir S -null yarı gruptur.

Tanım 5.1.9 : R bir halka, A R'nin bir S -alt halkası ve P A'nın bir alt halkası olsun.Bu takdirde, eğer P 'de :

1. Her $p \in P$ için $p^2 = 0$ ve
2. Her $p_i p_j \in P$ için $p_i p_j = p_j p_i = 0$ şartları sağlanıyorsa R 'ye bir Smarandache null halka (S -null halka) denir.

Teorem 5.1.10(W.B.K) : R , karakteristiği 0 olan bir komütatif halka olsun. Bu takdirde, R bir S -sıfır kare halkadır ancak ve ancak R bir S -null halkadır.

Ayrıca şunu belirtmemiz önemlidir ki, eğer, R bir komütatif olmayan halka ise yukarıdaki sonuç genel olarak doğru olmayabilir.

Örnek 5.1.14 : $\mathbb{Z}_{24} = \{0,1,....,23\}$ halkasını alalım. Açıkça, $A = \{0,2,4,...,22\}$, $\mathbb{Z}_{24}$'ün bir S -alt halkasıdır. $B = \{0,12\}$, A 'da bir null halka olduğundan, $\mathbb{Z}_{24}$ bir S -null halkadır.

Teorem 5.1.11(W.B.K) : $R\ S$ yarı grup halkasının bir S -sıfır kare halka olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç şarttan birinin sağlanmasıdır :

1. R bir S -null halka ve S herhangi bir yarıgruptur.
2. R karakteristiği sıfır olan herhangi bir S -sıfır kare komütatif halka ve S herhangi bir komütatif yarı gruptur.

3. R herhangi bir halka ve S bir S-null yarıgruptur.

Tanım 5.1.10 : R bir halka olsun. Eğer her $x \in R$ için $x^p = x$ ve $px = 0$ ise R'ye bir p-halka denir.

Tanım 5.1.11 : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-halkaysa ve R'nin bir P alt halkası her $x \in P$ için $x^p = x$ ve $px = 0$ şartlarını sağlıyorsa R' ye bir Smarandache p-halka (S - p-halka) denir.

Teorem 5.1.12(W.B.K) : p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ halkasını ve mertebesi p-1 olan G devirli grubunu alalım. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_p G$ grup halkası bir S - p-halkadır.

İspat : Açıkça, $\mathbb{Z}_p G$ bir S-halkadır. Çünkü, $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p G$ ve $\mathbb{Z}_p$'de $x^p = x$ ve $px = 0$'dır. Böylece, $\mathbb{Z}_p G$ grup halkası bir S - p-halkadır.

Teorem 5.1.13(W.B.K) : R bir S - p-halkaysa R bir p-halka olmak zorunda değildir.

İspat: G herhangi bir grup ve $R = \mathbb{Z}_{12} = \{0,1,...,11\}$ halkası olsun. $A = \{0,4,8\} \subset \{0,2,4,...,10\} \subset \mathbb{Z}_{12} G$ olup, $\mathbb{Z}_{12} G$ bir p-halka olmayan bir S - p-halkadır.

Teorem 5.1.14(W.B.K) : R bir S-halka ve G herhangi bir torsion serbest grup olsun. Bu takdirde, eğer R bir S - p-halkaysa $R\,G$ grup halkası bir S - p-halkadır.

İspat : R, S - p-halka olan bir S-halka olduğundan, görüyoruz ki, A, R'nin bir alt halkasıdır öyleki her $x \in A$ için $x^p = x$ ve $px = 0$'dır. $A \subset R \subset RG$ ve böylece $R\,G$ bir S - p-halkadır. Bu yüzden, $R\,G$ grup halkasının bir p-halka olmadığını fakat bir S - p-halka olduğunu görüyoruz.

Teorem 2.10.15(W.B.K) : P herhangi bir yarıgrup ve R, S - p-halka olan bir S-halka olsun. Bu takdirde, $R\,P$ yarıgrup halkası bir S - p-halka olması için gerek ve yeter şart P'nin birime sahip olmasıdır.

İspat : $A \subset R$, R'nin bir S-alt halkası ve R bir S - p-halka olsun. Her $x \in A$ için A'da, $x^p = x$ ve $px = 0$' dır. Eğer, $1 \in P$ ise $A \subset R$ ve $1 \subset RP$'dir. Böylece, $R\,P$ bir S - p-halkadır. Eğer, $1 \notin P$ ise bu takdirde R bir S - p - halka olsa bile genelde $R\,P$ bir S - p-halka değildir. Böylece herhangi bir P yarıgrubu için $R\,P$ bir S - p-halkadır ancak ve ancak $1 \in P$'dir.

Tanım 5.1.12 : n bir pozitif tamsayı ve R bir halka olsun. Eğer, her $x\in R$ için $x^{2n}=x$ ve $2x=0$ ise R'ye bir E-halka denir.Bu şekildeki en küçük n tamsayısına E-halkanın derecesi denir. Ayrıca şunu belirtmek ilginçtir ki, derecesi 1 olan bir E-halka bir Boolean halkasıdır.

Tanım 2.10.13 : R bir halka, A, R'nin bir S-alt halkası ve P, A'nın bir alt halkası olsun. Eğer, her $x\in P$ için $x^{2n}=x$ ve $2x=0$ ise R'ye bir Smarandache E-halka (S-E-halka) denir.

Teorem 5.1.16(W.B.K) : Eğer, R bir S-E-halka ise R bir S-halkadır.

İspat : S-E-halkanın tanımından ispat açıktır.

Teorem 5.1.17(W.B.K) : R bir E-halka olsun. Eğer, R bir S-alt halkaya sahipse R bir S-E-halkadır.

İspat : E-halka ve S-E-halka tanımından ispat açıktır.

Örnek 5.1.15 : S_3 grubunun $\mathbb{Z}_2$ halkası üzerindeki $\mathbb{Z}_2S_3$ grup halkasını düşünelim. $P=\{0, p_1+p_2+p_3, 1+p_4+p_5, 1+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5\}$ $\mathbb{Z}_2S_3$'ün, bir S-alt halkasıdır. P, E-halka olan bir alt halka olduğundan $\mathbb{Z}_2S_3$ bir S-E-halkadır. Fakat, $\mathbb{Z}_2S_3$ bir E-halka değildir. Çünkü, $\mathbb{Z}_2S_3$'te, $(1+p_1)^2=0$'dir.

Teorem 5.1.18(W.B.K) : R bir S-E-halka ise R genelde bir E-halka değildir.

İspat : Örnek 5.1.12'den ispat açıktır.

Tanım 5.1.14 : R bir halka olsun. Eğer her $a,b\in R$ çifti ve bir n pozitif tamsayısı için $a^nb=ab^n$ oluyorsa, R'ye bir pre J-halka denir.

Tanım 5.1.15 : R bir halka A, R'nin bir S-alt halkası ve P, A'nın bir alt halkası olsun. Eğer, bir pozitif $n>1$ tamsayısı ve her $a,b\in P$ çifti için $a^nb=ab^n$ şartı sağlanıyorsa R'ye bir Smarandache pre J-halka (S-pre J-halka) denir.

Örnek 5.1.16 : $\mathbb{Z}_{12}=\{0,1,...,11\}$ halkasını alalım. $S=\{0,2,4,6,8,10\}$ bir S-alt halkadır. S bir pre J-halkadır. Böylece, $\mathbb{Z}_{12}$ bir S-pre J-halkadır.

Örnek 5.1.17 : $G=S_3$ grubunun $\mathbb{Z}_{12}$ üzerindeki grup halkası $\mathbb{Z}_{12}G$ olsun. $\mathbb{Z}_{12}G$ bir S-pre J-halkadır.

Teorem 5.1.19(W.B.K) : G herhangi bir grup ve R bir S-pre J-halka olsun. Bu takdirde, $R\,G$ grup halkası bir S-pre J-halkadır.

İspat : R bir S-pre J-halka olduğundan bir $S\subset R$ vardır öyleki S bir S-alt halkadır ve S, bir pre J -halka olan bir alt halkaya sahiptir. Böylece, $S.1 \subset R.1 \subset RG$ 'dir. Bunun için, herhangi bir G grubu için $R\ G$ bir S -pre J -halkadır. Şunu belirtelim ki, $R\ G$ genelde bir pre J -halka değildir.

Teorem 5.1.20(W.B.K) : R bir S -pre J -halka ve P birimli herhangi bir yarıgrup olsun. Bu takdirde, $R\ P$ yarı grup halkası bir S -pre J -halkadır.

İspat : Eğer $S \subset R$ ve S bir S -alt halka öyleki S , bir preJ-halka olan bir P alt halkasına sahipse bu takdirde $S \subset R \subset RP$ 'dir. Böylece, $R\ P$ bir S -pre J -halkadır.

Tanım 5.1.16 : R bir halka olsun. R 'nin bir Smarandache yarı asal halka (S -yarı asal halka) olması için gerek ve yeter şart R 'nin sıfır kareli sıfırdan farklı hiçbir S -ideal I(II)' e sahip olmamasıdır.

Teorem 5.1.21(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R bir S -ideal I'e sahipse R bir S -yarı asal halkadır.

İspat : R , A gibi bir S -ideal I'e sahipse A cisim olan bir özalt kümeye sahiptir ve $A^2 = (0)$ imkansızdır. Bu da istenendir.

Teorem 5.1.22(W.B.K) : Bütün basit S -halka I olmayan halkalar S -yarı asaldır.

Tanım 5.1.17 : Eğer, R 'nin her düzgün ideali R 'nin bir düzgün elemanı tarafından üretiliyorsa ve R birimli, komütatif bir halkaysa R ' ye bir Marot halka denir. (bir düzgün eleman sıfır bölen olmayan bir elemandır ve bir düzgün ideal ise elemanları sıfır bölen olmayan idealdir.)

Tanım 5.1.18 : R bir halka olsun. Eğer, R 'nin her S -ideal I (veya S -ideal II) bir düzgün eleman tarafından üretiliyor ve bu idealler düzgünse R 'ye bir Smarandache Marot halka (S -Marot halka) denir.

Örnek 5.1.18 : Tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$ bir S -Marot halkadır.

Örnek 5.1.19 : $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,...,9\}$ bir S -Marot halkadır. Çünkü, $\{0,2,4,6,8\}$, $\mathbb{Z}_{10}$ 'un tek S -ideali olup düzgündür.

Tanım 5.1.19 : R bir halka, S R 'nin bir özalt halkası ve $I \neq \{0\}$ S 'nin bir özalt kümesi olsun. Bu takdirde, I , R 'nin bir ideali değil fakat S 'in bir öz ideali ise I 'ya R 'nin S alt halkasıyla ilgili bir alt yarı ideali denilir.

Tanım 5.1.20 : Bir alt yarı ideal içeren bir R halkası bir alt yarı ideal halka olarak adlandırılır.

Örnek 5.1.20 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan cisim ve G grubu $G = \langle g \mid g^4 = 1 \rangle$ olsun. $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir alt yarı ideal halkadır. $H = \langle 1, g^2 \rangle$ olsun. $I = \langle 0, 1 + g^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_2 H$ grup halkasının bir idealidir fakat $\mathbb{Z}_2 G$'nin bir ideali değildir.

Teorem 5.1.23(W.B.K) : G, bir H özalt grubuna sahip herhangi bir sonlu grup olsun. Bu takdirde, $K\,G$ grup halkası bir alt yarı ideal halkadır.

İspat : $H=\{1,h_1,h_2,....,h_n\}$, G'nin bir alt grubu olsun. Bu takdirde,

$I=\{0,r(1+h_1+....+h_n)|r\in K\}$ $K\,H$'ın bir idealidir. Burada $K\,H$, $K\,G$'nin bir alt halkası ve I, $K\,G$'nin bir ideali olmak zorunda değildir.Bu yüzden, $K\,G$ bir alt yarı ideal halkadır.

Teorem 5.1.24(W.B.K) : G, mertebesi sonlu olan en az bir $g\neq e$ elemanına sahip sonsuz elemanlı bir grup olsun. Bu takdirde, herhangi bir K cismi için $K\,G$ grup halkası bir alt yarı ideal halkadır.

İspat : $g\in G$, $g\neq e$ ve $g^m=1$ olsun. $H=\langle g\rangle$ olsun. $K\,H$, $K\,G$'nin bir alt halkasıdır ve $I=\langle 0,k(1+g+.....+g^{m-1})|k\in K\rangle$, $K\,H$'ın bir idealidir fakat $K\,G$'nin bir ideali değildir.

Tanım 5.1.21 : R bir halka olsun. A, R'de bir S-alt halka I veya S-alt halka II olsun. $I\subset A$, A S-alt halkasında bir S-ideal I veya S-ideal II olsun. Bu takdirde, I'ya bir Smarandache alt yarı ideal I (veya II) (S-alt yarı ideal) denir.(I, R'nin bir ideali olmak zorunda değildir)

Tanım 5.1.22 : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-alt yarı ideal I (II)' ye sahipse, R halkasına bir Smarandache alt yarı ideal halka (S-alt yarı ideal halka) denir.

Tanım 5.1.23 : Eğer R bir S-halka ve R bir A alt halkasına sahip öyleki her $x,y\in A$ için, $xy(x+y)=0$ oluyorsa R'ye bir Smarandache pre Boolean (S-pre Boolean) halka denir.

Teorem 5.1.25(W.B.K) : R bir S-halka olsun. Eğer, $A\subset R$ ve A bir S-alt halka ise bu takdirde her $x,y\in A$ için, A'da, $xy(x+y)=0$ şartı sağlanmaz.

İspat : A kendi başına bir S-alt halka olduğundan , A bir cisim içerir öyleki her $x,y\in A$ için $x+y=0$ olmadıkça $xy(x+y)=0$ olması imkansızdır. Bu da istenendir.

Teorem 5.1.26(W.B.K) : R bir pre Boolean halka olsun. Bu takdirde, R asla bir S-pre Boolean halka değildir.

İspat : R bir pre-Boolean halka ise her $x,y\in R$ için $xy(x+y)=0$'dır. Böylece, R cisim olan bir özalt küme içermez. $xy(x+y)=0$ olduğundan, $x+y=0$ veya $x\ y$ bir sıfır bölendir.

Tanım 5.1.24 : Eğer, R'deki ideal olma ilişkisi geçişkense, yani, bir J alt halka bir I alt halkasında bir ideal ve I, R'de bir idealken, J, R'nin bir ideali oluyorsa, R halkasına bir filial (soylu) halka denir.

Tanım 5.1.25 : R bir halka olsun. Eğer, R'deki S-ideal olma ilişkisi geçişkense, yani, eğer, J, I S- alt halkasında bir S-ideal ve I, R'nin bir S-idealiyken, J, R'nin bir S-ideali ise R'ye bir Smarandache filial (soylu) halka (S-filial(soylu)halka) denir.

Örnek 5.1.21 : $R = \mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2$ halkasını alalım. $J = \langle (0,0,0),(0,0,1) \rangle$, $I = \langle (0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1) \rangle$'da bir idealdir. Ayrıca, J R'nin bir idealidir. Bu yüzden, R bir filial (soylu) halkadır.

Tanım 5.1.26 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin, n farklı $I_1, I_2, ..., I_n$ idealinin her kümesi ve n farklı $x_1, x_2, ..., x_n \in R \setminus (I_1 \cup I_2 \cup ..... \cup I_n)$ elemanlarının her kümesi için, $\langle x_1 \cup I_1 \cup .... \cup I_n \rangle = \langle x_2 \cup I_1 \cup .... \cup I_n \rangle = ... = \langle x_n \cup I_1 \cup .... \cup I_n \rangle$ oluyorsa R'ye bir n-ideal halka denir.

$\big($Burada, $\langle \ \rangle, 1 \le i \le n$ için $x_i \cup I_1 \cup .... \cup I_n$ tarafından üretilen ideali belirtiyor$\big)$

Tanım 5.1.27 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin, n farklı $I_1, I_2, ..., I_n$ S-ideal I(II)'nin her kümesi ve n farklı $x_1, x_{2,} ...., x_n \in R \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_n)$ elemanlarının her kümesi için; $\langle x_1 \cup I_1 \cup .... \cup I_n \rangle = \langle x_2 \cup I_1 \cup .... \cup I_n \rangle = ... = \langle x_n \cup I_1 \cup .... \cup I_n \rangle$ oluyorsa R'ye, bir Smarandache n-ideal halka (S - n-ideal halka) denir.

$\big(\langle \ \rangle, 1 \le i \le n$ iken $x_i \cup I_1 \cup .... \cup I_n$ tarafından üretilen S - ideali belirtsin$\big)$

Örnek 5.1.22 : $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{12}$ bir 3-ideal halka ve bir 4-ideal halkadır. $\mathbb{Z}_{12}$ sadece bir S-ideale sahip olduğundan, $\mathbb{Z}_{12}$ bir S - n-ideal değildir.

Örnek 5.1.23 : $\mathbb{Z}_{15} = \{0,1,....,14\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{15}$'in idealleri: $\{0,5,15\}$ ve $\{0,3,6,9,12\}$'dir. Açıkça, $\mathbb{Z}_{15}$ bir S-2-ideal halka değildir.

Tanım 5.1.28 : R bir halka ve S, R'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer, S toplama işlemine göre kapalı ve herhangi bir $s \in S$ ve $x \in R$ için $x^2 s \in S$ ise S'ye R'nin bir genelleştirilmiş sol yarı ideali denir. Benzer olarak, genelleştirilmiş sağ yarı ideal tanımlanabilir. Hem sağ yarı ideal hem de sol yarı ideal olduğunda genelleştirilmiş yarı ideal tanımlanabilir.

Tanım 5.1.29 : R bir S-halka I olsun. Bu R S-halkanın bir genelleştirilmiş sağ (sol) yarı ideal

I 'ya bir Smarandache genelleştirilmiş sağ (sol) yarı ideali denir. Hem S-genelleştirilmiş sağ hemde S-genelleştirilmiş sol yarı idealse bu ideale Smarandache genelleştirilmiş yarı ideal (S genelleştirilmiş yarı ideal) denir.

Eğer, R bir S-halka ve R genelleştirilmiş yarı ideal I 'ya sahipse bu takdirde, I 'ya Smarandache genelleştirilmiş yarı ideal (S - genelleştirilmiş yarı ideal) denir.

Teorem 5.1.27(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R, genelleştirilmiş yarı ideallere sahip bir S-halka ise R, S - genelleştirilmiş yarı ideallere sahiptir.

Teorem 5.1.28(W.B.K) : Genelleştirilmiş yarı-ideal halka olan bütün halkalar genelde S-genelleştirilmiş yarı ideal halkalar olmak zorunda değildirler.

İspat : $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ bir S-halka değildir. $\mathbb{Z}_4$ bir genelleştirilmiş yarı ideale sahiptir fakat $\mathbb{Z}_4$ bir S-genelleştirilmiş yarı-ideal halka değildir.

Örnek 5.1.24 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ ve $G = \left\langle g \,\middle|\, g^4 = 1 \right\rangle$ grubu olsun. $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir S-halkadır. $I = \{0, 1+g^2\}$ bir S-ideal değildir fakat $\mathbb{Z}_2 G$'nin bir S-genelleştirilmiş yarı idealidir.

Teorem 5.1.30(W.B.K) : K asal olmayan ve karakteristiği sıfır olan bir reel cisim olsun. Bu takdirde, K, S-genelleştirilmiş yarı-ideallere sahiptir.

İspat : K bir asal cisim değilse K bir alt cisime sahiptir. Bunun için, K bir S-halkadır. $S = K^+ \cup \{0\}$ alalım. S toplamaya göre kapalıdır. Herhangi bir $s \in S$ ve $x \in K$ için, $x^2 s \in S$ 'dir. Bu da istenendir. Eğer, K bir kompleks cisimse sonuç doğru olmayabilir.

Tanım 5.1.30 : A bir halka olsun. Eğer, her $a \in A$ için, $a \in aAa^2A$ ise A 'ya bir s-zayıf düzgün halka denir.

Örnek 5.1.25 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ ve $G = \left\langle g \,\middle|\, g^2 = 1 \right\rangle$ olsun. $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir s-zayıf düzgün halka değildir.

Tanım 5.1.31 : R bir halka ve A, R 'nin bir S-alt halkası olsun. Eğer, her $a \in A$ için $a \in aAa^2A$ ise R 'ye bir Smarandache s-zayıf düzgün (S - s-zayıf düzgün) halka denir.

Tanım 5.1.32 : R bir halka olsun. A ve B, R 'nin iki sağ ideali ve $AB \subset I$ ve $BA \subset I$ olsun. Bu takdirde, I 'ya R 'nin bir sağ quasi yansıyan ideali denir.

Eğer (0), R 'nin bir sağ quasi yansıyan ideali ise R halkasına bir sağ quasi yansıyan halka denir. Benzer olarak, bir sol quasi yansıyan halka tanımlanabilir. Yarı asal halkalar sol ve sağ quasi yansıyandır.

K karakteristiği sıfır olan bir cisim ise $K\,G$ grup halkasının sol ve sağ quasi yansıyan olduğunu biliyoruz. Çünkü, $K\,G$ grup halkaları yarı asaldır. Sadece şunu hatırlatalım ki, bir R halkasının bir yarı asal halka olması için gerek ve yeter şart R'nin sıfırdan farklı hiçbir sıfır kare ideal içermemesidir.

Tanım 5.1.33 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her sağ ideali bir sağ quasi yansıyan ideal ise R'ye bir kuvvetli alt komütatif halka denir.

Tanım 5.1.34 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her S-sağ ideal I (II)'i bir sağ quasi yansıyan ise R'ye bir Smarandache kuvvetli alt komütatif (S-kuvvetli alt komütatif) halka denir.

Tanım 5.1.35 : R bir komütatif halka olsun. I, $J \subset R$'nin idealleri ve $a,b \in R$ elemanları için $a \equiv b(I+J)$ olmak üzere bir $c \in R$ elemanı, $c \equiv a(I)$ ve $c \equiv b(J)$ olacak şekilde varsa R'ye bir Çinli halkası denir. ($c \equiv a(I), \langle I,a\rangle \equiv \langle I,c\rangle$ olmasını gerektiriyor)

Tanım 5.1.36 : R bir halka olsun. R'deki bir S-ideal I(II) ve verilen $a,b \in R$ için $\langle I \cup J \cup a\rangle = \langle I \cup J \cup b\rangle$ iken bir $c \in R$ var ve $\langle I \cup a\rangle = \langle I \cup c\rangle$ *ve* $\langle J \cup b\rangle = \langle J \cup c\rangle$ ise R'ye bir Smarandache Çinli halka (S-Çinli halka) I (II) denir.

Örnek 5.1.26 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği iki olan asal cisim ve $S = \{a,b,0 \mid a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0\}$ olsun. Açıkça, $\mathbb{Z}_2 S$ yarı grup halkası bir S-Çinli halka I'dir.

Tanım 5.1.37 : $R\,G$ bir grup halkası olsun. Eğer, $RG = S_1 + ... + S_r$ ise $R\,G$'ye s-ayrışabilir halka denir. Burada S_i'ler $R\,G$'nin $S_i \cap S_j = R$ olacak şekildeki alt halkaları ve $R\,G$' deki her eleman bir toplam olarak tek bir gösterime sahiptir.

Örnek 5.1.27 : $\mathbb{Z}_2 S_3$, S_3 grubunun, $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ cismi üzerindeki grup halkası olsun. $H_1 = \left\{ p_0 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, p_1 \right\}, H_2 = \{p_0, p_2\}, H_3 = \{p_0, p_3\}$ *ve* $H_4 = \{p_0, p_5, p_4\}, S_3$'ün alt gruplarıdır.Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2 S_3$ alt halkaların bir direkt toplamıdır ve $\mathbb{Z}_2 S_3 = \mathbb{Z}_2 H_1 + \mathbb{Z}_2 H_2 + \mathbb{Z}_2 H_3 + \mathbb{Z}_2 H_4$'tür. $1 \le i, j \le 4$ ve $i \ne j$ için $\mathbb{Z}_2 H_i \cap \mathbb{Z}_2 H_j = \mathbb{Z}_2$'dir.

Tanım 5.1.38 : $R\,G$, G grubunun R halkası üzerindeki grup halkası olsun. Eğer, $S_i \cap S_j = \{0,1\}$ veya $S_i \cap S_j = \{0\}$ olmak üzere $RG = S_1 + ... + S_r$ ve $R\,G$'nin her elemanı $S_1, S_2, ..., S_r$'nin elemanlarının bir toplamı olarak bir tek gösterime sahipse $R\,G$'ye bir kuvvetli s-ayrışabilir halka denir.

Tanım 5.1.39 : RG, G grubunun R halkası üzerindeki grup halkası olsun. Eğer, $RG = S_1 + ... + S_r$ ise RG'ye bir Smarandache s-ayrışabilir (S-s-ayrışabilir) halka denir.Burada S_i'ler alt halkalardır öyleki en az biri $S_i \cap S_j = R$ olacak şekilde RG'nin bir S-alt halkasıdır ve RG'nin her elemanı $S_1, S_2, ..., S_r$ 'nin elemanlarının toplamı olarak tek bir gösterime sahiptir.

Teorem 5.1.31(W.B.K) : R herhangi bir cisim olmak üzere RG bir grup halkası olsun. Eğer, RG, s-ayrışabilir ise R, S-s-ayrışabilirdir.

İspat : R bir cisim olduğundan, her S_i alt halkası R'yi bir alt küme olarak içerir. Böylece, her S_i alt halkası, RG'nin bir S-alt halkasıdır. Bu yüzden, eğer, RG s-ayrışabilir ise RG, S-s-ayrışabilirdir.

Tanım 5.1.40 : RG bir grup halkası olsun. S_i'den en az biri RG'nin bir S-alt halkasıyken eğer, RG, bir kuvvetli s-ayrışabilir halka ise RG'ye bir Smarandache kuvvetli s-ayrışabilir (S-kuvvetli s-ayrışabilir) halka denir.

Teorem 5.1.32(W.B.K) : Eğer, RG, S-kuvvetli s-ayrışabilir ise bu takdirde, RG kuvvetli s-ayrışabilirdir.

Tanım 5.1.41 : RG bir grup halkası olsun. Eğer, $RG = S_1 + ... + S_r$ ve $i \neq j$ iken $S_i \cap S_j = G$ olacak şekilde, RG'nin $S_1, ..., S_r$ alt halkaları varsa RG'ye bir zayıf s-ayrışabilir halka denir.

Tanım 5.1.42 : RG bir grup halkası olsun. Eğer, $i \neq j$ için, $S_i \cap S_j = G$ ve $RG = S_1 + S_2 ... + S_r$ iken S_i'den en az biri RG'nin bir S-alt halkası olacak şekilde, RG'nin $S_1, S_2, ..., S_r$ alt halkaları varsa RG'ye bir Smarandache zayıf s-ayrışabilir (s-zayıf ayrışabilir) halka denir.

Tanım 5.1.43 : R komütatif olması gerekmeyen bir halka olsun. L, R'nin bütün sağ ideallerinin koleksiyonunu göstersin. $A+B, A \cup B$ tarafından üretilen sağ ideali ve $AB, A \cap B$'yi belirtmek üzere eğer, L'deki bütün A, B, C, D sağ idealleri için : $(A+B)(A+C)(A+D) = A + BC(A+D) + BD(A+C) + DC(A+B)$ oluyorsa, R'ye bir kuvvetli sağ s-halka denir.

Tanım 5.1.44 : R komütatif olması gerekmeyen bir halka olsun. L'de, R'nin bütün sağ ideallerinin koleksiyonunu belirtsin. En az bir tanesi bir S-sağ ideal I (II) olmak üzere, L'deki bütün A, B, C, D sağ idealleri için :

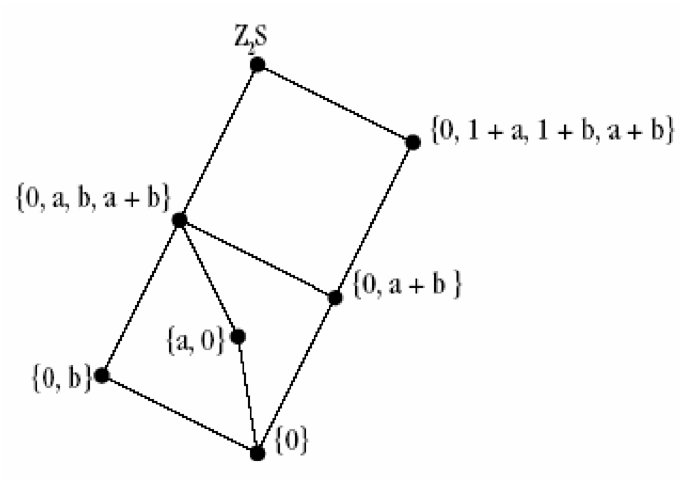
$(A+B)(A+C)(A+D)=A+BC(A+D)+BD(A+C)+DC(A+B)$ oluyorsa, R'ye bir Smarandache kuvvetli sağ s-halka (S-kuvvetli sağ s-halka)denir.

Örnek 5.1.28 : $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ bir halka ve

$S=\{1,a,b \mid a^2=a, b^2=b, ab=a, ba=b, 1a=a1=a \text{ ve } 1b=b1=b\}$ çarpımsal yarı grup olsun. $\mathbb{Z}_2S$ yarı grup halkası bir S-kuvvetli sağ s-halkadır.

Çünkü, $\mathbb{Z}_2S$ ' in idealleri:

$A_1=\{0,a\}$, $A_2=\{0,b\}$, $A_3=\{0,a+b\}$, $A_4=\{1,1+a,1+b,a+b\}$ ve $A_5=\{0,a,b,a+b\}$ olup bu sağ ideallerin herhangi 4 tanesi yukarıdaki eşitliği sağlar.



Şekil 5.1.1

Tanım 5.1.45 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin bütün sağ idealleri bir dağılmalı latis oluşturuyorsa ve bu sağ ideallerin kolleksiyonu içinde en az bir sağ ideal bir S-ideal I (II) ise R halkasını Smarandache kuvvetli sağ D-bölge (S-kuvvetli sağ D-bölge) olarak adlandırırız.

Teorem 5.1.33(W.B.K) : Her S-kuvvetli sağ- D-halka bir S-kuvvetli sağ s-halkadır.

Teorem 5.1.34(W.B.K) : Bir S-kuvvetli sağ s- halkada sağ ideallerin kümesi eğer bir S-kuvvetli sağ D-halka değilse bu durum bu halkanın ideallerinin kümesinin bir D-halka olmamasını gerektirmez.

İspat : Açıkça idealler bir S - D -halka oluşturmaz. Şimdi ,örnek 5.1.28'de verilen $\mathbb{Z}_2 S$ 'in ideallerinin kümesini düşünelim:

$B_1 = \{0, a+b\}, B_2 = \{0, a, b, a+b\}, B_3 = \{0, 1+a, 1+b, a+b\}$ bir dağılmalı latis oluşturur ve böylece halka bir S -kuvvetli- D -halka olur.

Teorem 5.1.35(W.B.K) : Eğer, bir R halkasının sağ ideallerinin kümesi bir S -kuvvetli r -halka değilse, bu R 'nin ideallerinin kümesinin bir S -kuvvetli- r - s -halka olmamasını gerektirmez.

İspat : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ halkası ve

$S = \{a,b,c,1 | a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, ab = a, ba = b, ca = c, cb = c, ac = a, bc = b, 1a = a1 = a, 1b = b1 = b, 1c = c1 = c\}$

çarpımsal yarı grup olsun. $\mathbb{Z}_2 S$, S yarı grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki yarı grup halkası olsun.

$A = \{0, 1+a+b+c, b+c, a+c, a+b, 1+a, 1+c, 1+b\}, B = \{0, a\}, C = \{0, b\}$ *ve* $D = \{0, a+b+c\}$

$\mathbb{Z}_2 S$ 'in sağ idealleridir. Açıkça,

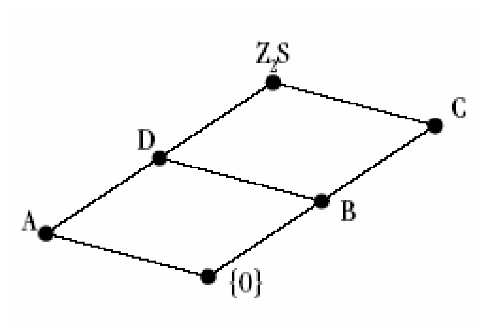
$(A+B)(A+C)(A+D) = \mathbb{Z}_2 S, A + BC(A+D) + CD(A+B) + DB(A+C) = A$ 'dır.

$\mathbb{Z}_2 S \neq A\mathbb{Z}_2 S$ olduğundan, $\mathbb{Z}_2 S$ bir S -kuvvetli- r - s -halka değildir.

Şimdi, $\mathbb{Z}_2 S$ 'in iki yanlı ideallerini düşünelim:

$A = \{0, a+b+c\}, B = \{0, a+b, a+c, b+c\}, C = \{1+a+b+c, a+b, a+c, b+c, 1+a, 1+b, 1+c, 0\}$
ve $D = \{a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c, 0\}$

Açıkça, $\{A, B, C, D, \{0\}, \mathbb{Z}_2 S\}$ kümesi aşağıdaki şekille verilen bir süper modüler latis oluşturur.



Şekil 5.1.2

R bir halka olmak üzere, $n > 1$ olacak şekilde bir n tamsayısı ve her $x \in R$ için $x^n = x$ oluyorsa, böyle bir halkaya bir J -halka denir.

Tanım 5.1.46 : R bir halka olsun. n >1 bir tamsayı olsun. Eğer, R bir A S-alt halkasına sahip ve her $a \in A$ için $a^n = a$ oluyorsa, R'ye bir Smarandache J-halka (S - J-halka) denir.

Teorem 5.1.36(W.B.K) : R bir J-halka olsun. Eğer, R bir S-alt halkaya sahipse bir S - J-halkadır.

İspat : J-halka ve S - J-halkanın tanımından ispat açıktır. Bütün J-halkaların komütatif olduğu iyi biliniyor fakat S - J-halkanın komütatif olmak zorunda olmadığını görüyoruz.

Örnek 5.1.29 : $\mathbb{Z}_2 S_3$, S_3 grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki grup halkası olsun. $\mathbb{Z}_2 S_3$ bir S - J-halkadır. Çünkü, $\mathbb{Z}_2 S_3$ $A = \{0, P_1 + P_2 + P_3, 1 + P_4 + P_5, 1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5\}$ S-alt halkasını içerir. Kolayca, A'nın bir J-halka olduğu görülür. Böylece, $\mathbb{Z}_2 S_3$ bir S - J-halkadır.

Teorem 5.1.37(W.B.K) : $\mathbb{Z}_n$ bir S-halka olsun. S bir yarıgrup olsun öyleki $s_i s_i = s_i$ ve $i \neq j$ için, $s_i s_j = 0$ olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_n S$ yarı grup halkası bir S - J-halkadır.

Tanım 5.1.47 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin ideallerinin her farklı çifti R'yi üretiyorsa bu takdirde, R'nin ideallerinin kümesine kuvvetli ideal özelliğini sağlıyor denir.

Tanım 5.1.48 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin alt halkalarının her farklı çifti R'yi üretiyorsa, R'nin alt halkalarının kümesine kuvvetli alt halka özelliği sağlıyor denir.

Tanım 5.1.49 : R bir halka olsun. $\{I_m\}$ bütün ideallerin koleksiyonunu ve $\{S_n\}$'de bütün alt halkaların koleksiyonunu göstersin. Eğer, her $(S_j, I_j) \in \{S_n\} x \{I_m\}$ çifti için, $\left\langle S_j, I_j \middle| \ I_j \in \{I_m\} \ ve \ S_j \in \{S_n\} \right\rangle$, R'yi üretiyorsa bu takdirde R'nin alt halkaları ve idealleri kuvvetli alt halka ideal özelliğini sağlıyor denir.

Örnek 5.1.30 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ halkası ve $G = \left\langle g \middle| g^2 = 1 \right\rangle$ grubu olsun. $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası kuvvetli alt halka özelliğini sağlar fakat kuvvetli ideal özelliğini sağlamaz. Fakat, $S_1 = \{0,1\}$ ve $I_1 = \{0, 1+g\}$, $\mathbb{Z}_2 G$'in sırasıyla alt halkası ve ideali olarak, $\mathbb{Z}_2 G$ kuvvetli alt halka ideal özelliğini sağlar. Ayrıca, $S_1 \cup I_1$, $\mathbb{Z}_2 G$' yi üretir.

Örnek 5.1.31 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ halkasını ve $G = \left\langle g \middle| g^3 = 1 \right\rangle$ grubunu alalım.

$\mathbb{Z}_2 G = \{1, 0, g, g^2, 1+g, 1+g^2, g+g^2, 1+g+g^2\}$ olur. $\mathbb{Z}_2 G$'nin alt halkaları:

$S_1 = \{0,1\}, S_2 = \{0, 1+g+g^2\}, S_3 = \{0, g+g^2\}, S_4 = \{0, 1+g, 1+g^2, g+g^2\}$ ve

$S_5 = \{0, 1, g + g^2, g + g^2 + 1\}$ ‘ dir. $\mathbb{Z}_2 G$’nin idealleri:

$I_1 = \{0, 1 + g + g^2\}$ ve $I_2 = \{0, 1 + g, 1 + g^2, g + g^2\}$ ‘dir. Böylece, $\mathbb{Z}_2 G$ kuvvetli ideal özelliğini sağlar.

Teorem 5.1.38(W.B.K) : R bir halka olsun. $S_i \subset S_j$ veya $S_j \subset S_i$ olan $S_i, S_j \in \{S_n\}$ alt halkalarının bir ikilisi kuvvetli alt halka özelliğini sağlasalar bile R kuvvetli alt halka özelliğini sağlamaz.

İspat : $S_i, S_j \in \{S_n\}$ olduğundan, eğer, $S_i \subset S_j$ ise $\langle S_i, S_j \rangle = S_j$ ’dir.Eğer, $S_j \subset S_i$ ise $\langle S_i, S_j \rangle = S_i$ ’dir.

Teorem 5.1.39(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, $I_1 \subset I_2$ veya $I_2 \subset I_1$ olacak şekilde I_1, I_2 ideallerinin bir çifti varsa R bir kuvvetli ideal halka değildir.

Tanım 5.1.50 : R bir halka olsun. $\{S_i\}$, R’ nin bütün S-alt halkalarının koleksiyonu olsun. Eğer, R’nin S-alt halkalarının her çifti R’yi üretiyorsa R’ye bir Smarandache kuvvetli alt halka halkası (S-kuvvetli alt halka halkası) denir.

Tanım 5.1.51 : R bir halka olsun. $\{I_j\}$, R’nin bütün S-ideallerinin koleksiyonunu belirtsin. Eğer, R’nin S-ideallerinin her çifti R’yi üretiyorsa R’ye bir Smarandache kuvvetli ideal halka (S-kuvvetli ideal halka) denir.

Tanım 5.1.52 : R bir halka olsun. $\{S_i\}$ ve $\{I_j\}$ sırasıyla R’nin bütün S-alt halkalarının ve S-ideallerinin koleksiyonunu göstersin. Eğer, her $\{S_i, I_j\}$ çifti R’yi üretiyorsa bu takdirde R’ ye bir Smarandache kuvvetli alt halka ideal (S-kuvvetli alt halka ideal) halka denir. Eğer, bir halkada, S-alt halkalara ve S-ideallere sahip değilsek, S-kuvvetli alt halka ideal, S-kuvvetli ideal halka veya S-kuvvetli alt halka halkası kavramlarından bahsedemeyiz.

Örnek 5.1.32 : $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, ..., 5\}$ halkasını alalım. $S_1 = \{0, 3\}$ ve $S_2 = \{0, 2, 4\}$ hem ideal hem de alt halkadırlar. Açıkça, $\mathbb{Z}_6$ bir S-kuvvetli ideal halka, bir S-kuvvetli alt halka halkası veya bir S-kuvvetli alt halka ideal halka değildir. Çünkü, bu halka, hiçbir öz S-alt halka veya S-ideale sahip değildir.

Örnek 5.1.33 : $\mathbb{Z}_2 S_3$, grup halkasını alalım. Açıkça, $\mathbb{Z}_2 S_3$ bir kuvvetli alt halka değildir. $\mathbb{Z}_2 S_3$’ün iki farklı alt halkasını alalım.Bunlar $S_1 = \{0, 1 + P_1\}$ ve $S_2 = \{0, 1 + P_2\}$ olsun.

$\langle S_1, S_2\rangle = \{0, 1+P_1, 1+P_2, P_1+P_2, P_4+P_5, P_2+1+P_1+P_5, 1+P_1+P_2+P_4, P_1+P_4+P_5+P_2, ...\} \neq \mathbb{Z}_2 S_3$

olur. Yani S_1 ve S_2 tarafından üretilen halka için, $\langle S_1, S_2\rangle$'de tek sayıda elemanın toplamı şeklinde yazılabilen elemanlar bulamıyoruz. Bunun için, $\mathbb{Z}_2 S_3$ bir kuvvetli alt halka halkası değildir. Ayrıca, $\mathbb{Z}_2 S_3$ bir kuvvetli ideal halkada değildir.Çünkü, $I_1 = \{0, 1+P_1+....+P_5\}$ ve $I_2 = \{0, 1+P_4+P_5, P_1+P_2+P_3, P_1+P_2+P_3+P_4+P_5\}$ için, $\langle I_1 \cup I_2\rangle$, $\mathbb{Z}_2 S_3$'üretmez. Bu da istenendir. Acaba, $\mathbb{Z}_2 S_3$ bir S-kuvvetli ideal halka olur mu? $H_1 = \langle 1, P_1\rangle$ ve $H_2 = \langle 1, P_4, P_5\rangle$, alt grupları olmak üzere, $\mathbb{Z}_2 S_3 = \langle \mathbb{Z}_2 H_1 \cup \mathbb{Z}_2 H_3\rangle$'dır. Açıkça, $\mathbb{Z}_2 H_1$ ve $\mathbb{Z}_2 H_3$, $\mathbb{Z}_2 S_3$'ün S-alt halkalarıdır. $A = \{0, 1+P_1+P_2+P_3+P_4+P, P_4+P_5+1, P_1+P_2+P_3\}$, $\mathbb{Z}_2 S_3$'ün bir S-alt halkasıdır. Çünkü, $\{0, 1+P_1+P_2+P_3+P_4+P_5\}$, A'nın özalt kümesi olan bir alt cismidir. Ayrıca, $B = \{0, 1, P_1, 1+P_1\}$, $\mathbb{Z}_2 S_3$'ün bir S-alt halkasıdır. Benzer olarak, $B_1 = \{0, 1, P_2, 1+P_2\}, B_3 = \{0, 1, P_3, 1+P_3\}$, S-alt halkalardır ve kolayca gösterilebilir ki, $\langle B_1 \cup B_3\rangle = \mathbb{Z}_2 S_3$'tür.

Tanım 5.1.53 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin farklı alt halkalarının bir I_1, I_2 ideal çifti var ve bu idealler R'yi üretiyorsa yani $R = \langle I_1 \cup I_2\rangle$ ise R'ye bir Smarandache zayıf ideal (S-zayıf ideal) halka denir.

Tanım 5.1.54 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin farklı alt halkalarının bir S_1, S_2 çifti var ve bu alt halkalar R'yi üretiyorsa yani $R = \langle S_1 \cup S_2\rangle$ ise R'ye bir Smarandache zayıf halka (S-zayıf alt halka) halkası denir.

Tanım 5.1.55 : R bir halka olsun. Eğer, R; $I \cup A$, R'yi üretecek şekilde yani $R = \langle I \cup A\rangle$ olacak şekilde bir I S-idealine ve bir A S-alt halkasına sahipse R'ye bir Smarandache zayıf alt halka ideal (S-zayıf alt halka ideal) halkası denir.

Teorem 5.1.40(W.B.K) : R bir halka olsun. Bu takdirde;

1. Her S-kuvvetli ideal halka bir S-zayıf ideal halkadır.
2. Her S-kuvvetli alt halka halkası bir S-zayıf alt halka halksıdır.
3. Her S-kuvvetli alt halka ideal halka bir S-zayıf alt halka ideal halkadır.

Örnek 5.1.34 : $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi ve S_3 grubunu alalım. $\mathbb{Q}S_3$ bir S-zayıf halka halkasıdır. Çünkü, $A_1 = \mathbb{Q}H_1$ ve $A_2 = \mathbb{Q}H_2$ S-alt halkalardır ve $\mathbb{Q}S_3 = \langle \mathbb{Q}H_1 \cup \mathbb{Q}H_2 \rangle$'dir.

Tanım 5.1.56 : R bir halka olsun. $n(\alpha) > 1$ bir doğal sayı olsun.Eğer, her $x \in R$ için $x^{n(\alpha)} = x$ oluyorsa R'ye bir zayıf Boolean halka denir.

Örnek 5.1.35 : $\mathbb{Z}_p = \{0,1,..., p-1\}$ karakteristiği p olan asal cisim olsun. Açıkça, $\mathbb{Z}_p$ bir zayıf Boolean halkadır.

Tanım 5.1.57 : R bir halka olsun. Eğer, A bir zayıf Boolean halka olmak üzere, R'nin bir A S-alt halkası varsa R'ye bir Smarandache zayıf Boolean halka (S-zayıf Boolean halka) denir.

Örnek 5.1.36 : $\mathbb{Z}_{15} = \{0,1,...,14\}$ halkasını ve $G = \langle g \,|\, g^2 = 1 \rangle$ grubunu alalım. Açıkça, $\mathbb{Z}_{15}G$ grup halkası bir zayıf Boolean halka değildir. Fakat, $\mathbb{Z}_{15}G$ bir S-zayıf Boolean halkadır. $B = \{0,5,10\}$ alırsak, BG, $\mathbb{Z}_{15}G$'nin S-zayıf Boolean halka olan bir S-alt halkasıdır. Fakat, $\mathbb{Z}_{15}G$ bir zayıf Boolean halka değildir.

Tanım 5.1.58 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her I sağ ideali için, $I^2 = I$ ise R'ye bir zayıf düzgün halka denir.

Örnek 5.1.37 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim ve $G = \langle g \,|\, g^3 = 1 \rangle$, 3. mertebeden devirli grup olsun. $\mathbb{Z}_2G$ grup halkası zayıf düzgündür. Çünkü, $I_1 = \{0, 1+g+g^2\}$ ve $I_2 = \{0, 1+g, 1+g^2, g+g^2\}$ için, $I_1^2 = I_1$ ve $I_2^2 = I_2$'dir.

Fakat bir halkadaki bütün idealler $I^2 = I$'yı sağlamak zorunda değildir.

Örnek 5.1.38 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim ve $G = \langle g \,|\, g^2 = 1 \rangle$ grubu olsun.

$\mathbb{Z}_2G = \{0,1,g,1+g\}$ olur. $I = \{0,1+g\}$, $\mathbb{Z}_2G$'nin, $I^2 = \{0\}$ olan bir idealidir.

Böylece, $\mathbb{Z}_2G$ zayıf düzgün halka değildir.

Tanım 5.1.59 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her I S-sağ (sol) ideali $I^2 = I$'yı sağlıyorsa R'ye bir Smarandache zayıf düzgün halka (S-zayıf düzgün halka) denir.

Tanım 5.1.60 : R bir halka olsun. Eğer, R, $I^2 = I$ olacak şekilde en azından bir S-ideale sahipse R'ye bir Smarandache oldukça zayıf düzgün halka (S-oldukça zayıf düzgün halka) denir.

Teorem 5.1.41(W.B.K) : R bir S-zayıf düzgün halkaysa R bir S-oldukça zayıf düzgüz halkadır.

Tanım 5.1.61 : R karakteristiği p olan bir halka olsun. Eğer, R aşikâr olmayan bir A S-alt halkasına sahip ve A'nında bir pre- p-halka olan bir B alt halkası varsa yani her $x, y \in B$ için $x^p y = xy^p$ ise R'ye bir Smarandache pre-p-halka (S-pre- p halka) denir.

Örnek 5.1.39 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim ve $G = \langle g \mid g^6 = 1 \rangle$ grubu olsun. $A = \{0,1,2g^3,1+g^3,2+g^3,2g^3+1,2g^3+2\}$ alırsak, $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir S-pre- p halkadır.

Tanım 5.1.62 : R bir komütatif halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Eğer, her $J \subset I$ S-ideali için, $J = IC$ olacak şekilde bir C ideali varsa I'ya bir çarpımsal ideal denir.

Tanım 5.1.63 : R bir S-komütatif halka ve I, R'nin bir S-ideali olsun. Eğer, her $J \subset I$ S-ideali için, $J = IC$ olacak şekilde R'de bir C S-ideali varsa I'ya bir Smarandache çarpımsal ideal (S-çarpımsal ideal) denir.

Tanım 5.1.64 : R komütatif olmayan bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Eğer, her $J \subseteq I$ sağ ideali için, $J = IC$ olacak şekilde R'de bir C sağ ideali varsa I'ya bir sağ çarpımsal ideal denir.

Tanım 5.1.65 : R komütatif olmayan bir halka ve I, R'nin bir sağ ideali olsun. Eğer, her $J \subset I$ sağ ideali için, $J = IC$ olacak şekilde R'de bir C sağ ideali varsa I'ya bir sağ çarpımsal sağ ideal denir.

Tanım 5.1.66 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her öz alt ideali, R'nin bir sağ çarpımsal idealiyse, R'ye bir sağ çarpımsal ideal halka denir.

Tanım 5.1.67 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her öz S-ideali, R'nin bir sağ çarpımsal idealiyse R halkasına bir Smarandache sağ çarpımsal ideal halka (S-sağ çarpımsal ideal halka) denir.

Tanım 5.1.68 : R sıfırdan farklı nilpotentsiz kısmi sıralı bir halka olsun. R'nin bir f-halka olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $a \in R$ için, $a_1 > 0, a_2 > 0, a = a_1 - a_2$ ve $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in R$ olmasıdır.

Tanım 5.1.69 : R bir halka ve A, R'nin bir S-alt halkası olsun. Bu takdirde, R'nin bir Smarandache f-halka (S- f-halka) olması için gerek ve yeter şart A, sıfırdan farklı nilpotentsiz kısmi sıralı bir halka olmak üzere herhangi bir $a \in A$ için, $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a = a_1 - a_2$ ve $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in R$ olmasıdır.

Tanım 5.1.70 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin ideallerinin kümesi kapsama bağıntısına göre tam sıralıysa R'ye bir zincir halka denir.

Teorem 5.1.42(W.B.K) : $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ karakteristiği 2 olan asal cisim ve $p>2$ bir asal sayı olmak üzere, $G=\langle g \,|\, g^p=1\rangle$ olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2G$ grup halkası bir zincir halka değildir.

İspat : J, $\mathbb{Z}_2G$'nin augmentation ideali ve $I=\{0,1+g+.....+g^{p-1}\}$ olsun. Açıkça, I ve J karşılaştırılamaz ideallerdir ve böylece $\mathbb{Z}_2G$ bir zincir halka değildir.

Teorem 5.1.43(W.B.K) : $G=\langle g \,|\, g^{p+1}=1\rangle$ mertebesi $p+1$ olan bir devirli grup ve $\mathbb{Z}_p$ karakteristiği p olan asal cisim olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_pG$ grup halkası bir zincir halka değildir.

İspat : J augmentation ideal ve $1\le n\le p-1$ olmak üzere $I=\{0,n(1+g+g^2+....+g^{p-1})\}$ ideali olsun. Açıkça, I ve J karşılaştırılamazdır. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_pG$ bir zincir halka değildir.

Teorem 5.1.44(W.B.K) : $\mathbb{Z}_p$ asal cisim, G mertebesi n olan sonlu bir grup ve $(n,p)=1$ olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_pG$ grup halkası bir zincir halka değildir.

İspat : J augmentation ideal ve $1\le t\le p-1$ olmak üzere $I=\{0,t(1+g+...+g_{n-1})\}$ olsun. I ve J karşılaştırılamazdır ve böylece $\mathbb{Z}_pG$ bir zincir halka değildir.

Tanım 5.1.71 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin sağ idealleri kapsama bağıntısına göre sıralıysa R'ye bir tam sağ zincir halka denir.

Tanım 5.1.72 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin S-sağ ideallerinin kümesi kapsamaya göre tam sıralıysa R'ye bir Smarandache zincir halka (S-zincir halka) denir.

Tanım 5.1.73 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin bütün S-sağ ideallerinin kümesi kapsamaya göre tam sıralıysa R'ye bir Smarandache sağ zincir halka (S-sağ zincir halka) denir.

Tanım 5.1.74 : R bir halka ve A, R'nin bir S-alt halkası olsun. Eğer, R'nin A S-alt halkasının S-ideallerinin kümesi kapsamaya göre tam sıralıysa bu takdirde, R'ye bir Smarandache zayıf zincir halka (S-zayıf zincir halka) denir.

Teorem 5.1.45(W.B.K) : R bir halka olsun. Eğer, R bir S-zayıf zincir halkaysa R bir S-zincir halka olmak zorunda değildir.

Tanım 5.1.75 : R bir halka ve $0\ne I$, R'nin bir ideali olsun. $X\ne Y$ olmak üzere R'nin aşikâr olmayan herhangi iki X ve Y idealleri için, $\langle X\cap I, Y\cap I\rangle=\langle X,Y\rangle\cap I$ ise I'ya R'nin bir sadık ideali denir.

Örnek 5.1.40 : $\mathbb{Z}_{12}=\{0,1,...,11\}$ halkasını alalım. Eğer, $\mathbb{Z}_{12}$'nin, $X=\{0,4,8\}$ ve $Y=\{0,3,6,9\}$ iki idealini alırsak, $I=\{0,6\}$, $\mathbb{Z}_{12}$'nin bir sadık idealidir.
$\langle X\cap I, Y\cap I\rangle=\langle 0,0,6\rangle\{0,6\}=I$ ve $\langle X,Y\rangle\cap I=\mathbb{Z}_{12}\cap I=\{0,6\}$ 'dır.

Tanım 5.1.76 : Eğer, bir R halkasının her I ideali R'nin bir sadık ideali ise R'ye bir idealsel sadık halka denir.

Tanım 5.1.77 : R bir halka ve I, R'nin bir S-ideali olsun. Eğer, X ve Y, R'de, $X\neq Y, \langle X\cap I, Y\cap I\rangle=\langle X,Y\rangle\cap I$ olacak şekildeki ideallerse, I'ya R'nin bir Smarandache sadık ideali (S-sadık ideal) denir.

Not : X ve Y'nin, R'nin S-idealleri olması gerekmez. I'nın, R'nin bir S-ideali olması ve X ile Y'nin farklı idealler olması yeterlidir.

Tanım 5.1.78 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her I S-ideali, R'nin bir S-sadık idealiyse R'ye bir Smarandache idealsel sadık halka (S-idealsel sadık halka) denir.

Tanım 5.1.79 : R bir halka olsun.Eğer, her $x,y\in R$ için, $(xy-yx)^n=xy-yx$ ya da $(xy+yx)^n=xy+yx$ olacak şekilde bir pozitif $n, n=n(x,y)>1$ tamsayısı varsa R'ye bir Lin halkası denir.

Teorem 5.1.46(W.B.K) : F bir cisim ve G komütatif olmayan herhangi bir sonlu grup olsun. Eğer, $F\,G$ grup halkası bir Lin halkasıysa, bu takdirde:

1. $F\,G$ sıfır bölenlere sahiptir.
2. $F\,G$, sonlu mertebeli elemanlara sahip bir Lin halkadır.

İspat : $F\,G$, Lin halka olan bir halka olsun. Böylece $(xy-yx)^n=xy-yx$ veya $(xy+yx)^n=xy+yx$'dir. $(xy-yx)^n=xy-yx$ ise $(xy-yx)\left[(xy-yx)^{n-1}-1\right]=0$'dır. $xy\neq yx$ olduğundan, $F\,G$ bir Lin halkaysa $F\,G$, $(xy-yx)^{n-1}\neq 1$'i sağlayan sıfır bölenlere sahiptir. Açıkça, eğer, $F\,G$ halkası sıfır bölene sahip değilse $F\,G$ sonlu mertebeden elemanlara sahiptir yani, en az bir $x,y\in FG$ çifti için $(xy-yx)^{n-1}=1$'dir.

Teorem 5.1.47(W.B.K) : $F\,G$, komütatif olmayan bir G grubunun F cismi üzerindeki grup halkası olsun. Eğer, $F\,G$ sıfır bölenlere sahipse veya sonlu mertebeden elemanlara sahipse $F\,G$ genelde bir Lin halka değildir.

İspat : $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ karakteristiği 2 olan cisim ve S_3, 3.dereceden simetrik grup olsun.

$\mathbb{Z}_2S_3$'ün bir Lin halka olmadığını göstermek için, $\mathbb{Z}_2S_3$'te x, y elemanlarının $(xy+yx)^n \neq xy+yx$ olcak şekilde en az bir çiftin varlığını ispatlamak yeterlidir. $p_2, p_4 \in \mathbb{Z}_2S_3$ olsun. Açıkça, $p_2p_4 + p_4p_2 = p_1 + p_3$ ve $(p_1+p_3)^2 = p_4 + p_5$'tir. $(p_4+p_5)^2 = p_4 + p_5$ olduğundan, hiçbir $n>1$ tamsayısı için $(p_1+p_3)^n$, p_1+p_3' e eşit olamaz. Bunun için, $\mathbb{Z}_2S_3$ bir Lin halka değildir.

Teorem 5.1.48(W.B.K) : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ ve S_n, n.dereceden permütasyon grubu olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2S_n$ grup halkası bir Lin halka değildir.

Tanım 5.1.80 : R bir halka olsun. Eğer, R bir B S-alt halkasını içeriyor ve B bir Lin halkaysa R'ye bir Smarandache Lin halka (S-Lin halka) denir.

R'nin her elemanının Lin özdeşliğini sağlamasını beklemiyoruz fakat sadece B'nin elemanları Lin özdeşliğini sağlıyorsa R bir S-Lin halka olur.

Teorem 5.1.49(W.B.K) : R bir S-alt halkaya sahip bir Lin halka olsun. Bu takdirde, R bir S-Lin halkadır.

İspat : Lin halka ve S-Lin halka tanımından ispat açıktır.

Teorem 5.1.50(W.B.K) : R bir S-Lin halkaysa R bir S-halkadır.

İspat : S-Lin halkanın tanımından, R bir S-alt halkaya sahip olmalıdır. Böylece, R bir S-halka olur.

Tanım 5.1.81 : R, birimli bir halka olsun. Eğer, her $r,s \in R$ için $rs = sr'$ olacak şekilde bir $r' \in R$ varsa R'ye sağ süper ore şartını sağlıyor denir.

Teorem 5.1.51(W.B.K) : F herhangi bir cisim veya bir halka ve $n \geq 3$ olmak üzere, $G = S_n$, n. dereceden simetrik grup olsun. Bu takdirde, FS_n, süper ore şartını sağlamaz.

İspat : FS_n'in süper ore şartını sağlamadığını göstermek için, herhangi bir $\alpha \in FS_n$ ve bazı $x, y \in FS_n$ için $xy = y\alpha$ olmadığını göstermemiz yeterlidir.

$x = 1 + \begin{pmatrix} 1234.....n \\ 3214....n \end{pmatrix}$ ve $y = 1 + \begin{pmatrix} 1234.....n \\ 1324....n \end{pmatrix}$ alalım. Açıkça, hiçbir $\tau \in FS_n$ için $yx = x\tau$ sağlanmaz. Bu da istenendir.

Tanım 5.1.82 : R bir halka olsun. Eğer, R bir A S-alt halkasına sahipse ve her $x, y \in A$ çifti için $xy = yr$ olacak şekilde $r \in R$ varsa R'ye Smarandache süper ore şartını (S-süper ore şartını) sağlıyor denir.

Teorem 5.1.52(W.B.K) : R süper ore şartını sağlayan bir halka olsun. Eğer, R bir S-alt halkaya sahipse R, S-süper ore şartını sağlıyor denir.

Tanım 5.1.83 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin birimi içermeyen her alt halkası R'nin bir idealiyse R'ye bir idealsel kuvvetli halka denir.

Örnek 5.1.41 : $\mathbb{Z}_2 G, G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki grup halkası olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2 G$ bir idealsel kuvvetli halkadır.

Teorem 5.1.53(W.B.K) : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ ve $G = \langle g \mid g^{2n} = 1 \rangle$ olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir idealsel kuvvetli halka değildir.

İspat : $S = \{0, 1 + g^n\}$ kümesi, $\mathbb{Z}_2 G$'nin bir alt halkasıdır fakat $\mathbb{Z}_2 G$'nin bir ideali değildir.

Tanım 5.1.84 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her S-alt halkası R'nin bir S-ideali ise R'ye bir Smarandache idealsel kuvvetli (S-idealsel kuvvetli) halka denir.

Tanım 5.1.85 : R bir halka ve $\{I_j\}$, R'nin bütün ideallerinin koleksiyonu olsun. Eğer, R'deki her $I_1, I_2 \in \{I_j\}$ ideal çifti ve her $a \in R \setminus (I_1 \cup I_2)$ için, $\langle a \cup I_1 \rangle = \langle a \cup I_2 \rangle$ ise R'ye bir I*-halka denir. (Burada, $\langle\ \rangle, j = 1, 2$ için a ve I_j tarafından üretilen ideali gösteriyor.)

Örnek 5.1.42 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, ..., 11\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_{12}$ bir I*-halka değildir. Çünkü, $I_1 = \{0, 6\}$ ve $I_2 = \{0, 4, 8\}$, $\mathbb{Z}_{12}$'nin iki idealidir. Fakat, $\langle 3 \cup I_1 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$ ve $\langle 3 \cup I_2 \rangle = \mathbb{Z}_{12}$ olduğundan, $\langle 3 \cup I_1 \rangle \neq \langle 3 \cup I_2 \rangle$'dir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_{12}$ bir I*-halka değildir.

Tanım 5.1.86 : R bir halka ve $\{A_i\}$, R'nin bütün S-ideallerinin koleksiyonu olsun. Eğer, her $A_1, A_2 \in \{A_i\}$ çifti ve her $x \in R \setminus \{A_1 \cup A_2\}$ için, $\langle A_1 \cup x \rangle = \langle A_2 \cup x \rangle$ ve bunlar R' nin S-ideallerini üretiyorsa R'ye bir Smarandache I*-halka (S-I*-halka) denir.

Tanım 5.1.87 : R bir halka ve $\{A_i\}$, R'nin bütün S-ideallerinin koleksiyonu olsun. Eğer, $A_1, A_2 \in \{A_i\}$ için, $\langle A_1 \cup x \rangle = \langle A_2 \cup x \rangle$ ve $\langle A_1 \cup x \rangle, \langle A_2 \cup x \rangle$, R'nin S-idealleri olacak şekilde bir $x \in R \setminus \{A_1 \cup A_2\}$ varsa R'ye bir Smarandache zayıf I*-halka (S-zayıf I*-halka) denir.

Teorem 5.1.54(W.B.K) : Bütün S-I*-halkalar S-zayıf I*-halkalardır.

İspat : S-I*-halka ve S-zayıf I*-halka tanımından ispat açıktır.

Teorem 5.1.55(W.B.K) : Eğer, R bir S - I *-halka veya bir S -zayıf I *-halka ise R bir S -halkadır.

İspat : R'nin bir S - I *-halka veya S -zayıf I *-halka olması için, R aşikâr olmayan S -idealler içermek zorundadır. Böylece, R bir S -halka olur.

Tanım 5.1.88 : P ve V herhangi iki izomorfik olmayan sonlu halka olsun. Eğer, P/I, V/J 'ye izomorfik olacak şekilde, P'nin bir I ve V'ninde bir J maksimal olmayan idealleri varsa bu sonlu P ve V halkalarına, Q -halkalar denir.

Örnek 5.1.43 : $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ ve $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,....,7\}$ halkalarını alalım. $I = \langle 0 \rangle$ ve $J = \langle 0,4 \rangle$ olsun. $\mathbb{Z}_8/J \cong \mathbb{Z}_4/I$ 'dır. Böylece, $\mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_8$ Q-halkalardır. Benzer olarak, $\mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_{12}$ halkalarıda Q -halkalardır.

Teorem 5.1.56(W.B.K) : Eğer n bir asal sayı değilse, $\mathbb{Z}_n = \{0,1,...,n-1\}$ daima bir Q -halkadır.

Tanım 5.1.89 : R, bütün idealleri maksimal olan bir halka olsun. Eğer, $R/\langle 0 \rangle$ bir halkaya izomorfikse R'ye bir zayıf Q -halka denir.

Tanım 5.1.90 : R bir halka ve A, R'nin bir S -ideali olsun. Bu takdirde, R/A, A S -idealiyle ilgili Smarandache bölüm halka (S -bölüm halka) olarak tanımlanır.

Tanım 5.1.91 : R ve S iki halka ve A ile B sırasıyla R ile S'nin S -idealleri olsun. Eğer, R/A ile S/B, S -izomorfikse R'ye Smarandache Q -halka (S - Q -halka) denir.

A ve B S -ideallerinin, sırasıyla R ve S'nin S -maksimal idealleri olmak zorunda olmadığını kabul ediyoruz.

Tanım 5.1.92 : R bir halka olsun. Eğer, herhangi bir $a \in R \setminus \{0\}$ için $aR \cap X \neq \varnothing$ olacak şekilde R'deki sıfırdan farklı elemanların sonlu bir X kümesi varsa R'ye bir F -halka denir. Eğer, X, R'nin merkezinde içeriliyorsa R'ye bir F Z -halka denir.

Örnek 5.1.44 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ cismini ve $G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ grubunu alalım. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2G$ grup halkası bir F -halkadır. $X = \{1+g\} \subset \mathbb{Z}_2G$ olsun. Açıkça, herhangi bir $a \in \mathbb{Z}_2G \setminus \{0\}$ için, $a\mathbb{Z}_2G \cap X \neq \varnothing$'dir.

Teorem 5.1.57(W.B.K) : $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ karakteristiği 2 olan cisim ve S_n, n.dereceden simetrik grup olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2 S_n$ grup halkası bir F-halkadır.

İspat : $|\sup p\ \alpha|=2m$ ve $1<2m\le n!$ olmak üzere $X=\left\{\alpha=\sum_{i=1}^{2m} s_i \,\middle|\, s_i\in S_n\right\}$ olsun. Herhangi bir $a\in \mathbb{Z}_2 S_n\setminus\{0\}$ için $a\mathbb{Z}_2 S_n\cap X\neq\varnothing$'dir. Bunun için $\mathbb{Z}_2 S_n$ bir F-halkadır.

Tanım 5.1.93 : R herhangi bir halka ve A, R'nin bir S-alt halkası olsun. Eğer, bir $X\subset R$ ve $b\in R\setminus\{0\}$ için, $bA\cap X\neq\varnothing$ oluyorsa R'ye bir Smarandache F-halka (S-F-halka) denir. Burada şunu belirtelim ki, X'i A'nın alt kümesi olarak almak zorunda değiliz fakat X'i, A'nın alt kümesi olarak alabiliriz. Benzer olarak, $b\in A\setminus\{0\}$ alınabilir.

Tanım 5.1.94 : R bir halka olsun. Eğer, bir $a\in R\setminus\{0\}$ için, $a^2=a+a$ ise a'ya bir $S\ S$ eleman denir.

Tanım 5.1.95 : R bir halka olsun. Eğer, R, 0' dan farklı en az bir $S\ S$ elemana sahipse R'ye bir $S\ S$-halka denir.

Tanım 5.1.96 : R bir halka olsun. Eğer, bir $x\in R$ için, $xy=x+y$ olacak şekilde bir $y\in R\setminus\{x\}$ varsa, x'e bir Smarandache $S\ S$ eleman ($S\ S\ S$-eleman) denir.

Örnek 5.1.45: $\mathbb{Z}_{10}=\{0,1,...,9\}$ halkasını alalım. $4.8\equiv 4+8(\mathrm{mod}\,10)$'dur. Böylece, 4, $\mathbb{Z}_{10}$'nun bir $S\ S\ S$ elemanıdır.

Tanım 5.1.97 : R bir halka olsun. Eğer, R, en azından bir aşikâr olmayan Smarandache $S\ S$-elemana sahipse R'ye bir $S\ S\ S$ halka denir.

Örnek 5.1.46 : $4.6\equiv 4+6(\mathrm{mod}\,14)$ olduğundan, 4 bir $S\ S\ S$-elemandır. Böylece, $\mathbb{Z}_{14}$ bir $S\ S\ S$-halkadır.

Örnek 5.1.47 : $\mathbb{Z}_{15}=\{0,1,...,14\}$ halkasını alalım. $3.9\equiv 3+9(\mathrm{mod}\,15)$ olduğundan, 3 bir $S\ S\ S$- elemandır.

Örnek 5.1.48: $\mathbb{Z}_9=\{0,1,...,8\}$ halkasını alalım. $3.6\equiv 3+6(\mathrm{mod}\,9)$ ve $5.8\equiv 5+8(\mathrm{mod}\,9)$'dur. Bu halka iki $S\ S\ S$-elemana sahiptir.

Örnek 5.1.49 : $\mathbb{Z}_8$, $S\ S\ S$-elemana sahiptir.

Acaba, her $a\in R$ için $R^2=R$ ve $a+a=0=a^2$ olacak şekilde, bir komütatif R halkası olabilirmi?

Eğer, R her $x\in R$ için $x^2=0$ olacak şekilde bir komütatif halkaysa bu takdirde, her $x,y\in R$ için $xy=0$ veya R'nin karakteristiği 2'dir.Çünkü, $(x+y)^2=0$ ise $x^2+y^2+2xy=0$'dır. Böylece, her $x,y\in R$ için $xy=0$'dır veya R'nin karakteristiği 2'dir. Böylece, böyle halkaların olmadığını ispatlarız. Verilen şartları sağlayan R halkaları birimi içeremez. İkinci olarak, $a+a=a^2=0$ olduğundan $R^2=R$ imkansızdır ve böylece $R^2=\{0\}$ olur. O halde, sorumuzun cevabı hayırdır.

Tanım 5.1.98 : R bir halka ve $S\neq\{0\}$ R'nin bir alt halkası olsun. Eğer, $S^2=(0)$ ise S'ye R'nin bir aşikâr alt halkası denir.

Örnek 5.1.50 : $\mathbb{Z}_2G, G=\langle g \mid g^{2n}=1\rangle$ grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki grup halkası olsun. $S=\{0,1+g+....+g^{2n-1}\}$ ve $S_1=\{1+g^n,0\}$ olsun. $S^2=(0)$ ve $S_1{}^2=(0)$ olup S ve S_1 aşikâr alt halkalardır.

Tanım 5.1.99 : R bir halka olsun. Eğer, R bir A S-alt halksına sahip ve A'da, $B^2=(0)$ olacak şekilde bir B alt halkasına sahipse R'ye bir Smarandache aşikâr alt halka (S -aşikâr alt halka) denir.

Tanım 5.1.100 : R bir halka olsun. $n>1$ bir tamsayı olmak üzere, eğer, her $x\in R$ için, x^n-x bir idenpotentse R'ye bir γ_n-halka denir.

Örnek 5.1.51 : $\mathbb{Z}_2G, G=\langle g \mid g^3=1\rangle$ grubunun $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki grup halkası olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_2G$ bir γ_n-halkadır.

Tanım 5.1.101 : R bir halka olsun. Eğer, bir $n>1$ tamsayısı ve her $x\in R$ için x^n-x bir S-idenpotentse, R'ye bir Smarandache γ_n-halka (S - γ_n-halka) denir.

Teorem 5.1.58(W.B.K) : R karakteristiği 0 olan bir cisim ve G bir torsion serbest komütatif grup olsun. Bu takdirde, $K\ G$ grup halkası bir S - γ_n-halka değildir.

İspat : $K\ G$ bir tamlık bölgesidir. Bu da istenendir.

Tanım 5.1.102 : R birimli bir komütatif halka olsun. V, R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer, V, R'deki '+' ve '.' işlemlerine göre kapalıysa V'ye R'nin bir iyi alt halkası denir.

Örnek 5.1.52 : $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}$'in bir iyi alt halkasıdır.

Örnek 5.1.53 : p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}_p = \{0,1,...,p-1\}$ bir iyi alt halkaya sahip değildir.

Tanım 5.1.103 : R birimli bir komütatif halka olsun. Eğer, P, '+' ve '.' işlemlerine göre bir yarıgrup ve R'nin aşikâr olmayan bir V iyi alt halkası, her $v_1, v_2, v \in V$, $p_1, p_2, p \in P$ için, $vp \in P, pv \in P, 0 \in P, v(p_1 + p_2) = vp_1 + vp_2$ ve $v_1(v_2 p) = (v_1 v_2) p$ olacak şekilde varsa, P'ye, R üzerinde bir iyi modül denir.

Tanım 5.1.104 : R birimli bir komütatif halka olsun. S, R'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer,

1. $(S,+)$ bir Smarandache yarıgruptur.

2. $(S,.)$ bir Smarandache yarı gruptur şartları sağlanıyorsa S'ye, R'nin bir Smarandache iyi alt halkası (S -iyi alt halka) denir.

Teorem 5.1.59(W.B.K) : Bir halkanın bütün S -iyi alt halkaları iyi alt halkalarıdır.

Tanım 5.1.105 : R birimli bir komütatif halka olsun. Eğer, aşağıdaki dört şart sağlanıyorsa, P'ye R üzerinde bir Smarandache iyi modül (S -iyi modül) denir.

1. P, '+' , '.' işlemlerine göre bir S -yarı gruptur.
2. R'nin aşikâr olmayan bir V S -iyi alt halkası vardır öyleki her $p \in P$ ve $v \in V$ için, $vp \in P$ ve $pv \in P$'dir.
3. $v(p_1 + p_2) = vp_1 + vp_2$'dir.
4. Her $p_1, p_2, p \in P$ ve $v, v_1 \in V$ için $v(v_1 p) = (vv_1) p$'dir.

Teorem 5.1.60(W.B.K) : R bir halka, V, R'nin bir alt halkası ve P, V ile ilgili bir S -iyi modül olsun. Bu takdirde, P, V ile ilgili bir iyi modüldür.

Tanım 5.1.106 : R bir halka, P, R'nin V S -iyi alt halkasıyla ilgili bir S -iyi modülü ve T, P'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer, T aynı S -iyi alt halkası için bir Smarandache iyi modül ise T'ye bir smarandache alt iyi modül (S -alt iyi modül) denir.

Tanım 5.1.107 : R bir halka olsun. Eğer, her $x \in R$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in R$ idenpotenti varsa R'ye bir lokal birimsel halka denir.

Tanım 5.1.108 : R bir halka olsun. Eğer, her $x \in R$ için, $xs = sx = x$ olacak şekilde bir $s \in R$ yarı idenpotenti varsa R'ye bir lokal yarı birimsel halka denir.

Teorem 5.1.61(W.B.K) : R bir lokal birimsel halka ise R bir lokal yarı birimsel halkadır.

Teorem 5.1.62(W.B.K) : Bir lokal yarı birimsel halka genelde lokal birimsel bir halka değildir.

İspat : $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ karakteristiği 2 olan cisim ve $G=\langle g \mid g^2=1\rangle$ olsun. $\mathbb{Z}_2G=\{0,1,g,1+g\}$ grup halkası lokal yarı birimseldir. Çünkü, $(1+g)g=g(1+g)=g$ ve $g^2=1$ olduğundan, g bir idenpotent değildir. Bunun için, $\mathbb{Z}_2G$ lokal birimsel değildir.

Tanım 5.1.109 : R bir halka olsun. Eğer, her $x\in R$ için R'de $xe=ex=x$ olacak şekilde bir e S-idenpotent varsa R halkasına bir Smarandache lokal birimsel halka (S-lokal birimsel halka) denir.

Tanım 5.1.110 : R bir halka olsun. Eğer, her $x\in R$ için R'de $xs=sx=x$ olacak şekilde bir s S-yarı idenpotenti varsa R'ye bir Smarandache lokal yarı birimsel halka (S-lokal birimsel halka) denir.

Tanım 5.1.111 : $(R,+,.)$ bir halka ve S, R'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer, S, R'deki çarpma işlemine göre kapalı ve S birtek eleman tarafından üretiliyorsa S'ye R'nin bir kapalı ağı denir. Yani, S, '.' işlemine göre bir yarıgruptur.

Tanım 5.1.112 : $(R,+,.)$ bir halka olsun. Eğer, R, R'nin kapalı ağlarının bir sonlu birleşiminde içeriliyorsa, R bir kapalı ağa sahiptir denir.

Tanım 5.1.113 : R bir halka olsun.Eğer, $R=\cup S_i$ ise R'ye bir CN- halka denir.Burada S_i'ler kapalı ağlar olmak üzere, eğer, $i\neq j$ ise $S_i\cap S_j=\varnothing$ (veya $\{0\}$ veya $\{1\}$), ve $i=j$ ise $1\in R$, $S_i\cap S_j=S_i$ ve her S_i, R'nin aşikâr olmayan bir kapalı ağıdır.

Örnek 5.1.54 : $\mathbb{Z}_8=\{0,1,...,7\}$ halkasını alalım. Açıkça, R bir CN- halka değildir. $S_1=\{4,6\},S_2=\{1,3\},S_3=\{5,1\},S_4=\{1,7\}$ ve $S_5=\{0,2,4\}$ alınarak basitçe görülebilir.

Tanım 5.1.114 : R bir halka olsun. Eğer, $S_i\cap S_j\neq\varnothing\left(veya\ \neq\{1\}\right)$ iken $R\subset\bigcup_i S_i$ ise R'ye bir zayıf CN- halka denir.

Örnek 5.1.55 : $\mathbb{Z}_9=\{0,1,...,8\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_9$ bir CN- halkadır.

Çünkü, $S_1=\{0,3\},S_2=\{0,6\}$ ve $S_3=\{1,2,4,5,7,8\}$, $\mathbb{Z}_9$'un kapalı ağlarıdır.

Teorem 5.1.63(W.B.K) : Her CN- halka bir zayıf CN- halkadır. Fakat, bir zayıf CN - halka genelde bir CN - halka değildir.

Teorem 5.1.64(W.B.K) : $\mathbb{Z}_p$, karakteristiği p olan asal cisim olsun. $\mathbb{Z}_p$ bir CN - halka değildir ve bir zayıf CN - halkada değildir.

Tanım 5.1.115 : R bir halka ve S, R'nin bir alt kümesi olsun. Eğer, S bir S-yarı grup olan bir yarı grupsa S'ye bir Smarandache kapalı ağ (S-kapalı ağ) denir.

Buradan ,kolaylıkla görüyoruz ki, bütün S-kapalı ağlar kapalı ağlardır fakat her kapalı ağ genelde bir s-kapalı ağ değildir.

Tanım 5.1.116 : R bir halka olsun. Eğer, R, R'nin S-kapalı ağlarının bir sonlu birleşiminde içeriliyorsa R bir Smarandache kapalı ağa sahiptir denilir.

Tanım 5.1.117 : R bir halka olsun. Eğer, S_i'ler, $i \neq j$ için $S_i \cap S_j = A, A \neq S_i$ veya $A \neq S_j$ ve A, S_i'nin bir alt grubu iken S-kapalı ağlarsa ve $R = \bigcup_i S_i$ ise R'ye bir Smarandache CN - halka (S - CN - halka) denir.

Tanım 5.1.118 : R bir halka ve S_i'ler Smarandache kapalı ağlar olsunlar. Eğer, $R \subset \bigcup S_i$ ise R'ye bir Smarandache zayıf CN - halka (S-zayıf CN halka) denir.

Teorem 5.1.65(W.B.K) : R bir S - CN - halka olsun. Bu takdirde, R bir zayıf CN - halkadır.

Teorem 5.1.66(W.B.K) : Her S-zayıf CN - halka bir zayıf CN - halkadır fakat tersi doğru olmayabilir.

Tanım 5.1.119 : R bir halka ve M, R'nin bir alt kümesi olsun. Eğer, $|M| \leq 2, |M+M| \leq 2$ ve $|M^2| \leq 2$ ise M R'nin bir sıkı alt kümesidir.

Tanım 5.1.120 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin bir sıkı alt kümesi olan bir M alt kümesi varsa R'ye bir sıkı halka denir.

Örnek 5.1.56 : $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ halkası ve $G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ grubu olsun. $\mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir sıkı halkadır. Çünkü, $M = \{0, 1+g\}, |M| \leq 2, |M+M| \leq 2 \ ve \ |M^2| \leq 2$ olan bir sıkı alt kümesidir.

Tanım 5.1.121 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin, $|M| \leq 2$ olacak şekilde her M alt kümesi, R'nin bir sıkı alt kümesi ise R'ye bir kuvvetli sıkı halka denir.

Örnek 5.1.57 : $G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ iken $R = \mathbb{Z}_2 G$ grup halkası bir kuvvetli sıkı halkadır.

Teorem 2.10.67(W.B.K) : Her kuvvetli sıkı halka bir sıkı halkadır fakat her sıkı halka bir kuvvetli sıkı halka olmak zorunda değildir.

İspat : Sıkı halka ve kuvvetli sıkı halka tanımından ispat açıktır. Tersi için ise, $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,...,7\}$ bir kuvvetli sıkı halka olmayan bir sıkı halkadır.

Teorem 5.1.68 (W.B.K): Karakteristiği sıfır olan hiçbir halka bir sıkı halka değildir.

Tanım 5.1.122 : R bir halka olsun. Eğer, R bir M alt kümesini içeriyor ve $r \geq 2$ için $\left|M\right| \leq r, \left|M+M\right| \leq r \; ve \; \left|M^2\right| \leq r$ ise R'ye bir r- sıkı halka yani T_r-halka denir. Açıkça, $r=2$ için sıkı halka elde ederiz.

Her $i \leq r$ için, her T_r-halka bir T_i-halka'dır. Bunun için,

T-halka $\subset T_3$-halka $\subset \ldots \subset T_r$-halka' dır.

Teorem 5.1.69(W.B.K) : Her T_2-halka bir T_3-halka'dır fakat bütün T_i-halkalar T_2-halka olmak zorunda değildir.

İspat : Tanımından, her T_2-halka bir T_3-halkadır. Tersini ispatlamak için bir örnek verelim. $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,...,8\}$ bir T_3-halkadır fakat bir T_2-halka değildir.

Teorem 5.1.70(W.B.K) : Tamsayılar halkası, herhangi bir sonlu $i \geq 2$ için, bir T_i-halka değildir.

Tanım 5.1.123 : R bir halka ve M, R'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

1. Eğer, M bir S alt kümesini içeriyorsa ve S, R'deki '.' işlemine göre bir yarıgruptur.
2. $\left|M\right| \leq 2, \left|M+M\right| \leq 2, \left|M^2\right| \leq 2$'dir.

şartlarını sağlıyorsa, M'e bir Smarandache sıkı küme (S-sıkı küme) denir.

Tanım 5.1.124 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin bir S- sıkı küme olan bir M alt kümesi varsa R'ye bir Smarandache sıkı halka (S-sıkı halka) denir.

Teorem 5.1.71(W.B.K) : R'nin her S- sıkı kümesi, R'nin bir sıkı kümesidir.

Teorem 5.1.72 (W.B.K): Her R S- sıkı halka bir sıkı halkadır.

Tanım 5.1.125 : R bir halka olsun. Eğer, R'nin her M alt kümesi R'nin bir S- sıkı kümesiyse R'ye bir Smarandache kuvvetli sıkı halka (S-kuvvetli sıkı halka) denir.

Tanım 5.1.126 : R bir halka olsun. Eğer, R, $\left|M\right| \leq r, \left|M+M\right| \leq r \; ve \; \left|M^2\right| \leq r$ olacak şekilde bir M alt kümesini içeriyor ve M, R'nin bir S- sıkı kümesiyse, R'ye bir Smarandache r-tight halka veya bir $S-T_r$ halka denir. $(r \geq 2)$

Tanım 5.1.27 : $\mathbb{Z}_n = \{0,1,...,n-1\}$ halkası olsun.

$P = \{p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \mid p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}_n, n$ sonlu ve $n > 2\}$ olsun. P üzerinde '+' ve '.' işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$X = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $Y = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in P$ olsun.

$X+Y=(p_0+q_0)+(p_1+q_1)i+(p_2+q_2)j+(p_3+q_3)k$ ve

$XY=[p_0q_0+(n-1)p_1q_1+(n-1)p_2q_2+(n-1)p_3q_3]+[p_0q_1+(n-1)p_1q_0+p_3q_2+p_2q_3]i$
$+[p_0q_2+p_2q_0+(n-1)p_1q_3+p_3q_1]j+[p_0q_3+p_3q_0+p_1q_3+(n-1)p_3q_1]k$ olsun.

$i^2=j^2=k^2=(n-1)=ijk, ij=(n-1)ji=k, ji=(n-1)kj=i, ki=(n-1)ik=j$ olsun.

Açıkça, P'de, $0=0+0i+0j+0k$ toplamsal birim ve 1=1+0i+0j+0k çarpımsal birimdir.

n bir sonlu asal sayıysa, P'ye karakteristiği n olan reel quaternionlar halkası denir. Eğer, n bir bileşik sayıysa P sıfır bölenli bir halkadır.

Teorem 5.1.73(W.B.K) : $P=\{\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k \mid \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}_n\}$ halkasını alalım.

$n, i^2=j^2=k^2=n-1=ijk, ij=(n-1)\,ji=k$ olacak şekilde bir bileşik sayı olsun.Bu takdirde, P, sıfır bölenli bir halkadır. P halkası yukarıdaki gibi tanımlansın.

$G=\{\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k \mid \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m, m, \mathbb{Z}_n$'de bir sıfır bölen ve $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}_n\}$

P'deki nilpotent elemanların veya P'nin sıfır bölenlerinin kümesini belirtsin.

$V=\{\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k \mid \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=t, t, \mathbb{Z}_n$'de bir birim ve $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}_n\}$

P'nin bütün birimlerinin kümesini belirtsin. Eğer, p bir asal sayı ve $n=p^r$ ise $P=G\cup V$'dir.

REFERANSLAR;

1. **Kandasamy, W.B. ; American Research Press, Rehoboth,2002.**
   http:// www.gallup.unm.edu/~Smarandache/eBooks-other formats.htm
2. **Rotman, J.J. ; An İntroduction to the theory of groups,Springer-Verlag,Fourth Edition,1995,New York,Berlin.**
3. **Bayar, E. ; Gruplar Teorisi, Karadeniz Üniversitesi,Trabzon,1986.**
4. **Bayar, E. ; Soyut Cebir,Karadeniz Üniversitesi,Trabzon,1986.**
5. **Bayraktar, M. ; Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi,Gazi Kitabevi,Ankara,2006.**
6. **Dönmez, A. ; Soyut Matematik, Seçkin Yayıncılık,Ankara,2001.**
7. **Fraleigh,J.B. ; A First Course İn Abstract Algebra,Fifth Edition, Addision-Weslay,Reading,New York,Paris,1994.**
8. **Jacobson, N. ; Basic Algebra 1 , W.H.Freeman and Company,San Fransisco,1974.**

ÖZGEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Umut KURAN
Doğum yeri : Şanlıurfa
Doğum Tarihi : 07.04.1982
Medeni Hali : Bekar

Eğitimi :

1996, İlköğretim,Çamdibi İlköğretim Okulu,İzmir.
2000,Ortaöğretim, Atakent Anadolu Lisesi, İzmir.
2005, Yükseköğretim,Harran Üniversitesi, Şanlıurfa.