

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BAZI KİNEMATİK
BAĞINTILAR

Mustafa YENEROĞLU

Tez Yöneticisi
Prof.Dr. Vedat ASİL

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BAZI KİNEMATİK
BAĞINTILAR

Mustafa YENEROĞLU

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Vedat ASİL

Üye: Prof.Dr. Mahmut ERGÜT

Üye: Prof.Dr. Rıfat GÜNEŞ

Üye: Doç.Dr. Mehmet BEKTAŞ

Üye: Yrd.Doç.Dr. Esat GÜZEL

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÖR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın; **Prof.Dr. Vedat ASİL**' e ve yine her konuda desteğini gördüğüm Geometri Ana Bilim Dalı Başkanı değerli hocam Sayın; **Prof.Dr. Mahmut ERGÖT**' e Őükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılar sunarım.

Ayrıca çalıőmalarım sırasında bana yardımcı olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın; **Doç.Dr. Mehmet BEKTAŞ** ve Sayın; **Yrd.Doç.Dr. Mustafa İN**'e teőekkürlerimi sunarım.

Mustafa YENEROğLU

İÇİNDEKİLER

| | |
|-----------------------|-----|
| İÇİNDEKİLER..... | I |
| ŞEKİLLER LİSTESİ..... | III |
| SİMGELER LİSTESİ..... | IV |
| ÖZET | V |
| ABSTRACT..... | VI |

| | |
|-------------|---|
| Giriş | 1 |
|-------------|---|

BİRİNCİ BÖLÜM

| | |
|--------------------------------|---|
| Temel Tanım Ve Teoremler | 2 |
|--------------------------------|---|

İKİNCİ BÖLÜM

| | |
|---|----|
| 3-Boyutlu Minkowski Uzayındaki Hareketler | 10 |
| 2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Küresel Hareket | 10 |
| Koordinat Dönüşümü | 10 |
| 2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Katı Hareketler..... | 16 |
| Koordinat Dönüşümleri..... | 16 |
| Bir Hareketin Vida Eksenini | 17 |

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

| | |
|---|----|
| n-Boyutlu Minkowski Uzayındaki Hareketin Cebirsel Özellikleri | 18 |
| 3.1. Hareketler İçin Norm Tanımı..... | 18 |
| 3.2. Matris Operasyonlarının Sürekliliği..... | 18 |
| 3.3. Matris Grupları | 19 |
| 3.4. Bir Hareketin Türevi..... | 20 |
| 3.5. Tanjant Operatörü..... | 20 |
| 3.6. Tanjant Operatörler İle Birleştirilmiş Vektörler | 23 |

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

| | |
|--|----|
| \mathbb{R}_1^3 , 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Kinematik Ve Diferensiyel Geometri ... | 26 |
|--|----|

| | |
|--|----|
| 4.1. Lie Cebiri | 26 |
| 4.2. Sol İnvaryant Vektör Alanları..... | 28 |
| 4.3. Kovaryant Türev Ve Afin Konneksiyonu | 29 |
| 4.4. Geodezikleri Vida Hareketi Olan Minkowski Metrik..... | 30 |
| 4.5. Kinematik Konneksiyon | 37 |
| Kinematik Konneksiyonla Uyumlu Metrik..... | 38 |
| | |
| BEŞİNCİ BÖLÜM | |
| Uygulamalar | 44 |
| | |
| Sonuç Ve Öneriler..... | 49 |
| | |
| KAYNAKLAR..... | 50 |

ŞEKİLLER LİSTESİ

| | |
|------------------|----|
| Şekil 2.1.a..... | 11 |
| Şekil 2.1.b..... | 11 |
| Şekil 2.2.a..... | 12 |
| Şekil 2.2.b..... | 12 |
| Şekil 2.3.a..... | 12 |
| Şekil 2.3.b..... | 12 |
| Şekil 2.4..... | 14 |
| Şekil 2.5..... | 17 |
| Şekil 4.1..... | 26 |
| Şekil 5.1..... | 44 |
| Şekil 5.2.a..... | 46 |
| Şekil 5.2.b..... | 46 |
| Şekil 5.3.a..... | 48 |
| Şekil 5.3.b..... | 48 |

SİMGELER LİSTESİ

| | |
|---------------------------------|---|
| \langle , \rangle | : Minkowski İç çarpımı |
| \times | : Minkowski uzayında vektörel çarpım |
| $\ , \ $ | : Minkowski uzayında norm |
| $[,]$ | : Lie parentezi |
| \mathbb{R}_1^2 | : 2-boyutlu Minkowski Uzayı |
| \mathbb{R}_1^3 | : 3-boyutlu Minkowski Uzayı |
| $\mathbb{R}^{n \times n}$ | : $n \times n$ tipinde Reel matrisler |
| \dot{T} | : T nin noktasal türevi |
| ∇ | : Konneksiyon |
| $GL(n, \mathbb{R})$ | : $n \times n$ matrislerin grubu |
| $SO_1(n)$ | : $n \times n$ dönme matrislerinin grubu |
| $so_1(n)$ | : $n \times n$ dönme matrislerinin Lie cebiri |
| $H_1(n)$ | : $n \times n$ katı hareketlerin matris grubu |
| $h_1(n)$ | : $n \times n$ katı hareketlerin matris grubunun Lie cebiri |
| C_{ij}^k | : Lie cebiri yapı sabitleri |
| $V(t)$ | : Bir cismin Hızı |
| $\ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{t})$ | : Bir Cismin ivmesi |
| Ad | : Adjoint dönüşüm |
| w | : Açısal hız |
| v | : Lineer hız |
| ξ | : Açısal ivme |
| a | : Lineer ivme |
| Γ_{ji}^k | : Christoffel sembolü |
| $R(X, Y)Z$ | : Eğrilik Tensör Alanı |

ÖZET

Doktora Tezi

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BAZI KİNEMATİK BAĞINTILAR

Mustafa YENEROĞLU

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 57

Bu çalışma beş bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; Minkowski metriği, Lorentz Manifoldu, Lie grubu, Lie cebiri, gibi temel tanımlar verildi.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölüm çalışmanın orjinal kısmı olarak verildi. İkinci bölümde; \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında küresel hareketler incelendi ve küresel hareket de koordinat dönüşümleri, ortogonal matrisin karakteristik vektörleri, Cayley formülü, Rodrigues denklemi, Euler parametreleri araştırıldı. Bunlara ilave olarak \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında katı hareketin koordinat dönüşümü, vida eksenini verildi.

Üçüncü bölümde; n-boyutlu Minkowski uzayda bir hareketin cebirsel özellikleri incelendi. Ayrıca bir hareketin normu, türevi, matris grupları ve tanjant operatörü verildi.

Dördüncü bölümde; Katı hareketlerin Minkowski metriği seçimi incelendi. Geodezikleri vida hareketi olan Minkowski metriği verildi. Kinematik konneksiyonla uyumlu Minkowski metriği ve $H_1(4)$ ün eğriliği elde edildi.

Beşinci bölümde ise; $H_1(3)$ ve $H_1(4)$ ile ilgili bazı örnekler verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Katı hareket, Vida hareketi, Tanjant operatörü, Lie grubu, Lie cebiri, Levi-Civata konneksiyonu, Eğrilik.

ABSTRACT

PhD Thesis

SOME KINEMATIC RELATIONS IN THE 3-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Mustafa YENEROĞLU

Firat University

Graduate School of science and Technology

Departments of Mathematics

2007, Page: 57

This study has been arranged in five chapters.

In the first chapter; the fundamental definitions such as Minkowski metric, Lorentz manifold, Lie group, Lie algebra, are given.

The original parth of study is given in the second, thirth and fourth chapters. In the second chapter; Sphrerical motions are examined in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{R}_1^3 . The coordinate transformations in spherical motion, the characteristic vectors of rotation matrix, the Cayley formula, the Rodrigues equation and Euler parameters are investigated. In additon, the coordinate transformations and the screw axis are given for spatial motions in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{R}_1^3 .

In the third chapter; the algebraic properties a motion are investigated . In addition, we have given the norm, the matrix groups, the derivative of a motion and tangent operators.

In the fourth chapter; The Minkowski metric choice of Spatial motions is investigated. It is given Minkowski metric whose geodesics are screw motions. Minkowski metric compatible with the kinematic connection and the curvature of $H_1(4)$ is obtained.

In the fifth chapter; some examples in interest with the $H_1(3)$ and $H_1(4)$ are given.

Keywords: Spatial motion, Screw motion, Tangent operator, Lie group, Lie algebra, Levi-Civata connection, Curvature.

GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında hareketler konusu detaylı bir şekilde [9,16,17,22] kaynaklarında incelenmiştir. Benzer şekilde vida teorisi ve Twistler üzerine çeşitli incelemeler de [11,15,16,17,21,23,24] tarafından yapılmıştır.

3-boyutlu Öklid uzayında hareketlerin cümlesi bir Lie grubu formunda olduğu McCarty [16] tarafından verilmiştir. Schutz [18] Lie grupları ve Lie cebiri ile ilgili incelemeler yapmıştır. Hacısalihoğlu [19] "Yüksek Diferensiyel Geometri" kitabında Lie grubu ve Lie cebirinin izomorf olduğunu ifade etmiştir. Asil [13] üstel dönüşümlerin Lie grubu olduğunu ve üstel hareketleri doktora tezinde incelemiştir. Bir Lie cebirinin Twist uzayı, bu uzayın sol invariant vektör alanlarına izomorf olduğu Zefran [11] tarafından verilmiştir.

O'Neil [2] "Semi-Riemannian Geometry" adlı kitabında Semi-Riemann Geometride Lie grubu ve Lie cebirini vermiştir. Minkowski düzleminde hareketler Ergin [4] tarafından doktora tezi olarak incelenmiştir.

Bu çalışmada ise amacımız, Öklid uzayında verilen hareketlerin, Minkowski uzayındaki karşılıklarını vererek bazı kinematik bağıntılar elde etmektir. Bu amaçla çalışmamız beş ana bölümden oluşturulmuştur.

Çalışmamızda ilk olarak Minkowski uzayında bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; 3-boyutlu Minkowski uzayında küresel ve katı hareketler incelendi.

Üçüncü bölümde; n- boyutlu Minkowski uzayında bir harekete karşılık gelen matrisin normu ifade edildi. Bu norm tanımına bağlı olarak matris işlemlerinin sürekliliği verildi. Daha sonra Minkowski uzayında hareketlere karşılık gelen matris grupları ve Tanjant operatörleri verildi. Tanjant operatörleri ile birleştirilmiş vektörler ifade edildi.

Dördüncü bölümde ise; 3-boyutlu Minkowski uzayında Lie cebiri ve Twist uzayı, sol invariant vektör alanları, kovaryant türev verildi. Daha sonra geodezikleri vida hareketi olan Minkowski metriği incelendi. 3-boyutlu Minkowski uzayında Kinematik konneksiyon ve bu konneksiyonla uyumlu Minkowski metriği verildi.

Son bölümde ise; 2 ve 3 boyutlu Minkowski uzayında hareketlerle ilgili bazı örnekler verildi ve Maple 9,5 programı yardımıyla şekilleri çizildi.

I. TEMEL TANIMLAR

Tanım 1.1: \mathbb{R}^n üzerinde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (1.1)$$

ile tanımlanan dönüşüm

- a) Simetrik,
- b) Bilineer,
- c) non-dejenere ($\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için $\langle \vec{x}^T, \vec{y}^T \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$) dir.

\mathbb{R}^n üzerinde tanımlanan bu dönüşüme Minkowski metriği denir ve $\mathbb{R}_1^n = \{\mathbb{R}^n, \langle, \rangle\}$ ikilisine de n-boyutlu Minkowski uzayı adı verilir [1].

Tanım 1.2: $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. Eğer

- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise \vec{x} time-like vektör,
- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise \vec{x} space-like vektör,
- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise \vec{x} null vektör,

denir [2].

Tanım1.3: $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için \vec{x} in normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır [1].

Tanım1.4: $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için

- $\|\vec{x}\| = -1$ ise \vec{x} 'e birim time-like vektör,
- $\|\vec{x}\| = 1$ ise \vec{x} 'e birim space-like vektör,

denir [1].

Tanım1.5: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise bu vektörlere Lorentz anlamında diktirler denir. İki vektörün bir birine dik olması için birinin time-like diğerinin space-like olması gerekir [1].

Tanım1.6: \mathbb{R}_1^3 , Minkowski uzayında iki vektör \vec{x}, \vec{y} olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ nin Minkowski uzayında vektörel çarpımı;

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (1.3)$$

biçiminde tanımlanır [2].

Teorem1.7: \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. Buna göre $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}_1^3$ için;

- i) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = -\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- ii) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = -\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}$,
- iii) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$,
- iv) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$,

dır, [3].

Teorem1.8: \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. Buna göre $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}_1^3$ için;

- i) \vec{x} ve \vec{y} space-like ise $\vec{x} \times \vec{y}$ bir time-like vektördür.
- ii) \vec{x} space-like ve \vec{y} time-like ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- iii) \vec{x} space-like ve \vec{y} null vektör olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise $\vec{x} \times \vec{y}$ null vektör, eğer $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- iv) \vec{x} ve \vec{y} null vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- v) \vec{x} time-like ve \vec{y} null vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- vi) \vec{x} ve \vec{y} time-like vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür [3].

İspat:

i) \vec{x} ve \vec{y} space-like vektörler olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$, $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle > 0$ ve $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $\|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

dir. Diğer yandan $(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$ olduğundan $(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$ olur. Burada \vec{x} ve \vec{y} vektörleri lineer bağımsızdır (Eğer vektörler lineer bağımlı olsa idiler $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ olurdu). Dolayısıyla $(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \neq 0$ dir. Böylece $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle < 0$ olup $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörü bir time-like vektördür.

ii) \vec{x} space-like ve \vec{y} time-like vektör olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$, $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle < 0$ ve $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $-\|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

elde edilir. Buradan $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0$ olur. O halde $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.

iii) \vec{x} space-like ve \vec{y} null vektör olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ ve $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$$

olur. Eğer $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = 0$ dir. O zaman $\vec{x} \times \vec{y}$ null vektördür. Eğer $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ ise $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0$ dir. Bu durumda $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.

iv) \vec{x} ve \vec{y} null vektörler olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$$

elde edilir. Ortogonal iki null vektörü lineer bağımlı olduğundan $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ dir. O halde $\vec{x} \times \vec{y} \neq 0$ dir. Buradan $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0$ olduğundan $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like bir vektördür.

v) \vec{x} time-like ve \vec{y} null vektör olduğundan

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$$

dir. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ olduğundan $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörü space-like'dir.

vi) \vec{x} ve \vec{y} time-like vektör olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ve $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle < 0$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

elde edilir. Diğer yandan $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| > \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ dir [3]. Böylece $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 > 0$ bulunur. O halde $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like bir vektördür.

Tanım1.9: \mathbb{R}_1^n , n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $R: \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ lineer ve örten bir dönüşüm olmak üzere $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle R(\vec{x}), R(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad (1.4)$$

ise R ye \mathbb{R}_1^n üzerinde bir izometri ya da ortogonal dönüşüm denir [4].

Tanım1.10: $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$R(u) = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

matrisine \mathbb{R}_1^2 de dönme matrisi denir [4].

Sonuç1.11: $G = \{R(u) : u \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere (G, u) ikilisi bir gruptur. Bu grub $SO(1, 1)$ veya $SO_1(2)$ ile gösterilir [4].

Sonuç1.12: G nin elamanlarının her biri bir lineer dönüşüme karşılık gelir [4].

Teorem1.13: $R(u)$ matrisine karşılık gelen R lineer dönüşümü altında time-like vektörler time-like vektörlere, space-like vektörler space-like vektörlere ve null vektörler de null vektörlere dönüştür [4].

İspat: $\vec{X} = (x_1, x_2)$ bir time-like vektör olsun. O zaman $\vec{X} \in \mathbb{R}_1^2$ ve $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = -x_1^2 + x_2^2 < 0$ olur. (1.5) den

$$R(u)\vec{X} = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cosh u + x_2 \sinh u \\ x_1 \sinh u + x_2 \cosh u \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle R(u)\vec{X}, R(u)\vec{X} \rangle &= -(x_1 \cosh u + x_2 \sinh u)^2 + (x_1 \sinh u + x_2 \cosh u)^2 \\ &= -x_1^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) + x_2^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) \\ &= -x_1^2 + x_2^2 \\ &= \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0; \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da time-like vektörlerin time-like vektörlere dönüştüğünü gösterir. Benzer şekilde \vec{X} in space-like veya null vektör olması halleri de gösterilebilir.

Tanım1.14: Bir R matrisi $R^T \varepsilon R = \varepsilon$ şartını sağlıyorsa R matrisine Minkowski uzayında ortogonal matris denir [2].

Tanım1.15: Bir B matrisi $B^T = -\varepsilon B \varepsilon$ eşitliğini sağlıyor ise bu matris Minkowski uzayında anti-simetrik matris denir [2].

Tanım1.16: 3-boyutlu Minkowski uzayında, bir eksen etrafındaki, dönme ekseninin time-like, space-like veya null olmasına göre üç tipi vardır:

i) Eksen space-like ise $\varphi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < \varphi < \infty. \quad (1.6)$$

ii) Eksen time-like ise $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.7)$$

iii) Eksen null ise $\Psi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\Psi^2}{2} & -\frac{\Psi^2}{2} & \Psi \\ \frac{\Psi^2}{2} & 1 - \frac{\Psi^2}{2} & \Psi \\ \Psi & -\Psi & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < \Psi < \infty. \quad (1.8)$$

[5]. Bu çalışmada incelemelerimiz eksenin time-like veya space-like olmasına göre yapılacaktır.

Tanım1.17: M bir C^∞ -manifold olmak üzere;

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, non-dejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir [2].

Tanım1.18: M bir C^∞ -manifold ve \langle, \rangle de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M, \langle, \rangle) çiftine bir Semi-Riemann manifold denir [6].

Tanım1.19: $boy M = n$ olmak üzere (M, \langle, \rangle) çifti bir Semi-Riemann manifold olsun. $n \geq 2$ ve indeksi de 1 ise (M, \langle, \rangle) çiftine bir Lorentz manifoldu denir [2].

Tanım 1.20: M bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer ;

$$\begin{aligned} \vec{v}_p &: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \vec{v}_p[f] \end{aligned}$$

operatörü, $\forall p \in M, \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

- 1) $\vec{v}_p[\lambda f + \mu g] = \lambda \vec{v}_p[f] + \mu \vec{v}_p[g]$
- 2) $\vec{v}_p[fg] = g \vec{v}_p[f] + f \vec{v}_p[g]$

aksiyomlarını sağlıyorsa bu operatöre Lorentz manifoldunun $p \in M$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

M Lorentz manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi

$$T_p(M) = \{\vec{v}_p \mid \vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir. $\forall p \in M, \vec{v}_p \in T_p M$ tanjant vektörü

- $\langle \vec{v}_p, \vec{v}_p \rangle > 0$ ise \vec{v}_p ye space-like tanjant vektör,
- $\langle \vec{v}_p, \vec{v}_p \rangle < 0$ ise \vec{v}_p ye time-like tanjant vektör,
- $\langle \vec{v}_p, \vec{v}_p \rangle = 0$ ise \vec{v}_p ye null tanjant vektör denir [7].

Tanım 1.21: M bir Lorentz manifoldu olsun. $X : M \rightarrow \bigcup_{P \in M} T_P(M)$ 1:1 ve üzerine olarak tanımlanan X fonksiyonuna, M Lorentz manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir. Vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

n -boyutlu Minkowski uzayı \mathbb{R}_1^n de

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$$

sistemi bir vektör alanı sistemi olsun. \mathbb{R}_1^n de tanımlanan bu n -liye doğal baz vektör alan sistemi veya doğal baz alan sistemi denir [8].

Tanım 1.22: $u^1, \dots, u^n; \mathbb{R}_1^n$ nin doğal koordinatları olsun. V ve W \mathbb{R}_1^n de vektör alanları olmak üzere $W = \sum W^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ise

$$D_V W = \sum V(W^i) \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (1.9)$$

vektör alanına W nin V ye göre doğal kovaryant türevi denir [2].

Tanım 1.23: M bir manifold ve M üzerinde bir lineer operatör, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} \nabla & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) & \rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde bir afin konneksiyon veya lineer konneksiyon denir, ∇_X de X vektör alanı yönünde kovaryant türev denir [9].

- 1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- 2) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X[f]Y$

Teorem 1.24: M bir manifold ∇ da bir konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (1.10)$$

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (1.11)$$

∇ ya Levi-Civata konneksiyonu denir. ∇ nın koszul eşitliği aşağıdaki gibi yazılır [2].

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ - \langle X, [Y, Z] \rangle &+ \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle . \end{aligned} \quad (1.12)$$

Önerme 1.25: M bir manifold, $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri, $a \in I$ ve $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ olsun. O zaman $Z(a) = z$ olacak şekilde α nın bir tek Z paralel vektör alanı vardır [2].

Tanım 1.26: Yukarıdaki önermeden $a, b \in I$ ise o zaman $Z(b) = z$ olacak şekilde

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \rightarrow T_q(M)$$

fonsiyonuna $p = \alpha(a)$ dan $q = \alpha(b)$ ye α boyunca paralel dntim denir [2].

Tanım 1.27: M bir Lorentz manifold ve M zerindeki vektör alanları uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$$

Öyle ki

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.13)$$

olarak tanımlanan R fonksiyonuna $\chi(M)$ üzerinde 3. dereceden bir kovaryant tensör alanı denir. Bu kovaryant tensör alanına M nin eğrilik tensör alanı ve bunun $p \in M$ noktasındaki değeri olan $R(X_p, Y_p)Z_p$ tensörüne de M nin p noktasındaki eğrilik tensörü yada kısaca M nin p deki eğriliği denir [10].

Tanım 1.28: M bir manifold ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olsun. M nin bir vektör alanı X olmak üzere $\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ ise α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir [9].

Tanım 1.29: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ dnm aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu dnime V üstünde bir Lie operatörü denir [9].

- 1) 2-lineer
- 2) $\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$
- 3) $\forall X, Y, Z \in V$ için;

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Tanım 1.30: M bir manifold ve G de bir grup olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir Lie grubu denir [9].

- 1) M nin noktaları G nin elemanları ile akıır.
- 2) $M \times M \rightarrow M$
 $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ işlemi her yerde diferensiyellenebilir.

Tanım 1.31: G bir Lie grubu olsun. Belli bir $g_0 \in G$ noktasında

$$l_{g_0} : G \rightarrow G$$

dnm $\forall g \in G$ için

$$l_{g_0}(g) = g_0 g$$

şeklinde tanımlanır ve G üzerinde sol paralelizim adımı alır [19].

Tanım 1.33: $F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer, $\vec{v}_P \in T_P(E^n)$ ise $(F_*)_P(\vec{v}_P) \in T_{F(P)}(E^m)$ de E^m nin $t \rightarrow F(\vec{P} + t\vec{v})$ eğrisinin $t = 0$ daki hız vektörü olsun. Böylece tanımlı

$$F_*(P) : T_P(E^n) \rightarrow T_{F(P)}(E^m)$$

fonksiyonuna, F nin $P \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümü denir [9].

Tanım 1.32: G bir matris Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. $\forall g_0, g_1 \in G$ için $l_{g_0*} : T_{g_1}(G) \rightarrow T_{g_0g_1}(G)$ türev dönüşümü olmak üzere

$$l_{g_0*}(X) = X(l_{g_0}(g_1))$$

ise X vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir [19].

II. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDAKİ HAREKETLER

2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Küresel Hareket

Koordinat Dönüşümü

\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında F sabit ve M de hareketli iki koordinat çatısı olsun. \vec{x} ve \vec{y} de, sırasıyla, F ve M de aynı bir noktanın koordinatlarını tanımlayan iki time-like veya space-like vektör olmak üzere F den M ye bir dönme hareketi

$$\vec{x} = R\vec{y} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. (2.1) ifadesindeki R Minkowski anlamında ortogonal matristir. Dönme hareketi, determinantı +1 eşit olan ortogonal matrislerle ifade edilir. 3-boyutlu Minkowski uzayındaki dönmelere karşılık gelen matris grupları $SO(2,1)$ veya $SO_1(3)$ ile gösterilir [2].

(2.1) dönüşümü; F sabit çatısından M hareketli çatısına olan bir dönme hareketidir.. Burada bir P noktası göz önüne alındığında bunun ilk konumu \vec{y} son konumu \vec{x} dir. Böylece P noktası Minkowski uzayında hareketli bir noktadır.

3-boyutlu Minkowski uzayında cismin dönme eksenine roll eksenini denir. Bu eksenin, sırasıyla, space-like ve time-like olmasına göre matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$
$$R_2 = \begin{bmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cismin dönme eksenine dik olan eksene pitch eksenini adı verilir. Pitch eksenin, sırasıyla, time-like ve space-like olmasına göre matris formları;

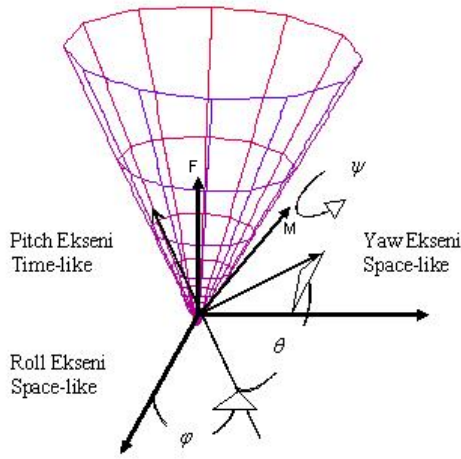
$$R_3 = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$
$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Cismin hem roll eksenine hem de pitch eksenine dik olan eksene yaw ekseni denir ve sırasıyla, space-like ve time-like olmasına göre matris gösterimi aşağıdaki gibi olur:

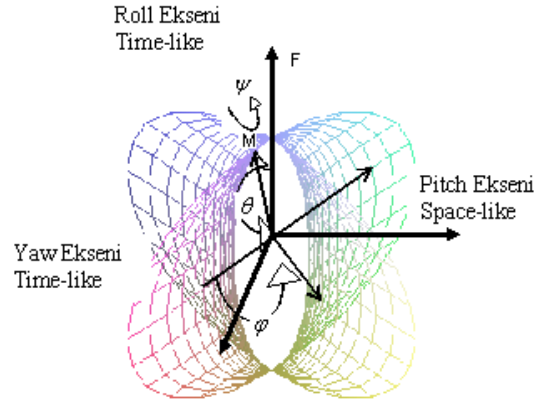
$$R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu eksenler şekil 2.1.a ve şekil 2.1.b de gösterildi.



Şekil 2.1.a

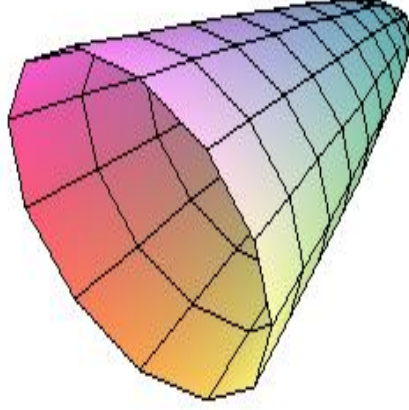


Şekil 2.1.b

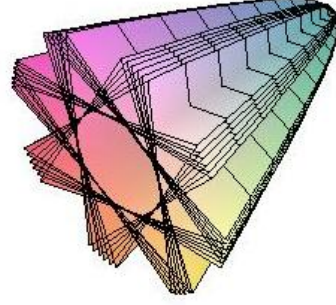
O halde F sabit çatısından M hareketli çatısına bir R dönme hareketi bu eksenler tarafından tanımlanabilir. Eğer roll eksen space-like ise

$$R = R_5 R_3 R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

şeklindedir. R nin oluşturduğu dönme yüzeyi ve bu yüzeyin hareketi, sırası ile, şekil 2.2.a ve şekil 2.2 b ile verildi.



Şekil 2.2.a

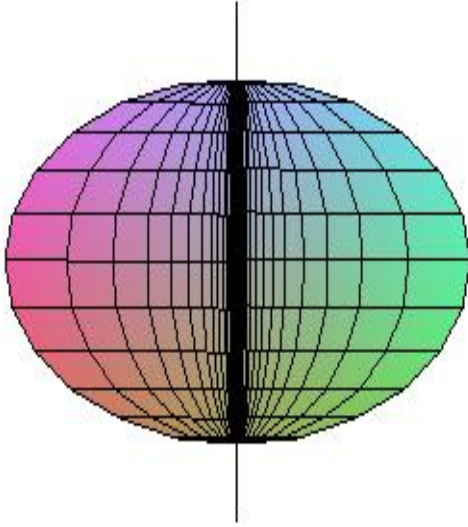


Şekil 2.2.b

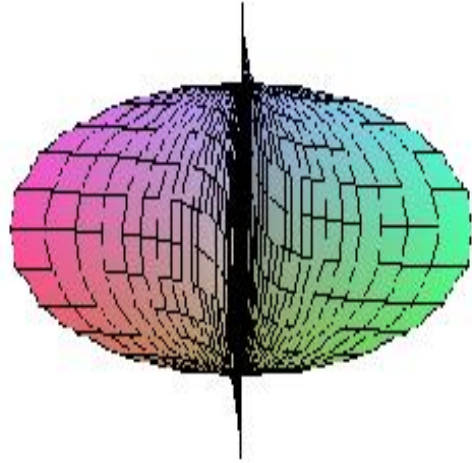
Eğer roll eksenini time-like ise hareketin matris gösterimi;

$$R = R_6 R_4 R_2 = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. R nin oluşturduğu dönme yüzeyi ve hareketi şekil 2.3.a ve şekil 2.3.b ile verilir.



Şekil 2.3.a



Şekil 2.3.b

Teorem 2.1.1: \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir dönme hareketi altında konumu değişmeyen, yani sabit kalan eksenler karakteristik vektörler tarafından verilir.

İspat: R ve ε 3-bouyutlu Minkowski uzayında sırasıyla, ortogonal ve birim matrisler, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer R matrisi ε nun λ ile çarpımından ibaret ise

$$R = \lambda\varepsilon$$

olacağından, sıfırdan farklı $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü için

$$R(\vec{y}) = \lambda\varepsilon\vec{y} \quad (2.3)$$

elde edilir. Böylece (2.3) denklemi, karakteristik değer polinomuna genişletilebilir.

Şimdi R nin karakteristik değerlerini inceleyelim:

$$P_R(\lambda) = \det(R - \lambda\varepsilon) = 0$$

ifadesi açılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda^3 + \lambda^2(r_{11} - r_{22} - r_{33}) + \lambda(M_{11} - M_{22} - M_{33}) + 1 = 0$$

olur. Burada M_{ii} , R ortogonal matrisinin i . satır ve i . sütun minörü olup $M_{ii} = r_{ii}$ dir. Dolayısıyla

$$\lambda^3 + (\lambda^2 + \lambda)(r_{11} - r_{22} - r_{33}) + 1 = 0$$

ya da

$$(\lambda^3 + 1)(\lambda^2 + \lambda(r_{11} - r_{22} - r_{33}) + 1) = 0$$

olur. Burada $\lambda = -1$ in bir kök olduğu açıktır. Diğer kökler sırasıyla $+1$, hiperbolik veya kompleks olur. Burada sadece $\lambda = -1$ için inceleme yapılacaktır. $\lambda = -1$ karşılık gelen karakteristik vektör \vec{b} olsun. \vec{b} doğrultusundaki yani $v = t\vec{b}$ doğrusu üzerindeki bütün noktalar dönme süresince sabittir. Bu eksen cismin dönme eksenidir ve space-like veya time-likedir.

Teorem 2.1.2 (Cayley Formülü): \mathbb{R}_1^3 , Minkowski uzayında bir ortogonal matris bir anti-simetrik matris tanımlar. Bunun terside doğrudur.

İspat: \vec{x} ve \vec{y} time-like veya spacelike iki vektör olsun. Dönme hareketi izometrik olduğundan

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = 0 \quad (2.4)$$

olup, böylece $\vec{x} - \vec{y}$ ve $\vec{x} + \vec{y}$ vektörleri Minkowski uzayında ortogonaldır. (2.4) ve (2.1) denklemleri birlikte gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$B = (R - \varepsilon^2)(R + \varepsilon^2)^{-1} \quad (2.5)$$

matrisi elde edilir. $B^T = -\varepsilon B \varepsilon$ olduğundan B matrisi anti-simetriktir. Dolayısıyla (2.5) ifadesi bize Minkowski uzayında Cayley formülünü verir. Diğer yandan (2.5) ifadesi R için çözüldüğünde

$$R = (\varepsilon^2 - B)^{-1}(B + \varepsilon^2) \quad (2.6)$$

elde edilir. Buradan da ispat tamamlanır.

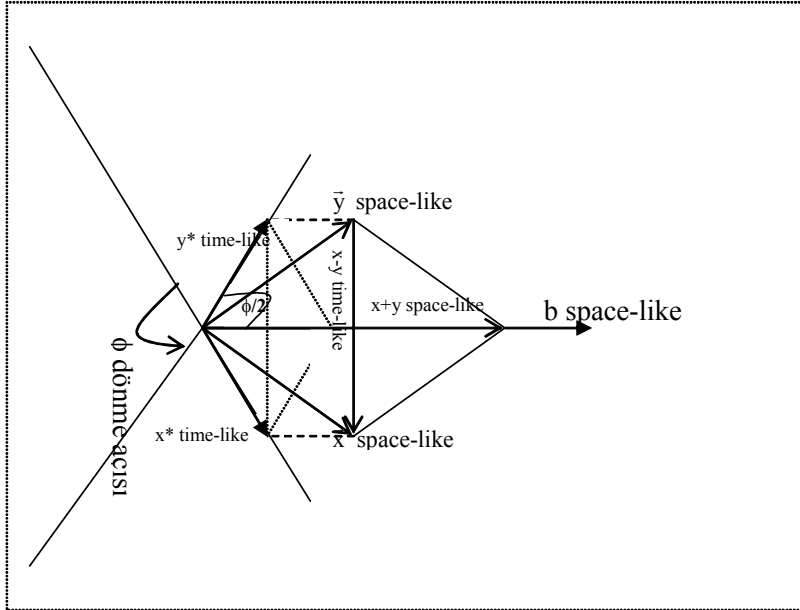
3×3 tipindeki B Minkowski uzayındaki anti-simetrik matrisi üç bağımsız elamana sahiptir, yani

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

dır. Bu matris $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörünün elamanlarından oluşmuştur. Keyfi bir $\vec{u} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün B matrisi ile çarpımı bu vektörün \vec{b} ile vektörel çarpımına eşittir, yani

$$B\vec{u} = \vec{b} \times \vec{u} \quad (2.8)$$

dır. Böylece B anti-simetrik matrisini oluşturan \vec{b} vektörü $\lambda = -1$ e karşılık gelen karakteristik vektördür.



Şekil 2.4

Tanım 2.1.3 (Rodrigues Denklemi): \vec{x} ve \vec{y} space-like (veya time-like) iki vektör ve \vec{b} de space-like (veya time-like) vektör ise (2.8) den

$$(\vec{x} - \vec{y}) = B(\vec{x} + \vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{b} \times (\vec{x} + \vec{y}) \quad (2.9)$$

bağıntısı yazılabilir. (2.9) ifadesine Minkowski uzayında Rodrigues denklemi ve \vec{b} vektörüne de Rodrigues vektörü denir.

\vec{x} ve \vec{y} space-like (veya time-like) vektörler olduğundan $\vec{x} + \vec{y}$ de space-like (veya time-like) vektör olur. Diğer yandan \vec{b} space-like (veya time-like) olduğundan (2.9) daki $\vec{x} - \vec{y}$ time-like olur.

\vec{x} ve \vec{y} space-like (veya time-like) vektörlerin \vec{b} space-like (veya time-like) vektörüne dik düzlem üzerine iz düşümleri, sırasıyla, \vec{x}^* ve \vec{y}^* time-like (veya space-like) vektörler olsun. $\vec{x}^* + \vec{y}^*$ time-like (space-like) olduğundan

$$\langle \vec{b}, \vec{x}^* + \vec{y}^* \rangle = 0 \quad (2.10)$$

olur. O zaman

$$\cosh \theta = \frac{\langle \vec{b}, \vec{x}^* + \vec{y}^* \rangle}{\|\vec{b}\| \|\vec{x}^* + \vec{y}^*\|}$$

ifadesinden $\cosh \theta = 0$ bulunur. Ayrıca $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ ifadesinin her iki yanının mutlak değeri alınırsa

$$|\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta| = |1|$$

olur. Buradan $\cosh \theta = 0$ olduğundan $\sinh \theta = 1$ bulunur. Diğer yandan

$$\|\vec{x}^* - \vec{y}^*\| = \|\vec{b}\| \|\vec{x}^* + \vec{y}^*\| \quad (2.11)$$

elde edilir. ϕ , \vec{x}^* ve \vec{y}^* arasındaki açı olmak üzere şekil 2.4 den.

$$\tanh \frac{\phi}{2} = \frac{\|\vec{x}^* - \vec{y}^*\|}{\|\vec{x}^* + \vec{y}^*\|} \quad (2.12)$$

olur. (2.11) ve (2.12) den

$$\|\vec{b}\| = \tanh \frac{\phi}{2} \quad (2.13)$$

bulunur. O halde \vec{b} vektörünün bileşenleri

$$b_1 = \tanh \frac{\phi}{2} s_1, \quad b_2 = \tanh \frac{\phi}{2} s_2, \quad b_3 = \tanh \frac{\phi}{2} s_3 \quad (2.14)$$

olarak elde edilir. Burada $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ \vec{b} yönündeki birim space-like (time-like) vektördür.

Tanım 2.1.4 (Euler Parametresi): (2.6) ifadesi; R ortogonal matrisi, ϕ dönme açısı, \vec{s} birim vektörü, \vec{s} nin bileşenlerinden oluşan anti-simetrik matris S ve $B = \tanh \frac{\phi}{2} S$ olmak üzere tekrar yazılırsa

$$R = (\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 - \sinh \frac{\phi}{2} S)^{-1} (\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 + \sinh \frac{\phi}{2} S) \quad (2.15)$$

biçiminde elde edilir. $C = (\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 + \sinh \frac{\phi}{2} S)$ denirse C matrisini oluşturan $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ sabitlerine R nin Minkowski uzayındaki Euler parametresi adı verilir ve

$$c_0 = \cosh \frac{\phi}{2}, c_1 = \sinh \frac{\phi}{2} s_1, c_2 = \sinh \frac{\phi}{2} s_2, c_3 = \sinh \frac{\phi}{2} s_3 \quad (2.16)$$

olarak bulunur.

(2.15) deki çarpımı açmak için $(\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 - \sinh \frac{\phi}{2} S)^{-1}$ matrisinin inversi hesaplanır ve C ile çarpılırsa

$$R = (\cosh^2 \frac{\phi}{2} + \sinh^2 \frac{\phi}{2}) \varepsilon^2 + \sinh \phi S + (\cosh \phi - 1) S^2 \quad (2.17)$$

elde edilir. S anti-simetrik bir matris olduğundan $S^3 + S = 0$ dir. Diğer yandan $S^2 = \varepsilon(S^2)^T \varepsilon$ simetrik bir matris olduğundan

$$2 \sinh \phi(S) = R - \varepsilon R^T \varepsilon \quad (2.18)$$

bulunur. Böylece ϕ açısının R ve S matrislerine bağlı olduğu görülür.

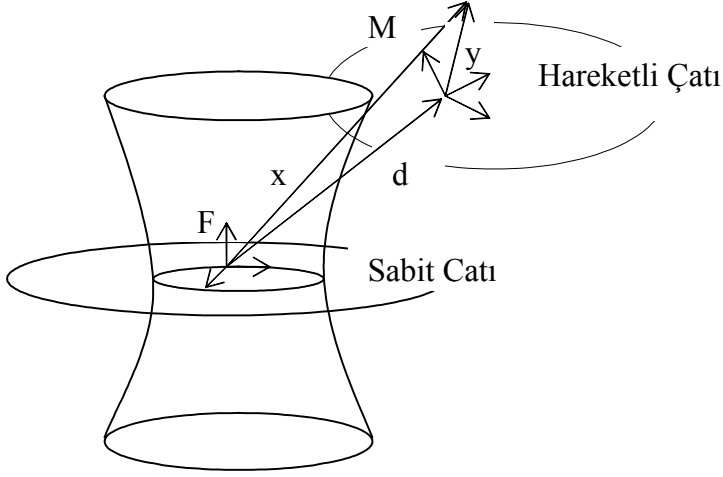
2.2 Minkowski Uzayda Katı Hareketler

Koordinat Dönüşümleri

\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında, F sabit çatısı ve M hareketli çatısında bir noktanın time-like (space-like) vektörleri sırasıyla \vec{x} ve \vec{y} olsun. \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir katı hareket

$$\vec{x} = R\vec{y} + \vec{d} \quad (2.19)$$

dönüşümüyle tanımlanır. Burada $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bir ortogonal matris, $\vec{d} \in \mathbb{R}_1^3$ de bir öteleme vektörüdür.



Şekil 2.5

Bir Hareketin Vida Ekseni

\mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayda, bir çatı hareket altında sabit olan hareketli cismin noktalarını göz önüne alalım. Bu noktalar, hareketin başlangıç ve bitiş anında aynı koordinatlara sahip olsunlar. Bu koordinatları \vec{c} ile gösterelim. O zaman (2.19) dan

$$\vec{c} = R\vec{c} + d$$

veya

$$(\varepsilon^2 - R)\vec{c} = d \Rightarrow \vec{c} = (\varepsilon^2 - R)^{-1}d \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. R nin karakteristik değerlerinden biri $\lambda = -1$ olduğundan $(\varepsilon^2 - R)$ regülerdir. Dolayısıyla burada sabit bir nokta ve bu noktadan geçen sabit bir doğru vardır. Bu doğruya Minkowski uzayında vida ekseni denir.

$\lambda = 1$ karakteristik kök için $(\varepsilon^2 - R)$ singüler olup burada sabit bir \vec{c} vektörü yoktur. Sadece sabit bir doğru vardır ve bu doğru hareketin vida eksenidir. Bu doğrunun doğrultmasını \vec{b} Rodrigues vektörüdür.

III. n-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA HAREKETİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

3.1. Hareketler İçin Norm Tanımı

A bir katı harekete karşılık gelen $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu matrisin normu

$$\|A\| = \sqrt{n} \max(\|a_i\|, i = 1, \dots, n) = \sqrt{n} \|a_i\|_{\max} \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Burada a_i , n -boyutlu i . kolon vektörüdür.

S ve A , $n \times n$ tipinde iki matris olsun. Bunlar arasındaki uzaklık

$$\|A - S\| = \sqrt{n} \|a_i - s_i\|_{\max} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada a_i ve s_i ($i = 1, \dots, n$) A ve S matrislerinin i . kolon vektörleridir [16].

Teorem 3.1: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

- i) $\|A\| > 0$,
- ii) $\|A\| = 0$ ise A bir null matris,
- iii) A bir time-like matris ise $\|A\|^2 = - \langle A, A \rangle$,
- iv) A bir space-like matris ise $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle$ [1].

Teorem 3.2: A ve S bir katı hareketin $n \times n$ tipinde iki time-like matrisleri iseler

$$\|A + S\| \geq \|A\| + \|S\|. \quad (3.3)$$

İspat: n -boyutlu Minkowski uzayda time-like vektörler üçgen eşitsizliğinden

$$\|a_i - s_i\|_{\max} \geq \|a_i\|_{\max} + \|s_i\|_{\max}$$

olur. Böylece $\|A + S\| \geq \|A\| + \|S\|$ elde edilir.

3.2. Matris Operasyonlarının Sürekliliği

A ve S katı hareketlere karşılık gelen iki matris ve bu matrislerin ij . elamanları sırasıyla a_{ij} ve s_{ij} olsun. $x_{ij}(A) = a_{ij}$ ve $x_{ij}(S) = s_{ij}$ olacak şekilde $x_{ij}(A)$ ve $x_{ij}(S)$ fonksiyonlarını alalım. Bu fonksiyonlar ve (3.1) normu birlikte göz önüne alınırsa, A ve S nin ij . elamanları arasındaki farkın normu, $\|A - S\|$ normunda küçük olacaktır. Dolayısıyla $\|a_{ij} - s_{ij}\|$ normu, $\|a_i - s_i\|$ normundan daha küçüktür. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|x_{ij}(A) - x_{ij}(S)\| \leq \sqrt{n} \|a_i - s_i\|_{\max} = \|A - S\| < \varepsilon \quad (3.4)$$

olur.

$x_{ij}(A)$ ve $x_{ij}(S)$ fonksiyonları sürekli olduğundan bu fonksiyonların toplama, çıkarma, bölme ve çarpımından elde edilen fonksiyonlarda süreklidir. Benzer düşünceden $\det A$ ve A^{-1} invers matrisi de süreklidir.

3.3. Matris Grupları

İnversi mevcut olan $n \times n$ matrislerinin cümlesi matris çarpımı işlemine göre oluşturduğu cebirik grup $GL(n, \mathbb{R})$ dir. Aynı zamanda bu grup bir Lie grubudur. $\mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ şeklinde tanımlanan bütün izometrilere cümlesi $GL(n, \mathbb{R})$ nin alt grupları olur. Bu gruplardan dönmelerin grubu $SO(1, n-1)$ ya da $SO_1(n)$ ile, katı hareketlerin grubu da $H(1, n-1)$ ya da $H_1(n)$ ile gösterilir.

$SO_1(n)$:

Teorem 3.3.1: $R^T \varepsilon R = \varepsilon$, $R^T = \varepsilon R^{-1} \varepsilon$, $\det R = 1$ şartını sağlayan R , $n \times n$ matrislerinin cümlesi olan $SO_1(n)$ bir Lie alt grubudur.

İspat: i) ε , $SO_1(n)$ nin birim matris ve $\det R = 1$ dir.

ii) $\forall R \in SO_1(n)$ elamanının tersi $R^{-1} = \varepsilon R^T \varepsilon$ ve $\det R^{-1} = 1$ dir.

iii) $\forall R_1, R_2 \in SO_1(n)$ için

$$(R_1 R_2)^T \varepsilon R_1 R_2 = R_2^T R_1^T \varepsilon R_1 R_2 = R_2^T \varepsilon R_2 = \varepsilon.$$

Dolayısıyla $R_1 R_2 \in SO_1(n)$ olur.

$H_1(n)$: formda belirtilen matrislerin cümlesi

$$A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada R , $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir dönme matrisi, \vec{d} ; $(n-1)$ -boyutlu bir kolon vektörü, 0 da $(n-1)$ -boyutlu bir satır vektördür.

Teorem 3.3.2: $H_1(n)$ bir Lie grubudur.

İspat: i) $\forall A, S \in H_1(n)$ olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} R_2 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

için

$$AS = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & R_1 d_2 + d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. R_1R_2 , $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir dönme matrisi ve $R_1d_2 + d_1$ bir $(n-1)$ -boyutlu kolon vektörüdür. Böylece $AS \in H_1(n)$ olur.

ii) ε , $n \times n$ matrisi $H_1(n)$ de bir birim matris olup

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada ε_{n-1} $(n-1) \times (n-1)$ Minkowski uzayında birim dönme matrisi ve $\vec{0}$ da $(n-1)$ boyutlu bir sıfır vektörüdür.

iii) $\forall A \in H_1(n)$ elamanın tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1} & -\varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

olup $A^{-1} \in H_1(n)$ dir.

3.4. Bir Hareketin Türevi

Bir katı cismin sürekli hareketi, $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ lineer dönüşümlerin parametrelendirilmiş cümlesidir. Özellikle Minkowski uzayında düzlemsel hareket $A_{H_1(3)} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_1(3)$, 3-boyutlu katı hareket $A_{H_1(4)} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_1(4)$ ve küresel hareket $R : I \subset \mathbb{R} \rightarrow SO_1(3)$ olarak tanımlanır. Böylece $A(t)$ ye Minkowski uzayında düzlemsel hareket yada katı hareket ve $R(t)$ ye de küresel hareket denir.

Genelde $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ dönüşümünün $\forall a_{ij}(t)$ elamanları reel parametrelili birer sürekli fonksiyonlardır. Böylece bu matris fonksiyonunun türevi, her elamanının ayrı ayrı türevi olup $\dot{A}(t)$ şeklindedir. Burada "·" ile $A(t)$ matrisinin t ye göre türevi gösterilmektedir.

3.5. Tanjant Operatörü

$A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ matris fonksiyonu, F sabit çatisında $Y(t) = A(t)\vec{y}$ noktalarının bir sürekli cümlesi olsun.

$$\dot{Y}(t_0) = \dot{A}(t_0)\vec{y} = (\dot{A}(t_0)A^{-1}(t_0))Y(t_0) \quad (3.9)$$

ifadeside $t = t_0$ da $Y(t)$ nin tanjant doğrultmasının türevidir. Diğer yandan

$$\dot{A}(t) = (\dot{A}A^{-1}(t))A(t) \quad (3.10)$$

veya

$$\dot{A}(t) = A(t)(A^{-1}(t)\dot{A}) \quad (3.11)$$

elde edilir. Böylece $\dot{A}A^{-1} = T$ matrisine, $GL(n, \mathbb{R})$ üzerindeki tanjant operatörü denir.

Sabit bir T matrisi bir $A(t)$ hareketinin tanjant operatörü olsun. O zaman $\dot{A}A^{-1} = T$ ifadesinden

$$\dot{A}(t) = TA(t) \quad (3.12)$$

matrisel diferensiyel denklem elde edilir. $A(0) = A_0$ başlangıç şartı gözönüne alındığında, Taylor açılımından, bu diferensiyel denklem aşağıdaki gibi çözülür:

$$A(t) = A_0 \exp(tT) = A_0 \left[I + tT + \frac{(tT)^2}{2!} + \dots \right] \quad (3.13)$$

Bu ise bir üstel seri açılımına karşılık gelmektedir [13]. Bu üstel dönüşümün yakınsaklığını göstermek için, serinin P_n ve P_{n+1} kısmi toplamları arasındaki farkın normunu göz önüne alırsa

$$\|P_{n+1} - P_n\| = \left\| \frac{(tT)^{n+1}}{(n+1)!} \right\|$$

elde edilir. Buradan

$$\|P_{n+1} - P_n\| \leq \frac{|t|^{n+1} \|T\|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.14)$$

dir. $|t|$ ve $\|T\|$ sabit değerler olduğundan $n \rightarrow \infty$ için (3.14) sifıra yaklaşır. Böylece üstel dönüşümlerin yakınsaklığı söylenebilir. $A(0) = I$ başlangıç şartı göz önüne alırsa

$$A(t) = \exp(tT) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i T^i}{i!} \quad (3.15)$$

olur. Bu durumda (3.15) den, $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ dönüşümüne karşılık gelen $A(t)$ matrislerinin cümlesi

$$A(t_1)A(t_2) = \exp(t_1T) \exp(t_2T) = \exp[(t_1 + t_2)T] = A(t_1 + t_2)$$

özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu cümle $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir parametrelili bir alt grubudur.

Bir manifold olan Lie grubunun boyutu, onun tanjant vektörlerinin gerdiği uzayın boyutuna eşittir. $GL(n, \mathbb{R})$ de her $n \times n$ matrisinin tanjant operatörü vardır ve baz vektörlerinin sayısı n^2 dir [2]. Lie çarpımı tanjant operatörler içinde tanımlıdır. T ve S tanjant operatörler olmak üzere

$$[T, S] = TS - ST \quad (3.16)$$

elde edilir. Burada TS iki matrisin çarpımıdır. Tanjant operatörlerinin vektör uzayı (3.16) çarpımıyla birlikte bir cebir oluşturur. Bu durumda Lie çarpımlı tanjant operatörlerinin vektör uzayı, $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir Lie cebiri olarak ifade edilebilir.

$SO_1(n)$ Tanjant Operatörleri

R , Minkowski uzayında bir ortogonal matris olmak üzere R nin tanjant operatörü, (3.11)

den

$$\dot{R}(t) = \Omega R(t) \quad (3.17)$$

olup $\Omega = \varepsilon R^T \varepsilon \dot{R}$ dir. (3.17) diferensiyel denklemi, (3.15) den

$$R(t) = e^{t\Omega} \quad (3.18)$$

yazılır.

Yardımcı Teorem 3.5.1: $e^{t\Omega} \in SO_1(n)$ olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon e^{t\Omega} \varepsilon = e^{t\varepsilon\Omega^T\varepsilon} = e^{-t\Omega}$ dir [2].

Yardımcı Teorem 3.5.1 den $\Omega = -\varepsilon\Omega^T\varepsilon$ olup Ω Minkowski uzayında anti-simetrik matristir. Böylece Ω ya $R(t)$ dönmesinin açısal hız matrisi denir. $n \times n$ anti-simetrik matrisler bir vektör uzayı olarak göz önüne alındığında bu uzayın baz vektörlerinin sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ dir. O halde bir manifold olan $SO_1(n)$ nin boyutu $\frac{n(n-1)}{2}$ olup indeksten bağımsızdır [2].

Ω ile birleştirilmiş vektör \vec{w} olsun. \vec{w} nin normu $\|\vec{w}\| = \omega$ olmak üzere

$$\Omega = \omega S \quad (3.19)$$

olur. Burada S anti-simetrik matris ve S ile birleştirilmiş birim vektör \vec{s} dir. Eğer \vec{s} birim time-like vektör ise $S^3 + S = 0$ olacağından (3.18) denkleminde

$$R(t) = \exp(t\Omega) = \varepsilon^2 + \sin(\omega t)S + (1 - \cos(\omega t))S^2. \quad (3.20)$$

Eğer \vec{s} birim space-like vektör ise $S^3 - S = 0$ dan

$$R(t) = \exp(t\Omega) = \varepsilon^2 + \sinh(\omega t)S + (1 - \cosh(\omega t))S^2 \quad (3.21)$$

bulunur. (3.20) ve(3.21) denklemleri, sırasıyla, Ω tanjant operatöründen elde edilen time-like veya space-like \vec{w} vektörü etrafındaki bir dönme denklemidir. Burada ωt terimi ise dönme açısidir. t değıştikçe cisim, sabit ω açısal hızlı \vec{w} vektörü etrafında döner. Böylece \vec{w} vektörü Minkowski uzayında açısal hız vektörü adını alır.

$H_1(n)$ nin Tanjant Operatörleri

$GL(n, \mathbb{R})$ nin tanjant operatörleri aynı zamanda $H_1(n)$ de tanjant operatörleridir.

Böylece

$$\begin{aligned} A^{-1}\dot{A} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1} & -\varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}\dot{R} & \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}\dot{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

veya

$$A^{-1}\dot{A} = \begin{bmatrix} \Omega & \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}\dot{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\Omega = \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}\dot{R}$, $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki matrisle açısal hız matrisi ve bu matrise karşılık gelen \vec{w} vektörüne açısal hız vektörü denir. Ayrıca $\vec{v} = \varepsilon_{n-1}R^T\varepsilon_{n-1}\dot{d}$, $(n-1)$ -boyutlu vektöre de Minkowski uzayında lineer hız vektörü adı verilir. Diğer yandan $H_1(n)$, $\frac{n(n-1)}{2}$ -boyutlu bir Lorentz manifold olup indeksten bağımsızdır. $n=3$ ve $n=4$ için $\text{boy}H_1(3) = 3$ ve $\text{boy}H_1(4) = 6$ dir.

3.6. Tanjant Operatörlerle Birleştirilmiş Vektörler

$SO_1(3)$ de bir tanjant operatörün vektör formu $\Omega\vec{y} = \vec{w} \times \vec{y}$ olacak şekilde Ω , 3×3 anti-simetrik matrisini oluşturan \vec{w} vektörüdür. $H_1(3)$ için tanjant operatörü

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega & v_1 \\ \omega & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

olsun. (3.23) tanjant operatörünün vektör formu (v_1, v_2, w) dir. $H_1(4)$ ün bir tanjant operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 & v_1 \\ w_3 & 0 & -w_1 & v_2 \\ -w_2 & w_1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

4×4 tipinde bir matris olsun. O zaman S nin vektör formu, $\vec{s} = \begin{bmatrix} \vec{w} & \vec{v} \end{bmatrix}^T$ olup 6-boyutlu bir vektördür. \vec{w} space-like veya time-like ise \vec{s} space-like veya time-like olur.

(3.16) çarpımı, $SO_1(3)$ ve $H_1(3)$ ün tanjant operatörler ile birleştirilmiş vektörlerin, vektörel çarpım özelliklerini sağlar. $SO_1(3)$ için \vec{c} ve \vec{w} , sırasıyla, C ve Ω anti-simetrik

matrisleriyle birleştirilmiş vektörler ise o zaman bu matrislerin Lie çarpımı

$$[C, \Omega] = C\Omega - \Omega C \quad (3.25)$$

olup bu da $\vec{c} \times \vec{w}$ dır. Burada ki vektörel çarpım Minkowski uzayında ki vektörel çarpımdır. Böylece bu çarpım işlemine göre $SO_1(n)$ nin Lie cebiri $so_1(n)$ ile gösterilir, ve

$$so_1(n) = \{\Omega : \Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Omega^T = -\varepsilon \Omega \varepsilon\} \quad (3.26)$$

cümlesiyle tanımlanır.

$H_1(n)$ nin iki tanjant operatörü

$$A = \begin{bmatrix} C & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

olmak üzere A ve S nin Lie çarpımı

$$[A, S] = AS - SA = \begin{bmatrix} C\Omega - \Omega C & Cv - \Omega r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

şeklinde olur. Bu çarpıma göre $H_1(n)$ in Lie cebiri $h_1(n)$ olup

$$h_1(n) = \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \Omega \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \vec{v} \in \mathbb{R}_1^{n-1}, \Omega^T = -\varepsilon \Omega \varepsilon \right\} \quad (3.29)$$

cümlesiyle tanımlanır.

$n = 3$ iken A ve S ye karşılık gelen vektörler, sırasıyla, (r_1, r_2, λ) ve (v_1, v_2, w) olmak üzere

$$[A, S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda v_2 - w r_2 \\ 0 & 0 & \lambda v_1 - w r_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$(r_1, r_2, \lambda) \times (v_1, v_2, w) = (\lambda v_2 - w r_2, \lambda v_1 - w r_1, 0) \quad (3.31)$$

olur.

$H_1(4)$ katı hareketler de, $C, S \in h_1(4)$ e karşılık gelen vektörler, sırasıyla, $[\vec{c} \ r^a]^T$ ve $[\vec{w} \ \vec{v}^a]^T$ olmak üzere bunların Lie çarpımı

$$[C, S] = [\vec{c} \times \vec{w} \quad \vec{c} \times \vec{v} - \vec{w} \times \vec{r}]^T \quad (3.32)$$

olarak bulunur. (3.32) denkleminin sağındaki çarpım, Minkowski uzayında vektörel çarpımdır. (3.32) eşitliğı için aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.6.1:

- i) \vec{c} ve \vec{w} space-like ise $[C, S]$ time-like dır.
- ii) \vec{c} ve \vec{w} time like ise $[C, S]$ space-like dır.
- iii) \vec{c} space-like ve \vec{w} time-like ise $[C, S]$ space-like dır.

IV. \mathbb{R}_1^3 , 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KİNEMATİK VE DİFERENSİYEL GEOMETRİ

4.1. Lie Cebiri

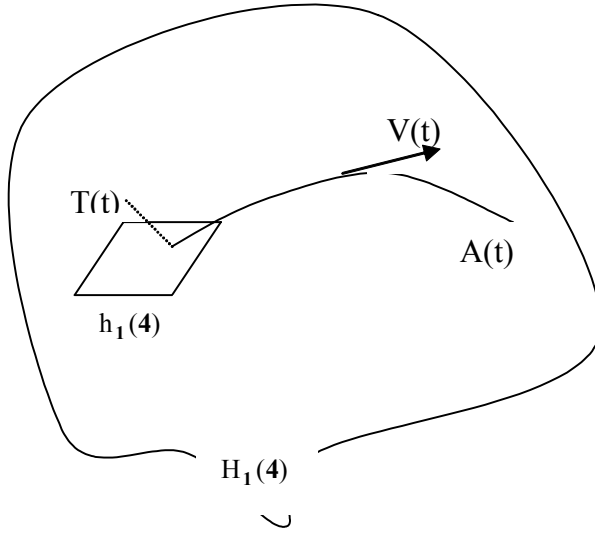
\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir cismin hareketini göz önüne alalım. Kabul edelim ki F sabit M de hareketli çatı olsun. O zaman bir katı hareket F den M ye olan bir dönüşümdür [14]. Bu tür dönüşümlere birer matris karşılık gelir. Böyle matrislerin cümlesi

$$H_1(4) = \left\{ \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \vec{d} \in \mathbb{R}_1^3, R \varepsilon R^T = \varepsilon, \det R = 1 \right\} \quad (4.1)$$

dir. $H_1(4)$ ün bir Lie grubu ve Lorentz manifoldu olduğu bölüm 3.3 ve bölüm 3.5 de gösterildi. Bu grubun Lie cebiri, (3.29) dan

$$h_1(4) = \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \vec{v} \in \mathbb{R}_1^3, \Omega^T = -\varepsilon \Omega \varepsilon \right\} \quad (4.2)$$

cümlesiyle tanımlanır.



Şekil 4.1

$A : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow H_1(4)$ bir eğri olsun. Bu durumda $S \in h_1(4)$ elamanı,

$$S(t) = A^{-1}(t)\dot{A}(t) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $H_1(4)$ de bir eğri katı cismin hareketini verir [15]. Kinematikte (4.3) denklemi twistlere karşılık gelir ve $h_1(4)$ de twistlerin uzayı olarak adlandırılır [16].

$S(t)$, F çatısının seçiminden bağımsız olduğundan tanım 1.32 göre $\dot{A}(t)$ tanjant vektörünün sol invaryant vektör alanı olur.

Tanım 4.1.1: S_1 ve S_2 twistlerine karşılık gelen vektör çiftleri $[\vec{w}_1 \ \vec{v}_1]^T$ ve $[\vec{w}_2 \ \vec{v}_2]^T$ $[S_1, S_2]$ nin vektör çiftide $[\vec{w} \ \vec{v}]^T$ olmak üzere (3.32) den

$$[\vec{w} \ \vec{v}]^T = [\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \ \vec{w}_1 \times \vec{v}_2 - \vec{w}_2 \times \vec{v}_1]^T \quad (4.4)$$

elde edilir. Kinematikte elde edilen bu ifadeye iki twistin Minkowski uzayında motor çarpımı denir [17].

(4.4) ifadesi ve \mathbb{R}_1^3 ün standart bazları göz önüne alınırsa, $h_1(4)$ ün standart bazları

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olup, (3.28) den bu bazların Lie çarpımları

$$\begin{aligned} [E_1, E_1] &= 0, & [E_1, E_2] &= E_3, & [E_1, E_3] &= -E_2, \\ [E_1, E_4] &= 0, & [E_1, E_5] &= E_6, & [E_1, E_6] &= -E_5, \\ [E_2, E_2] &= 0, & [E_2, E_3] &= -E_1, & [E_2, E_4] &= -E_6, \\ [E_2, E_5] &= 0, & [E_2, E_6] &= -E_4, & [E_3, E_3] &= 0, \\ [E_3, E_4] &= E_5, & [E_3, E_5] &= E_4, & [E_3, E_6] &= 0, \\ [E_4, E_4] &= 0, & [E_4, E_5] &= 0, & [E_4, E_6] &= 0, \\ [E_5, E_5] &= 0, & [E_5, E_6] &= 0, & [E_6, E_6] &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir. Buradan görülür ki bir Lie cebirinin iki elamanının Lie çarpımı, Lie cebirinin elamanıdır. Böylece bu elaman baz vektörlerinin bir lineer birleşimi olduğundan

$$[E_i, E_j] = \sum_k C_{ij}^k E_k \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Burada C_{ij}^k katsayılarına Lie cebirinin yapı sabitleri denir [18]. Bu yapı sabitleri (4.4) ifadesinden aşağıdaki gibi hesaplanır. Burada sıfırdan farklı değerleri göz önüne alınacaktır:

$$\begin{aligned}
C_{12}^3 &= 1, & C_{13}^2 &= -1, & C_{15}^6 &= 1, & C_{16}^5 &= -1, \\
C_{21}^3 &= -1, & C_{23}^1 &= -1, & C_{24}^6 &= -1, & C_{26}^4 &= -1, \\
C_{31}^2 &= 1, & C_{32}^1 &= 1, & C_{34}^5 &= 1, & C_{35}^4 &= 1, \\
C_{42}^6 &= 1, & C_{43}^5 &= -1, \\
C_{51}^6 &= -1, & C_{53}^4 &= -1, \\
C_{61}^5 &= 1, & C_{62}^4 &= 1.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2. Sol İnvaryant Vektör Alanları

\mathbb{R}_1^n , n -boyutlu Minkowski uzayında bir X vektör alanı, $\forall P \in \mathbb{R}_1^n$ noktasma bir tanjant vektörü karşılık getiren bir fonksiyondur. Eğer \mathbb{R}_1^n , n -boyutlu Minkowski uzayında bir eğri $\gamma(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, ve X de bir vektör alanı ise $P = \gamma(t_0)$ noktasındaki integral eğrisi

$$X(\gamma(t))|_{P=} \frac{d\gamma(t)}{dt} |_{t_0} \tag{4.9}$$

olarak yazılabilir. Böylece γ eğrisinin her bir noktasındaki hız vektörü, X vektör alanının bu noktadaki değeri olan tanjant vektörü ile çakışır. O halde bölüm 3.5 ve (3.15) den, $H_1(4)$ ün bir vektör alanının integral eğrisi $A(t) = \exp(tS)$ dir. Burada $S = A^{-1}\dot{A}$ olup tanjant operatördür. $S \in h_1(4)$ ve $A \in H_1(4)$ olmak üzere, $H_1(4)$ den $h_1(4)$ e bir lineer dönüşüm

$$A \rightarrow AS$$

olsun. O zaman $H_1(4)$ üzerindeki bir \hat{S} vektör alanı, $A(t_0) \in H_1(4)$ noktasında ve $S \in h_1(4)$ için

$$\hat{S}(A(t_0)) = A(t_0)S \tag{4.10}$$

olarak ifade edilir. (4.10) denkleminde elde edilen vektör alanı bir sol invaryant vektör alanıdır . Çünkü (3.11) den dolayı $S \in h_1(4)$ Lie cebiri soldan matris çarpımıyla elde edilir. Diğer yandan $h_1(4)$ ile sol invaryant vektör alanları izomorf olup, $\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_6\}$ sol invaryant vektör alanlarının bir bazıdır. Böylece

$$[\hat{E}_i, \hat{E}_j] = \sum_k C_{ij}^k \hat{E}_k \tag{4.11}$$

olur. $\{E_1, \dots, E_6\}$ $h_1(4)$ Lie cebirinin bir bazı ve sol invaryant vektör alanlarının bazına göre $\forall A \in H_1(4)$ noktasındaki tanjant uzayın bir bazı da (4.10) dan $\{\hat{E}_1(A), \dots, \hat{E}_6(A)\}$ olsun. Böylece $H_1(4)$ üzerindeki her X vektör alanı, sol invaryant baz vektör alanlarının bir lineer kombinasyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X = \sum_{i=1}^6 X^i \hat{E}_i \quad (4.12)$$

Burada X^i kat sayıları reel değerli fonksiyonlar ve $\hat{E}_i = AE_i$ dir. Eğer X^i kat sayıları sabit ise o zaman X vektör alanı sol invaryant bir vektör alanıdır. $\forall S \in h_1(4)$ elamanı $\{E_1, \dots, E_6\}$ bazına göre $S = \sum_{i=1}^6 S^i E_i$ yazılabileceğinden, (4.3) ve (4.10) dan

$$\dot{A} = AS = A \left(\sum_{i=1}^6 S^i E_i \right) = \sum_{i=1}^6 S^i (AE_i) = \sum_{i=1}^6 S^i \hat{E}_i(A) \quad (4.13)$$

olduğu görülür. Buradan katı cismin \dot{A} hızı $\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_6\}$ bazıyla ifade edildiğinden, bu baza göre \dot{A} nin bileşenleri, S ani twistin bileşenlerine eşit olur. Twistlerin bazı olarak sol invaryant vektör alanlarının $\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_6\}$ bazını alacağız.

4.3. Kovaryant Türev Ve Afin Konneksiyon

$H_1(4)$ Lorentz manifoldu üzerinde C^∞ sınıftan vektör alanlarının cümlesi $\chi(H_1(4))$ ile gösterilir. $H_1(4)$, diferensiyellenebilir Lorentz manifoldunda

$$\nabla : \chi(H_1(4)) \times \chi(H_1(4)) \rightarrow \chi(H_1(4))$$

lineer dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlayan bir afin konneksiyondur. $\forall f, g \in C^\infty(H_1(4))$ ve $X, Y, Z \in \chi(H_1(4))$ için

$$1) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$2) \nabla_X (fY + gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z$$

$$3) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ özelliğinden Afin konneksiyon simetriktir.}$$

4) $H_1(4)$ Lorentz manifoldunda ∇ konneksiyonu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Minkowski metriği ile uyumlu olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki özelliğin var olmasıdır:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

(1) ve (4) özelliklerini sağlayan bir konneksiyon Levi-Civata konneksiyonudur.

$H_1(4)$ Lorentz manifoldu üzerinde bir eğri $A(t)$ olsun. $A(t)$ üzerinde bir paralel dönüşüm, eğrinin $A(t_1)$ noktasındaki tanjant uzayın bir X elamanını eğrinin $A(t_2)$ noktasında ki tanjant uzayın bir X' elamanına dönüştürür. $A(t)$ eğrisinin, $A(t_0)$ noktasındaki bir $X(t)$ vektör

alanının kovaryant türevi

$$\frac{DX(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X^{t_0}(t_0 + h) - X(t_0)}{h} \quad (4.14)$$

olarak tanımlanır. Burada $X^{t_0}(t_0 + h)$, $A(t_0)$ noktasında $A(t)$ eğrisinin $X(A(t_0 + h))$ tanjant vektörünün paralel dönüşümüdür [21].

$H_1(4)$ Lorentz manifoldunda bir eğri $A(t)$ ve bu eğri üzerinde iki vektör alanı X ve Y olsun. $A(t)$ eğrisinin $A(t_0)$ noktasında X vektör alanının Y vektör alanına göre kovaryant türevi

$$\nabla_Y X \Big|_{A(t_0)} = \frac{DX(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} \quad (4.15)$$

biçimindedir [21]. Burada $\frac{DX(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}$, Y vektör alanının $t = t_0$ da $A(t_0)$ noktasındaki integral eğrisidir.

Bir X vektör alanı $A(t)$ eğrisi boyunca paralel vektör alanı ise

$$\nabla_{\frac{dA}{dt}} X = 0 \quad (4.16)$$

dir. Bir baz vektör alanının diğer bir baza göre kovaryant türevi

$$\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j = \sum_k \Gamma_{ji}^k \hat{E}_k \quad (4.17)$$

şeklinindedir. Burada Γ_{ji}^k kat sayıları Christoffel sembolleridir [18].

$A(t)$ eğrisi boyunca tanımlanan bir katı cismin $V(t)$ hızı, eğri üzerinde bir tanjant vektör alanıdır ve

$$V(t) = \frac{dA(t)}{dt} \quad (4.18)$$

dir. Hareketin ivmesi $\check{A}(t)$ olup

$$\check{A}(t) = \nabla_V V \quad (4.19)$$

şeklinde ifade edilir. Diğer bir deyişle ivme, hızın kendine göre kovaryant türevidir.

4.4. Geodezikleri Vida Hareketi Olan Minkowski Metrik

Bir C^∞ sınıftan n -boyutlu Lorentz manifoldu üzerindeki, negatif tanımlı, bilineer, simetrik ve indeksi 1 olan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ metrik Minkowski metriğidir. n -boyutlu Lorentz manifold üzerinde metrik; $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$ C^∞ fonksiyonlarının bir $n \times n$ matrisine karakterize edilebilir. Burada X_i ler baz vektör alanıdır. Eğer $H_1(4)$ üzerinde bir metrik verildiğinde, bu metriğe göre $H_1(4)$ ün iki noktası arasındaki geodeziklik bulunabilir. Bu bölümde geodezikleri vida hareketleri olan bir metriğin varlığı araştırılacaktır.

$A : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow H_1(4)$ diferensiyellenebilir bir eğri ve aynı zamanda

$$\nabla_{\frac{dA}{dt}} \frac{dA}{dt} = 0 \quad (4.20)$$

şartını sağlayan bir geodezik olsun. Böylece (4.20) den hareketin ivmesi sıfır olur. Dolayısıyla hareketin twisti sabittir. $V = \frac{dA}{dt}$ bir sol invaryant vektör alanı olup baz seçimine göre sabit bileşenlere sahip olsun. Yani $V = \sum_{i=1}^6 V^i \hat{E}_i = V^i \hat{E}_i$ dir. (4.20) den

$$0 = \nabla_V V = \sum_j \frac{dV^j}{dt} \hat{E}_j + \sum_{i,j} V^i V^j \nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j = \sum_{i,j} V^i V^j \nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) nin her vıda hareketini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j + \nabla_{\hat{E}_j} \hat{E}_i = 0 \quad (4.22)$$

olmasıdır [11]. Ayrıca teorem1.24 ün (i) şikkından

$$\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j - \nabla_{\hat{E}_j} \hat{E}_i = [\hat{E}_i, \hat{E}_j] \quad (4.23)$$

olur. (4.22) ve (4.23) den

$$\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j = \frac{1}{2} [\hat{E}_i, \hat{E}_j] \quad (4.24)$$

bulunur. Eğer teorem1.24 ün (ii) özelliği göz önüne alınırsa

$$\hat{E}_k \langle \hat{E}_i, \hat{E}_j \rangle = \langle \nabla_{\hat{E}_k} \hat{E}_i, \hat{E}_j \rangle + \langle \hat{E}_i, \nabla_{\hat{E}_k} \hat{E}_j \rangle \quad (4.25)$$

elde edilir.

$$\langle \hat{E}_i, \hat{E}_j \rangle = g_{ij} \quad (4.26)$$

alınırsa son ifade

$$\hat{E}_k (g_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\langle [\hat{E}_k, \hat{E}_i], \hat{E}_j \rangle + \langle \hat{E}_i, [\hat{E}_k, \hat{E}_j] \rangle \right) \quad (4.27)$$

olur. (4.7) den

$$\hat{E}_k (g_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 \left(C_{ki}^l g_{lj} + C_{kj}^l g_{li} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 6 \quad (4.28)$$

bulunur. Burada C_{ij}^k kat sayıları manifold üzerinde sabittir. Böylece aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.4.1: Bir Minkowski metriklili (4.20) denklemini sağlayan vıda hareketinin $G = [g_{ij}]$ kat sayılar matrisi tarafından elde edilmesi için gerek ve yeter şart g_{ij} kat sayılarının (4.28) denklemini sağlamasıdır.

(4.26) gereğince g_{ij} kat sayılar matrisi simetriktir. Böylece $G_{ij}^k = \hat{E}_k(g_{ij})$ olmak üzere bu denklemlerin cümlesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
G_{11}^1 &= 0, & G_{11}^2 &= -g_{31}, & G_{11}^3 &= -g_{21}, \\
G_{11}^4 &= 0, & G_{11}^5 &= -g_{61}, & G_{11}^6 &= g_{51}, \\
G_{12}^1 &= \frac{1}{2}g_{31}, & G_{12}^2 &= -\frac{1}{2}g_{32}, & G_{12}^3 &= -\frac{1}{2}(g_{22} + g_{11}), \\
G_{12}^4 &= \frac{1}{2}g_{61}, & G_{12}^5 &= -\frac{1}{2}g_{62}, & G_{12}^6 &= \frac{1}{2}(g_{52} + g_{41}), \\
G_{13}^1 &= -\frac{1}{2}g_{21}, & G_{13}^2 &= -\frac{1}{2}(g_{33} + g_{11}), & G_{13}^3 &= \frac{1}{2}g_{23}, \\
G_{13}^4 &= -\frac{1}{2}g_{51}, & G_{13}^5 &= -\frac{1}{2}(g_{63} + g_{41}), & G_{13}^6 &= \frac{1}{2}g_{53} \\
G_{14}^1 &= 0, & G_{14}^2 &= -\frac{1}{2}(g_{34} + g_{61}), & G_{14}^3 &= \frac{1}{2}(g_{24} + g_{51}), & (4.29) \\
G_{14}^4 &= 0, & G_{14}^5 &= -\frac{1}{2}g_{64}, & G_{14}^6 &= \frac{1}{2}g_{54}, \\
G_{15}^1 &= \frac{1}{2}g_{61}, & G_{15}^2 &= -\frac{1}{2}g_{35}, & G_{15}^3 &= \frac{1}{2}(g_{25} + g_{41}), \\
G_{15}^4 &= 0, & G_{15}^5 &= -\frac{1}{2}g_{65}, & G_{15}^6 &= \frac{1}{2}g_{55}, \\
G_{16}^1 &= -\frac{1}{2}g_{51}, & G_{16}^2 &= -\frac{1}{2}(g_{36} + g_{41}), & G_{16}^3 &= \frac{1}{2}g_{26}, \\
G_{16}^4 &= 0, & G_{16}^5 &= -\frac{1}{2}g_{66}, & G_{16}^6 &= \frac{1}{2}g_{56}, \\
G_{22}^1 &= g_{32}, & G_{22}^2 &= 0, & G_{22}^3 &= g_{12}, \\
G_{22}^4 &= g_{62}, & G_{22}^5 &= 0, & G_{22}^6 &= g_{42}, \\
G_{23}^1 &= \frac{1}{2}(g_{33} - g_{22}), & G_{23}^2 &= -\frac{1}{2}g_{12}, & G_{23}^3 &= \frac{1}{2}g_{13}, \\
G_{23}^4 &= \frac{1}{2}(g_{63} - g_{52}), & G_{23}^5 &= -\frac{1}{2}g_{42}, & G_{23}^6 &= \frac{1}{2}g_{43}, \\
G_{24}^1 &= \frac{1}{2}g_{34}, & G_{24}^2 &= -\frac{1}{2}g_{62}, & G_{24}^3 &= \frac{1}{2}(g_{14} + g_{52}), \\
G_{24}^4 &= \frac{1}{2}g_{64}, & G_{24}^5 &= 0, & G_{24}^6 &= \frac{1}{2}g_{44}, \\
G_{25}^1 &= \frac{1}{2}(g_{35} + g_{62}), & G_{25}^2 &= 0, & G_{25}^3 &= \frac{1}{2}(g_{15} + g_{42}), \\
G_{25}^4 &= \frac{1}{2}g_{65}, & G_{25}^5 &= 0, & G_{25}^6 &= \frac{1}{2}g_{45}, \\
G_{26}^1 &= \frac{1}{2}(g_{36} - g_{52}), & G_{26}^2 &= -\frac{1}{2}g_{42}, & G_{26}^3 &= \frac{1}{2}g_{16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{26}^4 &= \frac{1}{2}g_{66}, & \mathfrak{G}_{26}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{26}^6 &= \frac{1}{2}g_{46}, \\
\mathfrak{G}_{33}^1 &= -g_{23}, & \mathfrak{G}_{33}^2 &= -g_{13}, & \mathfrak{G}_{33}^3 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{33}^4 &= -g_{53}, & \mathfrak{G}_{33}^5 &= -g_{43}, & \mathfrak{G}_{33}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{34}^1 &= -\frac{1}{2}g_{24}, & \mathfrak{G}_{34}^2 &= -\frac{1}{2}(g_{14} + g_{63}), & \mathfrak{G}_{34}^3 &= \frac{1}{2}g_{53}, \\
\mathfrak{G}_{34}^4 &= -\frac{1}{2}g_{53}, & \mathfrak{G}_{34}^5 &= -\frac{1}{2}g_{44}, & \mathfrak{G}_{34}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{35}^1 &= \frac{1}{2}(g_{63} - g_{25}), & \mathfrak{G}_{35}^2 &= -\frac{1}{2}g_{15}, & \mathfrak{G}_{35}^3 &= \frac{1}{2}g_{43}, \\
\mathfrak{G}_{35}^4 &= -\frac{1}{2}g_{55}, & \mathfrak{G}_{35}^5 &= -\frac{1}{2}g_{45}, & \mathfrak{G}_{35}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{36}^1 &= -\frac{1}{2}(g_{26} + g_{53}), & \mathfrak{G}_{36}^2 &= -\frac{1}{2}(g_{16} + g_{43}), & \mathfrak{G}_{36}^3 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{36}^4 &= -\frac{1}{2}g_{56}, & \mathfrak{G}_{36}^5 &= -\frac{1}{2}g_{46}, & \mathfrak{G}_{36}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{44}^1 &= 0, & \mathfrak{G}_{44}^2 &= -g_{64}, & \mathfrak{G}_{44}^3 &= g_{54}, \\
\mathfrak{G}_{44}^4 &= 0, & \mathfrak{G}_{44}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{44}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{45}^1 &= \frac{1}{2}g_{64}, & \mathfrak{G}_{45}^2 &= -\frac{1}{2}g_{65}, & \mathfrak{G}_{45}^3 &= \frac{1}{2}(g_{55} + g_{44}), \\
\mathfrak{G}_{45}^4 &= 0, & \mathfrak{G}_{45}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{45}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{46}^1 &= -\frac{1}{2}g_{54}, & \mathfrak{G}_{46}^2 &= -\frac{1}{2}(g_{55} + g_{44}), & \mathfrak{G}_{46}^3 &= \frac{1}{2}g_{56}, \\
\mathfrak{G}_{46}^4 &= 0, & \mathfrak{G}_{46}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{46}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{55}^1 &= g_{65}, & \mathfrak{G}_{55}^2 &= 0, & \mathfrak{G}_{55}^3 &= g_{45}, \\
\mathfrak{G}_{55}^4 &= 0, & \mathfrak{G}_{55}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{55}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{56}^1 &= \frac{1}{2}(-g_{55} + g_{66}), & \mathfrak{G}_{56}^2 &= -\frac{1}{2}g_{45}, & \mathfrak{G}_{56}^3 &= \frac{1}{2}g_{46}, \\
\mathfrak{G}_{56}^4 &= 0, & \mathfrak{G}_{56}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{56}^6 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{66}^1 &= -g_{56}, & \mathfrak{G}_{66}^2 &= -g_{46}, & \mathfrak{G}_{66}^3 &= 0, \\
\mathfrak{G}_{66}^4 &= 0, & \mathfrak{G}_{66}^5 &= 0, & \mathfrak{G}_{66}^6 &= 0,
\end{aligned}$$

Buradan aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 4.4.2: $X, Y, Z \in \chi(H_1(4))$ vektör alanları, $[X, Y] = Z$, f diferensiyellenebilir fonksiyon ve

$$X(f) = g_x \tag{4.30}$$

$$Y(f) = g_y \quad (4.31)$$

$$Z(f) = g_z \quad (4.32)$$

olsun. g_x, g_y ve g_z reel değerli fonksiyonların çözümleri varsa

$$X(g_y) - Y(g_x) = g_z \quad (4.33)$$

dir.

İspat: (4.30) ve (4.31) denklemlerinin her iki yanını, sırasıyla, Y nin $X(f)$ ve X in $Y(f)$ yönüne göre türevi alınıp taraf tarafa çıkartılırsa,

$$XY(f) - YX(f) = X(g_y) - Y(g_x)$$

elde edilir. Sol taraf $[X, Y](f) = Z(f) = g_z$ olduğundan (4.33) denklemi elde edilmiş olur.

Teorem 4.4.3: $G = [g_{ij}]$ kat sayılar matrisi

$$\hat{E}_k(g_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\langle [\hat{E}_k, \hat{E}_i], \hat{E}_j \rangle + \langle \hat{E}_i, [\hat{E}_k, \hat{E}_j] \rangle \right)$$

denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$G = \begin{bmatrix} \alpha\varepsilon & \beta\varepsilon \\ \beta\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

formunda olmasıdır. Burada α ve β pozitif sabit sayılar, $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

İspat: Bu matrisi elde etmek için (4.29) da verilen sonuçlar göz önüne alınır

$$\hat{E}_1(g_{11}) = 0, \hat{E}_2(g_{11}) = -g_{31}, \hat{E}_1(g_{11}) = 0, \hat{E}_3(g_{11}) = g_{21} \quad (4.35)$$

olur. Diğer yandan $[\hat{E}_1, \hat{E}_2] = \hat{E}_3$ dir. Teorem 4.4.2 göz önüne alınır,

$$\hat{E}_1(g_{31}) = \frac{1}{2}g_{21} \quad (4.36)$$

bulunur. (4.36) eşitliğinden,

$$\frac{1}{2}g_{21} = g_{21} \Rightarrow g_{21} = 0$$

olur. Burada $g_{21} = 0$ olduğundan $\hat{E}_i(g_{21}) = 0$, $1 \leq i \leq 6$, elde edilir. (4.29) dan

$$\begin{aligned}
g_{13} &= 0, g_{15} = 0, g_{16} = 0 \\
g_{21} &= 0, g_{22} = -g_{11}, g_{23} = 0, \\
g_{24} &= 0, g_{25} = -g_{41}, g_{26} = 0, \\
g_{31} &= 0, g_{32} = 0, g_{33} = -g_{11}, \\
g_{34} &= 0, g_{35} = 0, g_{36} = -g_{41}, \\
g_{44} &= 0, g_{45} = 0, g_{46} = 0, \\
g_{55} &= 0, g_{56} = 0, g_{66} = 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. (4.37) den

$$-g_{11} = g_{22} = g_{33} = \alpha$$

dır. Benzer şekilde

$$-g_{41} = g_{25} = g_{36} = \beta$$

olur. Burada α ve β pozitif sabitlerdir. Böylece (4.34) matrisi elde edilmiş olur. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3 den geodezikler üzerindeki metrik

$$\langle S_1, S_2 \rangle = \vec{s}_1^T G \vec{s}_2, \quad \forall S_1, S_2 \in h_1(4) \tag{4.38}$$

olarak tanımlanır. Burada \vec{s}_1 ve \vec{s}_2 , sırasıyla, S_1 ve S_2 ye karşılık gelen vektör çiftleridir.

Teorem 4.4.4: Geodezikleri vida hareketleri olan Minkowski metriği vardır.

İspat: (4.34) matris formunun karakterisik değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}) \\
\lambda_3 &= \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}), \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2})
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu değerlerin ikişerli çarpımları ya sıfır ya sıfırdan küçük ya da sıfırdan büyüktür. Buradan G metriği Minkowski metriğini verir.

Tanım 4.4.5: S bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned}
Ad_A &: h_1(4) \rightarrow h_1(4) \\
S &\rightarrow Ad_A S = ASA^{-1}, \quad A \in H_1(4)
\end{aligned}$$

dönüşümüne Adjoint dönüşüm denir. S ye karşılık gelen vektör çifti $[\vec{w} \ \vec{v}]^T$ ve $A =$

$$\begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$Ad_A S = [R\vec{w} \ R\vec{v} - (R\vec{w}) \times \vec{d}]^T \quad (4.39)$$

elde edilir. Burada \times Minkowski uzayındaki vektörel çarpımdır.

Teorem 4.4.6: $S_1, S_2 \in h_1(4)$ ve $A \in H_1(4)$ olmak üzere

$$\langle S_1, S_2 \rangle_{|\varepsilon} = \langle Ad_A S_1, Ad_A S_2 \rangle_{|\varepsilon} \quad (4.40)$$

dir.

İspat: $s_1 = [\vec{w}_1 \ \vec{v}_1]^T, s_2 = [\vec{w}_2 \ \vec{v}_2]^T$ olsun.(4.38) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} & \langle Ad_A S_1, Ad_A S_2 \rangle_{|\varepsilon} = \langle [R\vec{w}_1 \ R\vec{v}_1 - (R\vec{w}_1) \times \vec{d}]^T, [R\vec{w}_2 \ R\vec{v}_2 - (R\vec{w}_2) \times \vec{d}]^T \rangle \\ & = \alpha (R\vec{w}_1)^T \varepsilon (R\vec{w}_2) \\ & \quad + \beta \left((R\vec{v}_1)^T \varepsilon R\vec{w}_2 - ((R\vec{w}_1) \times \vec{d})^T \varepsilon R\vec{w}_2 + (R\vec{w}_1)^T \varepsilon R\vec{v}_2 - (R\vec{w}_1)^T \varepsilon ((R\vec{w}_2) \times \vec{d}) \right) \\ & = \alpha (\vec{w}_1)^T \varepsilon \vec{w}_2 + \beta \left(\vec{v}_1^T \varepsilon \vec{w}_2 + (R\vec{w}_1)^T \varepsilon (R\vec{w}_2 \times \vec{d}) + \vec{w}_1^T \varepsilon \vec{v}_2 - (R\vec{w}_1)^T \varepsilon ((R\vec{w}_2) \times \vec{d}) \right) \\ & = \alpha \vec{w}_1^T \varepsilon \vec{w}_2 + \beta (\vec{v}_1^T \varepsilon \vec{w}_2 + \vec{w}_1^T \varepsilon \vec{v}_2) = \langle [\vec{w}_1 \ \vec{v}_1]^T, [\vec{w}_2 \ \vec{v}_2]^T \rangle_{|\varepsilon} = \langle S_1, S_2 \rangle_{|\varepsilon} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.4.7: $\langle S_1, S_2 \rangle_{|\varepsilon} = \langle Ad_A S_1, Ad_A S_2 \rangle_{|\varepsilon}$ ifadesinden geodezikler üzerindeki her sol invariant G metriği bi-invarianttır yani hem soldan hem de sağdan invarianttır.

İspat: G nin sağ invariant olduğunu ispatlayacağız. $A, B \in H_1(4)$ olmak üzere X ve Y birer vektör alanı olsun. G metriği sol invariant olduğundan

$$\begin{aligned} & \langle X(B)A, Y(B)A \rangle_{|BA} = \langle (BA)^{-1} X(B)A, (BA)^{-1} Y(B)A \rangle_{|\varepsilon} \\ & = \langle A^{-1} B^{-1} X(B)A, A^{-1} B^{-1} Y(B)A \rangle_{|\varepsilon} \end{aligned}$$

olur. (4.40) dan

$$\langle A^{-1} B^{-1} X(B)A, A^{-1} B^{-1} Y(B)A \rangle_{|\varepsilon} = \langle B^{-1} X(B), B^{-1} Y(B) \rangle_{|\varepsilon}$$

elde edilir. G sol invariant olduğundan son eşitlikten

$$\langle B^{-1} X(B), B^{-1} Y(B) \rangle_{|\varepsilon} = \langle X(B), Y(B) \rangle_{|\varepsilon}$$

bulunur. Bu da G nin bi-invariant olması demektir.

4.5. Kinematik Konneksiyon

Tanım 4.5.1: $A(t) \in H_1(4)$ bir katı cismin hareketini tanımlayan bir eğri ve $S(t) \in h_1(4)$ de aynı cismin twisti olsun. O zaman katı cismin ivmesi

$$[\vec{\xi} \quad \vec{a}]^T = [\dot{w} \quad \dot{v}]^T + [0 \quad w \times v]^T \quad (4.41)$$

olarak yazılabilir [22]. Bu denklemde $\vec{\xi}$ açısal ivme ve \vec{a} da lineer ivmedir. Aynı zamanda bölüm 4.3 den katı cismin ivmesi $\check{A}(t) = \nabla_V V$ olduğundan

$$\nabla_V V = [\dot{w} \quad \dot{v}]^T + [0 \quad w \times v]^T \quad (4.42)$$

olur. Diğer yandan $V = V^i \hat{E}_i$ olmak üzere

$$\nabla_V V = \sum_k \frac{dV^k}{dt} \hat{E}_k + \sum_k \sum_{i,j} V^i V^j \nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j$$

veya (4.17) denkleminde

$$\nabla_V V = \sum_k \frac{dV^k}{dt} \hat{E}_k + \sum_k \sum_{i,j} V^i V^j \Gamma_{ji}^k \hat{E}_k \quad (4.43)$$

yazılabilir. Ayrıca $\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j = \sum_k \Gamma_{ji}^k \hat{E}_k$ ifadesinden $\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j + \nabla_{\hat{E}_j} \hat{E}_i = \sum_k (\Gamma_{ji}^k + \Gamma_{ij}^k) \hat{E}_k$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Gamma_{ji}^k + \Gamma_{ij}^k = a_{ij}^k \quad (4.44)$$

olarak alınabilir. Böylece (4.42) den a_{ij}^k ların sıfırdan farklı değerleri;

$$\begin{aligned} a_{15}^6 &= 1, \quad a_{16}^5 = -1, \quad a_{24}^6 = -1, \\ a_{26}^4 &= -1, \quad a_{34}^5 = 1, \quad a_{35}^4 = 1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan $\nabla_{\hat{E}_i} \hat{E}_j - \nabla_{\hat{E}_j} \hat{E}_i = [\hat{E}_i, \hat{E}_j]$ ve (4.11) ifadesinden

$$\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k = C_{ij}^k \quad (4.46)$$

elde edilir. Böylece (4.44) ve (4.46) denklemleri, konneksiyon ve Γ_{ji}^k Christoffel sembollerini tek türlü olarak belirtir. Bu konneksiyona Minkowski anlamında Kinematik konneksiyon denir. Kinematik konneksiyon için sıfırdan farklı Christoffel sembolleri,

$$\begin{aligned} \Gamma_{51}^6 &= \Gamma_{43}^5 = \Gamma_{53}^4 = 1, \quad \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2} \\ \Gamma_{62}^4 &= \Gamma_{42}^6 = \Gamma_{61}^5 = -1, \quad \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

dır.

Kinematik Konneksiyonla Uyumlu Metrik

$H_1(4)$, diferensiyellenebilir Lorentz manifoldunda, ∇ , Levi-Civata konneksiyonu

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (4.48)$$

özelliğinden simetriktir. Burada X ve Y , $H_1(4)$ ün iki vektör alanıdır. Bu özellikten dolayı kinematik konneksiyonda simetriktir. Diğer yandan Levi-Civata konneksiyonu Minkowski metriği ile uyumlu olduğundan

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (4.49)$$

özelliğini sağlar. O zaman kinematik konneksiyonunda Minkowski metriği ile uyumlu olabilmesi için (4.49) özelliğini sağlaması gerekir. Buradan $h_1(4)$ ün $\{\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_6\}$ sol invaryant baz vektör alanları (4.49) dan

$$\hat{E}_k \langle \hat{E}_i, \hat{E}_j \rangle = \langle \nabla_{\hat{E}_k} \hat{E}_i, \hat{E}_j \rangle + \langle \hat{E}_i, \nabla_{\hat{E}_k} \hat{E}_j \rangle$$

olarak yazılabilir. $\langle \hat{E}_i, \hat{E}_j \rangle = g_{ij}$ alınırsa

$$\hat{E}_k(g_{ij}) = \sum_l (\Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{li}) \quad (4.50)$$

elde edilir. $k > 3$ için $\Gamma_{ij}^k = 0$ olduğundan $\hat{E}_k(g_{ij}) = 0$ olacaktır. $\hat{E}_k(g_{ij}) = G_{ij}^k$ olmak üzere, $k \leq 3$ için (4.50) denkleminde elde edilen denklem sistemleri aşağıda gibi olur:

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= 0, \quad G_{11}^2 = -g_{13}, \quad G_{11}^3 = -g_{12}, \quad G_{12}^1 = \frac{1}{2}g_{13} \\ G_{12}^2 &= -\frac{1}{2}g_{23}, \quad G_{12}^3 = -\frac{1}{2}(g_{22} + g_{11}) \\ G_{13}^1 &= -\frac{1}{2}g_{12}, \quad G_{13}^2 = -\frac{1}{2}(g_{33} + g_{11}), \quad G_{13}^3 = \frac{1}{2}g_{23} \\ G_{14}^1 &= 0, \quad G_{14}^2 = -\frac{1}{2}(g_{34} + g_{16}), \quad G_{14}^3 = \frac{1}{2}(g_{24} + g_{15}) \\ G_{15}^1 &= \frac{1}{2}g_{16}, \quad G_{15}^2 = -\frac{1}{2}g_{35}, \quad G_{15}^3 = \frac{1}{2}(g_{25} + g_{14}) \\ G_{16}^1 &= -\frac{1}{2}g_{15}, \quad G_{16}^2 = -\frac{1}{2}(g_{36} + g_{14}), \quad G_{16}^3 = \frac{1}{2}g_{26} \\ G_{22}^1 &= g_{23}, \quad G_{22}^2 = 0, \quad G_{22}^3 = g_{12} \\ G_{23}^1 &= \frac{1}{2}(g_{33} - g_{22}), \quad G_{23}^2 = -\frac{1}{2}g_{12}, \quad G_{23}^3 = \frac{1}{2}g_{13} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{24}^1 &= \frac{1}{2}g_{34}, \quad \mathfrak{G}_{24}^2 = -g_{26}, \quad \mathfrak{G}_{24}^3 = \frac{1}{2}g_{14} + g_{25} \\
\mathfrak{G}_{25}^1 &= \frac{1}{2}g_{35} + g_{26}, \quad \mathfrak{G}_{25}^2 = 0, \quad \mathfrak{G}_{25}^3 = \frac{1}{2}g_{15} + g_{24} \\
\mathfrak{G}_{26}^1 &= \frac{1}{2}g_{36} - g_{25}, \quad \mathfrak{G}_{26}^2 = -g_{42}, \quad \mathfrak{G}_{26}^3 = \frac{1}{2}g_{16} \\
\mathfrak{G}_{33}^1 &= -g_{23}, \quad \mathfrak{G}_{33}^2 = -g_{13}, \quad \mathfrak{G}_{33}^3 = 0 \\
\mathfrak{G}_{34}^1 &= -\frac{1}{2}g_{24}, \quad \mathfrak{G}_{34}^2 = -\frac{1}{2}g_{14} - g_{36}, \quad \mathfrak{G}_{34}^3 = g_{35} \\
\mathfrak{G}_{35}^1 &= g_{36} - \frac{1}{2}g_{25}, \quad \mathfrak{G}_{35}^2 = -\frac{1}{2}g_{15}, \quad \mathfrak{G}_{35}^3 = g_{34} \\
\mathfrak{G}_{36}^1 &= -\frac{1}{2}g_{26} - g_{35}, \quad \mathfrak{G}_{36}^2 = -\frac{1}{2}g_{16} - g_{34}, \quad \mathfrak{G}_{36}^3 = 0 \\
\mathfrak{G}_{44}^1 &= 0, \quad \mathfrak{G}_{44}^2 = -2g_{46}, \quad \mathfrak{G}_{44}^3 = 2g_{45} \\
\mathfrak{G}_{45}^1 &= g_{46}, \quad \mathfrak{G}_{45}^2 = -g_{56}, \quad \mathfrak{G}_{45}^3 = g_{55} + g_{44} \\
\mathfrak{G}_{46}^1 &= -g_{45}, \quad \mathfrak{G}_{46}^2 = -g_{66} + g_{44}, \quad \mathfrak{G}_{46}^3 = g_{56} \\
\mathfrak{G}_{55}^1 &= 2g_{56}, \quad \mathfrak{G}_{55}^2 = 0, \quad \mathfrak{G}_{55}^3 = 2g_{45} \\
\mathfrak{G}_{56}^1 &= -g_{55} + g_{66}, \quad \mathfrak{G}_{56}^2 = -g_{45}, \quad \mathfrak{G}_{56}^3 = g_{46} \\
\mathfrak{G}_{66}^1 &= -2g_{56}, \quad \mathfrak{G}_{66}^2 = -2g_{46}, \quad \mathfrak{G}_{66}^3 = 0
\end{aligned}$$

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.5.2: $G = [g_{ij}]$ matrisi $\hat{E}_k(g_{ij}) = \sum_l (\Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{li})$ denklemini sağlıyorsa

$$G = \begin{bmatrix} \alpha\varepsilon & O \\ O & G_p \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

formuna sahiptir. Burada G_p bir simerik matris, $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, O 3×3 tipinde bir sıfır

matrisi ve α pozitif bir sabit sayıdır.

İspat: Teorem 4.4.2 ve (4.51) ifadeleri gözönüne alınırsa

$$\hat{E}_1(g_{11}) = 0, \quad \hat{E}_2(g_{11}) = -g_{31}, \quad \hat{E}_3(g_{11}) = -g_{21}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler ile Teorem 4.4.2 den $-\hat{E}_1(g_{13}) = g_{12}$ olur. (4.49) dan $\frac{1}{2}g_{21} = g_{21}$ olup $g_{21} = 0$ dir. Ayrıca

$$\hat{E}_1(g_{14}) = 0, \quad \hat{E}_2(g_{14}) = -\frac{1}{2}g_{34} - g_{16}, \quad \hat{E}_3(g_{14}) = \frac{1}{2}g_{24} + g_{15}$$

ve Teorem 4.4.2 tekrar kullanılırsa $g_{24} = 0$ bulunur. Diğer yandan (4.51) den $\hat{E}_1(g_{44}) = 0$, $\hat{E}_2(g_{44}) = -2g_{46}$, $\hat{E}_3(g_{44}) = 2g_{45}$ elde edilir. Buradan $g_{45} = g_{54}$ bulunur. Böylece (4.51) den aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
g_{12} &= 0, g_{13} = 0, g_{15} = 0, g_{14} = 0, g_{16} = 0 & (4.53) \\
g_{21} &= 0, g_{22} = -g_{11}, g_{23} = 0, g_{24} = 0, g_{25} = 0, g_{26} = 0 \\
g_{31} &= 0, g_{32} = 0, g_{33} = -g_{11}, g_{34} = 0, g_{35} = 0, g_{36} = 0. \\
g_{41} &= 0, g_{42} = 0, g_{43} = 0, g_{45} = g_{54}, g_{46} = g_{64} \\
g_{51} &= 0, g_{52} = 0, g_{53} = 0, g_{56} = g_{65} \\
g_{61} &= 0, g_{62} = 0, g_{63} = 0.
\end{aligned}$$

(4.51) den

$$-g_{11} = g_{22} = g_{33} = \alpha$$

dır. Yine (4.53) den G_p matrisinin simetrik olduğu görülür.

Teorem 4.5.3: Bir sol invaryant metriğin kinematik konneksiyonla uyumlu olaması için gerek yeter şart W matrisi

$$W = \begin{bmatrix} \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & \beta\varepsilon \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

formunda olmasıdır. Burada α ve β pozitif sabit sayılardır.

İspat: Teorem 4.5.2 deki G matrisini göz önüne alalım. Bir metrik sol invaryant ise G matrisi sabittir. Buradan g_{ij} ler sabit ise $\hat{E}_i(g_{ij}) = 0$ dır. O zaman (4.49) sisteminden G nin G_p matrisi için $g_{45} = 0$, $g_{46} = 0$, $g_{56} = 0$ bulunur. Ayrıca $-g_{44} = g_{55} = g_{66} = \beta$ olduğuda yine (4.51) sisteminden elde edilir. Buradan da $W = \begin{bmatrix} \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & \beta\varepsilon \end{bmatrix}$ olur.

Teorem 4.5.3 den Lie cebiri üzerindeki Minkowski uzayında iç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır:

$S_1, S_2 \in h_1(4)$ olmak üzere

$$\langle S_1, S_2 \rangle = \vec{s}_1^T W \vec{s}_2 \quad (4.55)$$

olur. Burada $\vec{s}_1 = [\vec{w}_1 \ \vec{v}_1]^T$ ve $\vec{s}_2 = [\vec{w}_2 \ \vec{v}_2]^T$ vektör çiftleri, sırasıyla, S_1 ve S_2 ye karşılık gelir.

Bu metrik için aşağıdaki özellikleri verebiliriz:

Özellik 4.5.4:

1) (4.55) metriği sol invaryant ve sabit referans çatısının seçiminden bağımsızdır. Çünkü metrik hareketli çatının baz vektörlerine göre tanımlanmıştır.

2) α ve β pozitif sabitlerinin keyfi bir seçimi için \hat{E}_i baz vektör alanları ortogonaldır. $\alpha = \beta = 1$ alındığında bu bazlar ortonormal olur.

Teorem 4.5.5: $X = X^i \hat{E}_i$, $Y = Y^i \hat{E}_i$ ve $Z = Z^i \hat{E}_i$ üç vektör alanı, bunlara karşılık gelen vektör çiftleri de, sırasıyla, $[\vec{w}_x \ \vec{v}_x]^T$, $[\vec{w}_y \ \vec{v}_y]^T$ ve $[\vec{w}_z \ \vec{v}_z]^T$ olsun. ∇ , (4.55) de verilen sol-invaryant Minkowski metriğine karşılık gelen Levi-Civata konneksiyonu ise

$$\begin{aligned} & \langle Z, \nabla_X Y \rangle = \tag{4.56} \\ & \langle X(Y^i) \hat{E}_i, Z \rangle + \frac{1}{2} [- \langle [\vec{w}_x \ \vec{v}_x]^T, [\vec{w}_y \times \vec{w}_z \ \vec{w}_y \times \vec{v}_z + \vec{v}_y \times \vec{w}_z]^T \rangle \\ & + \langle [\vec{w}_y \ \vec{v}_y]^T, [\vec{w}_z \times \vec{w}_x \ \vec{w}_z \times \vec{v}_x + \vec{v}_z \times \vec{w}_x]^T \rangle \\ & + \langle [\vec{w}_z \ \vec{v}_z]^T, [\vec{w}_x \times \vec{w}_y \ \vec{w}_x \times \vec{v}_y + \vec{v}_x \times \vec{w}_y]^T \rangle] \end{aligned}$$

olur.

İspat: (1.12) den yararlanarak ispatı yapacağız. X ve Y , $H_1(4)$ iki vektör alanı olmak üzere Lie parentez operatörü

$$[X, Y] = X^i Y^j [\hat{E}_i, \hat{E}_j] + X(Y^i) \hat{E}_i - Y(X^i) \hat{E}_i$$

olur. $[\vec{w}_x \ \vec{v}_x]^T$ ve $[\vec{w}_y \ \vec{v}_y]^T$ çiftlerine göre

$$X^i Y^j [\hat{E}_i, \hat{E}_j] = [\vec{w}_x \times \vec{w}_y \ \vec{w}_x \times \vec{v}_y + \vec{v}_x \times \vec{w}_y]^T$$

yazılabilir. Böylece (1.12) den,

$$\begin{aligned} & \langle Z, [X, Y] \rangle = \langle [\vec{w}_z \ \vec{v}_z]^T, [\vec{w}_x \times \vec{w}_y \ \vec{w}_x \times \vec{v}_y + \vec{v}_x \times \vec{w}_y]^T \rangle \\ & + \langle Z, X(Y^i) \hat{E}_i \rangle - \langle Z, Y(X^i) \hat{E}_i \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.55) den

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= X(Y^i W Z^i) = X(Y^i) W Z^i + Y W X(Z^i) \\ &= \langle X(Y^i) \hat{E}_i, Z \rangle + \langle Y, X(Z^i) \hat{E}_i \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Benzer açılımlar (1.12) sisteminin geri kalan terimleri için yapıldığında (4.56) denklemi elde edilir.

Teorem 4.5.6: $X = X^i \hat{E}_i$ ve $Y = Y^i \hat{E}_i$, $H_1(4)$ iki vektör alanı, bunlara karşılık gelen vektör çiftleri de, sırasıyla, $[\vec{w}_x \ \vec{v}_x]^T$, ve $[\vec{w}_y \ \vec{v}_y]^T$ olsun. ∇ , (4.55) de verilen Minkowski metriğine karşılık gelen Levi-Civata konneksiyonu ise o zaman

$$\nabla_X Y = \left[\frac{dw_y}{dt} + \frac{1}{2} w_x \times w_y \ \frac{dv_y}{dt} + w_x \times v_y \right]^T, \quad (4.57)$$

olur. Burda $\frac{d}{dt}$, X in integral eğrisi boyunca türev olup (4.57) eşitliği α ve β sabitlerinden bağımsızdır.

İspat: Teorem 4.5.3 ve (4.55) metriğinden;

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_X Y \rangle &= \langle Z, X(Y^i) \hat{E}_i \rangle + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} -\alpha w_x^T \varepsilon(w_y \times w_z) - \beta v_x^T \varepsilon(w_y \times v_z + v_y \times w_z) \\ +\alpha w_y^T \varepsilon(w_z \times w_x) + \beta v_y^T \varepsilon(w_z \times v_x + v_z \times w_x) \\ +\alpha w_z^T \varepsilon(w_x \times w_y) + \beta v_z^T \varepsilon(w_x \times v_y + v_x \times w_y) \end{array} \right] \\ &= \langle Z, X(Y^i) \hat{E}_i \rangle + \frac{1}{2} [\alpha w_z^T \varepsilon(w_x \times w_y) + 2\beta v_z^T \varepsilon(w_x \times v_y)] \\ &= \langle Z, X(Y^i) \hat{E}_i + [\frac{1}{2} w_x \times w_y \ w_x \times v_y]^T \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik her Z için doğru olduğundan

$$\nabla_X Y = X(Y^i) \hat{E}_i + [\frac{1}{2} w_x \times w_y \ w_x \times v_y]^T$$

yazılabilir. $\frac{d}{dt}$, X in integral eğrisi boyunca türev ise

$$X(Y^i) \hat{E}_i = \frac{dY^i}{dt} \hat{E}_i = \left[\frac{dw_y}{dt} \ \frac{dv_y}{dt} \right]^T$$

bulunur. Buradan da (4.57) ifadesi elde edilir.

Teorem 4.5.7: $X = X^i \hat{E}_i$, $Y = Y^i \hat{E}_i$ ve $Z = Z^i \hat{E}_i$, sırasıyla, $[\vec{w}_x \ \vec{v}_x]^T$, $[\vec{w}_y \ \vec{v}_y]^T$ ve $[\vec{w}_z \ \vec{v}_z]^T$ vektör çiftleriyle birleştirilmiş $H_1(4)$ de üç vektör alanı olsun. $H_1(4)$ de bir konneksiyon (4.57) denklemleri ile tanımlanmış ise o zaman $R(X, Y)Z$ eğriliği

$$R(X, Y)Z = \left[\frac{1}{4} (w_x \times w_y) \times w_z \ 0 \right]^T \quad (4.58)$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} X &= X^i \hat{E}_i = \begin{bmatrix} w_x \\ v_x \end{bmatrix} \\ X(Y^i) \hat{E}_i &= \begin{bmatrix} X(w_y) \\ X(v_y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$[X, Y] = \begin{bmatrix} w_{[X,Y]} \\ v_{[X,Y]} \end{bmatrix}.$$

almırsa

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_Y \begin{bmatrix} X(w_z) + \frac{1}{2}w_x \times w_z \\ X(v_z) + w_x \times v_z \end{bmatrix} - \nabla_X \begin{bmatrix} Y(w_z) + \frac{1}{2}w_y \times w_z \\ Y(v_z) + w_y \times v_z \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} [X, Y](w_z) + \frac{1}{2}w_{[X,Y]} \times w_z \\ [X, Y](v_z) + w_{[X,Y]} \times v_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} YX(w_z) + \frac{1}{2}(Y(w_x) \times w_z + w_x \times Y(w_z) + w_y \times X(w_z)) + \frac{1}{4}w_y \times (w_x \times w_z) \\ YX(v_z) + Y(w_x) \times v_z + w_x \times Y(v_z) + w_y \times X(v_z) + w_y \times (w_x \times v_z) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} XY(w_z) + \frac{1}{2}(X(w_y) \times w_z + w_y \times X(w_z) + w_x \times Y(w_z)) + \frac{1}{4}w_x \times (w_y \times w_z) \\ XY(v_z) + X(w_y) \times v_z + w_y \times X(v_z) + w_x \times Y(v_z) + \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} [X, Y](w_z) + \frac{1}{2}(w_x \times w_y + X(w_y) - Y(w_x)) \times w_z \\ [X, Y](v_z) + (w_x \times w_y + X(w_y) - Y(w_x)) \times v_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(w_x \times w_y) \times v_z \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

V. UYGULAMALAR

Uygulama 5.1: \mathbb{R}_1^2 , 2-boyutlu Minkowski uzayında bir dönme matrisi

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

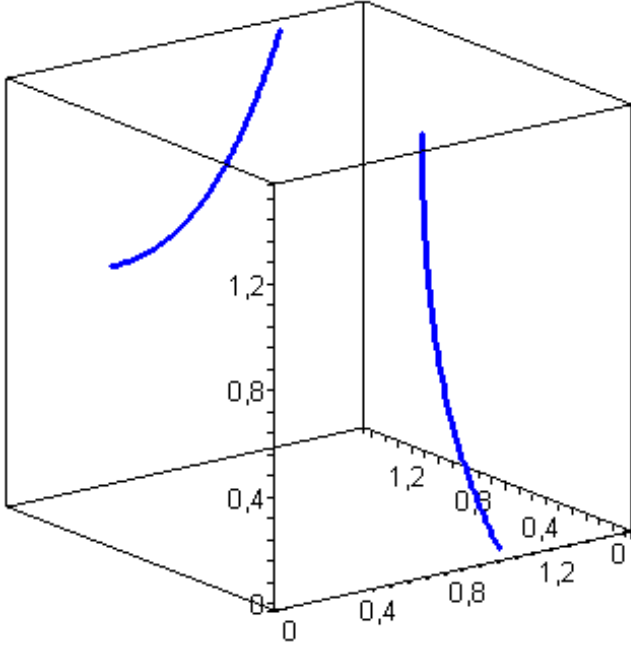
şeklinde ve bir öteleme vektörü de $d(t) = (\sinh t, \cosh t)$ olan bir hiperbol olsun. O zaman $A(t) \in H_1(3)$ nin matrisi.

$$A(t) = \begin{bmatrix} R(t) & d(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. (3.22) den $A(t)$ nin tanjant operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $A(t)$ nin eğrisi Şekil 5.1 deki gibi elde edilir.



Şekil 5.1

$A(t)$ nin hızı ve ivmesi

$$V = A^{-1} \frac{dA}{dt} = S$$

$$\ddot{A} = \frac{dV}{dt} = 0$$

elde edilir.

Uygulama 5.2: Bir

$$A(t) = \begin{bmatrix} R(t) & d(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eğrisi, (4.55) metriği ile donatılmış $H_1(4)$ üzerinde bir geodezik olması için gerek ve yeter şart $V = \frac{dA}{dt}$ hız vektör alanına karşılık gelen $[w \ v]^T$ vektör çiftinin

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -w \times v \end{aligned} \quad (5.1)$$

denklem sistemini sağlamasıdır. Eğer $\frac{dv}{dt} = -w \times v$ ise

$$\ddot{d} = 0$$

dır.

İspat: Eğer $A(t)$ bir geodezik eğri ise $\nabla_V V = 0$ dır. Böylece (4.42) den (5.1) denklemleri bulunur. (5.1) in ikinci denkleminde

$$\dot{v} + w \times v = 0 \quad (5.2)$$

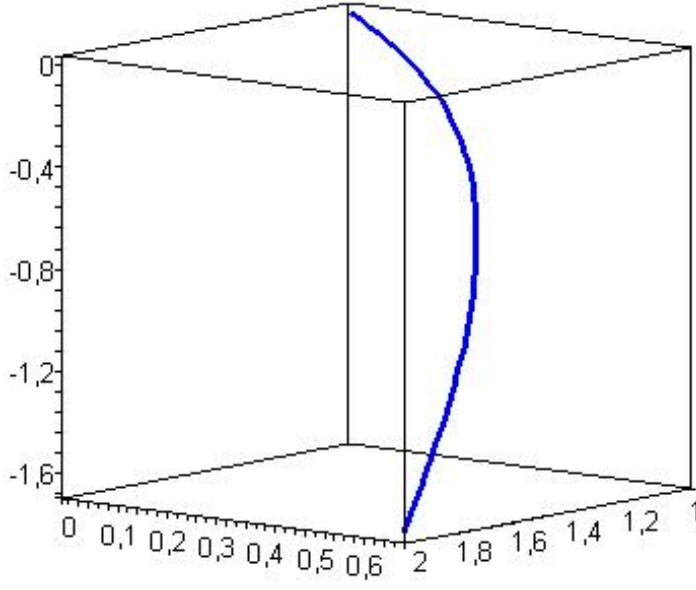
yazılabilir. $\Omega = \varepsilon R^T \varepsilon \dot{R}$ ve $v = \varepsilon R^T \varepsilon \dot{d}$ olduğundan (5.2) ifadesi bunlara bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\dot{v} + w \times v = \dot{v} + \Omega v = \left(\varepsilon \dot{R}^T \varepsilon \dot{d} + \varepsilon R^T \varepsilon \ddot{d} \right) + \varepsilon R^T \varepsilon \dot{d} = 0.$$

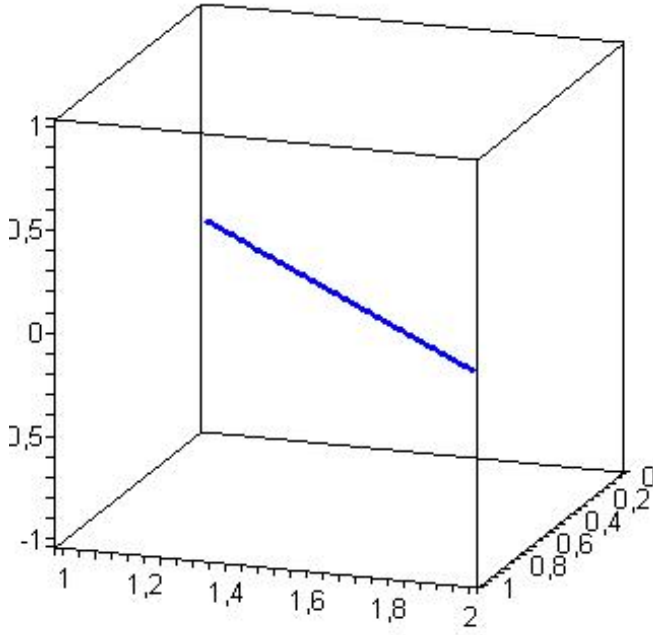
Diğer yandan $\varepsilon \dot{R}^T \varepsilon = -\varepsilon R^T \varepsilon \dot{R} \varepsilon R^T \varepsilon$ olduğundan

$$\varepsilon R^T \varepsilon \ddot{d} = 0$$

bulunur. Burada $\varepsilon \neq 0$ ve $R^T \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\ddot{d} = 0$ olur. Bu ise öteleme vektörünün bir doğru olduğunu gösterir.



Şekil 5.2.a Bir vida hareketi



Şekil 5.2.b Bir geodezik

Uygulama 5.3: $A(\psi) \in H_1(4)$, $A(\psi)$ bir geodezik eğri olmasın.

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} R(\psi) & d(\psi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $R(\psi)$ (2.2) de verilen dönme matrisi ve $d(\psi) = (\cosh \psi, \sinh \psi, 0)$ olsun. O zaman (3.22) den

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cosh \varphi \cosh \psi - \cos \theta \sinh \varphi \sinh \psi \\ 0 & 0 & 1 & -\sinh \varphi \cosh \psi \cos \psi + (\cos \theta \cosh \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \sinh \psi \\ 0 & -1 & 0 & -\sinh \varphi \sin \psi \cosh \psi + (\cos \theta \cosh \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi) \sinh \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

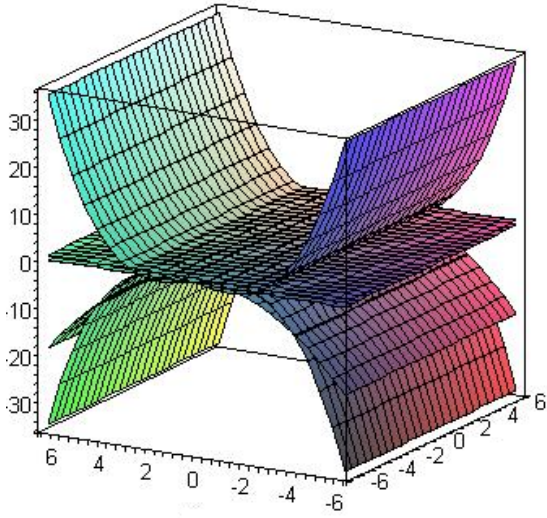
olur. Burada açısal hız $w = (-1, 0, 0)$ ve lineer hız

$$\begin{aligned} v &= (\cosh \varphi \cosh \psi - \cos \theta \sinh \varphi \sinh \psi, \\ &\quad -\sinh \varphi \cosh \psi \cos \psi + (\cos \theta \cosh \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \sinh \psi, \\ &\quad -\sinh \varphi \sin \psi \cosh \psi + (\cos \theta \cosh \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi) \sinh \psi) \end{aligned}$$

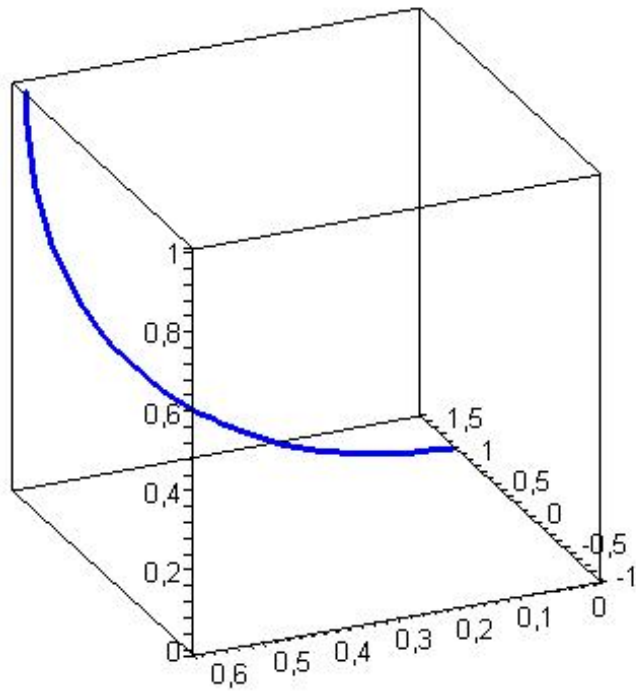
bulunur. Diğer yandan A nın ivmesi (4.40) dan

$$\begin{aligned} \check{A}(\psi) &= \{(0, 0, 0), (\cosh \varphi \sinh \psi - \cos \theta \sinh \varphi \cosh \psi, \\ &\quad -\sinh \varphi (-\sin \psi \cosh \psi + \cosh \psi \sinh \psi) \\ &\quad + (-\cos \theta \cosh \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi) \sinh \psi \\ &\quad + (\cos \theta \cosh \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \cosh \psi, \\ &\quad -\sinh \varphi (\cosh \psi \cos \psi + \sin \psi \sinh \psi + (\cos \theta \cosh \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \sinh \psi \\ &\quad + (\cos \theta \cosh \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi) \cosh \psi\} + \{0, (0, \\ &\quad -\sinh \varphi \sin \psi \cosh \psi + (\cos \theta \cosh \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi) \sinh \psi, \\ &\quad \sinh \varphi \cosh \psi \cos \psi - (\cos \theta \cosh \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \sinh \psi\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda hareket şekil 5.3.a ve şekil 5.3.b deki gibidir.



Şekil 5.3.a



Şekil 5.3.b

SONUÇ VE ÖNERİLER

1) Bu çalışma sırasında, Minkowski ve Lorentz uzayındaki temel kavramlar ve teoremler incelendi ve bir kısmı tezde verildi.

2) 3-boyutlu Minkowski uzayında dönme ve katı hareketler incelendi. Dönme hareketi için Minkowski uzayında Cayley formülü, Rodrigues denklemi ve Euler parametreleri ile ilgili araştırmalar yapıldı. Katı hareketin koordinat dönüşümü ve vida eksenleri verildi.

3) n -boyutlu Minkowski uzayında hareketin cebirsel özellikleri incelendi. Minkowski uzayında, dönme ve katı hareketlere karşılık gelen, $SO_1(n)$ ve $H_1(n)$ Lie grupları verildi. Bu grupların $so_1(n)$ ve $h_1(n)$ Lie cebirleri incelendi. $H_1(n)$ ve $SO_1(n)$ Lie gruplarının tanjant operatörleri ifade edildi. 3-boyutlu Minkowski uzayında, dönme ve katı hareketlerinin Lie grupları, sırasıyla, $SO_1(3)$ ve $H_1(4)$ ile gösterildi. Tanjant operatörlerinin Lie cebirinin elamanları olduğu verildi. Tanjant operatörlerle birleştirilmiş vektörler araştırıldı.

4) 3-boyutlu Minkowski uzayında, $H_1(4)$ ün geometrisiyle kinematiğin bazı temel sonuçları birlikte incelendi. $H_1(4)$ de sol invaryant vektör alanları, kovaryant türev ve Afin konneksiyon kavramları ifade edildi. $H_1(4)$ de geodezikleri vida hareketi olan Minkowski metriği verildi. İvme veya hızın daha yüksek türevlerini çalışmak için kinematik konneksiyon ifade edildi. Bu konneksiyonla uyumlu Minkowski metriği verildi.

5) Hareketlerle ilgili örnekler incelendi. Bu örneklerin daha iyi anlaşılabilmesi ve görsel olarak kavranabilmesi için Mapple 9.5 yazılımı kullanılarak, belirli parametrelerde grafikleri çizildi.

6) 3-boyutlu Minkowski uzayında, dönme ekseninin Null olmasına göre benzer sonuçlar araştırılabilir.

7) 3-boyutlu Dual Minkowski uzayında, dönme ve katı hareketin cebirsel özellikleri, hareketin kinematik ve diferensiyel geometrisi incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] BALGETİR, H., 2002, **Lorentz Uzayda Genelleştirilmiş Null Scrollar**, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 101s.
- [2] O'NEİLL, B., 1983, **Semi-Riemannian Geometry**, Academic Press, New York.
- [3] TURGUT, A., 1995, **3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler**, Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 96s.
- [4] ERGİN, A., 1989, **Minkowski Düzlemde Kinematik Geometri**, Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] DILLEN, F., and KÜHNEL, W., 1999, **Ruled Weingarten Surfaces in Minkowski 3-Space**, Manuscripta Math., 98, 307-320.
- [6] FERRANDEZ, A., and LUCAS, P., (1992), **Null 2-type Hypersurfaces in a Minkowski Space**, Canad. Math. Bull. Vol(35), 3, 354-360.
- [7] KAMISHIMA, Y., 1993, **Completeness of Minkowski Manifolds of Constant Curvature Admitting Killing Vector Fields**, J. Differential Geometry, 37, 569-601.
- [8] BEEM, J.K., and EHRLICH, P.E., 1981, **Global Minkowskiian Geometry**, Marcel. Dekker, Inc. New York.
- [9] HACISALIHOĞLU, H., 1983, **Diferensiyel Geometri**, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.2.
- [10] BEKTAŞ, M., 1998, **Lorentz Uzayın İntegral Geometrisi**, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 140s.
- [11] ZEFRAN, M., KUMAR, V., CROKE, C., 1996, **Choice of Riemannian Metrics for Rigid Body Kinematics**, In Proceedings of the ASME 24th Biennial Mechanisms Conference, Irvine, CA.
- [12] YENEROĞLU, M., and ASİL, V., 2002, **On the Geometry of Surfaces in Spatial Motions**, J. of Inst. of Math&Comp. Sci., 15, No.2, 105-107.
- [13] ASİL, V., 1992, **Kompleks Üstel Dönüşümlerin Lie Grubu ve Kompleks Üstel Hareketler**, Doktora Tezi. F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü 45s.
- [14] YENEROĞLU, M., 2000, **3-Boyutlu Reel Uzayda Bir Cismin Hareketinin Kinematik Diferensiyel Geometrisi**, Yüksek Lisans Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 39s.
- [15] ZEFRAN, M., KUMAR, V., CROKE, C., 1998, **On the Generation of Smooth Three-Dimensional Rigid Body Motions**, IEEE Transactions on Robotics and

Automation, 14, No.4, 576-589.

[16] McCARTHY, 1990, **An Introduction to Theoretical Kinematics**, MIT Press.

[17] BOTTEMA, O., and Roth, B., and ROTH, B., 1979, **Theoretical Kinematics**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford.

[18] SCHUTZ, B.F., 1980, **Geometrical Methods of Mathematical Physics**, Cambridge University Press, Cambridge.

[19] HACISALİHOĞLU, H., 1980, **Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş**, F.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, No.2.

[20] do CARMO, M.P., 1976, **Differential Geometry of Curves and Surfaces**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[21] ZEFRAN, M., KUMAR,V., 1996, **Planning of Smooth Motions SE(3)**, IEEE Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, MN, 121-126.

[22] FEATHERSTONE, R., 2001, **The Acceleration Vector of a Rigid Body**, The International Journal of Robotics Research, 20, No.11, 841-846.

[23] PARK, F.C., 1995, **Distance Metrics on the Rigid-Body Motions with Applications to Mechanism Design**, ASME J. of Mechanical Design, 117(1), 48-54.

[24] PARK, F.C., and BROCKETT, W., 1994, **Kinematic Dexterity of Robotic Mechanisms**, The International Journal of Robotics Research, 13(1), 1-15.

ÖZGEÇMİŞ

04.11.1974 tarihinde Elazığ'da doğmuşum. 1985 yılında Atatürk İlkokulu'ndan, 1988 yılında Atatürk Ortaokulu'ndan ve 1991 yılında Elazığ Lisesi'nden mezun oldum. 1997 yılında F.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü bitirdim ve aynı yıl F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Sınavını kazandım. 1999 yılında Matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. 2000 yılında Yüksek Lisansımı tamamladım. 2001 yılında Matematik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başladım. Halen F.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.

Arş.Gör. Mustafa YENEROĞLU