

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	2
2.1 Önbilgiler	2
3. KUANTUM 3D SÜPER UZAY	8
3.1 Kuantum 3d süper uzay üzerindeki polinomların cebiri	8
3.2 A cebiri üzerine Süper Hopf cebir yapısı	8
4. KUANTUM 3D SÜPER UZAY ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP	10
4.1 Diferansiyel cebir	10
4.2 Kovaryantlık	11
4.3 $\mathcal{A}$ üzerine Cartan-Maurer 1- formları	15
4.4 Kısmi türevlerin cebiri	17
5. KUANTUM SÜPER LİE CEBİRİ	20
6. SÜPER HOPF CEBİRİNİN DUALİ	23
7. KUANTUM 3D SÜPER UZAY ÜZERİNE GENİŞLETİLMİŞ HESAP	28
7.1 İç türevler	28
7.2 Lie türevler	31
8. SONUÇ	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGE LİSTESİ

$\otimes$	Tensör Çarpım
$\{ \}$	Küme İşareti
d	Diferansiyel Operatör
∂	Kısmi Türev Operatörü
Δ	Eş-çarpım
ε	Eş-birim
S	Eş-ters

ÖNSÖZ

Değişmeli olmayan geometri, fizikte en ilgi çekici matematiksel kavramlardan biridir ve son yıllarda matematiksel fiziğin farklı alanlarında önemli bir rol oynamaya başlamıştır. Bu çalışmada, $(2+1)$ -boyutlu süper uzayın bir deformasyonu yapılarak, onun üzerine bir genişletilmiş diferansiyel kurulmuştur.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü maddi-manevi yardımını benden esirgemeyen çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, konu hakkındaki yardımlarından dolayı Sayın Arş. Grv. Ergün YAŞAR'a şükranlarımı sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, Genişletilmiş kuantum üç boyutlu süper uzay üzerinde değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap verilmektedir. Vektör alanlarının Lie cebiri ve Hopf cebiri yapısı ve dual Hopf cebiri yapısı elde edilmektedir. Genişletilmiş kuantum 3d süper uzay üzerindeki diferansiyel hesap, iç türevler ve Lie türevler vasıtasıyla genişletilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kuantum süper uzay, diferansiyel hesap, süper Hopf cebiri, Lie süper cebiri, dual süper cebir, iç türev, Lie türevi.

ABSTRACT

In this study, A noncommutative differential calculus on the extended quantum 3d superspace is given. The Lie algebra of vector field, its Hopf algebra structure and dual Hopf algebra are obtained. The differential calculus on the extended quantum 3d superspace is extended via inner derivations and Lie derivatives.

Keywords: Quantum superspace, differential calculus, super Hopf algebra, Lie super algebra dual super algebra, inner derivations and Lie derivatives.

1. GİRİŞ

Kuantum grupların değişmeli olmayan diferansiyel geometrisi fikri ilk defa Woronowicz (1987, 1989) tarafından ortaya atılmıştır. Bu yaklaşımda grup üzerindeki diferansiyel hesap, grubun özelliğinden çıkartılır. Bu, grup üzerindeki fonksiyonlar, diferansiyeller, diferansiyel formlar ve kısmi türevlerle ilgilidir. Wess ve Zumino (1990) tarafından ortaya atılan yaklaşım Manin'in (1988,1989) kuantum uzaylar hakkındaki vurgusunun devamı niteliğindedir. Diferansiyel formlar, değişmeli olmayan koordinatlarla tanımlanmıştır. Kuantum gruplar, bu uzaylar üzerine etki eder. Kuantum grupların diferansiyel ve cebirsel özellikleri, bu uzayın özelliklerinden elde edilmiştir. Kuantum gruplar üzerindeki diferansiyel hesaba, bir pedagojik yaklaşım Aschieri ve Castellani (1993) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada, üç boyutlu kuantum süper uzay, Manin (1989) yaklaşımıyla ele alınmaktadır. Kuantum 3d süper uzay üzerine diferansiyel hesap kurulurken, Çelik (2006) tarafından verilen yaklaşım kullanılacaktır. Önce koordinat fonksiyonları ile onların diferansiyelleri arasındaki bağıntılar elde edilecek, sonra diferansiyeller arasındaki bağıntılar bulunacaktır. Böylece elde edilecek diferansiyel cebirin, bir Hopf cebiri olduğu ispat edilecektir. Daha sonra, vektör alanlarının Lie süper cebiri ve süper Hopf cebiri elde edilecektir. Sonraki kısımda ise, dual süper Hopf cebiri elde edilip vektör alanlarının cebiri ile izomorf olduğu gösterilecektir.

Son kısımda ise, yukarıda elde edilen diferansiyel hesap, iç türevler ve Lie türevleri vasıtasıyla daha büyük bir diferansiyel hesaba genişletilecektir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Önbilgiler

Bu bölümde, tezde kullanılacak bazı kavramlar, bütünlüğü bozmaması için burada tanıtılacaktır.

2.1.1. Tanım: Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir birimli **halka** denir.

1. $(R, +)$ bir değişmeli grup.
2. Her $a, b, c \in R$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.c$.
3. Her $a \in R$ için $a.1 = 1.a$ olacak şekilde $1 \in R$ elemanı mevcut.
4. Her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$.

Eğer her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir.

2.1.2. Tanım: $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi: R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a.x, \quad (\varphi: M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x.a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M 'ye bir **sol (sağ) R -modül**, kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R -modül M 'nin **yapı tasviri** adı verilir:

$\forall a, b \in R$ ve $\forall x, y \in M$ için,

$$\text{i) } a(x + y) = ax + ay, \quad ((x + y)a = xa + ya)$$

$$\text{ii) } (a + b)x = ax + bx, \quad (x(a + b) = xa + xb)$$

$$\text{iii) } (a.b)x = a(bx), \quad (x(a.b) = (xa)b)$$

$$\text{iv) } 1_R x = x, \quad (x1_R = x)$$

Eğer M hem sağ hem sol R -modül ise M 'ye kısaca **modül** denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne **vektör uzayı** veya bir **lineer uzay** denir.

2.1.3.Tanım: V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$$T : V \mapsto W$$

tasviri, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$$

şartını sağlarsa, bir **lineer** tasvir adını alır.

2.1.4. Tanım: U, V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi : U \times V \rightarrow W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir **bi-lineer** tasvir denir.

$u, u' \in U; v, v' \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

$$i) \varphi(\lambda u + \mu u', v) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u', v),$$

$$ii) \varphi(u, \lambda v + \mu v') = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, v').$$

Kabul edelim ki U, m – boyutlu ve V, n – boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V nin taban elemanlarının kümesidir. Bu takdirde $1 \leq i \leq m$ ve

$1 \leq j \leq n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri W daki bir

$\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca, $\varphi : U \times V \rightarrow W$ tasvirini

$\vec{x} = x^i \vec{u}_i$ ve $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$ olmak üzere

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^j \vec{w}_{ij}$$

şeklinde tanımlarız. Aşikâr olarak φ , bir bi-lineer tasvirdir ve $\varphi(U \times V) \subseteq W$ (görüntü)

kümesi, $\{\vec{w}_{ij}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla φ , W uzayını gerer.

Sonuç olarak, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa W uzayına, U ve V uzaylarının **tensör** çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir.

i) $\varphi(U \times V), W$ yı gerer.

ii) $\Psi : U \times V \mapsto W'$ herhangi bir bi-lineer tasvir ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir $\Phi : W \mapsto W'$ lineer tasvir mevcut.

2.1.5.Tanım: $T_1:U_1 \mapsto V_1$, $T_2:U_2 \mapsto V_2$, birer lineer tasvir olsun. Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi:U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \quad \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki Φ 'ye T_1 ve T_2 'nin **tensor çarpımı** denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

2.1.6. Tanım: L vektör uzayı olmak üzere, eğer,

$$[,]:L \times L \mapsto L$$

bi-lineer tasviri aşağıdaki iki şartı sağlarsa L 'ye bir **Lie** cebiri denir:

- i) $[x, y] = -[y, x]$,
- ii) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \quad \forall x, y, z \in L.$

2.1.7. Tanım: G bir grup ve K bir cisim olsun. A ile G 'den K 'ya olan fonksiyonların kümesini gösterelim. Yani

$$A = \text{Map}(G, K) = \{f \mid f: G \mapsto K\}$$

olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa, A 'ya bir **K -cebir** denir:

- (1) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$
- (2) $(f + g)(x) = f(x) + g(x),$
- (3) $(fg)(x) = f(x)g(x), \quad f, g \in A, \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$

Eğer bir lineer $T: A \rightarrow A$ tasviri

$$T(f.g) = T(f).T(g)$$

eşitliğini de sağlarsa, T 'ye bir **lineer homomorfizm** veya **cebir homomorfizmi** denir.

Bir K -cebirini (basitlik için sadece cebir diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K -vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\begin{aligned} \mu: A \otimes A &\rightarrow A, \quad \mu(a \otimes b) = a.b, \\ \eta: K &\rightarrow A, \quad \eta(k) = k.I. \end{aligned}$$

Burada I , A 'nın birim elamanıdır. Bu tasvirler için

$$\begin{aligned}\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) &= \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad (\text{Ass}) \\ \mu \circ (\text{id} \otimes \eta) &= \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Uni})\end{aligned}\tag{2.1}$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ çarpma tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir **cebiri** diyeceğiz.

Eğer $A \otimes A = \text{Map}(G \times G, K)$ ve $A = \text{Map}(G, K)$ olduğunu kabul edersek, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz. Her $x, y \in G$ için

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A, \Delta f(x \otimes y) = f(x.y),$$

$$\varepsilon : A \rightarrow K, \varepsilon(f) = f(e).$$

Burada e , G 'nin birim elamanıdır. Δ 'ya cebirin bir **eş-çarpması** ve ε tasvirine de cebirin **eş-birimi** denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için verilen

$$\begin{aligned}(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \quad (\text{coass}) \\ \mu \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\text{counit})\end{aligned}\tag{2.2}$$

dır. Genel olarak, K üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-kocebiri** (kısaca **kocebiri**) ve A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-bicebiri** (kısaca **bicebiri**) denir. Ek olarak, $f \in A, x \in G$ için

$$S : A \rightarrow A, Sf(x) = f(x^{-1})$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\text{id} \otimes S) \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \text{id}) \Delta\tag{2.3}$$

özellikliğini sağlayan bir S cebir antihomomorfizm (eş-ter) ile $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir **Hopf** cebiri denir (Abe, 1977). Bundan sonra, kısaltığı bakımından bir Hopf cebiri için,

$(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısını değil sadece A yı kullanacağız.

Eğer A bir Hopf cebiri ise, $A \otimes A$ daki çarpma

$$(X \otimes Y)(Z \otimes W) = (-1)^{\deg(Y)\deg(Z)}(XZ \otimes YW) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\deg(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ çift dereceden} \\ 1, & f \text{ tek dereceden} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklindedir.

2.1.8. Tanım: C , bir kocebiri olsun. Eğer bir lineer M uzayı ve bir lineer

$$\Psi : M \rightarrow M \otimes C$$

tasviri için aşağıdaki diyagramlar komutatif ise (M, Ψ) ikilisine bir sağ C – komodül denir.

Bir sol C – komodül de benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{array}{ccc} M \otimes K & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & M \otimes C \\ & \nwarrow \cong & \uparrow \psi \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\psi \otimes \text{id}} & M \otimes C \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & & \uparrow \psi \\ M \otimes C & \xleftarrow{\psi} & M \end{array}$$

Bir bimodülün tanımı için aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

B , bir bicebir ve M de

$$\varphi_M : M \otimes B \rightarrow M, \quad \varphi_M(m \otimes x) = mx$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte bir sağ B – modül olsun. Bu durumda,

$$\varphi_{M \otimes B} : (M \otimes B) \otimes B \rightarrow M \otimes B,$$

$$\varphi_{M \otimes B}(m \otimes x \otimes y) = \sum_{(y)} m y_{(1)} \otimes x y_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte, $M \otimes B$ de bir sağ B -modül olur. Buna ek olarak,

$$\Psi_M : M \rightarrow M \otimes B$$

K -lineer yapı dönüşümü ile birlikte M bir B -komodül ise,

$$\Psi_{M \otimes B} : M \otimes B \rightarrow (M \otimes B) \otimes B,$$

$$\Psi_{M \otimes B}(m \otimes x) = \sum_{(m)(x)} m_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes m_{(1)} x_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B$$

şeklinde tanımlanan K -lineer yapı dönüşümüyle birlikte $M \otimes B$ bir B -komodül olur.

Bu durumda bir bimodülün tanımını şu şekilde verebiliriz:

2.1.9. Tanım: Eğer M , hem sağ B -modül ve hem de B -komodül olmak üzere aşağıdaki koşul sağlanırsa M 'ye bir B -**bimodül** denir:

- φ_M 'nin bir sağ B -komodül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Ψ_M 'nin bir sağ B -modül homomorfizmi olmasıdır.

Şimdi, bu tezde yapılacak orijinal şeylere geçebiliriz.

3. KUANTUM 3D SÜPER UZAY

Bu bölümde kuantum 3d süper uzay üzerindeki koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu cebirin bir süper Hopf cebiri olduğu ispat edilecektir.

3.1 Kuantum 3d süper uzay üzerindeki polinomların cebiri

Kuantum 3d süper uzay, ilk defa Manin (1989) tarafından ortaya atılmıştır ve

$$xy = qyx, x\theta = q\theta x, y\theta = q\theta y, \theta^2 = 0 \quad (3.1)$$

kuadratik özelliğe sahip, birbiriyle q -komutatif olan sıfırıncı dereceden x, y ve birinci dereceden θ koordinatlarıyla oluşturulmuş bir birleşmeli cebir olarak tanımlanmıştır. Burada q sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır. Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir, 3d kuantum süper uzay üzerindeki polinomların cebiridir. Bu cebiri $Fun(R_q^{2|1})$ ile göstereceğiz. $q \rightarrow 1$ limitinde bu cebir, değişmeli olur ve üç boyutlu süper uzay üzerindeki $C[x, y, \theta]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür. Burada x, y, θ koordinat fonksiyonlarıdır. $Fun(R_q^{2|1})$ cebirine birim elamanın eklenmesiyle elde edilen cebir A ile gösterelim. Şimdi bu cebir üzerine bir Hopf cebir yapısı inşa edeceğiz.

3.2 A cebiri üzerine Süper Hopf cebir yapısı

Kabul edelim ki x in tersi mevcut olsun, yani

$$x.x^{-1} = 1 = x^{-1}.x$$

şartı sağlansın. Bu durumda, A cebiri üzerindeki bir cebir homomorfizmi olan eş-çarpımın koordinat fonksiyonları üzerine etkisini aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta_A(x) &= x \otimes x, \\ \Delta_A(y) &= x \otimes y + y \otimes x, \\ \Delta_A(\theta) &= \theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bu tasvir,

$$(\text{id} \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A \quad (3.3)$$

şeklindeki koasosyatiflik özelliğine sahiptir ve (3.1) kuadratik bağıntılarını korur.

Gerçekten, Δ_A 'nın homomorfizmi özelliğini kullanarak, örneğin

$$\begin{aligned}
 \Delta_A(xy - qyx) &= \Delta_A(x)\Delta_A(y) - q\Delta_A(y)\Delta_A(x) \\
 &= (x \otimes x)(x \otimes y + y \otimes x) - q(x \otimes y + y \otimes x)(x \otimes x) \\
 &= (x^2 \otimes xy) - q(x^2 \otimes yx) + (xy \otimes x^2) - q(yx \otimes x^2) \\
 &= (x^2 \otimes qyx) - q(x^2 \otimes yx) + (qyx \otimes x^2) - q(yx \otimes x^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğunu kolayca görürüz. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi Δ_A tasvirinin koordinat fonksiyonlarına etkisini kullanarak,

$$\begin{aligned}
 \mu \circ (\varepsilon_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A &= \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A, \\
 \mu \circ (S_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A &= \varepsilon_A = \mu \circ (\text{id} \otimes S_A) \circ \Delta_A
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

özellikleri sağlayacak şekilde, ε_A eş-birim ve S_A eş-ters lineer tasvirlerinin, koordinat fonksiyonlarına etkisini bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
 \mu \circ (\varepsilon_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A(x) &= \text{id}(x), & \mu(\text{id} \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A(x) &= \text{id}(x) \\
 \mu \circ (\varepsilon_A \otimes \text{id})(x \otimes x) &= x, & \mu(\text{id} \otimes \varepsilon_A)(x \otimes x) &= x \\
 \mu \circ (\varepsilon_A(x) \otimes \text{id}(x)) &= x, & \mu(\text{id}(x) \otimes \varepsilon_A(x)) &= x \\
 \varepsilon_A(x).x &= x, & x.\varepsilon_A(x) &= x
 \end{aligned}$$

yani $\varepsilon_A(x) = 1$ bulunmuştur. Benzer şekilde, ε_A eş-birimin y ve θ koordinat fonksiyonlarına etkisi bulunur. Sonuç olarak

$$\varepsilon_A(x) = 1, \quad \varepsilon_A(y) = 0, \quad \varepsilon_A(\theta) = 0 \tag{3.5}$$

dir.

S eş-ters tasvirinin koordinat fonksiyonlarına etkisini de,

$$\mu \circ (S_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (\text{id} \otimes S_A) \circ \Delta_A$$

özellikliğini kullanarak

$$S_A(x) = x^{-1}, \quad S_A(y) = -x^{-1}yx^{-1}, \quad S_A(\theta) = -\theta \tag{3.6}$$

şeklinde buluruz.

4. KUANTUM 3D SÜPER UZAY ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu kısımda amaç , A Hopf cebirinin bir diferansiyel cebirini elde etmektir. Bunu koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerini alıp üzerlerine yeni yapılar koyarak yapacağız. Dolayısıyla, önce dış diferansiyel d nin özelliklerini verelim. Dış diferansiyel d , A 'nın jeneratörlerini diferansiyellerine dönüştüren bir operatördür:

$$d : a \rightarrow da, \quad a \in \{x, y, \theta\}.$$

Bu d dış diferansiyel operatörü,

$$d^2 = 0 \text{ (nilpotentlik)} \quad (4.1)$$

ve

$$d(fg) = d(f)g + (-1)^{\deg(f)} fd(g) \quad (4.2)$$

Leibniz özelliklerine sahiptir.

4.1 Diferansiyel cebir

Bilindiği üzere klasik diferansiyel hesapta fonksiyonlar, diferansiyellerle değişme özelliğine sahiptir. Cebirsel açıdan, 1-formların uzayı 1.mertebeden diferansiyellerle oluşturulmuş düzgün fonksiyonların cebiri üzerinde bir serbest bi-modüldür ve komutatıflık, sağ ve sol yapıların birbirine nasıl bağlandığını gösterir.

Kuantum süper uzay üzerindeki bir diferansiyel hesabı oluşturmak amacıyla, koordinatlarla onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarının

$$\begin{aligned} xdx &= A_1 dx x \\ xdy &= F_{11} dy x + F_{12} dx y \\ ydx &= F_{21} dx y + F_{22} dy x \\ ydy &= A_2 dy y \\ xd\theta &= G_{11} d\theta x + G_{12} dx \theta \\ \theta dx &= G_{21} dx \theta + G_{22} d\theta x \\ yd\theta &= H_{11} d\theta y + H_{12} dy \theta \\ \theta dy &= H_{21} dy \theta + H_{22} d\theta y \\ \theta d\theta &= A_3 d\theta \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada $A_i, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$ katsayıları, q deformasyon parametresine bağlıdır ve onları belirleme işi komutatif olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlık metodu kullanılarak yapılabilir (Çelik, 2002).

4.2 Kovaryantlık

Sol ve sağ- kovaryant bimodül tanımlarıyla başlayalım.

Ω, A Hopf cebiri üzerinde bir bimodül olsun. Bir Δ^R tasvirini

$$\Delta^R : \Omega \rightarrow \Omega \otimes A, \quad \Delta^R(da) = (d \otimes \text{id})\Delta_A(a), \quad \forall a \in A \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde, her $a_1, a_2 \in A$ ve $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$ için

$$\Delta^R(a_1 \rho_1 + \rho_2 a_2) = \Delta_A(a_1) \Delta^R(\rho_1) + \Delta^R(\rho_2) \Delta_A(a_2), \quad (4.5)$$

olmak üzere Δ^R nin bir lineer homomorfizm olduğu kolayca görülebilir. Eğer,

$$\begin{aligned} (\Delta^R \otimes \text{id}) \circ \Delta^R &= (\text{id} \otimes \Delta_A) \circ \Delta^R, \\ (\text{id} \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta^R &= \text{id} \end{aligned} \quad (4.6)$$

özellikleri mevcut ise (Ω, Δ^R) ikilisine bir sağ kovaryant bimodül denir. Şimdi Δ^R nin birinci dereceden diferansiyellere etkisini bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta^R(dx) &= (d \otimes \text{id})\Delta_A(x) = (d \otimes \text{id})(x \otimes x) \\ &= dx \otimes x \\ \Delta^R(dy) &= (d \otimes \text{id})\Delta_A(y) = (d \otimes \text{id})(x \otimes y + y \otimes x) \\ &= dx \otimes y + dy \otimes x \\ \Delta^R(d\theta) &= (d \otimes \text{id})\Delta_A(\theta) = (d \otimes \text{id})(\theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta) \\ &= d\theta \otimes 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A_k ($1 \leq k \leq 3$) ve F_{ij}, G_{ij}, H_{ij} ($1 \leq i, j \leq 2$) katsayılarını bulmak için Δ^R lineer tasvirini (4.3) bağıntılarına uyguluyoruz. İlk iki bağıntıdan,

$$\begin{aligned} \Delta^R(x dx) &= \Delta_A(x) \Delta^R(dx) = A_1 \Delta^R(dx x), \\ \Delta^R(x dy) &= \Delta_A(x) \Delta^R(dy) = F_{11} \Delta^R(dy) \Delta_A(x) + F_{12} \Delta^R(dx) \Delta_A(y) \end{aligned}$$

yazarız. Eşitliğin sol ve sağ tarafını açık bir şekilde yazarsak,

$$\begin{aligned}
\Delta^R(xdy) &= \Delta_A(x)\Delta^R(dy) \\
&= (x \otimes x)(dy \otimes x + dx \otimes y) \\
&= (xdy \otimes x^2) + (xdx \otimes xy) \\
&= F_{11}(dyx \otimes x^2) + F_{12}(dx y \otimes x^2) + A_1(dx x \otimes xy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{11}\Delta^R(dy)\Delta_A(x) + F_{12}\Delta^R(dx)\Delta_A(y) &= F_{11}(dy \otimes x + dx \otimes y)(x \otimes x) + F_{12}(dx \otimes x)(y \otimes x + x \otimes y) \\
&= F_{11}(dyx \otimes x^2) + (F_{11} + qF_{12})(dx x \otimes yx) + F_{12}(dx y \otimes x^2)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Karşılıklı eşitleme,

$$F_{11} + qF_{12} = qA_1 \quad (4.8)$$

bağıntısını verir. Benzer şekilde, (4.3) deki üçüncü ve dördüncü bağıntılardan, gerekli işlemler yapılarak,

$$A_1 = qF_{21} + F_{22}, \quad A_1 = A_2, \quad qF_{22} + F_{11} = qA_2, \quad F_{12} + qF_{21} = A_2 \quad (4.9)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4. 8) ve (4. 9) sisteminin bir çözümü,

$$F_{12} = F_{22}, \quad F_{11} = q^2 F_{21} \quad (4.10)$$

dir. Benzer şekilde işlemlere devam ederek,

$$A_3 = 1, \quad H_{11} = G_{11}, \quad G_{12} = H_{12} = 0, \quad H_{21} = G_{21} = -q^{-1}, \quad H_{22} = G_{22}, \quad (4.11)$$

sistemi elde ederiz.

Ω , A Hopf cebiri üzerinde bir bimodül olsun. Bir Δ^L tasvirini

$$\begin{aligned}
\Delta^L : \Omega &\rightarrow A \otimes \Omega, \quad \Delta^L(da) = (\tau \otimes d)\Delta_A(a), \quad \forall a \in A \\
\tau(a) &= (-1)^{\deg(a)} a,
\end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde, her $a_1, a_2 \in A$ ve $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$ için

$$\Delta^L(a_1\rho_1 + \rho_2 a_2) = \Delta_A(a_1)\Delta^L(\rho_1) + \Delta^L(\rho_2)\Delta_A(a_2), \quad (4.13)$$

olmak üzere, Δ^L nin bir lineer homomorfizm olduğu kolayca görülebilir. Eğer

$$\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes \text{id}) \circ \Delta^L &= (\text{id} \otimes \Delta^L) \circ \Delta^L, \\
(\varepsilon_A \otimes \text{id}) \circ \Delta^L &= \text{id}
\end{aligned} \quad (4.14)$$

özellikleri mevcut ise (Ω, Δ^L) ikilisine bir sol kovaryant bimodül denir. Şimdi Δ^L nin birinci

dereceden diferansiyellere etkisini bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
\Delta^L(dx) &= (\tau \otimes d)\Delta_A(x) = (d \otimes \text{id})(x \otimes x) \\
&= x \otimes dx \\
\Delta^L(dy) &= (\tau \otimes d)\Delta_A(y) = (\tau \otimes d)(x \otimes y + y \otimes x) \\
&= x \otimes dy + y \otimes dx \\
\Delta^L(d\theta) &= (\tau \otimes d)\Delta_A(\theta) = (\tau \otimes d)(\theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta) \\
&= 1 \otimes d\theta.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Δ^L nin (4.3) bağıntılarına uygulanması Δ^R ile elde edilen bağıntılardan farklı bağıntılar vermeyecektir. Bu durumda bilinmeyen diğer katsayıları bulmak için, (4.3) deki ikinci ve üçüncü bağıntılara d diferansiyel operatörünü uyguluyoruz. Böyle yapınca,

$$F_{11}F_{21} = (1 + F_{12})(1 + F_{22}) \tag{4.16}$$

elde ederiz. Bu denklemden, (4.10) daki bağıntılar uygun şekilde kullanılırsa,

$$F_{21} = \mp q^{-1}(1 + F_{12}) \tag{4.17}$$

bulunur. Dolayısıyla özel bir çözüm,

$$F_{12} = 0 \tag{4.18}$$

dir. Buna göre F_{21} için tutarlı bir çözüm

$$F_{21} = q^{-1} \tag{4.19}$$

dir. Benzer şekilde d diferansiyel operatörünü (4.3) deki beşinci ve altıncı bağıntılara uygularsak,

$$G_{11}G_{21} = (G_{12} + 1)(G_{22} - 1) \tag{4.20}$$

elde ederiz. Bu son eşitlik, (4.11) deki bağıntılarla birlikte düşünülürse,

$$G_{11} = -q(G_{22} - 1) \tag{4.21}$$

bulunur. Böylece özel bir çözüm,

$$G_{22} = 0 \tag{4.22}$$

dır.

Sonuç olarak sistemin bir çözümü,

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = A_3 = 1, \quad F_{11} = G_{11} = H_{11} = q, \\ F_{21} = q^{-1}, \quad G_{21} = -q^{-1}, \quad H_{21} = -q^{-1}, \\ F_{22} = G_{22} = H_{22} = 0, \quad F_{12} = G_{12} = H_{12} = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklindedir. O halde, koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerle bağıntıları,

$$\begin{aligned} xdx &= dx x, \quad xdy = q dy x, \quad xd\theta = q d\theta x \\ ydx &= q^{-1} dx y, \quad ydy = dy y, \quad yd\theta = q d\theta y \\ \theta dx &= -q^{-1} dx \theta, \quad \theta dy = -q^{-1} dy \theta, \quad \theta d\theta = d\theta \theta. \end{aligned} \quad (4.24)$$

olarak çıkar. Eğer bu bağıntıların her iki tarafının diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -q dy \wedge dx, \quad dx \wedge d\theta = q d\theta \wedge dx, \quad dy \wedge d\theta = q d\theta \wedge dy \\ dx \wedge dx &= 0, \quad dy \wedge dy = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. Gerçekten,

$$xdy = q dy x \Rightarrow dxdy + x(d^2 y) = q(d^2 y)x + q(-1)^{\deg(dy)} dy dx,$$

olup d diferansiyel operatörünün nilpotentlik ve Leibniz kuralları göz önünde bulundurulursa

$$dxdy = -q dy dx$$

elde edilir. Burada d operatörü 0 dereceli x ve y koordinat fonksiyonlarını dx ve dy şeklinde derecesi 1 olan diferansiyellere, derecesi 1 olan θ koordinat fonksiyonunu da $d\theta$ şeklinde derecesi 2 olan diferansiyele dönüştürür.

(4.24) bağıntılarına sahip cebiri Ω_1 ile (4.25) bağıntılarına sahip cebiri de Ω_2 ile gösterelim.

Birleşmeli bir cebir üzerindeki bir diferansiyel cebir, bir d operatörüyle donatılmış, dereceli birleşmeli Ω cebiridir. Üstelik Ω cebiri, $\Omega_0, \mathcal{A}$ 'ya izomorf olmak üzere, $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ ile oluşturulmuştur.

Bu Ω diferansiyel cebiri aşağıda tanımlanan eş-yapı dönüşümleriyle birlikte bir dereceli Hopf cebiri yapısına sahip olur:

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega : \Omega &\rightarrow \Omega \otimes \Omega, \quad \Delta_\Omega = \Delta^R + \Delta^L \\ \Delta_\Omega(dx) &= dx \otimes x + x \otimes dx, \\ \Delta_\Omega(dy) &= dx \otimes y + dy \otimes x + x \otimes dy + y \otimes dx, \\ \Delta_\Omega(d\theta) &= d\theta \otimes 1 + 1 \otimes d\theta, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_\Omega : \Omega &\rightarrow C, \\ \varepsilon_\Omega(dx) &= 0, \quad \varepsilon_\Omega(dy) = 0, \quad \varepsilon_\Omega(d\theta) = 0,\end{aligned}\tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}S_\Omega : \Omega &\rightarrow \Omega, \\ S_\Omega(dx) &= -x^{-1}dx x^{-1}, \\ S_\Omega(dy) &= 2x^{-1}yx^{-1}dx x^{-1} - x^{-1}dy x^{-1}, \\ S_\Omega(d\theta) &= -d\theta\end{aligned}\tag{4.28}$$

4.3 A üzerine Cartan-Maurer 1- formları

Bu kısımda, Cartan-Maurer 1-formlarını tanımlayacağız ve gerekli komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Cartan-Maurer 1-formları; Δ , eş-çarpmasının A 'nın jeneratörlerine etkisi kullanılarak Woronowicz (1989) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$w_{x_k} = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x_k), \quad 1 \leq k \leq 3, \quad x_k \in \{x, y, \theta\}.\tag{4.29}$$

Bu formülден, bize gerekli olan 1-formları

$$\begin{aligned}w_x &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x) = \mu \circ (d \otimes S)(x \otimes x) \\ &= \mu(dx \otimes S(x)) = \mu(dx \otimes x^{-1}) \\ &= dx x^{-1} \\ w_y &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(y) = \mu \circ (d \otimes S)(y \otimes x + x \otimes y) \\ &= \mu(dy \otimes S(x)) + \mu(dx \otimes S(y)) \\ &= dy x^{-1} - dx x^{-1} y x^{-1} \\ w_\theta &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(\theta) = \mu \circ (d \otimes S)(\theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta) \\ &= \mu(d\theta \otimes S(1)) + \mu(d(1) \otimes S(\theta)) \\ &= d\theta\end{aligned}\tag{4.30}$$

şeklinde buluruz.

Şimdi (4.24) bağıntıları kullanılarak, Cartan-Maurer 1-formlarının, cebirin jeneratörleri ile olan bağıntıları aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned}x w_x &= w_x x, \quad x w_y = q w_y x, \quad x w_\theta = q w_\theta x, \\ y w_x &= w_x y, \quad y w_y = q w_y y, \quad y w_\theta = q w_\theta y, \\ \theta w_x &= -w_x \theta, \quad \theta w_y = -w_y \theta, \quad \theta w_\theta = w_\theta \theta.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Gerçekten, örneğin

$$\begin{aligned}
xw_y &= x(dy x^{-1} - dx x^{-1} y x^{-1}) = q(dy x)x^{-1} - (dx x)x^{-1} y x^{-1} \\
&= q(dy x^{-1})x - q(dx x^{-1} y x^{-1})x \\
&= qw_y x.
\end{aligned}$$

dir. Burada dikkat edilirse, cebirin birleşme özelliği kullanılmaktadır.

Cartan-Maurer 1- formlarının kendi aralarındaki bağıntılar, (4.24) ve (4.25) deki bağıntılar kullanılarak,

$$\begin{aligned}
w_x \wedge w_x &= 0, \quad w_x \wedge w_y = -w_y \wedge w_x, \quad w_x \wedge w_\theta = w_\theta \wedge w_x, \\
w_y \wedge w_y &= 0, \quad w_y \wedge w_\theta = w_\theta \wedge w_y
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak bulunur.

w_x, w_y, w_θ elamanlarıyla oluşturulan cebiri W ile gösterelim. A ve Ω üzerindeki Hopf cebiri yapıları, W 'ya bir Hopf cebir yapısı kazandırır. Bu aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

1) $\Delta_W : W \rightarrow W \otimes W$, n ın W 'nın elamanlarına etkisi

$$\begin{aligned}
\Delta_W(w_x) &= \Delta_W(dx x^{-1}) = \Delta_W(dx)\Delta_W(x^{-1}) \\
&= (dx \otimes x + x \otimes dx)(x^{-1} \otimes x^{-1}) \\
&= dx x^{-1} \otimes x x^{-1} + x x^{-1} \otimes dx x^{-1} \\
&= w_x \otimes 1 + 1 \otimes w_x, \\
\Delta_W(w_y) &= \Delta_W(dy x^{-1} - dx x^{-1} y x^{-1}) = \Delta_W(dy)\Delta_W(x^{-1}) - \Delta_W(dx)\Delta_W(x^{-1})\Delta_W(y)\Delta_W(x^{-1}) \\
&= (dy x^{-1} - dx x^{-1} y x^{-1}) \otimes 1 + 1 \otimes (dy x^{-1} - dx x^{-1} y x^{-1}) \\
&= w_y \otimes 1 + w_y \otimes 1 \\
\Delta_W(w_\theta) &= \Delta_W(d\theta) = (d\theta \otimes 1 + 1 \otimes d\theta) \\
&= w_\theta \otimes 1 + 1 \otimes w_\theta
\end{aligned} \tag{4.33}$$

dir. Burada Δ_W , A nın x_k jeneratörlerine

$$\Delta_W(x_k) = \Delta_A(x_k), \quad k = 1, 2, 3,$$

şeklinde etki etmektedir. Diferansiyellere etkisi ise,

$$\Delta_W(dx_k) = (\Delta^L + \Delta^R)(dx_k), \quad k = 1, 2, 3$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2) $\varepsilon_W : W \rightarrow K$ eş-biriminin, W 'nın elamanlarına etkisi,

$$\varepsilon_W(w_x) = 0, \quad \varepsilon_W(w_y) = 0, \quad \varepsilon_W(w_\theta) = 0, \quad (4.34)$$

dir.

3) $S_W : W \rightarrow W$ eş-tersin, W 'nin elamanlarına etkisi,

$$S_W(w_x) = -w_x, \quad S_W(w_y) = -w_y, \quad S_W(w_\theta) = -w_\theta, \quad (4.35)$$

şeklindedir.

Bunlar, (3.3) ve (3.4) özdeşliklerini korur. $\Delta_W, \varepsilon_W, S_W$ tasvirleri, (4.31) ve (4.32) bağıntılarıyla uyumludur.

4.4 Kısmi türevlerin cebiri

Bu bölümde, kısmi türevlerle süper uzayın koordinat fonksiyonları, diferansiyelleri ve kendi aralarındaki bağıntıları vereceğiz.

f , A cebiri üzerinde tanımlanmış keyfi bir fonksiyon olsun. d dış türev operatörünü

$$df = (dx\partial_x + dy\partial_y + d\theta\partial_\theta)f \quad (4.36)$$

şeklinde tanımlarız. Kısmi türevlerin koordinat fonksiyonlarıyla bağıntılarını bulabilmek için (4.36) de f yerine sırasıyla $xf, yf, \theta f$ yazarak Leibniz kuralını uyguluyoruz. Biri açık olarak aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} d(xf) &= (dx)f + x(df) \\ &= (dx)f + x(dx\partial_x + dy\partial_y + d\theta\partial_\theta)f \\ &= (dx)f + (dx x\partial_x + qdy x\partial_y + qd\theta x\partial_\theta)f \\ &= (dx(1 + x\partial_x) + qdy x\partial_y + qd\theta x\partial_\theta)f \\ &= (dx\partial_x + dy\partial_y + d\theta\partial_\theta)(xf) \end{aligned}$$

den diferansiyellerin katsayılarını eşitleyerek,

$$\partial_x x = 1 + x\partial_x, \quad \partial_y x = qx\partial_y, \quad \partial_\theta x = qx\partial_\theta$$

buluruz.

Sonuç olarak, kısmi türevlerle cebirin elamanları arasındaki komutasyon bağıntıları,

$$\begin{aligned}
\partial_x x &= 1 + x\partial_x, & \partial_y x &= qx\partial_y, & \partial_\theta x &= qx\partial_\theta \\
\partial_x y &= q^{-1}y\partial_x, & \partial_y y &= 1 + y\partial_y, & \partial_\theta y &= qx\partial_\theta \\
\partial_x \theta &= q^{-1}\theta\partial_x, & \partial_y \theta &= q^{-1}y\partial_\theta, & \partial_\theta \theta &= 1 - \theta\partial_\theta.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

şeklinde çıkar.

∂_x, ∂_y ve ∂_θ elamanlarıyla oluşturulan ve yukarıdaki bağıntılara sahip olan A -modülü D_1 ile gösterebiliriz. Bu modül, birinci dereceden kısmi diferansiyel operatörlerin bimodülüdür.

Bu kısmi diferansiyel operatörlerin diferansiyellerle bağıntıları, muhtemelen!

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= B_1 dx \partial_x + B_2 dy \partial_y + B_3 d\theta \partial_\theta, \\
\partial_x dy &= B_4 dy \partial_x + B_5 dx \partial_y, \\
\partial_x d\theta &= B_6 d\theta \partial_x + B_7 dx \partial_\theta, \\
\partial_y dx &= B_8 dx \partial_y + B_9 dy \partial_x, \\
\partial_y dy &= B_{10} dy \partial_y + B_{11} dx \partial_x + B_{12} d\theta \partial_\theta, \\
\partial_y d\theta &= B_{13} dy \partial_\theta + B_{14} d\theta \partial_y, \\
\partial_\theta dx &= B_{15} dx \partial_\theta + B_{16} d\theta \partial_x, \\
\partial_\theta dy &= B_{17} dy \partial_\theta + B_{18} d\theta \partial_y, \\
\partial_\theta d\theta &= B_{19} dy \partial_y + B_{20} dx \partial_x + B_{21} d\theta \partial_\theta,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklindedir. B_i , ($1 \leq i \leq 21$) katsayılarını tespit etmek için $\partial_x, \partial_y, \partial_\theta$ kısmi türev operatörlerini (4.24) bağıntılarına uyguluyoruz. Örneğin,

$$\begin{aligned}
x dx &= dx x \Rightarrow \partial_x (x dx - dx x) = 0 \\
dx - (\partial_x dx) x &= 0 \\
dx - (B_1 dx \partial_x + B_2 dy \partial_y + B_3 d\theta \partial_\theta) x &= 0 \\
dx - B_1 dx &= 0 \\
\Rightarrow B_1 &= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x dy &= q dx x \Rightarrow \partial_x (x dy - q dx x) = 0 \\
dy - q(\partial_x dy) x &= 0 \\
dy - (B_4 dy \partial_x + B_5 dx \partial_y) x &= 0 \\
dy - q B_4 dy &= 0 \\
\Rightarrow B_4 &= q^{-1}
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğer katsayıları tespit ederek, kısmi türevlerin diferansiyellerle olan bağıntılarını

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= dx \partial_x, \quad \partial_x dy = q^{-1} dy \partial_x, \quad \partial_x d\theta = q^{-1} d\theta \partial_x, \\
\partial_y dx &= q dy \partial_x, \quad \partial_y dy = dy \partial_y, \quad \partial_y d\theta = q^{-1} d\theta \partial_y, \\
\partial_\theta dx &= -q dx \partial_x, \quad \partial_\theta dy = -q dy \partial_x, \quad \partial_\theta d\theta = d\theta \partial_x,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklinde buluruz.

Kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntıları, d diferansiyel operatörünün nilpotentlik şartından,

$$\partial_x \partial_y = q \partial_y \partial_x, \quad \partial_x \partial_\theta = q \partial_\theta \partial_x, \quad \partial_y \partial_\theta = q \partial_\theta \partial_y, \quad \partial_\theta \partial_\theta = 0 \tag{4.40}$$

olarak çıkar.

Kısmi türevler ile dış türev operatörü d arasındaki bağıntılar ise,

$$\partial_x d = d \partial_x, \quad \partial_y d = d \partial_y, \quad \partial_\theta d = -d \partial_\theta \tag{4.41}$$

şeklinde elde edilir. Gerçekten, örneğin

$$\begin{aligned}
df &= (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f \\
\Rightarrow \partial_x df &= [\partial_x (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta)] f = (dx \partial_x \partial_x + q^{-1} dy \partial_x \partial_y + q^{-1} d\theta \partial_x \partial_\theta) f \\
&= (dx \partial_x \partial_x + dy \partial_y \partial_x + d\theta \partial_\theta \partial_x) f \\
&= d \partial_x f
\end{aligned}$$

dir. Bu bağıntılar nilpotentlik şartıyla uyumludur.

5. KUANTUM SÜPER LİE CEBİRİ

Cartan Maurer 1-formlarının komutasyon bağıntılarından faydalananarak, kuantum Lie süper cebirinin jeneratörlerinin cebirini inşa edelim. Bunun için önce Cartan Maurer 1-formlarını

$$dx = w_x x, \quad dy = w_x y + w_y x, \quad d\theta = w_\theta, \quad (5.1)$$

şeklinde yazalım. Üstelik biz biliyoruz ki d dış diferansiyel operatörü

$$d f = (w_x T_x + w_y T_y + w_\theta T_\theta) f \quad (5.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada, T_x, T_y, T_θ kuantum Lie süper cebiri jeneratörleridir (vektör alanları). d dış diferansiyel operatörünün yukarıdaki yazılış şekli ve

$$df = (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f$$

şeklindeki gösteriminin eşitliğinden,

$$T_x = x \partial_x + y \partial_y, \quad T_y = x \partial_y, \quad T_\theta = \partial_\theta \quad (5.3)$$

bulunur.

Şimdi, kuantum Lie süper cebir jeneratörlerinin, $\mathcal{A}$ cebirinin x, y, θ jeneratörleriyle olan komutasyon bağıntıları, (4.37) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} T_x x &= x + x T_x, \quad T_x y = y + y T_x, \quad T_x \theta = \theta T_x, \\ T_y x &= q x T_y, \quad T_y y = x + q y T_y, \quad T_y \theta = \theta T_y, \\ T_\theta x &= q x T_\theta, \quad T_\theta y = q y T_\theta, \quad T_\theta \theta = 1 - \theta T_\theta, \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklinde bulunur. T_x, T_y, T_θ ile diferansiyeller arasındaki bağıntılar, (4.39) ve (4.24) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} T_x dx &= dx T_x, \quad T_x dy = dy T_x, \quad T_x d\theta = d\theta T_x, \\ T_y dx &= q dx T_y, \quad T_y dy = q dy T_y, \quad T_y d\theta = d\theta T_y, \\ T_\theta dx &= -q dx T_\theta, \quad T_\theta dy = -q dy T_\theta, \quad T_\theta d\theta = d\theta T_\theta, \end{aligned} \quad (5.5)$$

olarak elde edilir. T_x, T_y, T_θ ile kısmi türev operatörleri arasındaki bağıntılar, (4.37) ve (4.40) bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\partial_x T_x &= \partial_x + T_x \partial_x, \partial_y T_x = \partial_y + T_x \partial_y, \partial_\theta T_x = T_x \partial_\theta, \\
\partial_x T_y &= \partial_x + q T_y \partial_x, \partial_y T_y = q T_y \partial_y, \partial_\theta T_y = T_y \partial_\theta, \\
\partial_x T_\theta &= q T_\theta \partial_x, \partial_y T_\theta = q T_\theta \partial_y, \partial_\theta T_\theta = T_\theta \partial_\theta,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

ve T_x, T_y, T_θ ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki bağıntılar, (5.4) ve (5.5) bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
T_x w_x &= w_x T_x - w_x, T_x w_y = w_y T_x - w_y, T_x w_\theta = w_\theta T_x \\
T_y w_x &= w_x T_y, T_y w_y = w_y T_y - w_x, T_y w_\theta = w_\theta T_y \\
T_\theta w_x &= -w_x T_\theta, T_\theta w_y = -w_y T_\theta, T_\theta w_\theta = w_\theta T_\theta
\end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir. d operatörünün nilpotentlik şartı ve (5.7) bağıntılarından faydalanarak T_x, T_y, T_θ jeneratörlerin kendi aralarındaki bağıntıları ise

$$T_x T_y = T_y T_x, T_x T_\theta = T_\theta T_x, T_y T_\theta = T_\theta T_y, T_\theta^2 = 0 \tag{5.8}$$

olarak belirleriz. Şimdi kuantum Lie süper cebiri için süper Hopf cebir yapısını belirleyelim:

A cebirinin jeneratörleri ile $m, n = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$f = x^m y^n \theta$$

yazalım. Bu taktirde (3.1) ve (4.31) bağıntılarından faydalanarak

$$f w_x = -w_x f, f w_y = -q^{m+n} w_y f, f w_\theta = q^{m+n} w_\theta f, \tag{5.9}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, eğer g, A üzerinde herhangi bir fonksiyon ise, $d(f.g) = (df)g - f(dg)$

den

$$(w_x T_x + w_y T_y + w_\theta T_\theta)(f.g) = [(w_x T_x + w_y T_y + w_\theta T_\theta)f]g - f[(w_x T_x + w_y T_y + w_\theta T_\theta)g]$$

elde ederiz. Bu son eşitlikte (5.9) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T_x(fg) &= (T_x f)g + f(T_x g), \\
T_y(fg) &= (T_y f)g + q^{m+n} f(T_y g), \\
T_\theta(fg) &= (T_\theta f)g - q^{m+n} f(T_\theta g),
\end{aligned} \tag{5.10}$$

buluruz .

Sonuç olarak eş-çarpımın jeneratörlere etkisi

$$\begin{aligned}\Delta(T_x) &= T_x \otimes 1 + 1 \otimes T_x, \\ \Delta(T_y) &= T_y \otimes 1 + q^N \otimes T_y, \\ \Delta(T_\theta) &= T_\theta \otimes 1 + q^N \otimes T_\theta,\end{aligned}\tag{5.11}$$

dir. Burada,

$$N(f) = (m+n)f \tag{5.12}$$

şeklinde bir sayı operatörü tanımlanmıştır ve bu operatör, T_x ' e izomorfdur. Gerçekten, T_x vektör alanının $f = x^m y^n \theta$ monomialine etkisi,

$$\begin{aligned}T_x(f) &= (x\partial_x + y\partial_y)(x^m y^n \theta) \\ &= x \left(\frac{\partial(x^m y^n \theta)}{\partial_x} \right) + y \left(\frac{\partial(x^m y^n \theta)}{\partial_y} \right) \\ &= mx^m y^n \theta + q^m n y x^m y^{n-1} \theta \\ &= mx^m y^n \theta + nx^m y^n \theta \\ &= (m+n)f\end{aligned}$$

şeklindedir.

(2.2) ve (2.3) ile verilen Hopf cebir aksiyomlarından faydalananarak eş-birim ve eş-tersin jeneratörlere etkisinin

$$\begin{aligned}\varepsilon(T_x) &= 0, \quad \varepsilon(T_y) = 0, \quad \varepsilon(T_\theta) = 0, \\ S(T_x) &= -T_x, \quad S(T_y) = -q^{-T_x} T_y, \quad S(T_\theta) = -q^{-T_x} T_\theta,\end{aligned}\tag{5.13}$$

olduğu kolayca görülebilir.

6. SÜPER HOPF CEBİRİNİN DUALİ

Bu bölümde, ikinci bölümde tanımlanan A Hopf cebiri için bir dual uzay ve bu dual uzay için bir Hopf cebiri tanımlamaya çalışacağız. Bunu yaparken, Sudbery (1990) ve Dobrev (1992) deki çalışmalardan faydalanacağız. Bunun için önce dual uzayın tanımını verelim.

U ve A gibi iki vektör uzayı arasındaki ikililere etki eden bir iki lineer tasviri,

$$\langle , \rangle : U \times A \rightarrow C, (u, a) \mapsto \langle u, a \rangle$$

şeklinde gösterelim. Eğer

$$\langle u, a \rangle = 0, (\forall a \in A) \Rightarrow u = 0,$$

$$\langle u, a \rangle = 0, (\forall u \in U) \Rightarrow a = 0,$$

şartları sağlanırsa, bu tekabül dejenere değildir. Bu şekildeki bir tekabül,

$$\langle u \otimes v, a \otimes b \rangle = \langle u, a \rangle \langle v, b \rangle$$

şeklinde bir tanımlama ile $U \otimes U$ ve $A \otimes A$ nın elemanları arasında bir tekabüle genişletilebilir.

U ve A bicebirleri ve bu bicebirler arasında dejenere olmayan bir

$$\langle , \rangle : U \times A \rightarrow C, (u, a) \mapsto \langle u, a \rangle \quad \forall u \in U, \forall a \in A,$$

tekabülü verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler var ise, U ve A bicebirleri dualitededir denir:

$$\langle uv, a \rangle = \langle u \otimes v, \Delta_A(a) \rangle,$$

$$\langle u, ab \rangle = \langle \Delta_U(u), a \otimes b \rangle,$$

$$\langle 1_U, a \rangle = \varepsilon_A(a),$$

$$\langle u, 1_A \rangle = \varepsilon_U(u), \quad \forall u \in U, \forall a \in A.$$

(6.1)

Ek olarak, U ve A bicebirleri S eş-ters tasviri ile birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahip olsunlar. Bu takdirde

$$\langle S_U(u), a \rangle = \langle u, S_A(a) \rangle, \quad \forall u \in U, \forall a \in A$$

(6.2)

şartı sağlanıyorsa U ve A Hopf cebirleri birbirine dualdir denir.

Şimdi A Hopf cebirinin cebirsel özelliklerinden faydalanarak, bu cebirin duali olan U Hopf cebirinin cebirsel yapısını belirlemeye çalışalım. Bunu da yukarıdaki tanımlamalara göre,

U ve A nın jeneratörleri arasındaki tekabülleri kullanarak yapacağız. Çünkü U ve A nın diğer elemanları arasındaki tekabülleri tensör çarpımın iki lineerlik özelliği ve (6.1) bağıntısı yardımıyla belirleyebiliriz. Örneğin, U cebirinin herhangi bir u elemanı üzerine, Δ' nın etkisi

$$\Delta_U(u) = \sum u'_k \otimes u''_k,$$

şeklinde ise,

$$\langle u, ab \rangle = \langle \Delta_U(u), a \otimes b \rangle = \sum \langle u'_k, a \rangle \langle u''_k, b \rangle$$

olur.

Bir Hopf cebiri olarak A , x, y, θ elemanlarıyla oluşturulmuştur ve A için bir taban

$$f = x^k y^l \theta^m, k, l \in \mathbb{Z}_+ \text{ ve } m \in \{0, 1\}$$

şeklindeki bütün monomiallerle verilir. Diğer taraftan, dual cebiri U_q ve onun jeneratörlerini de X, Y, Θ ile gösterelim. Dual cebirin X, Y, Θ jeneratörlerinin f monomiallerine etkisi,

$$\langle X, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \langle Y, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \langle \Theta, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (6.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Sudbery, 1990). Eş-birimin x, y, θ elemanlarına etkisinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \langle X, f \rangle &= k \delta_{l,0} \delta_{m,0}, \\ \langle Y, f \rangle &= \delta_{l,1} \delta_{m,0}, \\ \langle \Theta, f \rangle &= \delta_{l,0} \delta_{m,1}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

buluruz. Gerçekten, örneğin

$$\langle X, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \varepsilon(k x^{k-1} y^l \theta^m) = k \varepsilon(y^l) \varepsilon(\theta^m) = k \delta_{l,0} \delta_{m,0}$$

dir.

Dual cebirin birim elemanı ile f monomiali arasındaki tekabül,

$$\langle 1_U, f \rangle = \varepsilon(f) = \delta_{l,0} \delta_{m,0} \quad (6.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (6.4) bağıntılarını kullanarak,

$$\begin{aligned} \langle XY, f \rangle &= \langle X \otimes Y, \Delta_A(f) \rangle = (k+1)\delta_{l,1}\delta_{m,0} \\ \langle YX, f \rangle &= \langle Y \otimes X, \Delta_A(f) \rangle = (k+1)\delta_{l,1}\delta_{m,0} \end{aligned}$$

elde ederiz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle XY, f \rangle &= \langle X \otimes Y, \Delta_A(f) \rangle \\ &= \langle X \otimes Y, (x^k \otimes x^k)[\delta_{l,0} + \delta_{l,1}(x \otimes y + y \otimes x)][\delta_{m,0} + \delta_{m,1}(\theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta)] \rangle \\ &= \langle X \otimes Y, \delta_{l,1}\delta_{m,0}(x^k \otimes x^k)(x \otimes y) \rangle \\ &= \langle X \otimes Y, \delta_{l,1}\delta_{m,0}(x^{k+1} \otimes x^k y) \rangle \\ &= \delta_{l,1}\delta_{m,0} \langle X, x^{k+1} \rangle \langle Y, x^k y \rangle \\ &= (k+1)\delta_{l,1}\delta_{m,0} \\ \langle YX, f \rangle &= \langle Y \otimes X, \Delta_A(f) \rangle \\ &= \langle Y \otimes X, (x^k \otimes x^k)[\delta_{l,0} + \delta_{l,1}(x \otimes y + y \otimes x)][\delta_{m,0} + \delta_{m,1}(\theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta)] \rangle \\ &= \langle Y \otimes X, \delta_{l,1}\delta_{m,0}(x^k \otimes x^k)(y \otimes x) \rangle \\ &= \langle Y \otimes X, \delta_{l,1}\delta_{m,0}(x^k y \otimes x^{k+1}) \rangle \\ &= \delta_{l,1}\delta_{m,0} \langle Y, x^k y \rangle \langle X, x^{k+1} \rangle \\ &= (k+1)\delta_{l,1}\delta_{m,0} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada türevi sağ taraftan almak, bu taban için en uygun olanıdır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. Böylece süper U_q dual cebirinin jeneratörleri arasındaki komutasyon bağıntıları

$$XY = YX, X\Theta = \Theta X, Y\Theta = \Theta Y, \Theta^2 = 0 \quad (6.6)$$

şeklinde bulunur.

Bu süper dual cebirin Hopf cebir yapısı, *dual olma* özelliklerinden faydalanılarak bulunabilir:

Bunun için Δ_U 'nun X, Y, Θ jeneratörlerine etkisinin

$$\begin{aligned} \Delta_U(X) &= X \otimes B + C \otimes X, \\ \Delta_U(Y) &= Y \otimes D + E \otimes Y, \\ \Delta_U(\Theta) &= \Theta \otimes F + G \otimes \Theta, \quad B, C, D, E, G \in U_q \end{aligned} \quad (6.7)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada B, C, D, E, G tespit edilecek elamanlardır. Eğer

$$f_1 = x^k \text{ denirse,}$$

$$\begin{aligned}
x^k \cdot 1 &= x^k = 1 \cdot x^k, \\
\Rightarrow \langle X, x^k \rangle &= k = \langle X, x^k \cdot 1 \rangle = \langle \Delta_U(X), x^k \otimes 1 \rangle \\
&= \langle X \otimes B + C \otimes X, x^k \otimes 1 \rangle \\
&= \langle X, x^k \rangle \langle B, 1 \rangle \\
&= k \cdot \langle B, 1 \rangle \\
\Rightarrow B &= 1_U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X, x^k \rangle &= k = \langle X, 1 \cdot x^k \rangle = \langle \Delta_U(X), 1 \otimes x^k \rangle \\
&= \langle X \otimes B + C \otimes X, 1 \otimes x^k \rangle \\
&= \langle C, 1 \rangle \langle X, x^k \rangle \\
&= k \cdot \langle C, 1 \rangle \\
\Rightarrow C &= 1_U
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f_2 = x^k y$ denirse

$$\begin{aligned}
x^k y &= q^k y x^k, \\
\Rightarrow \langle Y, x^k y \rangle &= \langle Y, q^k y x^k \rangle = 1 \\
\Rightarrow \langle Y, x^k y \rangle &= \langle \Delta_U(Y), x^k \otimes y \rangle = \langle Y \otimes C + D \otimes Y, x^k \otimes y \rangle \\
&= \langle D, x^k \rangle \langle Y, y \rangle = 1 \\
\Rightarrow D &= 1_U \\
\langle Y, q^k y x^k \rangle &= \langle \Delta_U(Y), q^k y \otimes x^k \rangle = \langle Y \otimes C + D \otimes Y, q^k y \otimes x^k \rangle \\
&= q^k \langle C, x^k \rangle = 1 \\
\Rightarrow \langle C, x^k \rangle &= q^{-k} \\
\Rightarrow C &= q^{-X}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $f_3 = x^k \theta$ alınarak

$$F = q^{-X}, G = 1_U$$

elde edilir. Sonuç itibariyle,

$$\begin{aligned}
\Delta_U(X) &= X \otimes 1_U + 1_U \otimes X, \\
\Delta_U(Y) &= Y \otimes q^{-X} + 1_U \otimes Y, \\
\Delta_U(\Theta) &= \Theta \otimes q^{-X} + 1_U \otimes \Theta,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

buluruz. Hopf cebiri olma aksiyomlarından, kolay bir şekilde eş-birim ve eş-ters tasvirlerinin dual jeneratörlere etkisini belirleyebiliriz.

Eş-birim tasvirinin etkisi,

$$\varepsilon_U(X) = 0, \quad \varepsilon_U(Y) = 0, \quad \varepsilon_U(\Theta) = 0, \quad (6.9)$$

ve eş-ters tasvirinin etkisi,

$$S_U(X) = -X, \quad S_U(Y) = -Yq^X, \quad S_U(\Theta) = -\Theta q^X \quad (6.10)$$

dir.

Şimdi

$$T_x \equiv X, \quad T_y = q^{X/2} Y q^{X/2}, \quad T_\theta = q^{X/2} \Theta q^{X/2} \quad (6.11)$$

özdeşlikleri, U_q dual cebirin jeneratörlerini, 5. bölümdeki Lie cebir jeneratörlerine izomorf kılar. Bu özdeşlikler komutasyon bağıntıları ve Hopf cebir yapılarıyla uyumludur.

7. KUANTUM 3D SÜPER UZAY ÜZERİNE GENİŞLETİLMİŞ HESAP

Lie türevi, bir manifold üzerinde, tensör alanlarının cebiri üzerindeki türev olarak tanımlanır. Lie türevi üç şekilde tanımlanabilir: skaler fonksiyonlar, vektör alanları ve tensörler için.

Lie türevi, diferansiyel formlar üzerinde de tanımlanabilir. Bu durumda, Lie türevi ile dış türev arasında yakın bir ilişki vardır. Dış türev ve Lie türevi arasındaki bu ilişkinin yardımıyla farklı şekilde türev alma fikri ortaya atılmış olur. Bu fark, *iç türev* denen bir anti türev takdim edilerek ortaya konulabilir.

i_a ile gösterilen iç türev ile L_a ile gösterilen Lie türevi arasındaki ilişki,

$$L_a = i_a \circ d + d \circ i_a \quad (\text{Cartan Özdeşliği}) \quad (7.1)$$

şeklindedir.

Daha ayrıntılı açıklamalar, Chyrysomalakos (1993) ve arkadaşları tarafından yapılan makalededir .

7.1 İç türevler

Genellikle bir iç türev, bir manifold üzerindeki düzgün X vektör alanı için i_X ile gösterilir. i_X , k -formu $(k-1)$ -forma taşıyan bir lineer operatördür. Buna göre, bir manifold üzerindeki bütün diferansiyellerin kümesi üzerinde, i_X anti türevi

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X(\beta) \quad (7.2)$$

özelliğine sahiptir. Burada α ve β her ikisinde diferansiyel formdur. Bir iç türev i_X , 0-form ve 1-form üzerine sırasıyla,

$$i_X(f) = 0, \quad i_X(df) = X(f) \quad (7.3)$$

şeklinde etki eder.

Şimdi x, y, θ koordinat fonksiyonları ve onlarla ilişkili iç türevler arasındaki bağıntıları bulmaya çalışalım. Koordinatlarla iç türevler arasındaki komutasyon kurallarını elde etmek için, Çelik'in (2006) yaklaşımını kullanacağız. Benzer şekilde diğer bağıntılar elde edilebilir.

Şimdi x, y, θ koordinat fonksiyonları ile bu koordinat fonksiyonlarıyla ilişkisi olan iç türevler

arasındaki komutasyon bağıntılarını bulalım. Bunun için komutasyon bağıntılarının

$$\begin{aligned}
i_x x &= A_1 x i_x + A_2 y i_y + A_3 \theta i_\theta, \\
i_x y &= A_4 y i_x + A_5 x i_y, \\
i_x \theta &= A_6 \theta i_x + A_7 x i_\theta, \\
i_y x &= A_8 x i_y + A_9 y i_x, \\
i_y y &= A_{10} y i_y + A_{11} x i_x + A_{12} \theta i_\theta, \\
i_y \theta &= A_{13} \theta i_y + A_{14} y i_\theta, \\
i_\theta x &= A_{15} x i_\theta + A_{16} \theta i_x, \\
i_\theta y &= A_{17} y i_\theta + A_{18} \theta i_y, \\
i_\theta \theta &= A_{19} \theta i_\theta + A_{20} x i_x + A_{21} y i_y.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. A_k ($1 \leq k \leq 21$) katsayıları q deformasyon parametresi cinsinden belirlenecek. i_x, i_y, i_θ iç türevlerini (3.1) bağıntılarına uygularsak, q parametresine bağlı herhangi bir çözüm elde edemeyiz. Fakat en azından

$$\begin{aligned}
A_5(A_1 - qA_8) &= 0, \quad A_2A_{11} - q^2A_9 = 0, \quad A_2A_{14} = 0, \\
A_9(A_4 - qA_{10}) &= 0, \quad A_3A_{20} - q^2A_7A_{16} = 0, \quad A_7A_{20} = 0, \dots \text{v.b}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

sistemine sahip oluruz. Katsayıları bulmak için, iç türevlerle x, y, θ jeneratörlerinin diferansiyelleri arasındaki bağıntılara ihtiyacımız olacak.

$$i_{x_i}(dx_j) = \delta_{ij}$$

olduğundan, iç türevler ile diferansiyeller arasındaki bağıntıların

$$\begin{aligned}
i_x \wedge dx &= 1 + a_1 dx \wedge i_x + a_2 dy \wedge i_y + a_3 d\theta \wedge i_\theta, \\
i_x \wedge dy &= a_4 dy \wedge i_x + a_5 dx \wedge i_y, \\
i_x \wedge d\theta &= a_6 d\theta \wedge i_x + a_7 dx \wedge i_\theta, \\
i_y \wedge dx &= a_8 dx \wedge i_y + a_9 dy \wedge i_x, \\
i_y \wedge dy &= 1 + a_{10} dy \wedge i_y + a_{11} dx \wedge i_x + a_{12} d\theta \wedge i_\theta, \\
i_y \wedge d\theta &= a_{13} d\theta \wedge i_y + a_{14} dy \wedge i_\theta, \\
i_\theta \wedge dx &= a_{15} dx \wedge i_\theta + a_{16} d\theta \wedge i_x, \\
i_\theta \wedge dy &= a_{17} dy \wedge i_\theta + a_{18} d\theta \wedge i_y, \\
i_\theta \wedge d\theta &= 1 + a_{19} d\theta \wedge i_\theta + a_{20} dx \wedge i_x + a_{21} dy \wedge i_y.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. i_x, i_y ve i_θ , (4.24) ve (4.25) bağıntılarına uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1, A_2 = 0, A_3 = 0, A_4 = q^{-1}, \\
A_5 &= 0, A_6 = -q^{-1}, A_7 = 0, A_8 = q, \\
A_9 &= 0, A_{10} = 1, A_{11} = 0, A_{12} = 0, \\
A_{13} &= -q^{-1}, A_{14} = 0, A_{15} = q, A_{16} = 0, \\
A_{17} &= q, A_{18} = 0, A_{19} = 1, A_{20} = 0, A_{21} = 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
a_3(qA_1 - A_{15}) &= 0, a_2(qA_1 - A_8) = 0, A_2a_{12} = 0, \\
A_5(a_8 - q^{-1}a_1) &= 0, A_7a_{20} - a_7A_{20} = 0, a_7A_{21} = 0, \\
a_1 &= -1, a_5 = 0, a_{10} = -1, a_9 = 0, a_{16} = 0, a_{18} = 0, \\
1 + a_2 + qa_4 &= 0, 1 + a_3 - qa_6 = 0, \dots
\end{aligned}$$

Şeklindeki sistem(ler) elde edilir. a_k ($1 \leq k \leq 21$), katsayılarını bulmak için

$$i_a \circ d - F_l d \circ i_a = \partial_a, \quad (1 \leq l \leq 3), \quad a \in \{x, y, \theta\} \tag{7.8}$$

bağıntısını kullanacağız. Örneğin, (7.6) daki ilk bağıntı ve (4.37) kullanılarak,

$$F_1 = -1, a_2 = 0 = a_3.$$

elde edilir. Diğer katsayılarda benzer şekilde elde edilir. Sonuç olarak, aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

- İç türevlerle x, y, θ elamanları arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}
i_x x &= xi_x, \quad i_x y = q^{-1}yi_x, \quad i_x \theta = -q^{-1}\theta i_x \\
i_y x &= qxi_y, \quad i_y y = yi_y, \quad i_y \theta = -q^{-1}\theta i_y, \\
i_\theta x &= qxi_\theta, \quad i_\theta y = qyi_\theta, \quad i_\theta \theta = \theta i_\theta.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

- Diferansiyeller ve iç türevler arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}
i_x \wedge dx &= 1 - dx \wedge i_x, \quad i_x \wedge dy = -q^{-1}dy \wedge i_x, \quad i_x \wedge d\theta = q^{-1}d\theta \wedge i_x \\
i_y \wedge dx &= -q dx \wedge i_y, \quad i_y \wedge dy = 1 - dy \wedge i_y, \quad i_y \wedge d\theta = q^{-1}d\theta \wedge i_y, \\
i_\theta \wedge dx &= q dx \wedge i_\theta, \quad i_\theta \wedge dy = q dy \wedge i_\theta, \quad i_\theta \wedge d\theta = 1 + d\theta \wedge i_\theta
\end{aligned} \tag{7.10}$$

şeklindedir.

Şimdi iç türevlerle kısmi türevler arasındaki bağıntıları belirleyelim. Bu bağıntıların

$$\begin{aligned}
i_x \partial_x &= B_1 \partial_x i_x + B_2 \partial_y i_y + B_3 \partial_\theta i_\theta, \\
i_x \partial_y &= B_4 \partial_y i_x + B_5 \partial_x i_y, \\
i_x \partial_\theta &= B_6 \partial_\theta i_x + B_7 \partial_x i_\theta, \\
i_y \partial_x &= B_8 \partial_x i_y + B_9 \partial_y i_x, \\
i_y \partial_y &= B_{10} \partial_y i_y + B_{11} \partial_x i_x + B_{12} \partial_\theta i_\theta, \\
i_y \partial_\theta &= B_{13} \partial_\theta i_y + B_{14} \partial_y i_\theta, \\
i_\theta \partial_x &= B_{15} \partial_x i_\theta + B_{16} \partial_\theta i_x, \\
i_\theta \partial_y &= B_{17} \partial_y i_\theta + B_{18} \partial_\theta i_y, \\
i_\theta \partial_\theta &= B_{19} \partial_\theta i_\theta + B_{20} \partial_x i_x + B_{21} \partial_y i_y,
\end{aligned} \tag{7.11}$$

şeklinde olduğunu kabul ederek B_k ($1 \leq k \leq 21$) katsayılarını belirleyelim. Bunları,

(4.37) bağıntılarını kullanarak belirleyebiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}
\partial_x x &= 1 + x \partial_x, \\
\Rightarrow i_x (\partial_x x - x \partial_x - 1) &= 0 \\
\Rightarrow B_1 \partial_x i_x x + B_2 \partial_y i_y x + B_3 \partial_\theta i_\theta x - x i_x \partial_x - i_x &= 0 \\
\Rightarrow B_1 \partial_x i_x x + B_2 \partial_y i_y x + B_3 \partial_\theta i_\theta x - B_1 x \partial_x i_x - B_2 x \partial_y i_y - B_3 x \partial_\theta i_\theta - i_x &= 0 \\
\Rightarrow B_1 \partial_x x i_x + q B_2 \partial_y x i_y + q B_3 \partial_\theta x i_\theta - B_1 x \partial_x i_x - B_2 x \partial_y i_y - B_3 x \partial_\theta i_\theta - i_x &= 0 \\
\Rightarrow B_1 (1 + x \partial_x) i_x + q^2 B_2 x \partial_y i_y + q^2 B_3 x \partial_\theta i_\theta - B_1 x \partial_x i_x - B_2 x \partial_y i_y - B_3 x \partial_\theta i_\theta - i_x &= 0
\end{aligned}$$

den

$$B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = 0$$

katsayıları elde edilir. Diğer katsayılar da kısmi türevlerle cebirin jeneratörleri arasındaki diğer bağıntılar kullanılarak belirlenebilir. Son haliyle, bu bağıntılar

$$\begin{aligned}
i_x \partial_x &= \partial_x i_x, i_x \partial_y = q \partial_y i_x, i_x \partial_\theta = -q \partial_\theta i_x, \\
i_y \partial_x &= q^{-1} \partial_x i_y, i_y \partial_y = \partial_y i_y, i_y \partial_\theta = -q \partial_\theta i_y, \\
i_\theta \partial_x &= q^{-1} \partial_x i_\theta, i_\theta \partial_y = q^{-1} \partial_y i_\theta, i_\theta \partial_\theta = \partial_\theta i_\theta,
\end{aligned} \tag{7.12}$$

şeklindedir.

7.2 Lie türevler

Klasik diferansiyel geometriden biliyoruz ki bir Lie türevi, k -formu k -forma dönüştüren bir lineer tasvirdir. 0-formlar için yani, bir basit f fonksiyonu için Lie türevi

$$L_X(f) = i_X df, \quad (7.13)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Genel bir diferansiyel form için Lie türevi

$$L_X \alpha = i_X d\alpha + d(i_X \alpha) \quad (7.14)$$

olarak tanımlanmıştır. Lie türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$F(M)$, M manifoldu üzerinde tanımlanan fonksiyonların cebiri olsun. O zaman,

$$L_X : F(M) \rightarrow F(M)$$

$F(M)$ cebiri üzerindeki Lie türevi

$$\begin{aligned} L_X(af + bg) &= a(L_X f) + b(L_X g), \\ L_X(fg) &= (L_X f)g + f(L_X g), \end{aligned} \quad (7.15)$$

özelliklerine sahiptir. Burada a ve b reel sayılardır.

$V(M)$, M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının bir kümesi ise,

$F(M) \times V(M)$ üzerindeki Lie türevi

$$L_{X_1}(fX_2) = (L_{X_1}f)X_2 + f(L_{X_1}X_2) \quad (7.16)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Lie türevi, diferansiyel formlara etki ettiği zaman, önemli bir özelliğe sahiptir: Eğer α ve β , M manifoldu üzerinde iki diferansiyel form ise

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha L_X(\beta) \quad (7.17)$$

dir. Burada α , bir k -formdur.

Bu bölümde, Lie türevlerin fonksiyonlarla, yani A cebirinin elamanlarıyla, onların diferansiyelleri ile vb. olan komutasyon bağıntılarını bulacağız. Örneğin, L_x ile x arasındaki komutasyon bağıntısı, (7.9) ve (7.10) kullanılarak, aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\begin{aligned} L_x x &= (i_x \circ d + d \circ i_x)x \\ &= 1 + xi_x d + xdi_x \\ &= 1 + xL_x \end{aligned}$$

Benzer şekilde diğer bağıntılar da elde edilebilir. Sonuç olarak aşağıdaki komutasyon bağıntılarına sahip oluruz:

$$\begin{aligned} L_x x &= 1 + xL_x, \quad L_x y = q^{-1}yL_x, \quad L_x \theta = q^{-1}\theta L_x, \\ L_y x &= qxL_y, \quad L_y y = 1 + yL_y, \quad L_y \theta = q^{-1}\theta L_y, \\ L_\theta x &= qxL_\theta, \quad L_\theta y = qyL_\theta, \quad L_\theta \theta = 1 - \theta L_\theta. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Lie türevi ve koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları, (7.10) kullanılarak bulunabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} L_x dx &= (i_x \circ d + d \circ i_x) dx \\ &= i_x(-dx) + d(1 - dx i_x) \\ &= -d + dx i_x d + d + dx di_x \\ &= dx(i_x d + di_x) \\ &= dx L_x \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} L_x dx &= dx L_x, \quad L_x dy = q^{-1}dy L_x, \quad L_x d\theta = q^{-1}d\theta L_x, \\ L_y dx &= qdx L_y, \quad L_y dy = dy L_y, \quad L_y d\theta = q^{-1}d\theta L_y, \\ L_\theta dx &= -qdx L_\theta, \quad L_\theta dy = -qdy L_\theta, \quad L_\theta d\theta = d\theta L_\theta. \end{aligned} \quad (7.19)$$

elde edilir. Diğer bağıntılar da, benzer şekilde elde edilir.

- Lie türevleri ile kısmi türevler arasındaki komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} L_x \partial_x &= \partial_x L_x, \quad L_x \partial_y = q \partial_y L_x, \quad L_x \partial_\theta = q \partial_\theta L_x, \\ L_y \partial_x &= q^{-1} \partial_x L_y, \quad L_y \partial_y = \partial_y L_y, \quad L_y \partial_\theta = q \partial_\theta L_y, \\ L_\theta \partial_x &= q^{-1} \partial_x L_\theta, \quad L_\theta \partial_y = q^{-1} \partial_y L_\theta, \quad L_\theta \partial_\theta = -\partial_\theta L_y. \end{aligned} \quad (7.20)$$

- İç türevlerin kendi aralarındaki komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} i_x \wedge i_y &= -q i_y \wedge i_x, \quad i_x \wedge i_x = 0, \\ i_x \wedge i_\theta &= q i_\theta \wedge i_x, \quad i_y \wedge i_y = 0, \\ i_y \wedge i_\theta &= q i_\theta \wedge i_y. \end{aligned}$$

- Lie türevleri ile iç türevler arasındaki komutasyon bağıntıları

$$L_x i_x = i_x L_x, L_x i_y = q i_y L_x, L_x i_\theta = q i_\theta L_x,$$

$$L_y i_x = q^{-1} i_x L_y, L_y i_y = i_y L_y, L_y i_\theta = q i_\theta L_y,$$

$$L_\theta i_x = q^{-1} i_x L_\theta, L_\theta i_y = q^{-1} i_y L_\theta, L_\theta i_\theta = i_\theta L_\theta.$$

- Lie türevlerinin kendi aralarındaki komutasyon bağıntıları

$$L_x L_y = q L_y L_x, L_x L_\theta = q L_\theta L_x, L_y L_\theta = q L_\theta L_y, L_\theta L_\theta = 0.$$

8. SONUÇ

Bu çalışmada, Manin tarafından deforme edilen $(2+1)-d$ süper uzay üzerindeki polinomların cebiri için bir süper Hopf cebir yapısı tanımlanmıştır. Bu cebiri d diferansiyel operatörüyle donatarak, bir diferansiyel cebir elde edilip, bu diferansiyel cebir için bir süper Hopf cebir yapısı ortaya konmuştur. Daha sonra $3d$ süper uzayı için, Cartan-Maurer 1-formları tanımlanmış ve bu Cartan-Maurer 1-formları ile oluşturulan cebir için bir Hopf cebir yapısı belirlenmiştir. Bir sonraki adımda, vektör alanlarının süper Lie cebiri ve dual cebiri elde edilip, bu cebirler için Hopf cebir yapıları elde edilerek, bu yapıların birbirine izomorf olduğu gösterilmiştir. En son olarak, bir iç türev ve bir Lie türev operatörü vasıtasıyla diferansiyel hesap genişletilmiştir.

Şüphesiz, koordinat fonksiyonları ile onların diferansiyelleri arasında sağlanması gereken muhtemel bağıntılar (denklem (4.3)) da görünen katsayılar, bir q (deformasyon) parametresine bağlı olarak çözülürken, bir özel çözüm (bak, denklem (4.18) ve (4.22)), kullanılmıştır. Elbette en genel katsayılar ile çalışmak mümkün idi. Fakat bu durumda ortaya konacak sonuçlar, son derece karmaşık ve uzun olacaktı. Bunlar, ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

Abe, Eiichi. (1977), Hopf Algebras

Aschieri, P. ve Castellani, P. (1993), “An Introduction to Noncommutative Differential Geometry on Quantum Groups”, Int. J. Mod. Phys, A 8: 1667-1706 .

Chrysomalakos, C. ve Schupp, P. ve Zumino, B. (1994), “Induced Extended Calculus on the Quantum Plane” , hep-th /9401141.

Çelik, S. (2006), “Cartan Calculi on The Quantum Superplane”, J.Math.Phys. 47: Art. No:083501-083517

Çelik, S. (2002), “ $\mathbb{Z}_3$ -Graded Differential Geometry of Quantum Plane”, J.Phys. 35 : 6307-6318

Dobrev, V.K. (1992), “Duality for the Matrix Quantum Group $GL_{p,q}(2, \mathbb{C})$ ”, J.Math.Phys. 33: 3419-3430

Manin, Yu I., (1988), “ Quantum Groups and Noncommutative Geometry “, Montreal Uni.

Manin, Yu I., (1989), “Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup“, Commun. Math. Phys. 123: 163–175

Sudbery, A. (1990), “Non-Commuting Coordinates and Differential Operators ”, Proc. Workshop on Quantum Groups, Argonne eds. T. Curtrigh et al, pp. 33–51.

Wess, J. and Zumino, B. , (1990), “ Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyper Plane ” Nucl. Phys. B, 18: 302–312

Woronowicz, S.L. , (1987), “Twisted $SU(2)$ Group. An Example of a Noncommutative Differential Calculus”, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23: 117–181.

Woronowicz, S.L. (1989), “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups”, Commun. Math. Phys. , 122 : 125-170.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 03.05.1984

Doğum yeri Andırın/K.MARAŞ

Lise 1998-2001 Ahmet Kurttepelı Lisesi

Lisans 2001-2005 İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2005-2007 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurumlar

2005-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi