EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

YÖNLÜ HOMOTOPİ TEORİSİ

Esra DALAN

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403. 04. 01
Tezin Sunulduğu Tarih: 15.05.2007

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Bornova-İZMİR

Esra DALAN tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak sunulan "**Yönlü Homotopi Teorisi**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 15/05/2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		İmza
Jüri Başkan	:	....
Raportör Üye	:	....
Üye	:	....

ÖZET

YÖNLÜ HOMOTOPİ TEORİSİ

DALAN, Esra
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. İsmet KARACA
MAYIS 2007, 60 sayfa

Bu tezde cebirsel topoloji metotları kullanılarak yüksek boyutlu automata teorisindeki problemleri çözmek hedeflenmiştir. Bu çözümlere ulaşabilmek için cebirsel topolojinin temel kavramları olan homotopi ve homoloji kavramlarına yön unsuru ilave edilerek yönlü topoloji, yönlü homotopi ve yönlü homoloji tanımları verilmiştir. Ayrıca po-uzayları, yarı kübik küme kavramı, filtreli küpler tanımlanmıştır. Son bölümde ise yarı kokübik (yarı eşkübik) kümeler ve kofiltreli (eşfiltreli) küpler tanımlanarak yönlü kohomoloji (eşhomoloji) kavramı oluşturulmuştur.

Anahtar sözcükler: Yönlü topoloji, yönlü homotopi, yönlü homoloji, concurrency

ABSTRACT

DIRECTED HOMOTOPY THEORY

DALAN, Esra

MSc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ismet KARACA

May 2007, 60 pages

In this thesis, it is aimed to solve problems of higher dimension automata theory by using methods of algebraic topology. To reach the solutions; definitions of directed topology, directed homotopy and directed homology are given by adding direction to homotopy and homology which are fundamental concepts of algebraic topology. First the concepts of po-space, semi-cubic set and filtered cubes are defined. In the last section, directed cohomology concept is defined by using semi-cocubic sets and cofiltered cubes.

Keywords: Directed topology, directed homotopy, directed homology, concurrency

TEŞEKKÜR

Tezimi oluştururken benimle sabırla ilgilenen, çalışmalarım boyunca desteğini her zaman yanımda hissettiğim, bilimsel ve kişisel hayatımda örnek aldığım saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. İsmet KARACA' ya, akademik kariyerimde bana yol gösteren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Fevzi ÜNLÜ' ye ve katkılarından dolayı hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Oya ÖZBAKIR' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca iki yıldır burs aldığım TÜBİTAK'a ve E.Ü Bilimsel Araştırma Birimi'ne desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Beni bu günlere getiren, destekleyen ailem; babam Ahmet DALAN, annem Fatma DALAN ve kardeşim Utku DALAN' a, tez yazımında yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Sezer YILDIRIM' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
Z	Tam sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
R^n	n boyutlu reel sayılar kümesi
$\prod$	Kümülatif çarpım sembolü
$\sum$	Kümülatif toplam sembolü
XxY	X ve Y uzaylarının çarpım uzayı
$\uparrow A$	Yukarı yönlü küme
$\downarrow A$	Aşağı yönlü küme
I	[0,1] kapalı aralığı
I^n	Birim küp
S^1	Birim çember
$\vec{I}$	Doğal sıralamayla tanımlanmış [0,1] birim aralığı
$\uparrow I = \uparrow [0,1]$	Standart d-aralığı
$\uparrow I^n$	Standart d-kübü
$\uparrow R$	Yönlü reel doğru ya da d-doğrusu
$\uparrow R^n$	n-boyutlu reel d-uzayı
$\uparrow S^1 = \uparrow I / \partial I$	Standart yönlü çember

Simgeler	Açıklama
$\uparrow S^n$	Yönlü n-boyutlu küre
$\uparrow O^1$	Sınırlı daire
Lpo-uzayı	Yerel po-uzayı
Top	Topolojik uzay kategorisi
xTop	Top kategorisinin alt kategorisi
Obj_{Top}	Top kategorisinin objeler kümesi
$Mor_{Top}(X,Y)$	Top kategorisindeki X ’den Y ’ye giden morfizmlerin kümesi
pTop	Po-uzay kategorisi
lp-Top	Lpo-uzay kategorisi
dTop	d-uzay kategorisi
bTop	Bitopolojik (ikili topolojik) uzay kategorisi
Grpd	Gruboidlerin kategorisi
Cat	Small kategorilerin kategorisi
dX	d-uzaylardan oluşan küme
X/R	d-bölüm yapısı
$f_{\simeq}$ g	f ile g dihomotopiktir
$\mathscr{U}$	Po-örtüsü
W_x	Po-komşuluğu
$\mathscr{B}$	Po-bazı
$\simeq_4$	Kuvvetli homotopi bağıntısı
$\succeq_4$	Kuvvetlice önhomotopi bağıntısı

Simgeler	Açıklama
$\simeq_1$	Topolojik homotopi bağıntısı
X_n	Yarı kübik küme
X^n	Yarı kokübik (eşkübik) küme
δ_i^α	Yüz dönüşümü
ε_i	Dejenere dönüşümü
δ_{i*}^α	Koyüz (eşyüz) dönüşümü
ε_{i*}	Kodejenere (eşdejenere) dönüşümü
d^-, d^+	Yarı kübik kümelerdeki sınır dönüşümleri
e	Yarı kübik kümelerdeki dejenere dönüşümü
d_*^α	Yarı kokübik (eşkübik) kümelerdeki sınır dönüşümleri
e_*	Yarı kokübik (eşkübik) kümelerdeki dejenere dönüşümü
$C_n X$	n-boyutlu filtreli küp
$C^n X$	n-boyutlu kofiltreli küp
$\square X$	n-kübün minimal gösterimi
$\tilde{\pi}_n C$	Yönlü homotopi
$H_n X$	Yönlü homoloji
$H^n X$	Yönlü kohomoloji (eşhomoloji)

1. GİRİŞ

Graph teorisinin ilk sonuçlarından biri 1736'da Leanhard Euler tarafından "Seven Brige of Königsberg" olarak yayımlandı. Bu geometrideki ilk topolojik sonuçlardan biri olarak literatüre geçti. Çünkü herhangi bir ölçüme bağlı değildi. Böylece graph teorisi ile topoloji arasında birebir bir eşlemenin varolduğu saptandı. 1845'te Gustav Kirchhoff; elektrik devrelerindeki voltajı ve akımı hesaplamak için "Kirchhoff'un Devre Kuralları' nı" yayımladı. 1852'de Francis Guthrie "Dört Renk Problemi' ni" ortaya koydu. Dört renk problemi; ülkeler haritasında komşu ülkeler aynı olmaksızın sadece dört renk kullanarak renklendirmenin uygun olup olmadığını belirler. Bu problem 1976'da Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından çözüldü. Böylece Graph Teorisi ortaya çıkmış oldu. Daha sonra yönlü cebirsel topoloji belirmeye başladı.

Yönlü cebirsel topolojinin tanım kümesi klasik cebirsel topolojiden farklıdır. Prensip olarak yönlü uzaylar ayrıcalıklı yönlere ve ters çevrilmeye ihtiyacı olmayan yönlü yollara sahiptir. Homotopiler, temel gruplar ve temel n-gruboidler ile yönlü homotopiler, temel monoidler ve temel n-kategoriler arasında birebir eşleme vardır. Kullanım alanlarından biri de concurrent teorisidir.

Yüksek boyutlu automatanın yararı nedir ve topolojinin bu teorideki önemi ne kadardır? İlk defa Vaughan Pratt tarafından 1991'de tanımlanan concurrent sistemi yüksek boyutlu automata teorisinin bir dalıdır. Yüksek boyutlu automata, concurrent sistemindeki işlemler arasında tüm yüksek dereceden bağımlılıkları ifade edebilme niteliğine sahiptir.

Yüksek boyutlu automata, temel olarak önkübik küme (precubical set); topolojik uzay yönüyle de geometrik realizasyon (geometric realization) olarak düşünülür. Yüksek boyutlu automata teorisindeki özellikler ve yüksek boyutlu automata arasındaki dönüşümlerin özellikleri, topolojik uzayların ve sürekli fonksiyonların özelliklerine dönüştürülür. Bu dönüştürme, yüksek boyutlu automata ve diğer concurrent sistemlerin özelliklerini incelemek için cebirsel topolojinin gelişmiş metotlarının kullanımına izin verir.

Eric Gaubault, 1992 yılında yüksek boyutlu automata teorisindeki homolojik özellikleri incelerken bu muhteşem metodu bulmuştur.

Bununla birlikte yüksek boyutlu automatadan topolojik uzaylara bir geçiş problemi vardır. Yüksek boyutlu automatada durumlar ve bağlantılar arasında nedensel bir ilişki var iken topolojik uzayda simetriklik vardır. Bu yüzden simetrik olmayan bağıntılar bu dönüşüm altında kaybolur.

Bu ve bunun gibi problemlerin adresi yönlü topolojidir (directed topology). Yönlü topolojide ele alınan objeler örnekleme bilgileri ile donatılan topolojik uzaylardır:

- Lisbeth Faystrup, Eric Gouboult ve Martin Rausser tarafından tanıtılan po-uzayları ve yerel po-uzayları,
- Marco Grandis tarafından tanıtılan d-uzayları,
- Phillipie Gaucher tarafından tanımlanan akıntılar (flows),
- Sonjewi Krishnon tarafından tanıtılan akım (streams),

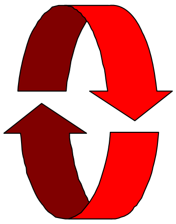
Bu çerçevede; yüksek boyutlu automatanın özellikleri, yönlü topolojik uzayların özelliklerine dönüştürülür. Cebirsel topolojideki metot direkt olarak yüksek boyutlu automata teorisine uygulanamaz. Örneğin temel gruplar yerine temel kategoriler, homoloji grupları yerine homoloji monoidleri yer alır.

Yüksek boyutlu automatadaki hesaplamalar veya concurrent sistemindeki hesaplamalar ayrık yollar (paths) olarak düşünülebilir. Geometrik realizasyon sayesinde; bu ele alınan yollar yönlü uzaylarda yönlü yollara dönüştürülür. Bunun yanı sıra, concurrent sisteminde belli hesaplamalara denk olacak şekilde işlemleri ele alabiliriz. Geometrik realizasyon ile hesaplamaların denkliği yönlü yolların yönlü homotopisine dönüştürülür. Böylece, yönlü homotopi ve yönlü homoloji teorilerindeki teknikler kullanılarak verilen concurrent sisteminin hesaplanabilir özellikleri incelenir.

Concurrent sistemlerin arasındaki işlemler ile ilgilenilebilir. Bunlar gözlemsel ve eylemsel olabilir. Topolojik olarak ikincisi (eylemsel) daha ilginçtir. Eğer birinci işlemdeki herhangi bir hesaplama diğeriyle bir eşleme kurabiliyorsa ya da tam tersi varsa iki concurrent sistem ya eylemsel olarak denktir ya da ikili olarak benzerdir (bisimilar). Açık dönüşümlerin özellikleri ile ikili benzerliği incelemek geleneksel bir metottur. Zaten, açık dönüşümlerle topolojik özellikleri incelemek en doğal yöntemdir. Bu tezde cebirsel topolojinin temel kavramları olan homotopi ve homoloji kavramlarına yön unsuru ilave edilerek yönlü topoloji, yönlü homotopi, yönlü homoloji, po-uzayları, yarı kübik küme kavramı ve filtreli küpler tanımlanarak; yarı kokübik (yarı eşkübik) kümeler ve kofiltreli (eşfiltreli) küpler yardımıyla yönlü kohomoloji kavramı oluşturulmuştur.

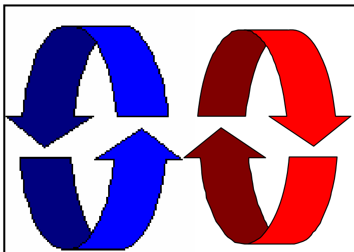
2. CONCURRENCY

Concurrency eşzamanlı çalışma, aynı anda olan, kesişen anlamına gelmektedir. Matematikte bir noktada kesişen doğrular concurrenttir. Dizisel bir program tek bir işi kontrol eder. Örneğin bir üçgenin alanın hesaplanması bir dizisel programdır. Concurrent program ise pek çok paralel hesaplama yapılmasına izin veren kontrol sisteminin çeşitli parçalarına sahiptir. Aynı anda çalışan paralel işlemleri kontrol eder. Bu işlemler birbiriyle etkileşim halinde olmalıdır. Bir dış etken ya da yürütülen işlemlerden biri, diğerinin sonucunu etkileyebilir.



Bir dizisel program; kontrol sisteminin tek tarafıdır.

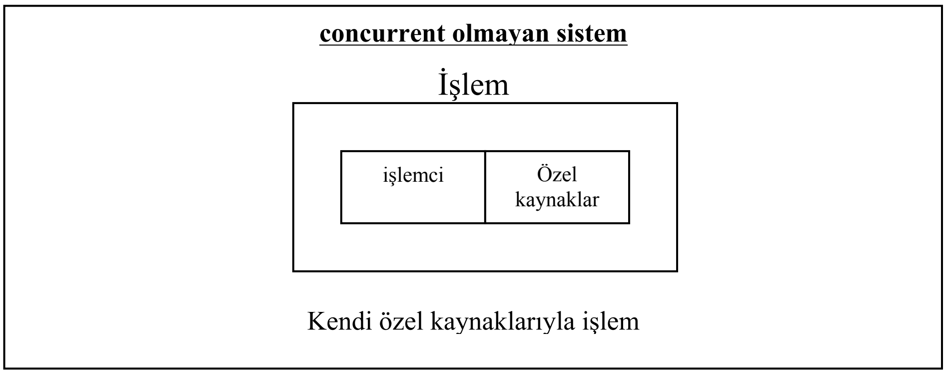
Şekil 2-a



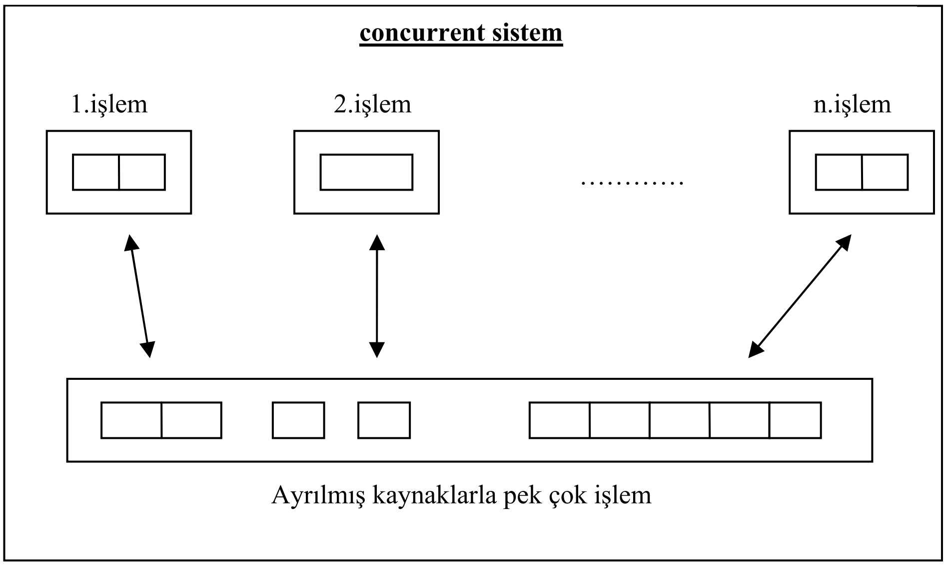
Bir concurrent program; pek çok paralel hesaplamanın yerine getirilmesine izin veren kontrol sisteminin çoklu tarafıdır. Aynı zamanda meydana gelen çoklu dış olayları kontrol eder.

Şekil 2-b

Concurrency yaygın kullanılan bir programlama olmasına rağmen hataya meyillidir. Concurrent programa ve hata risklerine ilk olarak Therac–25, bilgisayarlarla programlanmış radyasyon terapi cihazını örnek verebiliriz. Bu sistemi oluştururken; "cihaz 5 s'den fazla aynı tuşa takılı kalırsa sistemi devreden çıkar " komutu oluşturulmazsa tuş takılı kalır ve hastaya gereğinden fazla radyasyon verilmiş olur. İkinci olarak Mars'a gönderilen uzay aracını örnek verelim. Bu araç üzerinde güneş ışınlarını, atmosfer basıncını, yeryüzüne olan uzaklığı kontrol eden işlemler tanımlansın fakat radyasyon ile karşılaşabilme olasılığı unutulsun. Bu durumda araç radyasyon ile karşılaştığında araçla iletişimin kesildiği görülür. Bir diğer örnek de; seyahat kontrol sistemidir. Buradaki concurrent program; arabanın istenildiğinde sabit hızla gitmesini sağlar fakat frene uzun bir süre basıldığında hız artamayacağına göre sistem devre dışı kalır. Concurrency'deki aynı anda çalışan programları en az hata ile çalıştırmak için sürekli bir yapıya sahip olan cebirsel topolojideki sürekli fonksiyon yapısıyla oluşturulan homotopi fonksiyonunu kullanacağız. Böylelikle concurrent işlemlerdeki ayrık(discrete) yapıyı sürekli hale getireceğiz. (Fajstrup et al.,1998,2006; Bubenik, 2004)



Şekil 2-c



Şekil 2-d

n- concurrent işlem sistemi R^n 'in altkümesi olarak ifade edilir. R^n 'deki her koordinat bir işleme, R^n ' de bir nokta ise sisteme karşılık gelir. (Fajstrup et al., 2006, Bubenik, 2004)

Örnek 2.1:

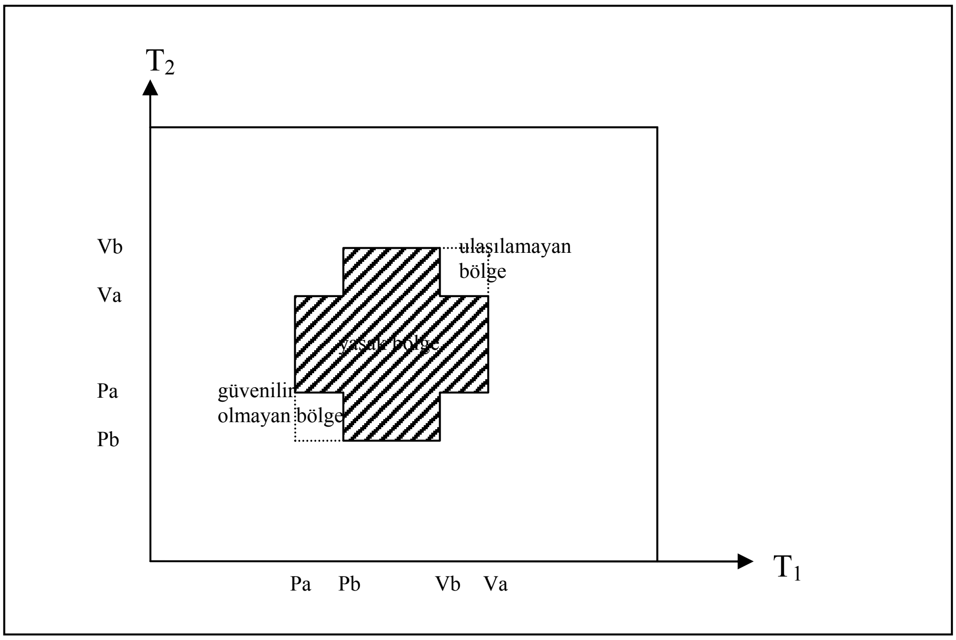
Her bir zaman diliminde sadece birisi kullanılacak şekilde ayrılmış iki kaynak a ve b olsun.

$P_x : x$ kaynağını kilitleyen işlem, $V_x : x$ kaynağını serbest bırakan işlem olmak üzere;

<u>Birinci işlemin programı</u> $T_1 = P_a P_b V_b V_a$

<u>İkinci işlemin programı</u> $T_2 = P_b P_a V_a V_b$ olarak tanımlansın.

Bu tanımlar kullanıldığında İsviçre bayrağının şekli ortaya çıkar. (Fajstrup et al., 1998; Bubenik, 2004)



Şekil 2-e

3. DİTOPOLOJİ

3.1. Kısmi Sıralı Uzaylar:

Tanım 3.1.1:

Bir M kümesi üzerindeki kısmi sıralama (yansıma, geçişme ve anti simetrik) bağıntısı $\leq$ olsun. $A \subseteq M$ için:

$$\uparrow A = \{y \in M \mid \exists x \in A : x \leq y\}$$

$$\downarrow A = \{y \in M \mid \exists x \in A : y \leq x\}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlara göre;

$$A \subseteq \uparrow A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \uparrow A \subseteq \uparrow B$$

$A = \{x\}$ tek elemanlı küme için:

$$\uparrow \{x\} = \uparrow x = \{y \in M \mid x \leq y\}$$

$$\downarrow \{x\} = \downarrow x = \{y \in M \mid y \leq x\}$$

$$[x, y] = \uparrow x \cap \downarrow y$$

eşitlikleri tanımlanır. (Raussen, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

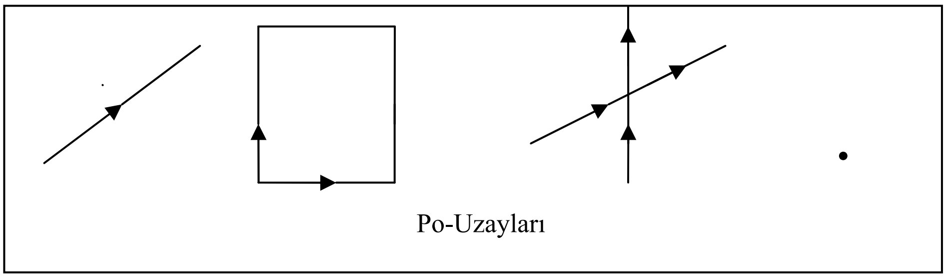
3.2. Po-Uzayları:

Tanım 3.2.1:

Bir bağıntı $\beta \subseteq X \times X$ çarpım uzayında kapalı bir altküme ise β, X topolojik uzayında kapalıdır. (Raussen, 2000)

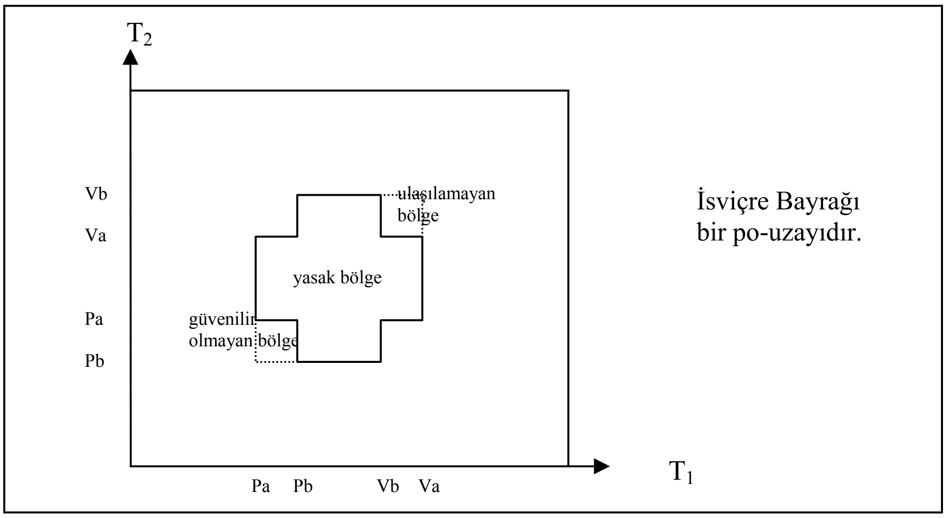
Tanım 3.2.2:

$X \in Obj_{Top}$ ve $\leq \subseteq X \times X$ kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer $\leq$ kümesi $X \times X$ ’de kapalı ise $(X, \leq)$ ’e **po-uzayı** denir. U po-uzayı olmak üzere $A \subset U$ kümesi; $x \leq_A y \Leftrightarrow x \leq_U y$ eşitliği ile po-uzay yapısını miras alır yani bu eşitlikle po-uzay yapısı kalıtsaldır. Bu kümeye **alt po-uzayı** denir. $(U_1, \leq_1), (U_2, \leq_2)$ iki po-uzayı olmak üzere bu iki uzayın kartezyen çarpımı $U_1 \times U_2; (x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq_1 x'$ ve $y \leq_2 y'$ olarak tanımlanır. (Raussen, 2000; Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

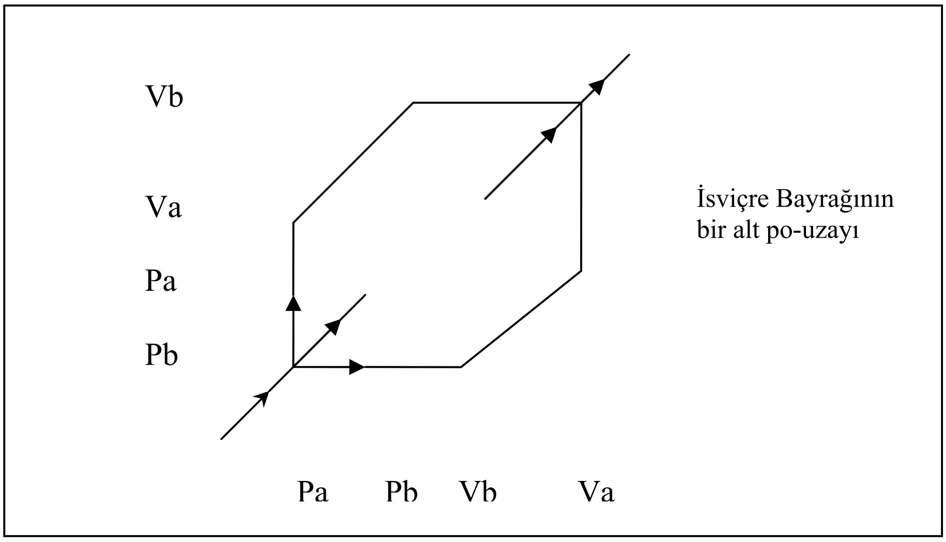


Şekil 3-a

Önek 3.2.1:



Şekil 3-b (Fajstrup et al., 2004; Bubenik, 2004)



Şekil 3-c (Fajstrup et al., 2004; Bubenik, 2004)

Önerme 3.2.1:

Her po-uzayı hausdorff'tur. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

İspat:

$(X,\leq)$ po-uzayı ve $x,y \in X(x \neq y)$ olsun. $(X,\leq)$ po-uzayı olduğu için $\leq$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır bu nedenle ters simetri özelliği sağlar. O halde $x \neq y$ olarak kabul edildiği zaman $x \leq y$ iken $y \leq x$ ifadesi yanlış olmalıdır.

$x \nleq y$ olsun. Bu durumda $A = X \times X \setminus \leq$ kümesi açıktır.

$(x,y) \in A$ için (x,y)'nin $W \subseteq A$ olacak şekilde açık bir W komşuluğu vardır. $X \times X$ üzerindeki topolojinin sonucundan $x \in U,\ y \in V$ olmak üzere $U \times V \subseteq W$ koşulunu gerçekleyen açık komşuluklar bulunur. $U \cap V \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim ve $z \in U \cap V$ olarak alalım. Bu durumda $(z,z) \in U \times V$ ve $(U \times V) \cap \leq = \emptyset$ olur. Bu sonuçla $z \leq z$ ifadesi yanlıştır yani bir çelişkidir. Böylece $U \cap V = \emptyset$ bulunur. □

Örnek 3.2.2:

- R, $\leq$ bağıntısına göre po-uzayıdır.
- Standart birim aralık $I = [0,1]$, R üzerindeki sıralama ile po-uzayıdır.
- I^n birim küpü; $\forall i$ için $(x_1,...,x_n) \leq (y_1,...,y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i$ tanımlanan kısmi sıralama bağıntısı ile po-uzayıdır. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002; Fajstrup et al., 2004)

Önerme 3.2.2:

$(X,\leq)$ po-uzayı ve $x,y\in X$ olsun. $\uparrow x, \downarrow x$ ve $[x,y]$ kümeleri X'de kapalıdır. (Raussen, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

İspat:

$\uparrow x = X$ ise bu küme aşikar olarak kapalıdır. $\uparrow x \neq X$ ve $z\in X\setminus\uparrow x$ olsun. Böylece $x \not\leq z$ olur. Önerme 3.2.1'den $x\in U$ ve $z\in V$ olmak üzere açık komşulukları vardır. Buradan $(U\times V)\cap\leq\, = \emptyset$ olur.

$\uparrow U\cap\downarrow V=\emptyset$ olsun. $\uparrow U\cap\downarrow V=\emptyset$ iken $\uparrow x\subseteq\uparrow U$ ve $V\subseteq\downarrow V$ olduğu için $\uparrow x\cap V=\emptyset$ yani $V\subset X\setminus\uparrow x$ bulunur. Böylece $\mathrm{X}\setminus\uparrow \mathrm{x}$ açıktır ve dolayısıyla $\uparrow x$ kapalıdır.

$\uparrow U\cap\downarrow V\neq\emptyset$ ve $w\in\uparrow U\cap\downarrow V$ olsun. Tanım 3.1.1'den $u\in U$, $v\in V$ olmak üzere $u\leq w$ ve $w\leq v$'dir. Bu eşitliklerden $u\leq v$ bulunur ki bu da $(U\times V)\cap\leq\,\neq\emptyset$ çelişkisini doğurur. O halde kabulümüz yanlıştır. □

Tanım 3.2.3:

X, Y po-uzayı olmak üzere; $f: X\to Y$ kısmi sıralama bağıntısını koruyan sürekli dönüşümlere **dimap** (didönüşüm) ve $f:\vec{I}\to X$ dönüşümüne **dipath** (diyol) denir.

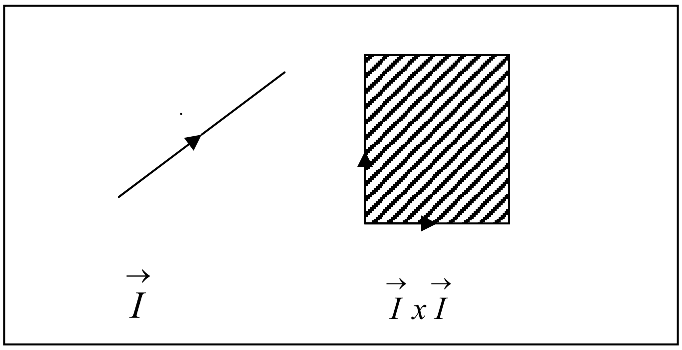
Po-uzaylarının ve dimapların kategorisi ***pTop*** ile tanımlanır. *pTop*'daki izomorfizmler **dihomeomorfizmler**dir. (Raussen, 2000, 2003; Pratt, 2000; Bubenik, 2004)

Tanım 3.2.4:

B, C po-uzayları olmak üzere $f, g : B \to C$ dimap olsun. $H : Bx\vec{I} \to C,\ H|_{B_x\{0\}} = f$ ve $H|_{B_x\{1\}} = g$ koşulunu sağlıyor ise *H*'a *f*'den *g*'ye **dihomotopi fonksiyonu** denir ve $H : f \to g$ olarak ifade edilir.

$f \to f_1 \leftarrow f_2 \to ... \leftarrow f_n \to g$ olacak şekilde dihomotopilerin bir zinciri varsa $f \simeq g$ olarak yazılır. Buradaki $\simeq$ bağıntısı denklik bağıntısıdır. $f : B \to C$ bir dimap olsun. $g \circ f \simeq Id_B$ ve $f \circ g \simeq Id_C$ koşulunu sağlayan bir $g : C \to B$ dimap varsa *f* dihomotopi denkliğidir ve $B \simeq C$ olarak gösterilir. (Bubenik, 2004)

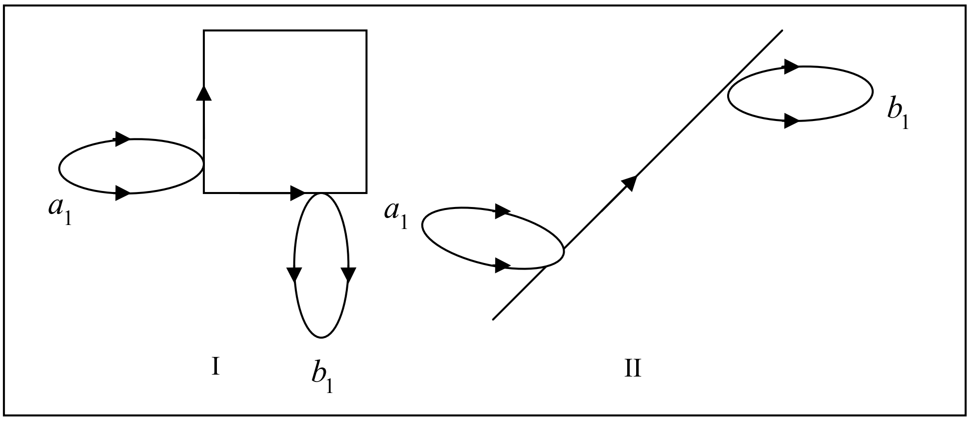
Örnek 3.2.3:



Şekil 3-d

$\vec{I} = ([0,1], \leq)$; üzerinde reel sayılarda tanımlanan sıralama ile standart birim aralığı ve $\vec{I}x\vec{I}$; $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x')$, $(y \leq y')$ sıralamasıyla birlikte $[0,1] \times [0,1]$ uzayıdır. (Bubenik, 2004)

Örnek 3.2.4:



Şekil 3-e

Şekildeki iki uzay dihomotopi denk değildir. Çünkü I. şekilde a_1 noktasından başlayıp b_1 noktasına ulaşılamıyor. Fakat II. şekilde a_1 noktasından b_1 noktasına bir yol bulunabiliyor.. (Bubenik, 2004)

Tanım 3.2.5:

C, R^n'nin alt po-uzayı ve $f, g : B \to C$ iki dimap olsun. f ve g arasındaki **lineer interpolasyon** (interpolation) $H(b,t) = (1-t)f(b) + tg(b)$ koşulunu sağlayan $H : B \times \vec{I} \to R^n$ dönüşümüdür. (Bubenik, 2004)

Lemma 3.2.1:

C, R^n'nin alt po-uzayı (bazı n'ler için) olsun. Eğer $\forall b \in B$ için $f(b) \leq g(b)$ olacak şekilde $f, g : B \to C$ dimap ise f ve g arasındaki lineer interpolasyon H'ın görüntüsü C'de iken H; f'den g'ye dihomotopi fonksiyonudur. (Raussen, 2000, 2003; Bubenik, 2004)

3.3. Yerel Kısmi Sıralı Uzaylar:

Tanım 3.3.1:

$X \in Obj_{Top}$, bunun açık örtüsü $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ ve kısmi sıralılar $\leq_{U_\alpha} \subseteq U_\alpha \times U_\alpha$ olsun. $\forall x \in X$ için $W_x \subseteq X$ olacak şekilde $\forall U, U' \in \mathscr{U}$, $x \in U, U'$; $\forall y, z \in W_x \cap U \cap U' : y \leq_U z \Leftrightarrow y \leq_{U'} z$ koşulunu sağlayan bir W_x açık komşuluğu varsa $\{U_\alpha, \leq_{U_\alpha}\}$'e X üzerinde **yerel kısmi sıralı** denir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.3.2:

$X \in Obj_{Top}$, bunun açık örtüsü $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ ve kısmi sıralılar $\leq_{U_\alpha} \subseteq U_\alpha \times U_\alpha$ olsun. $\forall x \in X$ için açık komşuluk $W_x \subseteq X$ üzerindeki sıralama $\leq_{W_x} \subseteq W_x \times W_x$ olmak üzere $\forall U \in \mathscr{U}$, $x \in U$; $\forall y, z \in W_x \cap U : y \leq_u z \Leftrightarrow y \leq_{W_x} z$ koşulu sağlanıyorsa $\{U_\alpha, \leq_{U_\alpha}\}$'e X üzerinde **yerel kısmi sıralı** denir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.3.3:

$X \in Obj_{Top}$ ve $\leq \subseteq X \times X$ olsun. $\forall x \in X$ için açık komşuluk $W_x \subseteq X$ olmak üzere $\leq|_{W_x \times W_x}$ kısmi sıralı ise $\leq$'e X üzerinde **yerel kısmi sıralama bağıntısı** denir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Not: Yukarıdaki tanımlardaki W_x komşulukları **po-komşuluklarını** gösterir. $\mathcal{U}$ örtüsü ise **po-örtüsü** olarak tanımlanır.

Not: $1 \in S^1$'in po-komşuluğu yoktur. Çünkü komşulukları arasında herhangi bir sıralama tanımlanamaz.

Önerme 3.3.1:

Yukarıdaki üç tanım birbirlerine denktir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

İspat:

$(1 \Rightarrow 2)$ $x \in W_x \subseteq X$, tanım 3.1.1'deki koşulları sağlasın. $y \leq_{W_x} z \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}$: $y \leq_U z$ ile $\leq_{W_x} \subseteq W_x x W_x$ tanımlanırsa tanım 3.1.1 yardımıyla $\leq_{W_x}$ bağıntısı W_x üzerinde kısmi sıralama olur. Böylece tanım 3.3.2'deki koşullar sağlanır.

$(2 \Rightarrow 1)$ Tanım 3.3.2'yi sağlayan $x \in W_x \subseteq X$ veriliyorsa bu tanım 3.3.1'deki koşulları da sağlar.

$(2 \Rightarrow 3)$ $\mathcal{W}^o = \{W_x \mid x \in X$ ve W_x, tanım 3.2.2'yi sağlar$\}$ olmak üzere $\mathcal{W}^o$, X'in açık örtüsü ve $\leq_{W_x}$ herhangi ortak po-komşulukları üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olsun. Böylece $y \leq z \Leftrightarrow \exists W \in \mathcal{W}^o$: $y \leq_W z$ denkliği ile $\leq \subseteq XxX$ bağıntısını tanımlayabiliriz. Bu bağıntıda tanım 3.3.3'ü sağlar.

$(3 \Rightarrow 2)$ $\mathscr{W}^o = \{W_x \mid x \in X$ ve W_x tanım 3.3.3'ü sağlar$\}$ olmak üzere $\mathscr{W}^o$, X'in açık örtüsü olsun. Böylece her bir $\leq_{W_x} \in \mathscr{W}^o$ için kısmi sıralama bağıntısı $\leq_{W_x} = \leq|_{W_x \times W_x}$ tanımlanır. Burada $x \in X$ ve $W_x \in \mathscr{W}^o$ alınırsa $\leq_{W_x} = \leq|_{W_x \times W_x}$ olduğu için tanım 3.2.2'nin koşulları sağlanır. Bu nedenle $\mathscr{W}^o$, X ' in po-örtüsüdür. □

Önerme 3.3.2:

X Üzerindeki topolojinin bazı $\mathscr{B}$ olmak üzere $\forall B \in \mathscr{B}$ için $\leq|_{BxB}$ kısmi sıralı ise $(X, \leq)$ yerel kısmi sıralıdır. Bu şekilde oluşan $\mathscr{B}$ bazına **po-bazı** denir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.3.4:

$\leq_1$ ve $\leq_2$ yerel kısmi sıralama bağıntıları olsun. X üzerindeki topolojinin bazı $\mathscr{B}$ olmak üzere $\forall B \in \mathscr{B}$, $\forall y, z \in B : y \leq_1 z \Leftrightarrow y \leq_2 z$ koşulu sağlanıyorsa $X \in Obj_{Top}$ üzerinde bu bağıntılar denktir. (Fahrenberg and Leth, 2002; Bubenik, 2004)

Tanım 3.3.5:

İki yerel kısmi sıralı uzay $U = \{U_\alpha, \leq_\alpha\}$ ve $V = \{V_\beta, \leq_\beta\}$ olmak üzere $U \cup V$, X üzerinde yerel kısmi sıralı ise bu iki uzay $X \in Obj_{Top}$ üzerinde denktir. (Fahrenberg and Leth, 2002; Bubenik, 2004)

Önerme 3.3.3:

Bu iki tanım birbirlerine denktir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

3.4 Lpo-Uzayları:

Tanım 3.4.1:

$X \in Obj_{Top}$; X'in po-örtüsünün $\widetilde{\mathcal{U}}$ denklik sınıfı ile hausdorff uzay olsun. Eğer $\widetilde{\mathcal{U}}$, $\forall U \in \mathcal{U}$ *po*-uzayı olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ po-örtüsünü içeriyor ise $(X, \widetilde{\mathcal{U}})$ uzayına **lpo-uzayı** denir. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002; Bubenik and Worytkiewicz, 2006)

Önerme 3.4.1:

Her po-uzayı lpo-uzayıdır. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002; Fajstrup et al., 2004; Bubenik, 2004)

Önerme 3.4.2:

Her lpo-uzayı yerel hausdorfftur. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.2:

$(X, \leq_1), (Y, \leq_2)$ yerel kısmi sıralı uzaylar ve $f \in Mor_{Top}(X, Y)$ olsun. $\forall x \in X$ için $x \in W_x$ ve $f(\text{x}) \in W_{f(\text{x})}$ olacak şekilde

$\forall y,z \in W_x \cap f^{-1}(W_{f(x)})$: $y \leq_1 z \Rightarrow f(y) \leq_2 f(z)$ koşulunu sağlayan bir po-komşuluğu varsa f dönüşümüne **dimap** (didönüşüm) denir. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002; Fajstrup et al., 2004)

Önerme 3.4.3:

$\leq_1^1, \leq_1^2$; $X \in Obj_{Top}$'da denk yerel kısmi sıralama bağıntıları, $(Y, \leq_2)$ yerel kısmi sıralı uzay ve $f \in Mor_{Top}(X,Y)$ olsun.

f; $(X, \leq_1^1)$'den $(Y, \leq_2)$'e giden dimaptır $\Leftrightarrow f$; $(X, \leq_1^2)$'den $(Y, \leq_2)$'e giden dimaptır. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.3:

Dimaplar ve lpo-uzayları **lp-Top kategorisini** oluştururlar. Dimapların bileşkesi dimaptır. lp-Top kategorisindeki izomorfizmler **dihomeomorfizmlerd**ir. (Pratt, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.4:

$X, Y \in Obj_{xTop}$ olmak üzere $H \in Mor_{xTop}(X \times I, Y)$ koşulunu sağlayan H morfizmine **Kuvvetli Homotopi** denir. Kuvvetli homotopi bağıntısı $\simeq_4$ olarak gösterilir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.5:

$f, g \in Mor_{xTop}(X \times I, Y)$ olmak üzere $H \in Mor_{xTop}(X \times I, Y)$ Kuvvetli Homotopi, $H_0 = f$, $H_1 = g$ koşulunu sağlıyorsa f ve g

morfizmlerine **Kuvvetlice Önhomotopiktir** denir ve $f \succeq_4 g$ şeklinde ifade edilir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.6:

$X, Y \in Obj_{xTop}$ olmak üzere $H \in Mor_{Top}(X \times I, Y)$ koşulunu sağlayan H morfizmine **Topolojik Homotopi** denir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.7:

$f, g \in Mor_{xTop}(X \times I, Y)$ olmak üzere $H \in Mor_{Top}(X \times I, Y)$ Topolojik Homotopi, $H_0 = f$, $H_1 = g$ koşulunu sağlıyorsa f ve g morfizmlerine **Topolojik olarak homotopiktir** denir ve $f \simeq_1 g$ olarak tanımlanır. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.8:

$X, Y \in Obj_{xTop}$ olmak üzere $\forall t \in I$, $H_t \in Mor_{xTop}(X, Y)$ ise $H \in Mor_{Top}(X \times I, Y)$'a **Zayıf Homotopi** denir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.4.9:

$f, g \in Mor_{xTop}(X, Y)$ olmak üzere $H \in Mor_{Top}(X \times I, Y)$ Zayıf Homotopi, $H_0 = f$, $H_1 = g$ koşulunu sağlıyorsa f ve g morfizmlerine **Zayıfca Homotopiktir** denir ve $f \simeq_2 g$ şeklinde gösterilir. (Fahrenberg and Leth, 2002)

3.5. Temel gruboidler:

Top kategorisindeki temel gruboidlerin durumlarını inceleyeceğiz. İlk olarak bazı hatırlatmalar yapalım:

- Bir obje ve birimle birlikte small (küçük) kategori yarı gruptur.
- Bir obje ile birlikte küçük kategori, tüm izomorfizmaları morfizm kabul eden bir gruptur.
- Morfizmleri izomorfizm olan küçük kategori gruboidtir.

Tüm gruboidlerin kategorisi Grpd ve tüm küçük kategorilerin kategorisi Cat olarak tanımlanır. Dikkat edilirse Cat kategorisinin morfizmleri küçük kategoriler arasındaki funktorlardır. Bu funktorlar izomorfizmi korurlar. Gruboidler arasındaki herhangi kategori morfizmi bir gruboid morfizmidir. (Fahrenberg and Leth, 2002; Fajstrup et al., 2004)

Tanım 3.5.1:

X topolojik uzayında bir yol $Mor_{Top}(I,X)$ 'ın bir elemanıdır. Bir p yolu $p(0)=x$ ve $p(1)=y$ ile birlikte $p: x \mapsto y$ olarak tanımlanır. (Raussen, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002; Fajstrup et al., 2004)

Önerme 3.5.1:

$p, q \in Mor_{Top}(I, X)$ olsun. p ve q yolları eşit ise biri diğerinin yeniden parametrelendirilmişidir. $q = p \circ \varphi$ eşitliğini sağlayan $\varphi \in Mor_{Top}(I, I)$ artan dönüşümü vardır. (Raussen, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002; Fajstrup et al., 2004)

Tanım 3.5.2:

$p \in Mor_{Top}(I, X)$ olmak üzere $p^{-1}(t) = p(1 - \mathrm{t})$ ve $x \in X$ olmak üzere P_x sabit yolu $P_x : I \to \{x\}$ olarak tanımlanır. (Raussen, 2000; Fahrenberg and Leth, 2002)

Tanım 3.5.3:

$p, q \in Mor_{Top}(I, X)$ olsun. $p(1) = q(0)$ koşuluyla p ve q 'nun concatenation' ı $p * q(t) = \begin{cases} p(2t) & , t \leq 1/2 \\ q(2t-1) & , t > 1/2 \end{cases}$ olarak tanımlanır. (Fahrenberg and Leth, 2002)

Not: Concatenation işlemi birleşmelidir.

4. D-TOPOLOJİ

4.1 Yönlü Topolojik Uzay (d-uzay):

Tanım 4.1.1:

$I \to X$ sürekli dönüşümlere **yönlü yol** (**d-yol)** denir ve söz konusu yönlü yollardan oluşan küme dX olarak gösterilir. (Grandis, 2002, 2003)

Tanım 4.1.2:

$(X, dX) = X$ **yönlü topolojik uzay (d-uzay)**; $a = I \to X$ sürekli dönüşümlerin (d-yolların) dX kümesi ile donatılan ve aşağıdaki koşulları sağlayan topolojik uzaydır.

- (Sabit Yollar) Her sabit dönüşüm $I \to X$ yönlüdür.
- (Yeniden parametrelendirme)
  dX ; $I \to I$ artan dönüşüm ile bileşke işlemi altında kapalıdır.
- (Concatenation) dX , concatenation altında kapalıdır:
  d-yollar a, b; X 'de ardışık ise bunların concatenation'ı $c = a + b$

bir d-yoldur.

$$
(1) \qquad \begin{aligned} c(t) &= a(2t) \quad , \quad 0 \le t \le 1/2 \\ c(t) &= b(2t-1) \quad , \quad 1/2 \le t \le 1 \end{aligned}
$$

Yeniden parametrelendirme ile yönlü yollar, $0 < 1/n < 2/n < 3/n ... < 1$ parçalanmasında ardışık yolların n-ary concatenation'ı $a_1 + a_2 + ... + a_n$ altında kapalıdır. (Pratt, 2000; Grandis, 2002, 2003)

Tanım 4.1.3:

$f : X \to Y$ sürekli dönüşümü; X, Y d-uzayları arasında yönlü yolları koruyorsa ($a \in dX$ iken $f(a) \in dY$) f dönüşümüne **yönlü dönüşüm (d-dönüşüm)** denir. (Pratt, 2000; Grandis, 2002, 2003; Fajstrup, 2004)

Tanım 4.1.4:

d-uzaylar ve d-dönüşümler ***dTop* kategorisini** oluştururlar. $dTop$ kategorisi $\uparrow Top$ olarak da gösterilir. $dTop$ kategorisindeki izomorfizmlere **d-homeomorfizm** denir. $dTop$ kategorisi, Top kategorisi üzerine kuruludur bu nedenle limit ve kolimitlere sahiptir. (Grandis, 2002, 2003; Fajstrup, 2004)

Tanım 4.1.5:

$X' \subset X$ olmak üzere X' uzayında seçilen yollar X uzayında yönlü ise X' uzayına d**-alt uzay** denir. (Grandis, 2002, 2003; Fajstrup, 2004)

Tanım 4.1.6:

X d-uzay olmak üzere planlanan d-yollarının sonlu concatenationlarından oluşan X/R yapısına **d-bölüm yapısı (d-bölüm)** denir. (Grandis, 2002, 2003; Fajstrup, 2004)

Örnek 4.1.1:

$I \to \Pi X_j$ yolu yönlüdür ancak ve ancak tüm $I \to X_j$ yolları yönlüdür. Fakat $I \to \Sigma X_j$ yolu yönlüdür ancak ve ancak bazı $I \to X_j$ yolları yönlüdür. (Grandis, 2003)

Hatırlatma:

dTop kategorisinden *Top* kategorisine unutkan funktorlarla gidilir. Bu unutkan funktorlar limit ve kolimitleri korur.

Tanım 4.1.7:

d-uzayında; $r : I \to I$ fonksiyonu d-yollarının yansıyanını verir.

$$t \to r(t) = 1 - t$$

Bu şekildeki d-uzaylarına **yansıyan** denir.

(2) $R : dTop \to dTop$

$$X \to R(X) = X^{op}; a \in d(X^{op}) \Leftrightarrow a^{op} = a.r \in dX$$

Bu özelliği sağlayan d-uzaylarına **simetriktir** denir. (Grandis, 2003)

Önerme 4.1.1:

d-uzayı yansıyan dönüşümler altında invaryant ise simetriktir. (Grandis, 2003)

4.2 Standart Modeller:

$\uparrow R$: Yönlü reel doğru ya da d-doğrusu olarak adlandırılır. $I \to R$ 'ye artan dönüşümler tarafından verilen yönlü yollar ile öklid doğrusudur.

$\uparrow R^n$: n-boyutlu reel d-uzayı olarak tanımlanır. $\uparrow R$ 'nin *dTop* kategorisi altındaki kartezyen çarpımıdır. $(x \le y \Rightarrow \forall i \text{ için } x_i \le y_i)$

$\uparrow I = \uparrow [0,1]$: Standart d-aralığıdır. $\uparrow R$ 'nin alt uzay yapısına sahiptir. (alt uzay yapısı olması için yolların üst kümeye göre d-yol olması gerekir.)

$\uparrow I^n$: Standart d-kübüdür. $\uparrow I$ 'nın n. kuvveti aynı zamanda $\uparrow R^n$ 'nin alt uzayıdır.

$\uparrow S^1 = \uparrow I / \partial I$: Standart yönlü çemberdir. Yönü saat yönünün tersidir ve aşağıdaki iki dönüşüm için *dTop*'un eş ekolizer'ı olur.

(3) $\partial^-, \partial^+ : \{*\} \to \uparrow I^n \quad ; \quad \partial^-(*) = 0,\ \partial^+(*) = 1$

(4) $id, f : \uparrow R \to \uparrow R \quad ; \quad x \to x + 1$

$\uparrow S^n = (\uparrow I^n)/(\partial I^n)$: Yönlü n-boyutlu küredir.

Standart daire: $Rx \uparrow R$ 'de d-yapısına sahiptir.

$\uparrow O^1$: Sınırlı daire şeklinde ifade edilir ve $Rx \uparrow R$ 'nin alt uzayıdır. (Grandis, 2002; 2003)

Önerme 4.2.1:

$\uparrow I = \uparrow [0,1]$ standart d-aralığı *dTop* kategorisinde bir kafestir. Yüz dönüşümleri ∂^- ve ∂^+, dejenere dönüşümü e, iki temel operatör g^- ve g^+, interchange s aşağıdaki gibi tanımlanır: (Grandis, 2003)

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, shift left=2, "\partial^{\alpha}"] \arrow[r] & \uparrow \mathrm{I} \arrow[l, shift left=2, "e"] & \uparrow \mathrm{I}^2 \arrow[l, shift right=1, "\mathrm{g}^{\alpha}"'] \arrow[l, shift left=1] \end{tikzcd} \qquad \uparrow \mathrm{I}^2 \xrightarrow{s} \uparrow \mathrm{I}^2$$

$$\partial^-(*) = 0 \quad , \quad \partial^+(*) = 1$$

$$g^-(t,t') = \max(t,t') \quad , \quad g^+(t,t') = \min(t,t') \qquad s(t,t') = (t,t') \,.$$

4.3. Önsıralılar ve Bitopolojiler (İkili Topolojiler):

Yönlü uzaylar için unutkan funktorlarla birbirine bağlanan artan sıradaki yönlü topolojilerin olası üç durumunu ele alalım:

$$pTop \subset lpTop \to bTop \to dTop \,.$$

Kısmi sıralı topolojik uzay $X = (X, \leq)$, kısmi sıralama bağıntısı (yansıyan, anti-simetrik ve geçişmeli) ile donatılan topolojik uzaydır. Bu bağıntı sayesinde oluşturulan po-uzayları ve po- uzayları arasında sıralama bağıntısını koruyan sürekli dönüşümler *pTop* kategorisini meydana getirir.

Lpo-uzayları ve bu uzaylar arasında sıralamayı koruyan sürekli dönüşümler *lpTop* kategorisini oluştururlar.

Son olarak bir bitopolojik (ikili topolojik) uzay $X = (X, \tau^{-}, \tau^{+})$, topolojilerin bir çifti ile donatılmış uzaydır. (Buradaki τ^{-}; geçmiş (past), τ^{+}; gelecek (future) dönüşümlerini göstermektedir.) Bu şekildeki objeler ve dönüşümler *bTop* kategorisini oluşturur. Bir bitopolojik uzay $dX = bTop(\uparrow I, X)$ ile doğal d-yapısına sahiptir. (Grandis, 2003)

4.4 Yönlü Homotopi:

Tanım 4.4.1: Yönlü Homotopi (d-homotopi)

Bir **yönlü homotopi (d-homotopi)** $\varphi : f \to g : X \to Y$; $\partial^{+}, \partial^{-} : X \to Y$, $\partial^{+}(\varphi) = \varphi, \partial^{-}(\varphi) = \varphi$ olmak üzere f ve g'nin iki yüzünün $\varphi : \uparrow IX = X \times \uparrow I \to Y$ d-dönüşümü olarak tanımlanır. (Grandis, 2002, 2003; Fajstrup et al., 2004)

d-homotopi yapısı aşağıdaki işlemlerden meydana gelir:

$$u : X' \to X,\ v : Y \to Y',\ \psi : g \to h$$

(a) Dönüşümlerin ve homotopilerin whisker birleşimleri:

$$v \circ \varphi \circ u : v f u \to vgu \quad (v \circ \varphi \circ u = v.\varphi.\uparrow Iu : \uparrow IX' \to Y')$$

(b) Aşikar homotopiler:

$$0_f : f \to f \qquad (0_f = f.e : \uparrow IX \to Y)$$

(c) Homotopilerin concatenation'ı:

$$\varphi + \psi : f \to \mathrm{h}$$

Tanım 4.4.2: Yönlü Homotopi Bağıntıları (d-homotopi bağıntıları)

1. $f \precsim g$ d-homotopi ön sıralısı $f \to g$ homotopinin varlığıyla tanımlanır. Birleşme özelliğine sahiptir.

$$f \precsim g \ ve \ f' \precsim g' \Rightarrow ff' \precsim gg' \text{ olur.}$$

Simetri özelliği yoktur.

$$f \precsim g \Rightarrow Rg \precsim Rf \text{ olur.}$$

2. $\simeq$ bağıntısı $\precsim$'dan üretilen denklik bağıntısıdır. $f \simeq g$ için $f \precsim f_1 \geq f_2 \precsim f_3 ... g$ sonlu dizisi vardır. (aynı objeler arasındaki d-dönüşümlerin sonlu dizisi) (Grandis, 2002, 2003)

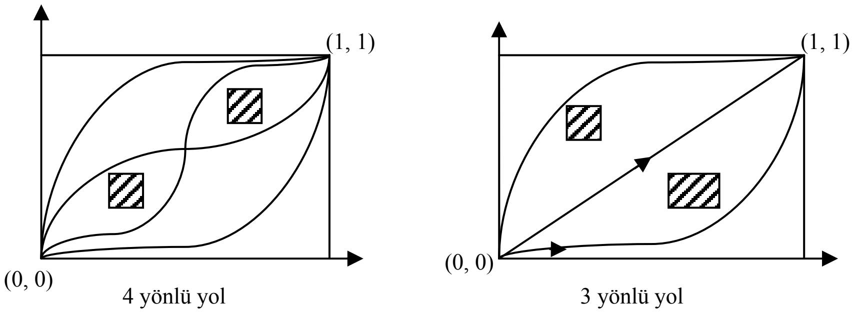
Tanım 4.4.3: Yönlü Homotopi Denkliği(d-homotopi denkliği)

$f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ d-dönüşümünün d-homotopi tersi $g : Y \to X$ dönüşümü olmak üzere;

$gf \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$, $f\mathrm{g} \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Y}} \Leftrightarrow \mathrm{X}$ ve Y **aynı d-homotopi tipine sahiptir** ya da **d-homotopi denktir**.

Bunun yanısıra $id_X \precsim gf$ ve $id_Y \precsim f\mathrm{g} \Rightarrow \mathrm{X}$ ve Y **hemen hemen d-homotopi denktir**. (Grandis, 2002, 2003)

Örnek 4.2.1:



Şekil 4-a

Yukarıdaki şekillerin ortalarındaki engelleri göz önüne alarak *(0,0)* noktasından *(1,1)* noktasına en kısa ve en uygun biçimde ulaşabilmek için yönlü yollar ve yönlü homotopi kullanılır. Yönlü homotopi ile aynı yönde olan yollar aynı denklik sınıfına dahil edilir.

Tanım 4.4.4: Yönlü Deformasyon Gerilme (d-deformasyon gerilme)

Bir d-altuzayı; $u : X \subset Y$; $\exists\, p : Y \to X$ d-dönüşümü varken $pu = id_X$ ve $up \simeq id_Y$ koşullarını sağlıyor ise söz konusu d-altuzayı X'e Y'nin **yönlü deformasyon gerilmesi** denir. (Grandis, 2002, 2003)

Tanım 4.4.5: Yönlü Kuvvetli Deformasyon Gerilme (d-kuvvetli deformasyon gerilme)

Bir d-altuzayı; $u{:}X{\subset}Y; \exists p{:}Y{\to}X$ d-dönüşümü ve d-homotopileri için $up = h_0 \to h_1 \leftarrow h_2 ... h_n = id_Y$ koşulunu sağlıyor ise söz konusu d-altuzayına Y'nin **yönlü kuvvetli deformasyon gerilmesi** denir. (Grandis, 2002, 2003)

Tanım 4.4.6: Yönlü Büzülebilme(d-büzülebilme)

Bir d-uzayı bir noktaya d-homotopi denk ya da bu uzayın kuvvetli deformasyon gerilmesi tek nokta ise bu d-uzayına **d-büzülebilirdir** denir. (Grandis, 2002, 2003)

5. YÖNLÜ HOMOLOJİ

5.1 Kübik Kümeler ve Morfizmler:

Tanım 5.1.1:

Bir **yarı kübik küme**; $\delta_i^{\alpha} : X_n \to X_{n-1}$ $(i = 1,2,3,...,n; \alpha = 0,1)$ yüz dönüşümleriyle (face maps) birlikte oluşturulan $X = \{X_n\}$ $n \in N$ kümesidir ve $\delta_i^{\alpha} : X_n \to X_{n-1}$ dönüşümleri aşağıdaki yarı kübik aksiyomunu sağlar:

$$\delta_i^{\alpha}\, \delta_j^{\beta} = \delta_{j-1}^{\beta}\, \delta_i^{\alpha} \qquad (i < j).$$

Bir **kübik küme** $\varepsilon_i : X_n \to X_{n+1}$ $(i = 1,2,3,...,n+1)$ dejenere (degenere) dönüşümleriyle birlikte yarı kübik kümedir ve $\varepsilon_i : X_n \to X_{n+1}$ dönüşümleri aşağıdaki aksiyomu sağlar:

$$\varepsilon_i\, \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}\, \varepsilon_i \qquad (i \le j).$$

$$\delta_i^{\alpha}\, \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_{j-1}\delta_i^{\alpha} & (i < j) \\ \varepsilon_j \delta_{i-1}^{\alpha} & (i > j) \\ id & (i = j) \end{cases} \quad .$$

(Pratt, 2000; Grandis and Mauri, 2003; Fahrenberg, 2004)

Örnek 5.1.1:

X bir topolojik uzay ve $S_n(X) = Top(I^n, X)$; $I^n \to X$ tüm sürekli dönüşümlerin kümesi olsun. Eğer yüz dönüşümleri ve dejenereleri aşağıdaki gibi veriliyorsa $SX = \{S_n X\}$ kübik bir kümedir.

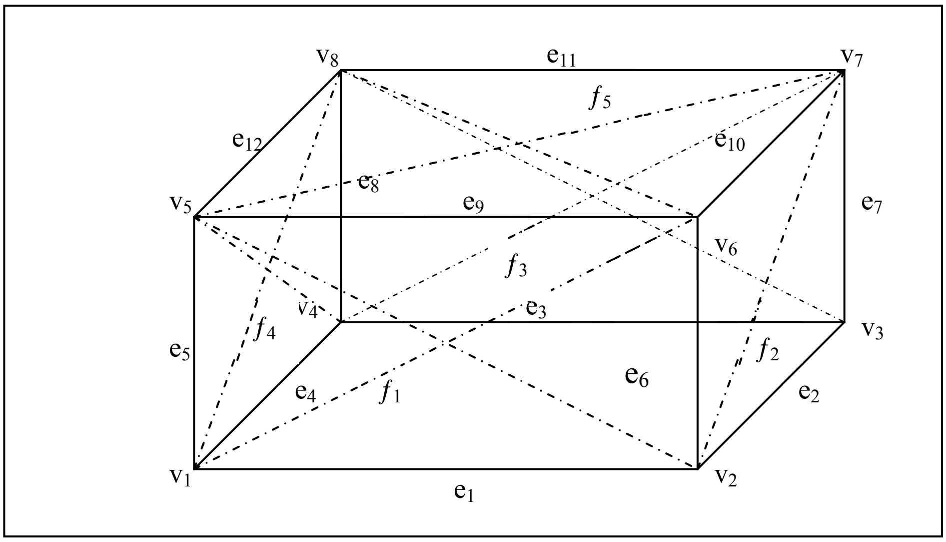
$$\delta_i^\alpha f(\mathrm{t}_1, t_2, t_3, ..., t_{n-1}) = (t_1, t_2, ..., t_{i-1}, \alpha, t_i, t_{i+1}, ..., t_{n-1})$$

$$\varepsilon_i f(\mathrm{t}_1, t_2, t_3, ..., t_n) = f(\mathrm{t}_1, ..., \hat{t}_i, ..., t_n)$$

(Grandis and Mauri, 2003; Fahrenberg, 2004)

Örnek 5.1.2:

Yarı kübik bir kümenin basit bir örneğini verelim. 5 tane 2-küp, alt yüzü olmayan oyuk 3-kübü elde etmek için düzenlenerek yapıştırılmış ve böylece ters çevrilmiş açık kutu oluşturulmuştur. (Fahrenberg, 2004)



Şekil 5-a

$$
\begin{array}{llll}
\delta_1^0 f_1 = e_5 & \delta_1^1 f_1 = e_6 & \delta_2^0 f_1 = e_1 & \delta_2^1 f_1 = e_9 \\
\delta_1^0 f_2 = e_6 & \delta_1^1 f_2 = e_7 & \delta_2^0 f_2 = e_2 & \delta_2^1 f_2 = e_{10} \\
\delta_1^0 f_3 = e_8 & \delta_1^1 f_3 = e_7 & \delta_2^0 f_3 = e_3 & \delta_2^1 f_3 = e_{11} \\
\delta_1^0 f_4 = e_5 & \delta_1^1 f_4 = e_8 & \delta_2^0 f_4 = e_4 & \delta_2^1 f_4 = e_{12} \\
\delta_1^0 f_5 = e_{12} & \delta_1^1 f_5 = e_{10} & \delta_2^0 f_5 = e_9 & \delta_2^1 f_5 = e_{11}
\end{array}
$$

5.2 Zincir w-kategorisi:

Yönlü zincir kompleksi, globular w-kategorisidir.
$X = \{X_n\}$ yarı kübik küme olsun. $x \in X_n$ için $d^-, d^+ : X_n \to X_{n-1}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d^- x = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^{(k+1) \bmod 2} x \qquad\qquad d^+ x = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^{k \bmod 2} x$$

d^-, d^+ fonksiyonları yardımı ile NX_{n-1}, X_{n-1} üzerinde serbest abelian monoidi tanımlar. NX_n üzerinde tanımlanan bu sınır dönüşümleri, $d^\alpha(\sum \alpha_j x_j) = \sum \alpha_j d^\alpha x_j$ tarafından genişletilebilir. Bu dönüşümler globular eşitliğin zayıf versiyonu olarak adlandırılan $d^\alpha d^- = d^\alpha d^+$ eşitliğini gerçekler. (Fahrenberg, 2004)

Tanım 5.2.1:

Filtreli küpler $C_n X$ aşağıdaki gibi tanımlanır: (Fahrenberg, 2004)

$$C_0X = NX_0$$

$$C_1X = \{(x_1, \check{x}_0, \hat{x}_0) \subseteq N.X_1 \times (N.X_0)^2 \mid \check{x}_0 + d^+x_1 = \hat{x}_0 + d^-x_1\}$$

$$C_nX = \{(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, \ldots, \check{x}_0, \hat{x}_0) \in N.X_n \times (NX_{n-1})^2 \times \ldots \times (NX_0)^2 \mid$$

$$\check{x}_{n-1} + d^+x_n = \hat{x}_{n-1} + d^-x_n, \ \forall i = 0, \ldots, n-2 :$$

$$\check{x}_i + d^+x_{i+1} = \hat{x}_i + d^-x_{i+1}\}$$

Buradan $d^+, d^- : C_nX \to C_{n-1}X$, $e : C_nX \to C_{n+1}X$ dönüşümleri,

$$d^-(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, \ldots, \check{x}_0, \hat{x}_0) = (\check{x}_{n-1}, \check{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \check{x}_0, \hat{x}_0)$$

$$d^+(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, \ldots, \check{x}_0, \hat{x}_0) = (\hat{x}_{n-1}, \check{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \check{x}_0, \hat{x}_0)$$

$$e(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, \ldots, \check{x}_0, \hat{x}_0) = (0, x_n, x_n, \ldots, \hat{x}_0)$$

şeklinde tanımlanır ve $d^\alpha d^- = d^\alpha d^+$, $d^\alpha e = id$ koşullarını sağlar. Bu dönüşümlerle birlikte $CX = \{C_nX\}$ kümesi yansımalı globular küme yapısına sahiptir.

Lemma 5.2.1:

$d^-, d^+ : C_nX \to C_{n-1}X$ dönüşümleri;

$$d^+d^+ + d^-d^- = d^+d^- + d^-d^+$$

eşitliğini sağlar. (Grandis and Mauri, 2003; Fahrenberg, 2004)

Tanım 5.2.2:

Filtreli küp $C_n X$ ve $m < n \in N$ için;

$$C_n X \times_m C_n X = \{(x, y) \in C_n X \times C_n X \mid (d^+)^{n-m} x = (d^-)^{n-m} y\}$$

olsun. Burada;

$$(x, y) = ((x_n, ..., \overset{\vee}{x}_m, \hat{x}_m, ..., \overset{\vee}{x}_0,$$
$$\hat{x}_0), (y_n, ..., \overset{\vee}{y}_m, \hat{y}_m, ..., \overset{\vee}{y}_0, \hat{y}_0)) \in C_n X \times_m C_n X$$

ancak ve ancak $\hat{x}_m = \overset{\vee}{y}_m$ ve tüm $i = 0,1,..., m-1$ için $\overset{\vee}{x}_i = \overset{\vee}{y}_i$ *ve* $\hat{x}_i = \hat{y}_i$

olur.

$\circ_m : C_n X \times_m C_n X \to C_n X$ işlemi,

$$(x_n, ..., \hat{x}_0) \circ_m (y_n, ..., \hat{y}_0) =$$

$$(x_n + y_n, ..., \overset{\vee}{x}_{m+1} + \overset{\vee}{y}_{m+1}, \hat{x}_{m+1} + \hat{y}_{m+1}, \overset{\vee}{x}_m, \hat{y}_m, \overset{\vee}{x}_{m-1}, \hat{x}_{m-1}, ..., \hat{x}_0)$$ şeklinde tanımlanır.

Not: Yukarıda tanımlanan $\circ_m$ işlemi değişmeli değildir.

Önerme 5.2.1:

CX ; $\circ_m$ işlemi ve d^+, d^-, e dönüşümleriyle sıkı globular w-kategorisidir. Bu nedenle $d^\alpha d^- = d^\alpha d^+$, $d^\alpha e = id$ koşullarını sağlar.

- $m < n \in N$ için; $(x, y) \in C_n X \times_m C_n X$ ise

$$ex \circ_m ey = e(x \circ_m y)$$

$$d^-(x \circ_m y) = \begin{cases} d^- x \\ d^- x \circ_m d^- y \end{cases}$$

$$d^+(x \circ_m y) = \begin{cases} d^+ y & , m = n-1 \\ d^+ x \circ_m d^+ y & m < n-1 \end{cases} .$$

Herhangi bir $z \in C_n X$ için,

$e^{n-m}((d^-)^{n-m} z) \circ_m z = x \circ_m e^{n-m}((d^+)^{n-m} z) = z$ eşitliği sağlanır.

- $(y, z) \in C_n X \times_m C_n X$ ise $(x \circ_m y) \circ_m z = x \circ_m (y \circ_m z)$ dır.
- $p < n$ için $(x, x'), (y, y') \in C_n X \times_p C_n X$ olacak şekilde $(x', y') \in C_n X \times_m C_n X$ ise $(x \circ_m y) \circ_p (x' \circ_m y') = (x \circ_p x') \circ_m (y \circ_p y')$ dır.

$\circ_m$ işlemine ek olarak $0 \le m < n$ için, $\forall (x, y) \in C_n X \times_m C_n X$ olmak üzere $\circ_{-1}$ işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\circ_{-1} : C_n X \times_m C_n X \to C_n X,$$

$$(x_n, ..., \hat{x}_0) \circ_{-1} (y_n, ..., \hat{y}_0) = (x_n + y_n, ..., \hat{x}_0 + \hat{y}_0).$$

Not: Bu işlemle birlikte CX, monoidal w-kategoridir.

Bu işlemlerden sonra $SCub \to wCat$ bir funktor tanımlayalım: $f : X \to Y$ yarı kübik kümelerin morfizmi olsun. Bu f fonksiyonunu

$f(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i f(x_i)$ tanımıyla $N.X_n \to N.Y_n$ olarak genişletelim ve

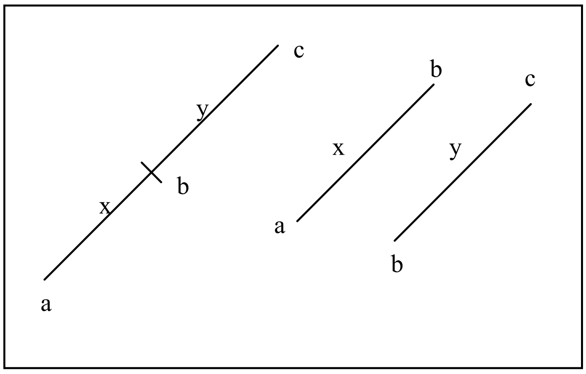
$\tilde{f}(\mathrm{x}_n,...,\hat{x}_0) = (f\mathrm{x}_n,...,f\hat{x}_0)$ olacak şekilde $\tilde{f}:\mathrm{CX} \to \mathrm{CY}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu tanımlardan;

$$f\check{x}_i + d^+ f\check{x}_{i+1} = f\check{x}_i + f\mathrm{d}^+\check{x}_{i+1} = f(\check{x}_i + d^+\check{x}_{i+1}) = f(\hat{x}_i + d^-\check{x}_{i+1}) = f\hat{x}_i + d^- f\check{x}_{i+1}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden $\tilde{f}\mathrm{d}^\alpha = d^\alpha \tilde{f}$, $\tilde{f}\mathrm{e} = \mathrm{e}\tilde{f}$ ve $\tilde{f}(\mathrm{x} \circ_{\mathrm{m}} y) = \tilde{f}\mathrm{x} \circ_{\mathrm{m}} \tilde{f}\mathrm{y}$ denklemleri elde edilir. Böylece $\tilde{f}$ w-kategorisinin morfizmidir.

Örnek 5.2.1:

$x, y \in X_1$ için $\delta_0^0 x = a,\ \delta_0^1 x = b,\ \delta_0^0 y = b,\ \delta_0^1 y = c$ olsun.



Şekil 5-b

Bu örnekte $x + y$; a ile c'yi veya $a + b$ *ile* $b + c$'yi birbirine bağlamak için kullanılmıştır. $(x+y, a, c)$ ve $(x+y, a+b, b+c)$ ifadeleri filtreli küpleri belirtir. (Fahrenberg, 2004)

5.3 Minimal Temsil:

Verilen bir n-kübün minimal temsili $\ell x = (x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \ldots, \hat{x}_0) \in C_n X$ aşağıdaki gibi tanımlanır: (Pratt, 2000; Fahrenberg, 2004)

$$\overset{\vee}{x}_k = \sum_{i_1=1}^{k+1} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n-k}=1}^{i_{n-k+1}} \delta_{i_1}^{i_1+n-k} \ldots \delta_{i_{n-k}}^{i_{n-k}+n-k} x \text{ , ve}$$

$$\hat{x}_k = \sum_{i_1=1}^{k+1} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n-k}=1}^{i_{n-k+1}} \delta_{i_1}^{i_1+n\text{-}k+1} \ldots \delta_{i_{n\text{-}k}}^{i_{n\text{-}k}+n\text{-}k+1} x \ .$$

Önerme 5.3.1:

$y_n \in X_n$ olacak şekilde $y = (y_n, \ldots \hat{y}_0) \in C_n X$ verilsin. $y = \ell y_n \circ_{-1} z$ olacak şekilde $z \in C_{n-1} X$ vardır. (Fahrenberg, 2004)

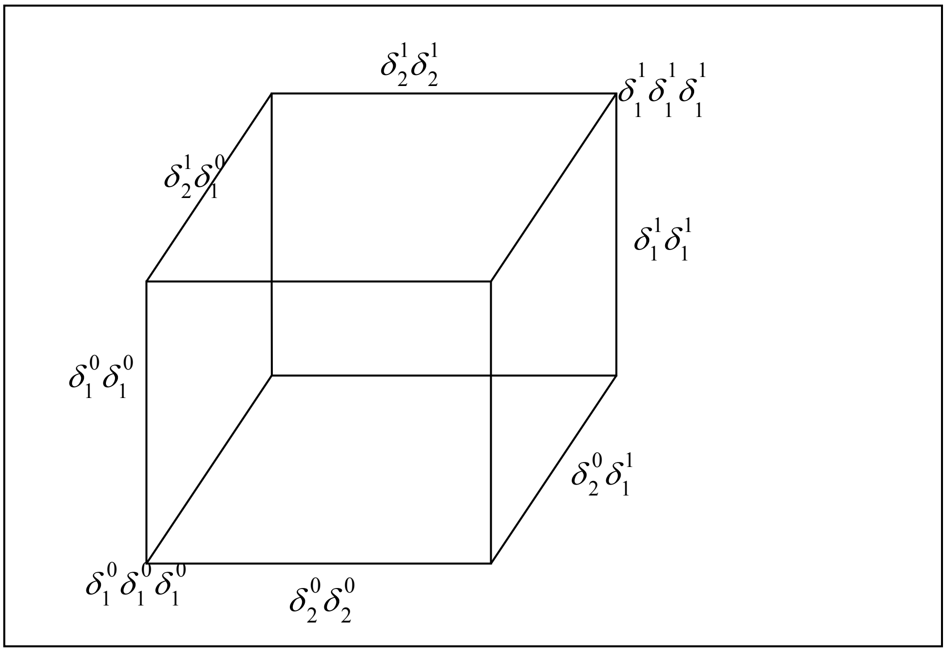
Örnek 5.3.1:

Bir 3-küp $x \in X_3$ için, standart yönlendirmeye göre

$$\ell x = (x, \delta_1^0 x + \delta_2^1 x + \delta_3^0 x,\ \delta_1^1 x + \delta_2^0 x + \delta_3^1 x,\ \delta_1^0 \delta_1^0 x + \delta_2^1 \delta_1^0 x + \delta_2^1 \delta_2^1 x,$$

$$\delta_1^1 \delta_1^1 x + \delta_2^0 \delta_1^1 x + \delta_2^0 \delta_2^0 x,\ \delta_1^0 \delta_1^0 \delta_1^0 x,\ \delta_1^1 \delta_1^1 \delta_1^1 x)$$

3-kübün minimal temsilidir. (Fahrenberg, 2004)



Şekil 5-c

5.4 w-Kategorilerinde Zayıf Homotopi:

Bir yarı kübik kümenin zincir w-kategorisinde 3 adet denklik tanımlayabiliriz. Bunlar; homotopi, zayıf homotopi ve homolojidir. Homotopi zayıf homotopiyi; zayıf homotopi ise homolojiyi gerektirir. Zayıf homotopi genel w-kategorilerine uygulanır.

d^{α} sınır dönüşümleri, e birim dönüşümü ve $\circ_n$ bileşke işlemleri ile bir w-kategorisi $C = \{C_n\}$ verilsin. $\sim_n \subseteq C_n \times C_n$, $n+1$ hücre ile üretilen denklik bağıntısı olsun. "$x R_n y$ iken $x = d^- A, y = d^+ A$ olacak şekilde bir $A \in C_{n+1}$ vardır" şeklinde tanımlanan $\sim_n$ bağıntısı,

R_n bağıntısının simetrik kapanışıdır. (Grandis and Mauri, 2003; Fahrenberg, 2004)

Lemma 5.4.1:

$x \sim_n y \in C_n$ olsun. $d^{\alpha} x = d^{\alpha} y$ ve bazı $m < n$ için $(x, x') \in C_n X \times_m C_n X$ olacak şekilde $x' \sim_n y' \in C_n$ ise $(y, y') \in C_n X \times_m C_n X$ ve $x \circ_m x' \sim_n y \circ_m y'$ olur. (Fahrenberg, 2004)

Tanım 5.4.1:

$D_n = C_n / \sim_n$ ve $d^{\alpha}[x] = d^{\alpha} x, [x] \circ_m [y] = [x \circ_m y]$ olsun, $C_n \to D_n$ bölüm dönüşümleri $e : C_{n-1} \to C_n$ dejenereleri ile bize yeni $e : C_{n-1} \to D_n$ dejenerelerini verir. Her bir $n \in N$ için C'nin n. boyuttaki zayıf homotopisi

$$\tilde{\pi}_n C = \{D_n \underset{e}{\overset{d^{\alpha}}{\rightleftarrows}} C_{n-1} \underset{e}{\overset{d^{\alpha}}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{e}{\overset{d^{\alpha}}{\rightleftarrows}} C_0\}$$

olarak tanımlanır. (Fahrenberg, 2004)

5.5 Yarı Kübik Kümelerde Yönlü Homotopi:

X yarı kübik küme olmak üzere, $CX = \{C_n X\}$ olmak üzere $C_n X$ üzerinde denklik bağıntısı $\sim_n$ olarak tanımlanan zayıf homotopi X ile birlikte zincir w-kategorisidir.

$$R_n \subseteq C_n X \ x \ C_n X;\ x R_n y \Leftrightarrow d^- \ (\ulcorner A \circ_{-1} z) = x, d^+ (\ulcorner A \circ_{-1} z) = y$$

olacak şekilde öyle bir $A \in X_{n+1}$ vardır. Bu değerlere dikkat edilirse

$x = (x_n, ..., \hat{x}_0)$ ve $y = (y_n, ..., \hat{y}_0)$ için $d^\alpha x = d^\alpha y$ olmak üzere

$(A, x_n, y_n, ..., \hat{x}_0) \in C_{n+1} X$ olur.

Şimdi R_n tarafından üretilen denklik bağıntısı $\approx_n \subseteq C_n X \times C_n X$ ile yönlü homotopiyi tanımlarız. Dikkat edilirse $x \approx_n y$ bağıntısı $x \sim_n y$ bağıntısını gerektirir. Bu yüzden yönlü homotopi

$$\tilde{\pi}_n C = \{C_n / \approx_n \ \underset{e}{\overset{d^\alpha}{\rightleftarrows}} \ C_{n-1} \ \underset{e}{\overset{d^\alpha}{\rightleftarrows}} \ ... \ C_0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $X = \{X_n\}$ kübik kümesinde bir yönlü yol $\delta_1^1 x_i = \delta_1^0 x_{i+1}$ $(i = 1, ..., k-1)$ olacak şekilde 1-küpün $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \subseteq X_1$ dizisidir. $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, x ile aynı uzunlukta olan başka bir dipath olsun. Eğer tüm $i \neq j, j+1$ için $x_i = y_i$, $d^- A = x_j + x_{j+1}$ ve $d^+ A = y_j + y_{j+1}$ olacak şekilde $j \in \{1, ..., k-1\}$ ve $A \in X_2$ varsa $x\ ve\ y$ basit dihomotopiktir denir. Kombinatorik dihomotopi bağıntısı basit dihomotopi bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli kapanışıdır. (Fahrenberg, 2004)

Önerme 5.5.1:

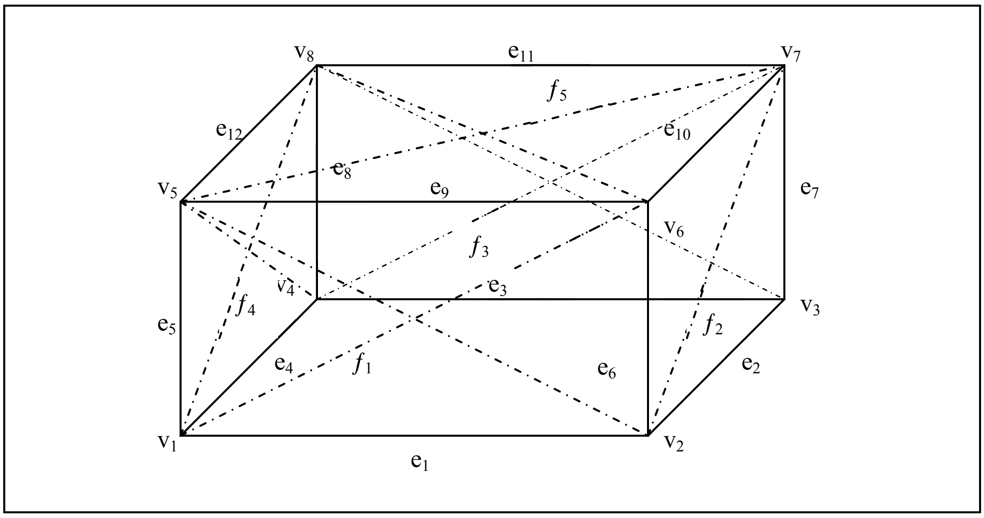
$x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$; X_1 'de yönlü yol olsun.

$\mathcal{C}x = \mathcal{C}x_1 \circ_0 \dots \circ_0 \mathcal{C}x_k ; \mathcal{C}y = \mathcal{C}y_1 \circ_0 \dots \circ_0 \mathcal{C}y_k$ olmak üzere;

x ve y kombinatorik olarak dihomotopiktir $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}x \approx_1 \mathcal{C}y$.

(Fahrenberg, 2004)

Örnek 5.5.1:



Şekil 5-d

$$d^- f_2 = e_6 + e_{10},\ d^+ f_2 = e_2 + e_7 \ ile\ e_1 + e_2 + e_7 \approx_1 e_1 + e_6 + e_{10},$$

$$d^- f_1 = e_5 + e_9,\ d^+ f_1 = e_1 + e_6 \ ile\ e_1 + e_2 + e_7 \approx_1 e_5 + e_9 + e_{10},$$

$$d^- f_5 = e_{11} + e_{12},\ d^+ f_5 = e_9 + e_{10} \ ile\ e_1 + e_2 + e_7 \approx_1 e_5 + e_{12} + e_{11},$$

$$d^- f_4 = e_5 + e_{12},\ d^+ f_4 = e_4 + e_8 \ ile\ e_1 + e_2 + e_7 \approx_1 e_4 + e_8 + e_{11},$$

$$d^- f_3 = e_8 + e_{11},\ d^+ f_3 = e_3 + e_7 \ ile\ e_1 + e_2 + e_7 \approx_1 e_4 + e_3 + e_7.$$

Dikkat edilmelidir ki; $e_1 + e_2 + e_7 \approx_1 e_3 + e_4 + e_7$ bağıntısında e_7 kenarı iptal edilemez. $e_1 + e_2$ ve $e_3 + e_4$ arasında yönlü homotopi yoktur.

5.6 Yarı Kübik Kümelerde Yönlü Homoloji:

Yönlü Homoloji; yarı kübik X kümesinin zincir w-kategorisi üzerindeki zayıf homotopiden daha kaba olan diğer denklikleri sağlar ve daha iyi bir cebirsel yapıya sahiptir.

ZX_n, X_n üzerinde serbest abel grup olsun. Sınır dönüşümleri

$$d^{\alpha} : Z.X_n \to Z.X_{n-1};$$

$d^{\alpha}(\sum \alpha_j x_j) = \sum \alpha_j d^{\alpha} x_j$ ve $C_n X \subseteq \overline{C}_n X$ olacak şekilde

$\overline{C}_n X = \{(x_n, ..., \hat{x}_0) \in Z.X_n x \prod_{i=1}^{n} (N.X_{n-i})^2 \mid \check{x}_{n-1} + d^+ x_n = \hat{x}_{n-1} + d^- x_n,$

$\forall i = 0, ..., n-2 : \check{x}_i + d^+ x_{i+1} = \hat{x}_i + d^- x_{i+1}\}$ olarak tanımlanır. Bu yüzden $x = (x_n, ..., \hat{x}_0) \in \overline{C}_n X$ için, kendisinin kübü x_n'nin negatif bileşenleri vardır fakat tüm sınırları pozitiftir.

$\overline{C}_n X$ üzerindeki d^{α} sınır dönüşümlerini ve $\circ_m$ işlemini $C_n X$ üzerinde tanımladığımız formüllerin aynısı ile ifade edebiliriz. Böylece $\{\overline{C}_n X, C_{n-1} X, ..., C_0 X\}$ kümesi bu dönüşümler ve işlemlerle birlikte n-kategori yapısına sahiptir.

$x, y \in C_n X$ verilsin. Eğer $d^- A = x,\ d^+ A = y$ olacak şekilde $A \in \overline{C}_n X$ varsa $x \cong_n y$ olur. Burada $\cong_n \subseteq C_n X\, x\, C_n X$ olarak tanımlanan denklik bağıntısı yönlü homolojiyi oluşturacak bağıntıdır. (Grandis and Mauri, 2004; Fahrenberg, 2004)

Önerme 5.6.1:

$x, y \in C_n X$ verilsin. $x \sim_n y$ ise $x \cong_n y$ 'dir. (Fahrenberg, 2004)

Lemma 5.6.1:

$x \cong_n y \in C_n X$ olsun. $d^\alpha x = d^\alpha y$ ve bazı $m < n$ için $(x, x') \in C_n X \; x_m C_n X$ olacak şekilde $x' \cong_n y' \in C_n X$ ise $(y, y') \in C_n X \; x_m C_n X$ ve $x \circ_m x' \cong_n y \circ_m y'$ olur. (Fahrenberg, 2004)

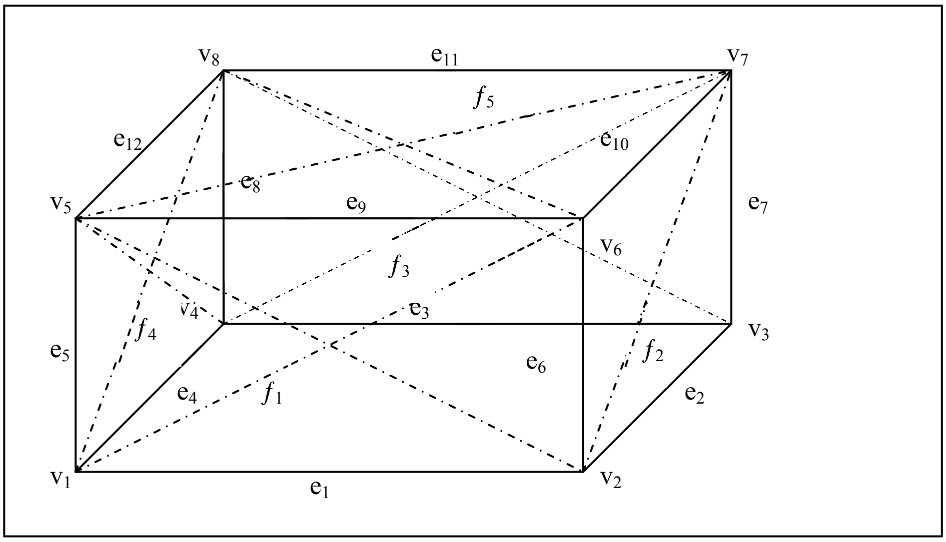
Tanım 5.6.1:

$C_n X / \cong_n$ üzerinde tanımlanan işlem $\circ_m$ ve sınır dönüşümleri d^α 'lar ile birlikte yönlü homoloji

$$H_n X = \{C_n X / \cong_n \underset{e}{\overset{d^\alpha}{\rightleftarrows}} C_{n-1} X \underset{e}{\overset{d^\alpha}{\rightleftarrows}} \dots \underset{e}{\overset{d^\alpha}{\rightleftarrows}} C_0 X\}$$

olarak tanımlanır. (Fahrenberg, 2004)

Örnek 5.6.1:



Şekil 5-e

Bu örnekte $e_1+e_2+e_7$ ve $e_3+e_4+e_7$ arasında yönlü homoloji bulunmaktadır ve 2-hücre $(f_1+f_2-f_3-f_4+f_5,e_3+e_4+e_7,e_1+e_2+e_7,v_1,v_7)$ yönlü homolojiyi belirler. Şekildeki e_7 kenarı iptal edilemez ve böylece yeni 2-hücre $(f_1+f_2-f_3-f_4+f_5,e_3+e_4,e_1+e_2,v_1,v_3)$'ye ulaşılır. Bu nedenle e_1+e_2 ve e_3+e_4 homologtur. (Fahrenberg, 2004)

6. YÖNLÜ KOHOMOLOJİ (EŞHOMOLOJİ)

6.1. Kokübik (Eşkübik) Kümeler ve Morfizmler:

Tanım 6.1.1:

Bir yarı kokübik (eşkübik) küme; $(\delta_i^\alpha)^* : X^{n-1} \to X^n$, $(i = 1,2,...,n; \alpha = 0,1)$ koyüz (eşyüz) dönüşümleriyle birlikte oluşturulan $X = \{X^n\}_{n \in N}$ kümesidir ve $(\delta_i^\alpha)^* : X^{n-1} \to X^n$ dönüşümleri aşağıdaki yarı kokübik aksiyomunu sağlar:

$$(\delta_i^\alpha)^* (\delta_j^\beta)^* = (\delta_{j+1}^\beta)^* (\delta_i^\alpha)^* \qquad (i \le j).$$

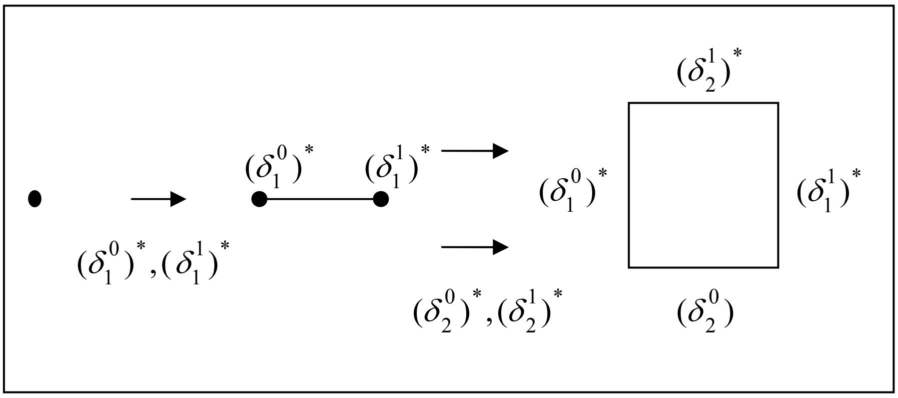
Bir kokübik (eşkübik) küme $(\varepsilon_i)^* : X^{n+1} \to X^n$, $(i = 1,2,...,n)$ kodejenere (eşdejenere) dönüşümleriyle birlikte yarı kokübik kümedir ve $(\varepsilon_i)^* : X^{n+1} \to X^n$ dönüşümleri aşağıdaki aksiyomu sağlar:

$$(\varepsilon_j)^* (\varepsilon_i)^* = (\varepsilon_i)^* (\varepsilon_{j+1})^* \qquad (i \le j)$$

$$(\varepsilon_j)^* (\delta_i^\alpha)^* = \begin{cases} (\delta_i^\alpha)^* (\varepsilon_{j-1})^* & , \quad i < j \\ id & , \quad i = j, j+1 \\ (\delta_{i-1}^\alpha)^* (\varepsilon_j)^* & , \quad i > j+1 \end{cases} .$$

Örnek 6.1.1:

Yarı kokübik kümelerin basit bir örneğini verelim. Koyüz dönüşümleri ile X^0 uzayından başlayarak X^2 uzayını elde edelim.



Şekil 6-a

6.2 Kozincir (Eşzincir) w-Kategorisi:

$X = \{X^n\}$ yarı kokübik küme olsun. $x \in X^n$ için $d_*^-, d_*^+ : X^n \to X^{n+1}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d_*^-(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\delta_k^{(k+1)\bmod 2} \right)^* x \; ; \; d_*^+(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\delta_k^{(k)\bmod 2} \right)^* x \, .$$

d_*^-, d_*^+ fonksiyonları $d_*^- + d_*^+ = d_*$ denklemini gerçekler.

$d_*^-, d_*^+ : X^n \to X^{n+1}$ fonksiyonları yardımı ile NX^{n+1}, X^{n+1} üzerinde serbest abelian monoidi tanımlar. NX^n üzerinde tanımlanan bu kosınır (eşsınır) dönüşümleri $d_*^{\alpha}(\sum \alpha_j x_j) = \sum \alpha_j d_*^{\alpha} x_j$ tarafından genişletilebilir. Bu dönüşümler $d_*^- d_*^+ = d_*^+ d_*^-$ denklemini gerçekler.

Tanım 6.2.1:

Kofiltreli küpler $C^n X$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C^0 X = NX^0,$$

$$C^1 X = \{(x_1, \check{x}_0, \hat{x}_0) \subseteq NX^1 x\ (NX^0)^2 \mid \hat{x}_0 + d_*^-(x_0) = \check{x}_0 + d_*^+(x_0)\},$$

$$C^2 X = \{(x_2, \check{x}_1, \hat{x}_1, \check{x}_0, \hat{x}_0) \subseteq NX^2 x\ (NX^1)^2\ x\ (NX^0)^2 \mid$$
$$\hat{x}_1 + d_*^-(x_1) = \check{x}_1 + d_*^+(x_1)\},$$

$$C^n X = \{(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0) \subseteq NX^n x\ (NX^{n-1})^2\ x\ ...x(NX^0)^2 \mid$$
$$\hat{x}_{n-1} + d_*^-(x_{n-1}) = \check{x}_{n-1} + d_*^+(x_{n-1})\}.$$

Buradan $d_*^-,\ d_*^+ : C^n X \to C^{n+1} X$ ve $e_* : C^n X \to C^{n-1} X$ dönüşümleri,

$$d_*^-(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0) = (x_{n+1}, \check{x}_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0)$$
$$d_*^+(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0) = (x_{n+1}, \hat{x}_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0)$$
$$e_*(x_n, \check{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0) = (x_{n-1}, \check{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, .., \check{x}_0, \hat{x}_0)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümler $d_* = d_*^- + d_*^+\ ve\ e_* d_*^{\alpha} = id$ eşitliklerini sağlar.

Lemma 6.2.1:

$d_*^-,\ d_*^+ : C^n X \to C^{n+1} X$ dönüşümleri,

$$d_*^+ d_*^+ + d_*^- d_*^- = d_*^+ d_*^- + d_*^- d_*^+$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

$(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \in C^{n-1}X$ olsun. Buradan;

$$d_*^-(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) = (x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0)\text{, ve}$$

$$d_*^+(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) = (x_n, \hat{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0).$$

$$\begin{aligned} d_*^+ d_*^-(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) &= d_*^+(x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \\ &= (x_{n+1}, \hat{x}_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0). \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} d_*^- d_*^-(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) &= d_*^-(x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \\ &= (x_{n+1}, \overset{\vee}{x}_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d_*^- d_*^+(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) &= d_*^-(x_n, \hat{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \\ &= (x_{n+1}, \overset{\vee}{x}_n, \hat{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0). \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} d_*^+ d_*^+(x_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) &= d_*^+(x_n, \hat{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \\ &= (x_{n+1}, \hat{x}_n, \hat{x}_{n-1}, \overset{\vee}{x}_{n-2}, \hat{x}_{n-2}, \ldots, \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0). \end{aligned} \tag{4}$$

(1) ve (3)’ teki eşitliklerden;

$$(d_*^+ d_*^- + d_*^- d_*^+)(x_{n-1},...,\check{x}_0,\hat{x}_0) = (x_{n+1},\check{x}_n,\hat{x}_n,\check{x}_{n-1},\hat{x}_{n-1},...,\check{x}_0,\hat{x}_0) \text{ 'dir.}$$

(2) ve (4)'teki eşitliklerden;

$$(d_*^+ d_*^+ + d_*^- d_*^-)(x_{n-1},...,\check{x}_0,\hat{x}_0) = (x_{n+1},\check{x}_n,\hat{x}_n,\check{x}_{n-1},\hat{x}_{n-1},...,\check{x}_0,\hat{x}_0) \text{ 'dir.}$$

Böylece; istenilen sonuç elde edilmiş olur. □

Tanım 6.2.2:

$C^* X = \{\overline{C^n X}\}$ kümesi kofiltreli (eşfiltreli) küplerle sınıflandırılan kümedir. $m < n \in N$ olmak üzere;

$C^n X \times_m C^n X = \{(x,y) \in C^n X \times C^n X \mid (d_*^+)^{n-m} x = (d_*^-)^{n-m} y\}$ olsun.

Burada;

$$(x,y) = ((x_n,...,\check{x}_m,\hat{x}_m,..,\check{x}_0,\hat{x}_0),(y_n,...,\check{y}_m,\hat{y}_m,..,\check{y}_0,\hat{y}_0)) \in C^n X \times_m C^n X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_i = y_i & ; \quad i = 2n-m \\ \hat{x}_i = \check{y}_i & ; \quad n \le i < 2n-m \\ \check{x}_i = \check{y}_i \ ve \ \hat{x}_i = \hat{y}_i & ; \quad 0 \le i \le n-1 \end{cases} \quad \text{olur.}$$

- $\lozenge_m : C^n X \times_m C^n X \to C^n X$ işlemi,

  $(x_n,..,\check{x}_m,\hat{x}_m,..,\check{x}_0,\hat{x}_0) \lozenge_m (y_n,..,\check{y}_m,\hat{y}_m,..,\check{y}_0,\hat{y}_0) =$

  $(x_n + y_n,\check{x}_{n-1},\hat{x}_{n-1},\check{x}_{n-2},\hat{x}_{n-2},..,\check{x}_0,\hat{x}_0)$ şeklinde tanımlanır.

$\Diamond_m$ işlemi ve d_*^-, d_*^+, e_* dönüşümleriyle birlikte $C^* X$ bir w-kategoridir.

Herhangi bir $z \in C^n X$ için,

$$e_*^{n-m}((d_*^-)^{n-m} z) \Diamond_m z = z \Diamond_m e_*^{n-m}((d_*^+)^{n-m} z) = z .$$

- $(y, z) \in C^n X \times_m C^n X$ ise

$$(x \Diamond_m y) \Diamond_m z = x \Diamond_m (y \Diamond_m z) .$$

- $p < n$ için $(x, x'), (y, y') \in C^n X \times_p C^n X$ olacak şekilde $(x', y') \in C^n X \times_m C^n X$ ise

$$(x \Diamond_m y) \Diamond_p (x' \Diamond_m y') = (x \Diamond_p x') \Diamond_m (y \Diamond_p y') .$$

$\Diamond_m$ işlemine ek olarak $0 \leq \mathrm{m} < \mathrm{n}$ için, $\forall (x, y) \in C^n X \times_m C^n X$ olmak üzere $\Diamond_{-1}$ işlemi,

$$\Diamond_{-1} : C^n X \times_m C^n X \to C^n X$$

$$(x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \Diamond_{-1} (y_n, \overset{\vee}{y}_{n-1}, \hat{y}_{n-1}, .., \overset{\vee}{y}_0, \hat{y}_0) =$$

$(x_n + y_n, \overset{\vee}{x}_{n-1} + \overset{\vee}{y}_{n-1}, \hat{x}_{n-1} + \hat{y}_{n-1}, ..., \overset{\vee}{x}_0 + \overset{\vee}{y}_0, \hat{x}_0 + \hat{y}_0)$ şeklinde tanımlanır.

Not: Bu işlemlerle birlikte $C^* X$ monoidal w-kategoridir. O halde yarı kokübik kategoriden wCat kategorisine bir funktor tanımlanabilir.

$f^* : X \to Y$ yarı kokübik morfizmi olsun. Bu f^* fonksiyonu $f^* (\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i f^* (x_i)$ tanımıyla $NX^n \to NY^n$ olarak genişletilebilir ve böylece; $\widetilde{f}^{*}(x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) = (f^{*}x_n, ..., f^{*}\hat{x}_0)$ olacak şekilde $\widetilde{f}^{*}: C^{*}X \to C^{*}Y$ dönüşümü tanımlanır. Bu dönüşüm wCat'ın morfizmidir.

6.3 Yarı Kokübik Kümelerin Yönlü Kohomolojisi (Eş homoloji)

Yönlü kohomoloji (eşhomoloji); yarı kokübik X kümesinin kozincir w-kategorisi üzerinde cebirsel yapı tanımlar.

ZX^{n}; X^{n} üzerinde serbest abelian grup tanımlar. Kosınır (eşsınır) dönüşümleri $d_{*}^{\alpha}: ZX^{n} \to ZX^{n+1}$;

$d_{*}^{\alpha}(\sum \alpha_j x_j) = \sum \alpha_j d_{*}^{\alpha}(x_j)$ ve $C^{n}X \subseteq \overline{C^{n}X}$ olacak şekilde

$\overline{C^{n}X} = \{(x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \in ZX^{n} x \prod_{i=1}^{n} (NX^{n-i})^{2} \mid \overset{\vee}{x}_{n-1} + d_{*}^{+}(x_{n-1}) =$ $\hat{x}_{n-1} + d_{*}^{-}(x_{n-1})\}$ olarak tanımlanır. Bu yüzden

$x = (x_n, \overset{\vee}{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-1}, .., \overset{\vee}{x}_0, \hat{x}_0) \in \overline{C^{n}X}$ için negatif bileşenler vardır fakat tüm kosınırlar (eşsınır) pozitiftir.

$\overline{C^{n}X}$ üzerinde d_{*}^{α} kosınır dönüşümlerini ve $C^{n}X$ üzerinde $\lozenge_m$ işlemini tanımladık. Böylece $\{\overline{C^{n}X}, C^{n-1}X, ..., C^{0}X\}$ kümesi bu dönüşümler ve işlemlerle birlikte n^{op}-kategori yapısına sahiptir.

$(x,y) \in C^n X \times C^n X$ verilsin. Eğer $d_*^- A = x,\ d_*^+ A = y$ olacak şekilde $A \in \overline{C^{n-1} X}$ varsa $x \overset{*}{\underset{n}{\cong}} y$ olur. Burada $\overset{*}{\underset{n}{\cong}} \subseteq C^n X \times C^n X$ olarak tanımlanan denklik bağıntısı yönlü kohomolojiyi oluşturacak bağıntıdır.

Tanım 6.3.1:

$C^n X / \overset{*}{\underset{n}{\cong}}$ üzerinde tanımlı işlem $\Diamond_m$ ve sınır dönüşümleri d_*^α ile birlikte yönlü kohomoloji

$$H^n X = \{C^n X / \overset{*}{\underset{n}{\cong}} \overset{d_*^\alpha}{\underset{e_*}{\leftleftarrows\!\!\!\rightarrow}} C^{n-1} X \ldots \overset{d_*^\alpha}{\underset{e_*}{\leftleftarrows\!\!\!\rightarrow}} C^0 X\ \}$$

olarak tanımlanır.

7. SONUÇ

Bu tezde cebirsel topolojinin temel kavramları olan homotopi ve homoloji kavramlarına yön unsuru ilave edilerek yönlü topoloji, yönlü homotopi, yönlü homoloji, po-uzayları, yarı kübik küme kavramı, filtreli küpler tanımlanarak; yarı kokübik (eşkübik) kümeler ve kofiltreli (eş filtreli) küpler yardımıyla yönlü kohomoloji (eşhomoloji) kavramı oluşturulmuştur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bubenik, P., 2004, Context For Models of Concurrency. In Prelimary Proceedings of Workshop on Geometry and Topology in Concurrency and Distributed Computing GETCO, volume NS-04- 2 of BRICKS Notes, Pages 33–49. BRICKS, Amsterdam, The Netherlands.

Bubenik, P., Worytkiewicz, K., 2006, A model category structure for local po-spaces, Homology, Homotopy Aplly., 8, no.1, 263-292.

Fahrenberg, U., Leth J., 2002, Geometry and Topology. The Faculty Of Engineering and Science, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University.

Fahrenberg, U., 2004, Directed Homology. In proceedings GETCO-CMCIMò, volume 100 of electronic notes in Theoretical Computer Science Use, 111-125.

Fahrenberg, U., 2005, A category of Higher- Dimensional Automata. Foundations of software science and computation structures, 187-201. Lecture notes in Comput. Sci., 3441, Springer, Berlin.

Fajstrup, L., Goubault, E. and Raussen, M., 1998, Detecting Deadlocks in Concurrent Systems. CONCUR'98: Concurrency Theory (nice), 332- 347. Lecture notes in Comput. Sci., 1466, Springer, Berlin.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Fajstrup, L., 2000, Loops, ditopology and Deadlocks. Math. Structures Comput. Sci. 10, no.4, 456- 480.

Fajstrup, L., Raussen, M., Goubault, E., Haucourt, E., 2004, Components of the fundemental category. Appl. Categ. Structures, 12, no.1, 81- 108.

Fajstrup, L., Goubault, E., Raussen, M., 2006, Algebraic Topology and Concurrency. Theoret. Comput. Sci., 357, no.1- 3, 241 - 278.

Grandis, M., 2002 Directed Homotopy Theory II., Theory Appl. Categ., 10, no.14, 369- 391.

Grandis, M., 2003, Directed Homotopy Theory I., Cah. Topol. Géom. Differ. Catég., 44, no.4, 281- 316.

Grandis, M., Mauri, L., 2003, Cubical Sets and Their site., Theory and Applications of Categories, 11, no.8, 185- 211.

Massey, W. S., 1980, Singular Homology Theory, Graduate Texts in Mathematics70. Springer- Verlag, New York- Berlin, xii+265pp. ISBN: 0- 387- 90456- 5.

Pratt, V., 2000, Higher Dimensional Automata Revisited., Math. Struct. in Comp. Science, 10, no.4, 525- 548.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Raussen, M., 2000, On The Classification of Dipaths in Geometric Models for Concurrency. Math. Structures Comput. Sci. 10, no.4, 427- 457.

Raussen, M., 2003, State Space and Dipaths up to Dihomotopy., Homology Homotopy Appl., 5, no.2, 257- 280.

ÖZGEÇMİŞ

04.07.1983 yılında Çanakkale'nin Biga ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Manyas'ta, ortaokul ve lise öğrenimini ise Bandırma'da tamamladı. 2000 yılında öğrenimine başladığı Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Teorik Ağırlıklı Matematik lisans öğretim programından 2005 yılında birincilikle mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Topoloji Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda Yaşar Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.