

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİNCİ DERECE AKIŞKAN İLE POWER-LAW AKIŞKANINI
BİRLEŞTİREN YENİ BİR NON-NEWTONIAN
AKIŞKAN İÇİN ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makine Mühendisi Yiğit AKSOY

Anabilim Dalı : Makine Mühendisliği

Programı : Makine Dinamiği ve Teorisi

MANİSA 2007

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİNCİ DERECE AKIŞKAN İLE POWER-LAW AKIŞKANINI
BİRLEŞTİREN YENİ BİR NON-NEWTONIAN
AKIŞKAN İÇİN ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makine Mühendisi Yiğit AKSOY

Anabilim Dalı : Makine Mühendisliği

Programı : Makine Dinamiği ve Teorisi

MANİSA 2007

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİNCİ DERECE AKIŞKAN İLE POWER-LAW AKIŞKANINI
BİRLEŞTİREN YENİ BİR NON-NEWTONIAN
AKIŞKAN İÇİN ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makine Mühendisi Yiğit AKSOY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04.07.2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 23.07.2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ

Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Erdoğan ÖZKAYA

Prof.Dr. Bekir SOLMAZ

MANİSA 2007

İÇİNDEKİLER	SAYFA NO
SEMBOL LİSTESİ	II
ŞEKİL LİSTESİ	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
ABSTRACT	VII
1. GİRİŞ	1
1.1 Genel Bilgiler ve Yapılmış Çalışmalar	1
1.2 Çalışmanın Kapsamı	2
2. DEĞİŞİK AKIŞKAN MODELLERİ	4
2.1 Newtonyen Akışkan Modeli	4
2.2 Non-Newtonian Akışkan Modelleri	5
3. HAREKET DENKLEMLERİ	7
3.1. Tensörel Formda Hareket Denklemi	7
3.2. Kartezyen Koordinat Sistemine göre Hareket Denklemi	11
4. SINIR TABAKASI DENKLEMLERİ	17
5. BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ	27
5.1. Ölçekleme Dönüşümü	27
5.2. Durgun Bir Akışkan İçerisinde Gerdirilmiş Yüzey Problemi	33
6. NÜMERİK ÇÖZÜMLER	36
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	63
8. KAYNAKLAR	65
9. EK: Sonlu Farklar Metodunu Kullanan Program	68

SEMBOL LİSTESİ

\mathbf{t}	Gerilme tensörü
\mathbf{v}^*	Hız vektörü
\mathbf{b}	Birim kütle başına düşen dış kuvveti
ρ	yoğunluk
$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$	ivme
\mathbf{I}	Birim matris
p^*	Basınç
μ	Viskozite katsayısı
α_1, α_2	Gerilme Modülleri
$\mathbf{A}_1^*, \mathbf{A}_2^*$	İlk iki Rivlin-Ericksen tensörü
Π	$\left(\frac{1}{2} tr \mathbf{A}_1^{*2} \right)$
m	Power-law akışkan sabiti
ω^*	Hızın rotasyoneli
\mathbf{q}	Boyutsuz hız
p	Boyutsuz basınç
L	Karakteristik uzunluk
U	Karakteristik hız
Re	Reynolds sayısı
ε	μ ile ilgili boyutsuz parametre
ε_1	α_1 ile ilgili boyutsuz parametre
ε_2	α_2 ile ilgili boyutsuz parametre
$grad$	Gradyan operatörü
div	Diverjans operatörü

∇	Gradyen operatörü
∇^2	Laplasyen
x	Sınır tabakası boyunca mekan koordinatı
y	Sınır tabakası boyunca dik mekan koordinatı
u	Hızın x bileşeni
v	Hızın y bileşeni
k_1	ε_1 ile ilgili boyutsuz non-Newtonyen katsayı
k_2	ε_2 ile ilgili boyutsuz non-Newtonyen katsayı
β	Sınır tabakası dış açılımında kullanılan parametre
δ	Sınır tabakası kalınlığı
Y	Sınır tabakası içerisinde genişletilmiş düşey koordinat
u^o	x yönündeki hızın dış açılım terimi
v^o	y yönündeki hızın dış açılım terimi
p^o	Basıncın dış açılım terimi
u^i	x yönündeki hızın iç açılım terimi
v^i	y yönündeki hızın iç açılım terimi
p^i	Basıncın dış açılım terimi
\bar{p}	Basınç fonksiyonu
U	Sonsuzda x yönündeki hız / Dış akım terimi
a,b,c,d,e	Ölçekleme dönüşüm parametreleri
ξ	Benzerlik değişkeni
$f(Y)$	Benzerlik fonksiyonu
$g(Y)$	Benzerlik fonksiyonu
h	İntegral sabiti

ŞEKİL LİSTESİ

SAYFA NO

Şekil 2.1	İki sonsuz plaka arasında durgun akışkan	4
Şekil 2.2	Biri hareketli sonsuz uzunlukta paralel iki plaka arasındaki akışkan	5
Şekil 4.1	Üniform akış içine daldırılmış yatay plaka	17
Şekil 5.1	Durgun bir akışkan içerisinde gerdirilmiş plaka	35
Şekil 6.1	Değişik $m > 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)	39
Şekil 6.2	Değişik $m > 0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)	40
Şekil 6.3	Değişik $m > 0$ değerleri için f' fonksiyonu ($k_1=1$)	41
Şekil 6.4	Değişik $m > 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)	42
Şekil 6.5	Değişik $m > 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)	43
Şekil 6.6	Değişik $m > 0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)	44
Şekil 6.7	Değişik $m > 0$ değerleri için f' fonksiyonu ($k_1=1$)	45
Şekil 6.8	Değişik $m > 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)	46
Şekil 6.9	Değişik $m < 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)	47
Şekil 6.10	Değişik $m < 0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)	48
Şekil 6.11	Değişik $m < 0$ değerleri için f' fonksiyonu ($k_1=1$)	49
Şekil 6.12	Değişik $m < 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)	50
Şekil 6.13	Değişik $m < 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)	51
Şekil 6.14	Değişik $m < 0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)	52
Şekil 6.15	Değişik $m < 0$ değerleri için f' fonksiyonu ($k_1=1$)	53
Şekil 6.16	Değişik $m < 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)	54
Şekil 6.17	Değişik k değerleri için f fonksiyonu ($m= 0.1$)	55
Şekil 6.18	Değişik k değerleri için g fonksiyonu ($m= 0.1$)	56
Şekil 6.19	Değişik k değerleri için f' fonksiyonu ($m= 0.1$)	57
Şekil 6.20	Değişik k değerleri için f'' fonksiyonu ($m= 0.1$)	58
Şekil 6.21	Değişik k değerleri için f fonksiyonu ($m= -0.1$)	59
Şekil 6.22	Değişik k değerleri için g fonksiyonu ($m= -0.1$)	60
Şekil 6.23	Değişik k değerleri için f' fonksiyonu ($m= -0.1$)	61
Şekil 6.24	Değişik k değerleri için f'' fonksiyonu ($m= -0.1$)	62

TEŞEKKÜR

İlk olarak beni bugünlere getiren aileme teşekkür etmek isterim. Hayatımın her alanında kendisini örnek aldığım, en zor durumlarımda bana destek olan saygıdeğer hocam Makine Mühendisliği Bölüm Başkanı Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ'ye, teşekkür ve őükranlarımı sunarım.

ÖZET

Genelleştirilmiş ikinci derece bir Newtonyen olmayan akışkan modeli ele alındı. Model, elastik etkilerden başka incelen veya kabaran akışkan davranışlarını sergileyen power-law ve ikinci derece akışkanların birleşimidir. Hareket denklemleri iki boyutlu sıkıştırılmaz akışlar için çıkarılmıştır. Sınır tabakası denklemleri hareket denklemlerinden elde edilmiştir. Özel bir tip ölçekleme dönüşümü ile sınır tabakası denklemleri gerdirilmiş plaka problemi için adi diferansiyel denklem formuna dönüştürülmüştür. Adi diferansiyel denklemler nümerik olarak integre edilmiş, kabaran ve incelen akışkanlara karşılık gelen durumlar ikinci derece akışkanlar ile ayrı ayrı karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş İkinci Derece Akışkan, Sınır Tabakası, Gerdirilmiş Plaka, Benzerlik Dönüşümleri

ABSTRACT

A generalized second grade non-Newtonian fluid model is considered. The model is a combination of power-law and second grade fluids in which the fluid may exhibit normal stresses, shear thinning or shear thickening behaviors. The equations of motion are derived for two dimensional incompressible flows. The boundary layer equations are derived from the equations. Using a special type of scaling transformation, the boundary layer equations are transformed to ordinary differential equations for the stretching sheet problem. The ordinary differential equations are numerically integrated. Shear thickening and shear thinning cases are separately contrasted with the usual second grade fluid solutions.

Keywords: Generalized Second Grade Fluid, Boundary Layers, Stretching Sheet, Similarity Transformation

1. GİRİŞ

1.1 Genel Bilgiler ve Yapılmış Çalışmalar

Fiziksel anlamda, akışkan, maddenin sıvı ve gaz fazlarına verilen genel bir isimdir. Akışkanların modellenmesi değişik şekillerde olabilir. En temel ayırım akışkanın Newtonyen veya Newtonyen olmayan (bundan sonra non-Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılacaktır) modeller yardımıyla modellenmesidir. Genel anlamda gazlar ve su, benzen, etanol gibi düşük moleküler ağırlığa sahip sıvılar Newtonyen olarak modellenirken pratikte oldukça fazla örneğine rastladığımız yüksek moleküler ağırlığa sahip akışkanlar (Bal, hamur, mayonez, bitkisel yağlar, boya, eriyik polimerler, vücuttaki mukus sıvısı, kan vb.) non-Newtonyen modeller ile modellenirler. Uygulamada oldukça sık kullanılan non-Newtonyen akışkanların başında power-law akışkan modeli gelmektedir. Bölüm 2 de ifade edileceği gibi bu akışkanlarda viskozite, power-law index olarak tanımlanan üstel bir parametre içermektedir. Power Law akışkan modelleri kullanılarak incelenen (shear thinning) ve kabaran (shear thickening) akışkanlar doğru olarak modellenmektedir ancak bu modeller elastik özellikler içeren bazı akışkan tiplerinde akışkanı tam olarak modelleyememektedir. Mile tırmanma ve sifon etkisi gibi bazı fiziksel olaylar elastik özellikler içeren akışkanlarda meydana gelen durumlara örnektir. Bu tip az rastlanan olayların modellenmesi oldukça ilginç çalışmaları beraberinde getirmiştir. Bu çalışmalardan başlıcaları Reiner [1], Rivlin [2], Oldroyd [3] ve Noll [4] tarafından yapılan çalışmalardır. Bahsedilen tipteki akışkan modellerinin en önemlileri Coleman-Noll, Rivlin-Ericksen, Green-Rivlin ve Oldroyd modelleridir (Detaylı bilgi için bkz. [5] ve [6]). Bahsedilen modellerden Rivlin-Ericksen modelinin özel bir türü olan, diğer bir adıyla ikinci derece akışkan modeli, Newtonyen özellikteki viskozite ve elastik etkileri içerse de kabaran ve incelen akışkanları temsil etmekte yetersiz kalmaktadır. Bu akışkan modelinin eksikliğini kapatmak için Man ve Sun, ortaya attıkları yeni modelde, teorik olarak ele alınan ve ifade edilen ikinci derece akışkanları deneylerle ifade edilen power-law tipindeki akışkanlar ile birleştirmek için uğraşmışlardır. Bu çalışmalar ışığında bahsedilen modellerin buzulbilimde uygulamasını bulmuşlardır ([7] ve [8]). Çalışmalarında “genelleştirilmiş 2. derece akışkan” veya “ikinci derece power-law akışkanı” olarak farklı iki model önermişlerdir. Bu modellerde, ikinci derece akışkan ile power-law tipindeki akışkanlar birleştirilmiştir.

Bu konu ile ilgili yapılmış çalışmalara bakalım; Man ve Sun [7] tarafından, modelin buzulbilimde uygulaması önerilmiştir. Ardından Man [8] tarafından aynı modelin kararsız

kanal akışının varlık ve teklik durumları ve asimptotik stabilite çözümleri incelenmiştir. Franchi ve Straughan [9] tarafından sıcaklıkla doğrusal olarak değişen özel bir viskozite fonksiyonu olan bir akışkanın stabilite analizi yapılmıştır. Gupta ve Massoudi [10] bu akışkan modelini ısıtılmış plakalar arasındaki akış için incelemiştir. Massoudi ve Phuoc [11] viskozitenin sıcaklığa bağlı olduğu aynı akışkanın ısıtılmış eğik plakalar arasındaki akışını incelemiştir. Yine Massoudi ve Phuoc [12] tarafından yapılan bir diğer çalışmada Reynolds sıcaklık modelli viskoziteye sahip akışkanın boru içinde akışı incelenmiştir. Hayat ve Khan [13] akışkanın gözenekli plaka üzerindeki akışını incelemiştir. İkinci derece [14] ve üçüncü derece [15] akışkanlar için ise detaylı termodinamik ve stabilite analizleri yapılmıştır. Dunn ve Rajagopal [16] burada ele alınan tipteki bir akışkanı da içeren diferansiyel tipteki akışkanlar için önemli incelemeler ve termodinamik analizler yapmışlardır. M. Massoudi ve A. Vaidya [17] tarafından en genel ikinci derece akışkanlar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

Bu çalışmada çıkarılan hareket denklemleri her ne kadar birçok akış problemine uygulanabilirse de bu çalışmada gerdirilmiş yüzey / hareketli plaka problemi teknolojik öneminden dolayı ele alınmıştır. Bu problemin ekstrüzyon işlemleri, aktarma bantları, polimer endüstrisinde uygulamaları vardır.

Mcleod ve Rajagopal [18] çalışmasında gerdirilmiş plakadan dolayı oluşan ikinci derece akışkanın hareketi ve Navier-Stokes çözümlerinin teklik durumlarını incelenmiştir. Rajagopal ve diğerleri [19] gerdirilmiş plaka üzerindeki ikinci derece akışkana yaklaşık bir çözüm önermişlerdir. Troy ve diğerleri [20] klasik ikinci derece akışkanın tek parametreye bağlı çözümler ailesini bulmuşlardır. Vajravelu ve Rollins [21] aynı problemin ısı transferli durumunu incelemiştir.

1.2 Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada genelleştirilmiş ikinci derece akışkan için sınır tabakası problemi incelenmiştir. Bölüm 2' de non-Newtonyen akışkanlar ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bölüm 3' de ise genelleştirilmiş ikinci derece akışkan için bünye denklemi [7] ve [8] çalışmalarına paralel şekilde ele alınmıştır. Ardından kartezyen koordinatlar için kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen hareket denklemleri çıkarılmıştır.

Bölüm 4' de genelleştirilmiş ikinci derece akışkan için kısmi diferansiyel formdaki sınır tabakası denklemleri [22-24] referanslarında verilen sistematik kullanılarak çıkarılmıştır.

Bölüm 5' de kısmi diferansiyel yapısında olan sınır tabakası denklemleri Lie Grubu Dönüşümlerinden biri olan Ölçekleme Dönüşümü kullanılarak hem klasik sınır tabakası hem de gerdirilmiş yüzey üzerindeki sınır tabakası için adi diferansiyel forma dönüştürülmüştür. Bu dönüşümün sınır şartlarını da problemsiz bir şekilde dönüştürdüğü gösterilmiştir. Lie Grup Teorisi ile ilgili daha detaylı bilgi Bluman ve Kumei [25] ve Stephani [26] kaynaklarından bulunabilir.

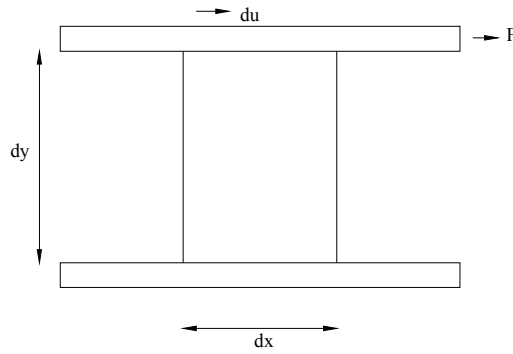
Bölüm 6' da önceki bölümde elde edilen adi diferansiyel forma dönüştürülmüş sınır tabakası denklemlerine sayısal yöntemler uygulanmış, m ile gösterilen farklı power-law sabitlerine ve k_1 ile gösterilen ikinci derece etkilere ait grafikler çizilmiştir. Burada m sabitinin sıfırdan küçük değerleri incelen akışkanları (shear thinning) sıfırdan büyük değerleri ise kabaran akışkanları (shear thickening) temsil etmektedir.

2. DEĞİŞİK AKIŞKAN MODELLERİ

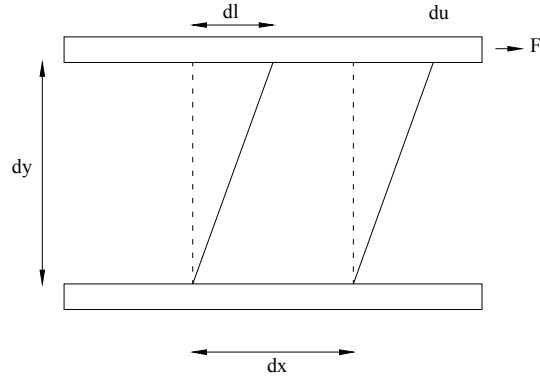
Bilim adamları doğa olaylarını yüzyıllardır anlamaya çalışmaktadırlar. Akışkan hareketleri belki de doğadaki en karmaşık olaylarından birisidir. Bu yüzden Newton' dan beri çok değişik akışkan modelleri çıkarılmaktadır. Akışkan hareketini Newton' un çıkardığı denklemler açıklasa da bazı durumlarda bu denklemler yetersiz kalmaktadır. Bu yüzden akışkanlar en genel olarak Newtonyen ve non-Newtonyen olmak üzere iki sınıfa ayrılmışlardır.

2.1 Newtonyen Akışkan Modeli

Newtonyen yaklaşımla ifade edilemeyen akışkanların Newtonyen olmayan akışkanlar (non-Newtonyen akışkanlar) olarak adlandırıldığından Bölüm 1 'de bahsedilmişti. Non-Newtonyen akışkanların Newtonyen akışkanlardan temel farkı, kayma gerilmesi ile hız gradyanı yani hızın konuma bağlı olarak değişimi arasında doğrusal olmayan (nonlineer) bir ilişki olmasıdır. Bir başka deyişle, Newtonyen akışkanlarda viskozite olarak adlandırılan ve kayma gerilmesi ile hız gradyanı arasındaki orantı katsayısı olarak tanımlanan ifade sabitken non-Newtonyen akışkanda değişkendir. x-y düzleminde hareket eden bir Newtonyen akışkan için kayma gerilmesi ifadesini yazmak için şekil 2.1' de gösterilen, aralarında dy mesafesi olan sonsuz iki plakayı ele alalım. Burada üst plaka bir F kuvvetiyle çekilsin ve du ile gösterilen bir hızı olsun.



Şekil 2.1 İki Sonsuz Plaka Arasında Durgun Akışkan



Şekil 2.2 Biri Hareketli Sonsuz Uzunlukta Paralel İki Plaka Arasındaki Akışkan

Bu durumda kayma gerilmesi ,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

ifadesiyle gösterilir. Burada du/dy terimi hız gradyanıdır. μ terimi akışkanın viskozitesi olarak tanımlanır. Viskozite, akışkana bir kuvvet uygulandığında yapacağı davranış hakkında bilgi verir. Görüldüğü üzere Newtonyen akışkanlar için kayma gerilmesi ile hız gradyanı arasında doğrusal ilişki vardır. Ancak inceleyeceğimiz Non-Newtonyen akışkanlarda durum böyle değildir. Lineer bir ilişkiden söz edilemez.

2.2 Non-Newtonyen Akışkan Modelleri

Non-Newtonyen akışkanlar, şekil değiştirme-kuvvet ilişkisiyle uğraşan Reoloji bilim dalının altında incelenir. Akışkan davranışı şekil değiştirme, kuvvet ve/veya zaman ilişkileri bağlamında ele alınır. Newtonen akışkanlar için gösterilen kayma gerilmesi ifadesi tektir ancak non-Newtonyen akışkanlarda kayma gerilmesi ile ilgili bir çok model ortaya atılmıştır. Her bir modelin karşıladığı uygun fiziksel durumlar mevcuttur. Non-Newtonyen modellerden bazıları şöyledir:

Power-Law Modeli

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^m \quad (2.2)$$

Hershell-Bulkley Modeli
$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^m \quad (2.3)$$

Prandtl Modeli
$$\tau_{yx} = A \sin^{-1} \left(\frac{du / dy}{c} \right) \quad (2.4)$$

Powell- Eyring Modeli
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{1}{B} \sinh^{-1} \left(\frac{du / dy}{c} \right) \quad (2.5)$$

Williamson Modeli
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{A \, du / dy}{B + du / dy} \quad (2.6)$$

Yukarıda tanımlanan akışkan modellerine ek olarak viskoelastik yapıdaki akışkanları da ekleyebiliriz. Reolojik tanımlamada viskoelastik malzeme hem viskoz hem elastik davranış gösteren malzemeler olarak sınıflanır. Yukarıdaki viskozite modellerine ek olarak elastik akışkanlarda akış düzleminde farklı düzlemlerde de kuvvetler oluşacağından gerilmeleri tek boyutta belirtmek yeterli değildir. Bu çalışmada kullanılacak 2. derece akışkan modeli bu tanıma girmektedir. Bu yüzden Bölüm 3' de hareket denklemleri çıkarılırken modele ilişkin daha ayrıntılı bilgiler verilecektir.

3. HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde önce genel bünye denklemi ve bu tensör için hareket denklemleri yazılacaktır. Hareket denklemleri vektörel formdadır. Daha sonra bu denklemler boyutsuz vektörel formda ifade edilecektir. Boyutsuz vektörel denklemlerden kartezyen koordinatlar için iki boyutlu hareket denklemleri çıkarılacaktır.

3.1 Tensörel Formda Hareket Denklemi

Bu bölümde genelleştirilmiş ikinci derece bir akışkanın hareket denklemleri vektörel olarak çıkarılacaktır. Hareket denklemleri boyutsuz formda ifade edilecek ve boyutsuz parametreler tanımlanacaktır.

Hareket denklemleri tensörel formda aşağıdaki gibi yazılır,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \rho \mathbf{b}^* + \text{div} \mathbf{t}^* \quad (3.1)$$

Burada \mathbf{t}^* gerilme tensörü, \mathbf{b}^* birim kütle başına düşen dış kuvvet, ρ yoğunluk, \mathbf{v}^* hız vektörü ve $\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*}$ ivmedir. Sıkıştırılamaz akışkan kabulü yapılırsa

$$\text{div} \mathbf{v}^* = 0 \quad (3.2)$$

ifadesi yazılır. Genelleştirilmiş ikinci derece bir akışkan için bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu\Pi^{m/2} \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2} \quad (3.3)$$

$$\Pi = \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right) \quad (3.4)$$

şeklinde verilir. Burada p basınç, μ viskozite katsayısı, α_1 , α_2 sıcaklığa bağlı olabilen gerilme modülleri, m power-law akışkan sabitidir. $m < 0$ incelen akışkanları, $m > 0$ kabaran

akışkanları temsil eder , \mathbf{A}_1^* ve \mathbf{A}_2^* ilk iki Rivlin-Ericksen tensörüdür. Bu tensörler aşağıdaki gibidir,

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}_2 = \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_1 \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_1 = (\mathbf{A}_1)_t + (\mathit{grad} \mathbf{A}_1) \mathbf{v} \quad (3.7)$$

İfadelerde $\mathbf{L} = \mathit{grad} \mathbf{v}$ olarak tanımlanır. Denklem (3.3)' ün diverjansı alınırsa

$$\mathit{div} \mathbf{t}^* = -\mathit{grad} p^* + \mu \mathit{div} \left(\frac{1}{2} \mathit{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2} \mathbf{A}_1^* + \mu \left(\frac{1}{2} \mathit{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2} \mathit{div} \mathbf{A}_1^* + \mathit{div} (\alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2}) \quad (3.8)$$

elde edilir.

$$\mathit{div} \left(\frac{1}{2} \mathit{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2} = \mathit{grad} \left(\frac{1}{2} \left| \mathbf{A}_1^* \right|^2 \right)^{m/2} \quad (3.9)$$

$$\mathit{div} \mathbf{A}_1^* = \nabla^{*2} \mathbf{v} \quad (3.10)$$

Ayrıca tensörel formdaki hareket denkleminin ivme terimi vektörel olarak

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \mathbf{v}^*_t + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* + \mathit{grad} \left| \mathbf{v}^* \right|^2 / 2 \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır. Burada \mathbf{v}^*_t hızın zamana göre türevi, $\boldsymbol{\omega}^* = \mathit{curl} \mathbf{v}^*$ 'dir. Zamandan bağımsız daimi akış için $\mathbf{v}^*_t = 0$ ve $(\mathbf{A}_1)_t = 0$ olur.

(3.8-11) bağıntıları gözönüne alınır ve $\mathbf{b}=0$ yazılırsa başlangıçtaki hareket denklemi (3.1) aşağıdaki vektörel forma dönüşür.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}^*|^2 + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \right) = & -\text{grad} \mathbf{p}^* + \mu \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \mathbf{A}_1^* + \mu \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \\ & + \alpha_1 \left(\nabla^{*2} \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \right) + \alpha_1 \text{grad} \left(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \right) + \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \left\{ \mathbf{A}_1^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \right. \\ & \left. + 2 \text{div} \left[(\text{grad} \mathbf{v}^*) (\text{grad} \mathbf{v}^*)^T \right] \right\} \end{aligned}$$

Denklem (3.12)'yi boyutsuzlaştırmak için bütün uzunlukları bir karakteristik uzunluk l bütün hızlar bir karakteristik hız U ile bölünür.

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{v}^*}{U} \quad (3.13)$$

Basınç ise aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırılır.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^*}{\rho U^2} \quad (3.14)$$

Diğer terimler ise

$$\begin{aligned} \nabla^2 = \nabla^{*2} L \quad \mathbf{A}_1^* = \frac{U}{L} \mathbf{A}_1 \quad \left| \mathbf{A}_1^* \right|^2 = \frac{U^2}{L^2} \left| \mathbf{A}_1 \right|^2 \quad \mathbf{A}_2^* = \frac{U^2}{L^2} \mathbf{A}_2 \\ \nabla^{*2} \mathbf{v}^* = \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{q} \quad \boldsymbol{\omega}^* = \frac{U}{L} \boldsymbol{\omega} \quad \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{U}{L^3} \nabla^{*2} \boldsymbol{\omega}^* \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (3.13-15) terimleri (3.1.12)'ye yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{2} \frac{U^2}{L} \text{grad} |\mathbf{q}|^2 + \frac{U^2}{L} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \right) &= -\frac{\rho U^2}{L} \text{grad} \mathbf{p} + \left(\mu \frac{U}{L} \mathbf{A}_1 \right) \frac{1}{L} \left(\frac{U}{L} \right)^m \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} \\ &+ \left(\frac{U}{L} \right)^m \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} \mu \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{q} + \alpha_1 \frac{U^2}{L^3} \left(\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \right) + \alpha_1 \frac{U^2}{L^3} \text{grad} \left(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q} \right) + \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\frac{U^2}{L^3} \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \left\{ \frac{U^2}{L^3} \mathbf{A}_1 \nabla^2 \mathbf{q} + 2 \frac{U^2}{L^3} \text{div} \left[(\text{grad} \mathbf{q})(\text{grad} \mathbf{q})^T \right] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan ifade $\frac{L}{\rho U^2}$ ile çarpılırsa boyutsuz denklemler

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{q}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} &= -\text{grad} \mathbf{p} + \left(\frac{\mu}{\rho U L} \left(\frac{U}{L} \right)^m \right) \mathbf{A}_1 \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} + \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} \\ &\left(\frac{\mu}{\rho U L} \left(\frac{U}{L} \right)^m \nabla^2 \mathbf{q} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \left(\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \text{grad} \left(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q} \right) + \frac{1}{4} \left[2 \frac{\alpha_1}{\rho L^2} + \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \right] \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 \\ &+ \left[\frac{\alpha_1}{\rho L^2} + \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \right] \left\{ \mathbf{A}_1 \nabla^2 \mathbf{q} + 2 \text{div} \left[(\text{grad} \mathbf{q})(\text{grad} \mathbf{q})^T \right] \right\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemden boyutsuz katsayılar şöyle tanımlanabilir.

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu}{\rho U L} \left(\frac{U}{L} \right)^m \right) \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \quad (3.20)$$

Denklemin son hali ile şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} grad|\mathbf{q}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = & -grad\mathbf{p} + \varepsilon\mathbf{A}_1 grad\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2} + \varepsilon\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2} \nabla^2\mathbf{q} + \varepsilon_1\left(\nabla^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\right) \\ & + \varepsilon_1 grad\left(\mathbf{q} \cdot \nabla^2\mathbf{q}\right) + \frac{1}{4}\left[2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right] grad|\mathbf{A}_1|^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left\{\mathbf{A}_1 \nabla^2\mathbf{q} + 2div\left[(grad\mathbf{q})(grad\mathbf{q})^T\right]\right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

genelleştirilmiş ikinci derece akışkan için koordinat sisteminden bağımsız vektörel formda boyutsuz hareket denklemi böylece elde edilmiş oldu. Gelecek bölümde ise kartezyen koordinat sistemi seçilip denklemler bu koordinat sistemine göre yazılacaktır.

3.2 Kartezyen Koordinat Sistemine Göre Hareket Denklemi

Bu bölümde kartezyen koordinat sistemine göre denklem (3.21) yazılacaktır. Öncelikle denklem (3.21)'deki terimler aşağıdaki gibi tek tek hesaplanır.

$$|\mathbf{q}|^2 = u^2 + v^2 \quad (3.22)$$

$$\nabla|\mathbf{q}|^2 = \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2)\mathbf{j} \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2}\nabla|\mathbf{q}|^2 = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\omega} = rot\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\omega} \mathbf{k} \quad (3.25)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = -\omega v\mathbf{i} + \omega u\mathbf{j} = \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} \quad (3.26)$$

$$\nabla \mathbf{p} = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T = \text{grad } \mathbf{q} + (\text{grad } \mathbf{q})^T \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & \overbrace{2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)}^0 \\ \underbrace{2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_0 & 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\left| \mathbf{A}_1 \right|^2 = 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}_{-\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.31)$$

$$\left| \mathbf{A}_1 \right|^2 = 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{1}{2} \left| \mathbf{A}_1 \right|^2 \right)^{m/2} = \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{m/2} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} &= \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \mathbf{i} \right. \\ &+ \left. \left[\left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \mathbf{j} \right\} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \mathbf{q} = -\text{rot}(\text{rot } \mathbf{q}) = -\text{rot } \boldsymbol{\omega} = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} \mathbf{j} = \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j}$$

$$\nabla^2 \mathbf{q} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = -\text{rot}(\text{rot } \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\ \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \end{array} \right) \mathbf{k}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{k}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{k} \times (u \mathbf{i} + v \mathbf{j})$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = -v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{i} + u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q} = u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathit{grad}(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q}) &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathit{grad} |\mathbf{A}_1|^2 &= \left[16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \nabla^2 \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} (\mathit{grad} \mathbf{q})(\mathit{grad} \mathbf{q})^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\operatorname{div}[(\operatorname{grad} \mathbf{q})(\operatorname{grad} \mathbf{q})^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix}$$

(3.46)

$$\operatorname{div}[(\operatorname{grad} \mathbf{q})(\operatorname{grad} \mathbf{q})^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Hesaplanan bütün terimlerin Denklem 3.21 ' e yerleştirilmesi ve ifadelerin x bileşenleri ile y bileşenleri için ayrıştırılması sonucunda aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

x bileşeni yönünde hareket denklemi

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} & \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \right. \\ & \left. \left[\varepsilon 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\ & \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \left[-v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\ & + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left. \right] + \varepsilon_2 \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned}$$

y bileşeni yönünde hareket denklemi

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} & \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \right. \\
\left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \left[\varepsilon 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] & \left. \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \right. \\
\left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \left[u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. & \\
+ 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left. \right] + \varepsilon_2 \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. & \\
\left. + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] &
\end{aligned}$$

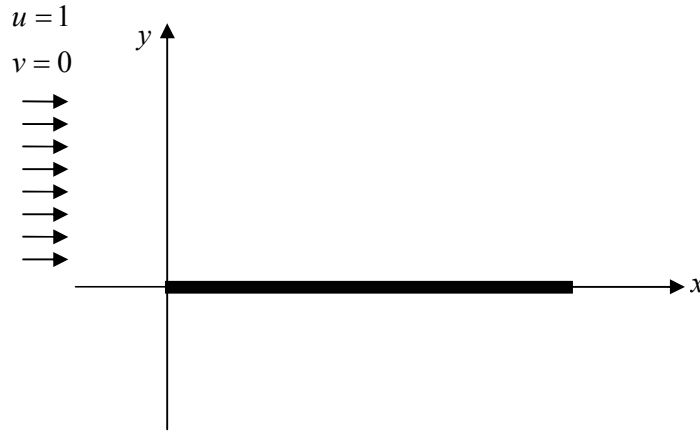
Süreklilik denklemi diğer bir adıyla sıkışmazlık koşulu ise

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.49}$$

şeklinindedir. (3.47),(3.48),(3.49) denklemleri kartezyen koordinat sistemine göre herhangi bir genelleştirilmiş ikinci derece bir akışkanın hareketini belirleyen denklemlerdir. Bir sonraki bölümde bu denklemlerden sınır tabakası denklemleri elde edilecektir.

4. SINIR TABAKASI DENKLEMLERİ

Akışkanlar Mekaniği konusunun temellerinden bilindiği üzere viskoz bir akışkan, katı yüzeye sürtündüğünde durur. Bu sebeple katı yüzeyindeki akışkanın hızı katı yüzey durgunsa sıfır, katı yüzey hareketliyse katı ile aynı hızda olacaktır. Akışkan, katı yüzey ile temas ettiği noktadan (sınırdan) uzaklaştıkça akım serbest akım hızına doğru değişim gösterir. Akışkan ve katı cismin temasından dolayı katı yüzeye çok yakın bir bölgede oluşan akıma sınır tabakası akışı denir. Bu bölümde sınır tabakası içindeki akış için hareket denklemleri (3.47), (3.48), (3.49) bazı kabuller altında basitleştirilecektir.



Şekil 4.1 Üniform Akış İçine Daldırılmış Yatay Plaka

Sınır Tabakası denklemlerini elde edebilmek için ilk önce (x,y) koordinatlarında sınır şartlarının çıkarılması gerekmektedir. x - y düzleminde ele alınan problem Şekil 4.1' de gösterilmiştir. Cisim (katı yüzey) x koordinatı olarak $0 < x < 1$ aralığında, y koordinatı olarak ise $y=0$ ' dadır. Sonsuzdan gelen akımın x doğrultusunda üniform olduğu varsayılırsa,

$$u(x, y) = 1 \quad v(x, y) = 0 \quad x \rightarrow -\infty \quad (4.1)$$

sınır koşulları elde edilir. Cisim üzerinde kayma olmayacağından dolayı diğer sınır koşulları

$$u(x, y) = 0 \quad v(x, y) = 0 \quad y = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (4.2)$$

şeklinde olur. Sınır tabakası içerisinde bir iç açılım, sınır tabakası dışında ise bir dış açılım yapılması gerekmektedir. Tabii ki bu iki açılımın birbiriyle uyum sağlaması gerekir. Önce dış açılımı göz önüne alalım. Dış açılım viskozitesiz ve irrotasyonedir. Limit akış bu durumda

$$u = 1, \quad v = 0, \quad p = -\frac{1}{2}U^2 + C \quad (\text{Bernoulli Denklemi}) \quad (4.3)$$

olur. Dış açılım olarak ilk terimler limit akış terimleri, diğer terimler ise sınır tabakası akışından kaynaklanan düzeltmeler olarak görülecektir. Dış açılımın genel şeklini aşağıdaki gibi alalım.

$$u^o(x, y; \varepsilon) = 1 + \beta(\varepsilon)u_1^o(x, y) + \dots \quad (4.4)$$

$$v^o(x, y; \varepsilon) = \beta(\varepsilon)v_1^o(x, y) + \dots \quad (4.5)$$

$$p^o(x, y; \varepsilon) = -\frac{1}{2}U^2 + C + \beta(\varepsilon)p_1^o(x, y) + \dots \quad (4.6)$$

ε (3.18) dan $\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{U}{L} \right)^m$ olarak tanımlanmıştır. İç ve dış açılımları yazarken

$\text{Re} \rightarrow \infty$ veya

$\varepsilon \rightarrow 0$

olduğu varsayılmıştır. (3.19) ve (3.20) da tanımlanan ε_1 ve ε_2 için,

$$\varepsilon_1 = k_1\varepsilon \quad \text{ve} \quad \varepsilon_2 = k_2\varepsilon$$

tanımını yapalım. Bu tanımda k_1 ve k_2 nin 1 mertebesinde olduğunu belirtmekte yarar vardır. β katsayıları dış açılımda ε parametresine bağlı olup $\varepsilon = 0$ için $\beta(0) = 0$ olur. Alt indis ile

işaretlenen bütün terimler sonsuzda sıfırlanacak olan terimlerdir. Bu terimler için sınır şartlarını yazabilmek için iç açılımında yapılması gerekmektedir. Sınır tabakası kalınlığını δ ile gösterelim. Sınır tabakası içerisinde y koordinatı aşağıdaki bağıntı ile genişletilirse

$$Y = \frac{y}{\delta(\varepsilon)} \quad (4.7)$$

olur. İç açılımı şimdi aşağıdaki gibi ele alalım.

$$u^i(x, Y; \varepsilon) = u_0^i(x, Y) + \delta(\varepsilon)u_1^i(x, Y) + \dots \quad (4.8)$$

$$v^i(x, Y; \varepsilon) = \delta(\varepsilon)v_0^i(x, Y) + \dots \quad (4.9)$$

$$p^i(x, Y; \varepsilon) = p_0^i(x, Y) + \delta(\varepsilon)p_1^i(x, Y) + \dots \quad (4.10)$$

Bu açılımlar yazılırken şu kabuller yapılmıştır,

1) Akım çizgileri boyunca hızın x bileşeni (u) merteye olarak birdir, böylece dış açılımla uyum sağlamaktadır. 2) Hızın y bileşeninin (v) bu durumda δ mertebesinde olması lazımdır ki uygun bir süreklilik denklemi ortaya çıkabilsin.

Dış açılım ile uyum sağlayabilmek için (4.10)' da basınç için yazılan ilk iki terim merteye olarak birdir. Sürtünmesiz hız da sınır tabakası içerisinde sürtünmesiz yüzey hızına yakınsayacaktır.

Sınır tabakası denklemlerini elde edebilmek için (3.47) ve (3.48) içerisindeki her terime seri açılımı uygulamamız gerekir.

Önce (3.47) ele alınarak her terim seriye açılır:

$$\begin{aligned}
& (u + \delta u_1) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + (\delta v + \delta^2 v_1) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \delta \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right. \\
& + \left. \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ \left[8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) \right] \left[\varepsilon 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right] + \left[8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial Y} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) \right] \left[\varepsilon \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \right] \left. \right\} + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \left[- (\delta v + \delta^2 v_1) \left(\frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\delta^2}{\delta^2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial Y^2} \right) \right. \\
& + (\delta v + \delta^2 v_1) \left(\frac{1}{\delta^3} \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + \frac{\delta}{\delta^3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial Y^3} \right) + (u + \delta u_1) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \delta \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) + (u + \delta u_1) \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial Y^2} \right) \\
& + 13 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) + 4 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\
& \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) + 3 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) + 3 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right. \\
& + \left. \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) + \varepsilon_2 \left[8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right. \right. \\
& + \left. \left. \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial x \partial Y} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) \right]
\end{aligned}$$

Parantez içerisindeki terimler birbirlerine göre ihmal edilip denklem (4.11) tekrar düzenlenir.

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] \left[\varepsilon 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right. \\
&+ \left[\frac{8}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{2}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right] \left[\varepsilon \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \right] \left. \right\} + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left[\varepsilon \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right] \\
&+ \varepsilon_1 \left[-v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial Y^2} + \frac{1}{\delta^2} v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{\delta^2} u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 4 \delta^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
&+ 3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \left. \right] + \varepsilon_2 \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \delta^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
&\left. 2 \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Denklem (4.12) de köşeli parantez içindeki en büyük terimleri tutulur diğer terimler ihmal edilirse denklem en sade olarak aşağıdaki hale gelir:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \varepsilon \frac{1}{\delta^{m+2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \left\{ 2 \frac{1}{\delta^4} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right\} + \varepsilon \frac{1}{\delta^{m+2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \\
&+ \varepsilon_1 \frac{1}{\delta^2} \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] + \varepsilon_2 \frac{1}{\delta^2} \left[2 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right]
\end{aligned}$$

Aynı işlemleri (3.48)' e uygulayalım;

$$\begin{aligned}
(u + \delta u_1) \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + (\delta v + \delta^2 v_1) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial Y} \right) &= - \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial p_1}{\partial Y} \right) + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \left[8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) \right] \left[\varepsilon \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \Big] + \left[8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial x \partial Y} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) \right] \left[\varepsilon 2 \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial Y} \right) \right] + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left[\varepsilon \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} + \frac{\delta^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial Y^2} \right) \right] + \varepsilon_1 \left[(u + \delta u_1) \left(\delta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \delta^2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \right) \right. \\
& \left. + (u + \delta u_1) \left(\frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\delta^2}{\delta^2} \frac{\partial v_1}{\partial x \partial Y^2} \right) + (\delta v + \delta^2 v_1) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial Y} \right) + (\delta v + \delta^2 v_1) \left(\frac{\delta}{\delta^3} \frac{\partial^3 v}{\partial Y^3} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\delta^2}{\delta^3} \frac{\partial^3 v_1}{\partial Y^3} \right) + 4 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial Y} \right) \left(\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \left. + 13 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) + 3 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial Y} \right) + 3 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial Y} \right) \right] + \varepsilon_2 \left[8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial Y} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\delta}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\delta}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial Y} \right) + 2 \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + \frac{\delta^2}{\delta} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial Y} \right) \right] \\
& \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Denklem (4.14)' de parantez içindeki büyük terimleri tutup denklemi yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
\delta u \frac{\partial v}{\partial x} + \delta v \frac{\partial v}{\partial Y} &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right]^2 \left[\left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] \left[\varepsilon \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right] \right. \\
& \left. + \left[8 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + 2 \frac{1}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right] \left[\varepsilon 2 \frac{\partial v}{\partial Y} \right] \right] + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left[\varepsilon \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right] \\
& + \varepsilon_1 \left[\delta u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{1}{\delta} u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial Y^2} + \delta v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial Y} + \frac{1}{\delta} v \frac{\partial^3 v}{\partial Y^3} + 4 \frac{1}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \delta \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 13 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\delta \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + 3 \frac{1}{\delta} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} \Big] + \varepsilon_2 \Big[8 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + 2 \frac{1}{\delta} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2 \frac{1}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \\
& + 2 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} + 2\delta \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial Y} \Big]
\end{aligned}$$

Denklem (4.15)' de köşeli parantez içindeki en büyük terimleri tutup denklem tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{\delta^{m-2}} \left\{ 2 \frac{\varepsilon}{\delta^3} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + 4 \frac{\varepsilon}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right\} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \frac{\varepsilon}{\delta^{m+1}} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \\
& + 4k_1 \frac{\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2k_2 \frac{\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}}{\delta^3} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Denklem (4.13)' de 1 mertebesindeki ivme terimleri ile sürtünme terimlerinin uyumlu olabilmesi için ε , ε_1 , ε_2 katsayılarının δ^{m+2} mertebesinde olduğunu varsayılırsa,

$$\delta = \sqrt[m+2]{\varepsilon} \quad (4.17)$$

olur. Ayrıca $\varepsilon_1 = k_1 \varepsilon$ ve $\varepsilon_2 = k_2 \varepsilon$ olduğunu hatırlayalım. Bu durumda

$$\varepsilon = \delta^{m+2} \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_1 = k_1 \varepsilon^{\frac{2}{m+2}} \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_2 = k_2 \varepsilon^{\frac{2}{m+2}} \quad (4.20)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (4.13) ve (4.16) yeniden yazılırsa,

x bileşeni

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + m \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + k_1 \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right. \\ \left. + 3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] + k_2 2 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y}$$

y bileşeni

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2(2k_1 + k_2) \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (4.22)$$

Süreklilik Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (4.23)$$

Denklem (4.22)' yi şu şekilde ifade edelim:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[-p + (2k_1 + k_2) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.24)$$

Yeni bir basınç fonksiyonu

$$\bar{p} = p - (2k_1 + k_2) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlanırsa bu durumda

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial Y} = 0 \quad (4.26)$$

ifadesi elde edilir. Yani $\bar{p} = \bar{p}(x)$ olur. Dış açılımla uyum sağlaması için

$$\bar{p} = -\frac{1}{2}U^2 + C \text{ olur.} \quad (4.27)$$

Her iki tarafın x' e göre türevi alınır,

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -U \frac{dU}{dx} \quad (4.28)$$

elde edilir. Denklem (4.25)' in de her iki tarafını x' e göre türevi alınır,

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} - 2(2k_1 + k_2) \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \quad (4.29)$$

elde edilir. Ardından (4.28) ifadesi (4.29)' a konulursa,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{dU}{dx} - 2(2k_1 + k_2) \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \quad (4.30)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (4.21)' de yerine yazılırsa,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = U \frac{dU}{dx} - 2(2k_1 + k_2) \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + m \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + k_1 \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] + k_2 2 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y}$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = U \frac{dU}{dx} + (m+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + k_1 \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right]$$

sınır tabakası denklemleri (4.32) ve (4.23) ile elde edilmiş olur.

Bu denklemler için sınır koşullarının yazılması gerekmektedir. İlk iki sınır koşulu cisim üzerinde kayma olmayacağından $y = 0$ ' da hız bileşeninin sıfır olması gerektiğidir.

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (4.33)$$

Akım çizgileri boyunca hız vektörünün iç ve dış açılım bileşenlerinin ara değişkenler cinsinden uyum sağlaması gerekmektedir. Buradan sınır koşulu olarak

$$u(x, \infty) = 1 \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.34) sınır koşulu sınır tabakasının hemen üstündeki akımın viskozitesiz akım olduğunu belirtir.

Ayrıca sınır tabakasında u hız bileşeninin iç ve dış açılımlarının düzgün olarak birleştiği kabul edilirse diğer bir sınır koşulu

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, \infty) = 0 \quad (4.35)$$

olarak yazılır.

(4.33), (4.34), (4.35) şartları kullanılarak sınır tabakası denklemleri (4.32) ve (4.23) çözümlenip u, v bulunabilir.

5. BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde bağımsız değişkenler kullanılarak yeni bağımsız değişkenler tanımlamak suretiyle bağımsız değişken sayısında bir indirgemeye gidilir. İki bağımsız değişkenden oluşan kısmi diferansiyel sınır tabakası denklemlerimiz bu sayede adi diferansiyel denkleme dönüşecektir.

Bir denklemin kabul edebildiği genel benzerlik dönüşümleri Lie Grup Teorisi ile bulunur. Aşağıdaki özel dönüşümler birçok denklemde iyi sonuçlar vermektedir.

- 1) Ölçekleme Dönüşümü
- 2) Öteleme Dönüşümü
- 3) Spiral Grup Dönüşümü
- 4) Bu dönüşümleri içeren özel bir dönüşüm

Bu bölümde ise yukarıdaki dönüşümlerden sınır tabakası denklemlerimize Ölçekleme Dönüşümü uygulanacaktır.

5.1 Ölçekleme Dönüşümü

Sınır tabakası ve süreklilik denklemlerimiz x, y bağımsız değişkenlerinden ve u, v, U bağımlı değişkenlerinden oluşur. Bu denklemler için ölçekleme grup dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\bar{x} = \lambda^a x, \bar{Y} = \lambda^b Y, \bar{u} = \lambda^c u, \bar{v} = \lambda^d v, \bar{U} = \lambda^e U \quad (5.1)$$

$\lambda = 1 + \varepsilon$ alınrsa

$$\bar{x} = \lambda^a x \rightarrow \bar{x} = (1 + \varepsilon a)x \rightarrow \frac{\bar{x} - x}{ax} = \varepsilon \rightarrow \frac{dx}{ax} = \varepsilon \quad (5.2)$$

$$\bar{Y} = \lambda^b Y \rightarrow \bar{Y} = (1 + \varepsilon b)Y \rightarrow \frac{\bar{Y} - Y}{bY} = \varepsilon \rightarrow \frac{dY}{bY} = \varepsilon \quad (5.3)$$

$$\bar{u} = \lambda^c u \rightarrow \bar{u} = (1 + \varepsilon c)u \rightarrow \frac{\bar{u} - u}{cu} = \varepsilon \rightarrow \frac{du}{bu} = \varepsilon \quad (5.4)$$

$$\bar{v} = \lambda^d v \rightarrow \bar{v} = (1 + \varepsilon d)v \rightarrow \frac{\bar{v} - v}{dv} = \varepsilon \rightarrow \frac{dv}{dv} = \varepsilon \quad (5.5)$$

$$\bar{U} = \lambda^e U \rightarrow \bar{U} = (1 + \varepsilon e)U \rightarrow \frac{\bar{U} - U}{eU} = \varepsilon \rightarrow \frac{dU}{eU} = \varepsilon \quad (5.6)$$

Burada ε bir parametre, a,b,c,d ve e ise denkleme göre belirlenmesi gereken sabitlerdir. Bu grup için benzerlik dönüşümlerini veren denklem şöyledir.

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dY}{bY} = \frac{du}{cu} = \frac{dv}{dv} = \frac{dU}{eU} \quad (5.7)$$

5.1 ölçekleme dönüşümü sınır tabakası denklemlerine yerleştirilir elde edilen dönüştürülmüş denklemin orijinal denkleme benzemesi için dönüşüm parametreleri hesaplanır. Süreklilik denklemi dönüştürülmüş parametreler cinsinden şöyle hesaplanır.

$$\lambda^{a-c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda^{b-d} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0 \quad (5.8)$$

Denklemin her iki tarafı λ^{c-a} ile çarpılırsa

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda^{b+c-a-d} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0 \quad (5.9)$$

elde edilir. Denklem (5.9)' un denklem (4.23)' e benzeyebilmesi için

$$b + c - a - d = 0 \quad (5.10)$$

olmalıdır. Denklem (4.32)' ye ölçekleme uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\lambda^{a-2c} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda^{b-c-d} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} &= \lambda^{a-2e} \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + (m+1) \lambda^{m(b-c)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right)^m \lambda^{2b-c} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \\
+ k_1 \left[\lambda^{3b-c-d} \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial Y^3} + \lambda^{a+2b-2c} \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial Y^2} + \lambda^{a+2b-2c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} - \lambda^{a+2b-2c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial Y} \right] &
\end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafı λ^{2c-a} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda^{b+c-a-d} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} &= \lambda^{2c-2e} \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + \lambda^{m(b-c)} \lambda^{2b+c-a} (m+1) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \\
+ k_1 \left[\lambda^{3b+c-a-d} \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial Y^3} + \lambda^{2b} \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial Y^2} + \lambda^{2b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} - \lambda^{2b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial Y} \right] &
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Olur. Orjinal denklemlerin yapılan dönüşüm altında değişmez kalabilmesi için gerekli şart aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$3b + c - a - d = 0 \tag{5.13}$$

$$2b = 0 \tag{5.14}$$

$$2c - 2e = 0 \tag{5.15}$$

$$m(b - c) + 2b + c - a = 0 \tag{5.16}$$

$$b + c - a - d = 0 \tag{5.17}$$

Denklemlerde bütün terimler c cinsinden bulunursa

$$\begin{aligned}
a &= (1 - m)c \\
b &= 0 \\
c &= c \\
d &= mc \\
e &= c
\end{aligned} \tag{5.18}$$

bulunur. Bu durumda denklem 5.7 aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{dx}{c(1-m)x} = \frac{dY}{0} = \frac{du}{cu} = \frac{dv}{cmv} = \frac{dU}{cU} \quad (5.19)$$

Bu denklem sistemi benzerlik değişkenini ve benzerlik fonksiyonlarını verecektir.

$$dY = 0 \rightarrow \xi = Y \quad (5.20)$$

Klasik sınır tabakası problemlerinde sınır tabakası değişkenimiz yada diğer adıyla benzerlik değişkenimizin genellikle 2 bağımsız değişkenden oluşmaktadır. Halbuki burada Y koordinatı aynı zamanda benzerlik değişkeni olarak çıkmıştır. Böyle bir durumda normal bir sınır tabakası şartları dönüşümü sağlayamayacaktır. Bu yüzden gerdirilmiş yüzey sınır şartlarına ait sınır tabakası problemi ileride ele alınacaktır. Benzerlik fonksiyonlarımızı hesaplayalım.

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{(1-m)x} \quad (5.21)$$

$$\ln u = \frac{1}{1-m} \ln x + \ln f(Y) \quad (5.22)$$

$$u = x^{\frac{1}{1-m}} f(Y) \quad (5.23)$$

$$\frac{dv}{mv} = \frac{dx}{(1-m)x} \quad (5.24)$$

$$\ln v = \frac{m}{1-m} \ln x + \ln g(Y) \quad (5.25)$$

$$v = x^{\frac{m}{1-m}} g(Y) \quad (5.26)$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dx}{(1-m)x} \quad (5.27)$$

$$\ln U = \frac{1}{1-m} \ln x + \ln h \quad (5.28)$$

$$U = x^{\frac{1}{1-m}} h \quad (5.29)$$

U sadece x' in bir fonksiyonu olduğuna göre integralden elde edilen h Y' nin bir fonksiyonu olamaz. Genellikle bir kayıp olmaksızın h=1 alınabilir.

$$U = x^{\frac{1}{1-m}} \quad (5.30)$$

Benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları böylece bulunmuş oldu. (4.32) ve (4.23)' ün terimlerini teker teker hesaplayalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1-m} x^{\frac{1}{1-m}-1} f \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = x^{\frac{1}{1-m}} f' \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = x^{\frac{1}{1-m}} f'' \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} = x^{\frac{1}{1-m}} f''' \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} = \frac{1}{1-m} x^{\frac{1}{1-m}-1} f' \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} = \frac{1}{1-m} x^{\frac{1}{1-m}-1} f'' \quad (5.36)$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{1-m} x^{\frac{1}{1-m}-1} \quad (5.37)$$

Bulunan bu denklemler (4.32) ve (4.23)' ye yerleştirilirse aşağıdaki adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$f + (1-m)g' = 0 \quad (5.38)$$

$$f^2 + (1-m)g f' = 1 + (1-m^2)(f')^m f'' + k_1 [(1-m)gf''' + 2ff'' - (f')^2] \quad (5.39)$$

Bölüm 3 de sınır şartları aşağıdaki şekilde verilmişti.

$$u(x,0) = 0$$

$$v(x,0) = 0$$

$$u(x,\infty) = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\infty) = 0$$

Bu sınır şartlarını denklem (5.23),(5.26) ve (5.32)' ye uygularsak,

$$f(0) = 0 \quad (5.40)$$

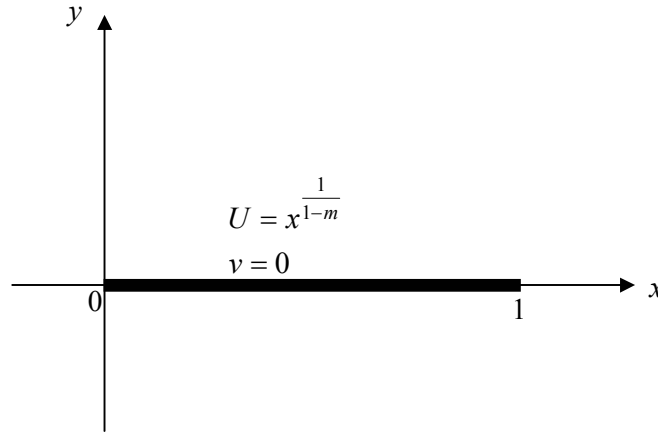
$$g(0) = 0 \quad (5.41)$$

$$f(\infty) = 1 \quad (5.42)$$

$$f'(\infty) = 0 \quad (5.43)$$

şartları elde edilir. Bu şartlar klasik sınır tabakası için çıkarılmıştır. Bizim modelimizin kabul ettiği şartların gerdirilmiş plaka problemi için uygun olduğu daha önceden belirtilmişti.

5.2 Durgun Bir Akışkan İçerisinde Gerdirilmiş Yüzey / Plaka Problemi



Şekil 5.1 Durgun bir akışkan içerisinde gerdirilmiş plaka

Bu kısımda Şekil 5.1 de görülen ve polimer endüstrisinde sıkça rastlanan bir uygulama olan durgun akışkan içerisinde gerdirilmiş yüzeyin üzerinde oluşan sınır tabakası akımı klasik sınır tabakası denklemlerinden yararlanılarak incelenecektir. Bu modelin klasik modelden farkı dış akımın $U = 0$ olması ve akımın, sınırın yani yüzeyin hareketinden dolayı oluşmasıdır. Bu sayede basınç terimimiz denklem (4.32)' den kaybolacaktır. Bu model için sınır tabakası denkleminiz klasik sınır tabakası denkleminin basınç gradyanının olmadığı durumudur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (5.44)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = (m+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + k_1 \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] \quad (5.45)$$

Bu model için benzerlik değişkenlerini ve fonksiyonlarını veren denklem řu şekildedir:

$$\frac{dx}{c(1-m)x} = \frac{dY}{0} = \frac{du}{cu} = \frac{dv}{cmv} \quad (5.46)$$

Burada dikkat edilmesi gereken tek farkın dış akım teriminin ortadan kaybolduğudur. Benzerlik değişkenimiz ve fonksiyonlarımız klasik sınır tabakası ile aynıdır.

$$\xi = Y \quad (5.47)$$

$$u = x^{\frac{1}{1-m}} f(Y) \quad (5.48)$$

$$v = x^{\frac{m}{1-m}} g(Y) \quad (5.49)$$

Ölçekleme dönüşümü neticesinde elde edilen adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$f + (1-m)g' = 0 \quad (5.50)$$

$$f^2 + (1-m)g f' = (1-m^2)(f')^m f'' + k_1[(1-m)gf''' + 2ff'' - (f')^2] \quad (5.51)$$

Sınır şartları, dış akımın olmadığı durum ve sınırda akışkan hızının yüzey hızına eşit olduğu durum için řu şekilde tanımlanabilir.

$$u(x,0) = x^{\frac{1}{1-m}} \quad (5.52)$$

$$v(x,0) = 0 \quad (5.53)$$

$$u(x, \infty) = 0 \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y}(x, \infty) = 0 \quad (5.55)$$

Klasik sınır tabakası ile aynı şekilde (5.52-55) sınır şartlarımıza ölçekleme dönüşümlerini uygularsak aşağıdaki şartlar denklem (5.50) ve (5.51) için elde edilir.

$$f(0) = 1 \quad (5.56)$$

$$g(0) = 0 \quad (5.57)$$

$$f(\infty) = 0 \quad (5.58)$$

$$f'(\infty) = 0 \quad (5.59)$$

Bu bölümde ilk önce kısmi diferansiyel formdaki klasik sınır tabakası denklemlerimize ölçekleme dönüşümleri uygulandı daha sonra bu denklemlerden faydalanılarak ölçekleme dönüşümüne daha uygun olan gerdirilmiş yüzey problemi için denklemler elde edildi. Bir sonraki bölümde gerdirilmiş yüzey problemi için nümerik çözümler elde edilecektir.

6. NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde ölçekleme dönüşümü ile elde ettiğimiz durgun akışkan içinde gerdirilmiş yüzey problemine ait sınır tabakası denklemleri (5.50) ve (5.51) için nümerik çözümler yapılacaktır. Önce denklem (5.50) ve (5.51)'i birinci mertebeden denklemlere indirgeyelim.

$$f_1(Y) = f(Y) \quad (6.1)$$

$$f_2(Y) = g(Y) \quad (6.2)$$

$$f_3(Y) = f'(Y) \quad (6.3)$$

$$f_4(Y) = f''(Y) \quad (6.4)$$

Bunları denklemlerimize yerleştirirsek

$$f_1' = f_3 \quad (6.5)$$

$$f_2' = -\frac{f_1}{(1-m)} \quad (6.6)$$

$$f_3' = f_4 \quad (6.7)$$

$$f_4' = \frac{f_1^2 + (1-m)f_2f_3 - (1-m^2)f_3^m f_4 - k_1(2f_1f_4 - f_3^2)}{k_1(1-m)f_2} \quad (6.8)$$

elde ederiz. Bu denklemler için başlangıç ve sınır koşulları şöyledir.

$$f_1(0) = 1 \quad (6.9)$$

$$f_2(0) = 0 \quad (6.10)$$

$$f_1(\infty)=0 \quad (6.11)$$

$$f_3(\infty) = 0 \quad (6.12)$$

Denklem (6.8)' e dikkat edersek başlangıç noktası $Y = 0$ ' da bir tekillik olduğu hemen gözlemlenebilir. f_4' teriminin sonlu olabilmesi için payın da başlangıç noktasında sıfır olması gerekmektedir. (6.8)' de $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = 0$ alırsak

$$1 - (1 - m^2)f_3^m(0)f_4(0) - 2k_1f_4(0) + k_1f_3^2(0) = 0 \quad (6.13)$$

elde edilir. Buradan $f_4(0)$ başlangıç koşulunu $f_3(0)$ cinsinden

$$f_4(0) = \frac{k_1f_3^2(0) + 1}{(1 - m^2)f_3^m(0) + 2k_1} \quad (6.14)$$

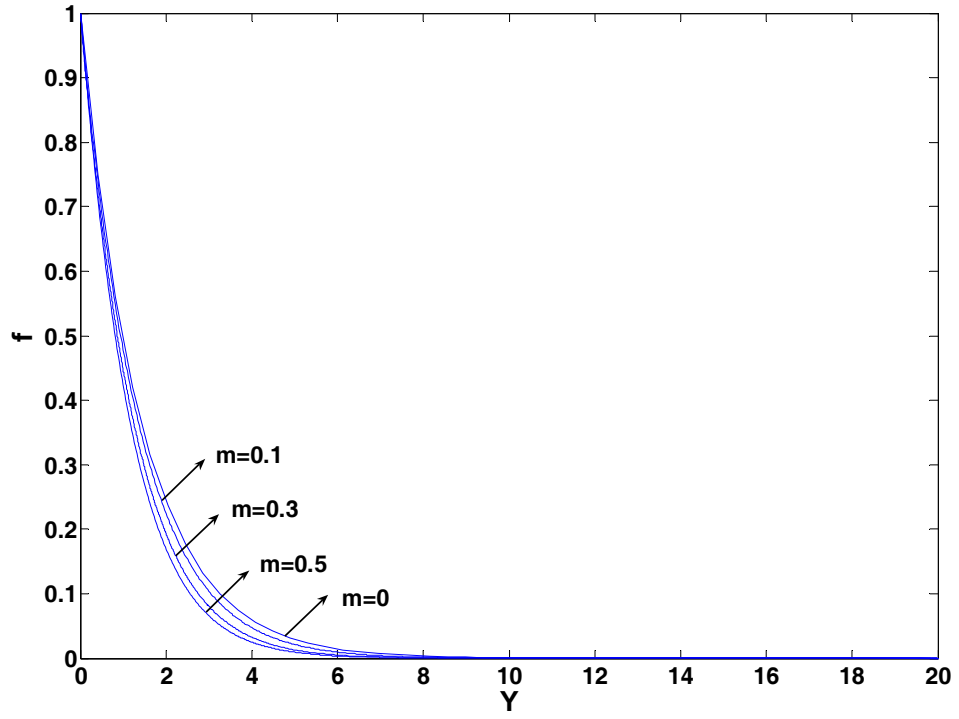
olarak buluruz.

Denklemleri çözmek için ilk girişimizde denklemleri başlangıç değer problemine dönüştürdük. Bunun için eksik olan iki başlangıç değeri, yani $f_3(0)$ ve $f_4(0)$ ' dan $f_3(0)$ keyfi bir sayı olarak alınıyor. $f_4(0)$ (6.14)' den hesaplanıyor ve sonsuzda sınır şartlarının sağlanıp sağlanmadığına bakılıyordu. Sonsuza giderken fonksiyonun aldığı değerlere bakılarak $f_3(0)$ için yeni tahminler yapılıyor ve bu şekilde doğru başlangıç şartı elde edilmeye çalışılıyordu. Önce denklemleri integre etmek için MATLAB bünyesinde "stiff" denklemler için hazırlanmış değişken adımlı özel bir Runge-Kutta programı kullanıldı "Stiff" denklemler çözümünde exponansiyel terimler olan ve başlangıç koşullarından dolayı exponansiyel terimlerden bazılarının katsayılarının sıfır olduğu denklemlerdir. Bu program sınır tabakası denklemlerini hem Newtonian hem de Power-law akışkan için ((5.51)' de $k_1 = 0$ alınız) kolayca çözebilmektedir. Fakat İkinci Derece Akışkanı temsil eden k_1 değerini 10^{-7} mertebesinde alsak bile bu yazdığımız program çözümlere ulaşamamakta idi.

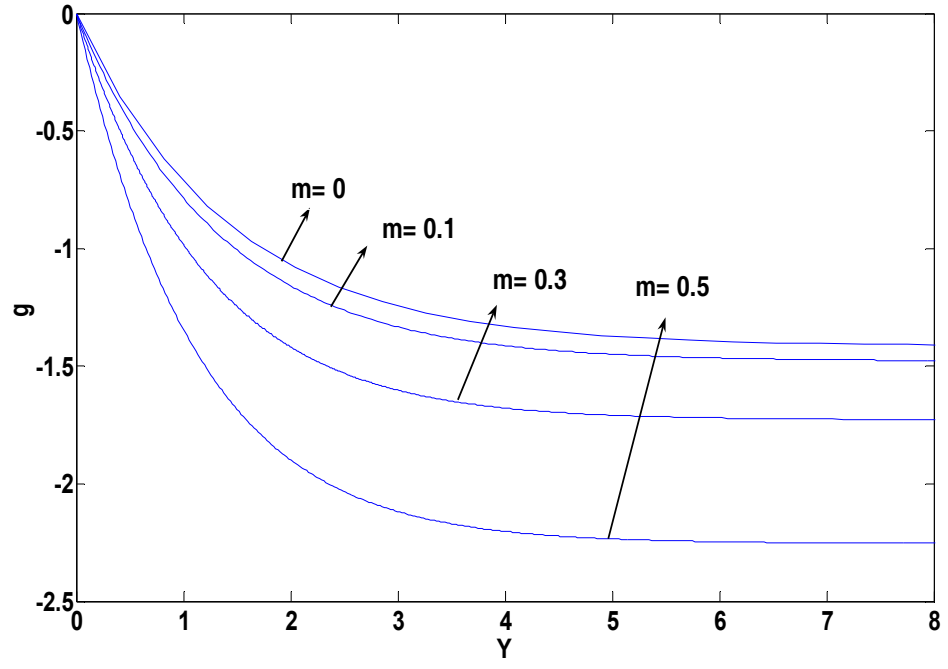
Eksponansiyel büyüyen terimlerin varlığında sönmekte olan bir exponansiyel çözüm ararken başlangıç değer metodlarının yerine problemimizi sınır değer problemi olarak ele alıp sonlu farklar algoritmalarını denemeye karar verdik. Sonlu farklar metodunun uygulanabilmesi için başlangıçta belirli aralıklarla fonksiyonlarının tahmini değerlerinin verilmesi gerekmektedir. Bu tahmini değerler ne kadar iyi olursa yakınsama ihtimali de o kadar artmakta veya çözümlere yakınsamak için kullanılan bilgisayar zamanı azalmaktadır. İlk önce yine MATLAB' ın kendi bünyesindeki sonlu farklar algoritmasını kullanan BVP4C altprogramını kullanmayı denedik. Çözücüye k_1 değeri için verilen değerler 10^{-7} mertebesinde olsa bile başlangıç tahminlerinin çözümleri hatalı çıkardığını gözlemledik. Daha hassas başlangıç tahmini elde etmek için Newtonian sınır tabakası denklem çözümlerinde $f_4'(0)$ ' ı her değere karşılık 0 alıp çözücüye verdik ve başlangıç noktasındaki tekillikten dolayı problem olup olmayacağını anlamak için $Y \approx 0$ ' da çözücü toleranslarını düşürdük. Program çözüm üretmesine rağmen $Y \approx 0$ ' da çözümden sapmalar gözlemlendi.

Daha sonra tekil problemler için yine MATLAB bünyesinde başka bir algoritma olan SBVP algoritmasını denedik (Ek). Bu algoritma ile $m > 0$ ve $m < 0$ ' ın değişik değerleri için ($k_1=1$) farklı çözümler elde ettik. Şekil 6.1-16' de farklı m değerleri için f, g, f', f'' ' nün Y karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. Şekil 6.16-24' de ise $m = 0.1$ ve $m = -0.1$ için değişik k değerlerinde karşılaştırmalı grafikler verilmiştir.

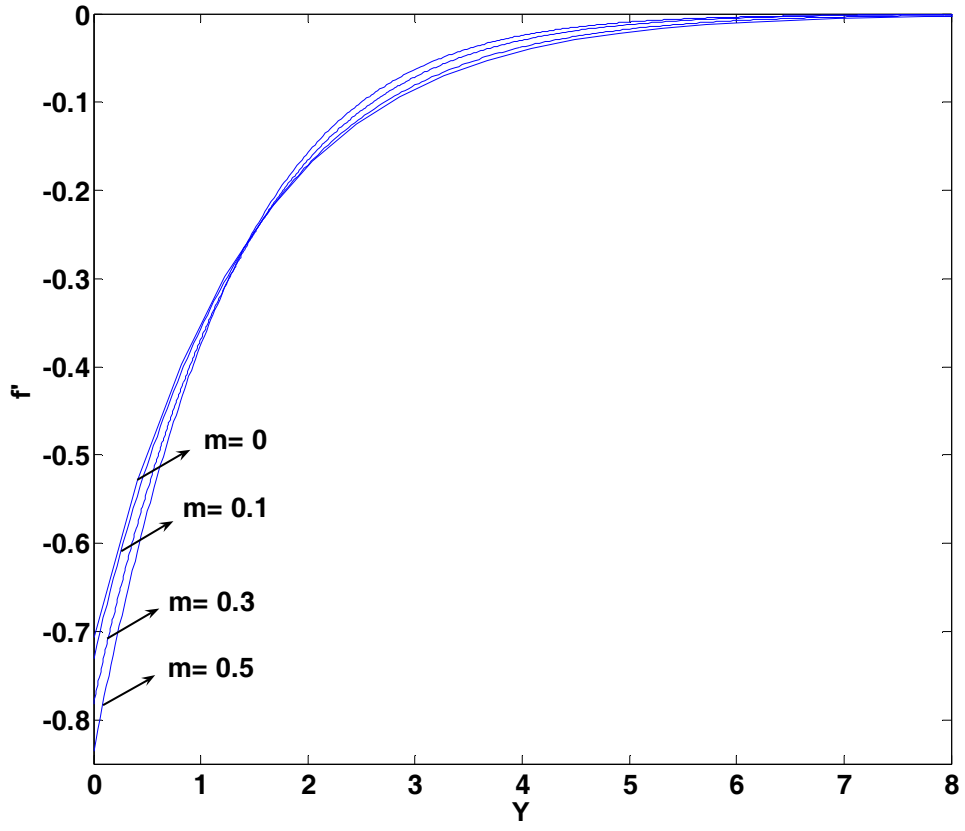
Şekil 6.1-16' dan anlaşılacağı gibi m ' in artan ($m > 0$) değerlerinde sınır tabakası kalınlığı azalmakta, azalan değerlerinde ise sınır tabakası kalınlaşmaktadır. Şekil 6.17-24' e bakıldığında ise artan k değerlerinde sınır tabakasının kalınlaştığı söylenebilir. Sonuç olarak m ' in azalan ve k_1 ' in artan değerleri sınır tabakasını kalınlaştırdığını söyleyebiliriz.



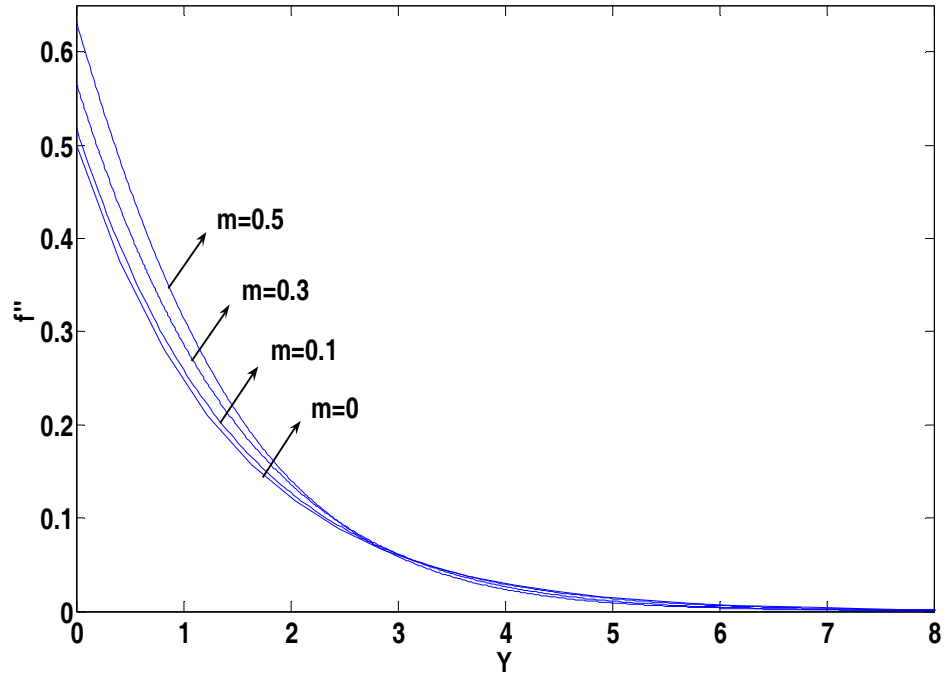
Şekil 6.1 Değişik $m > 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)



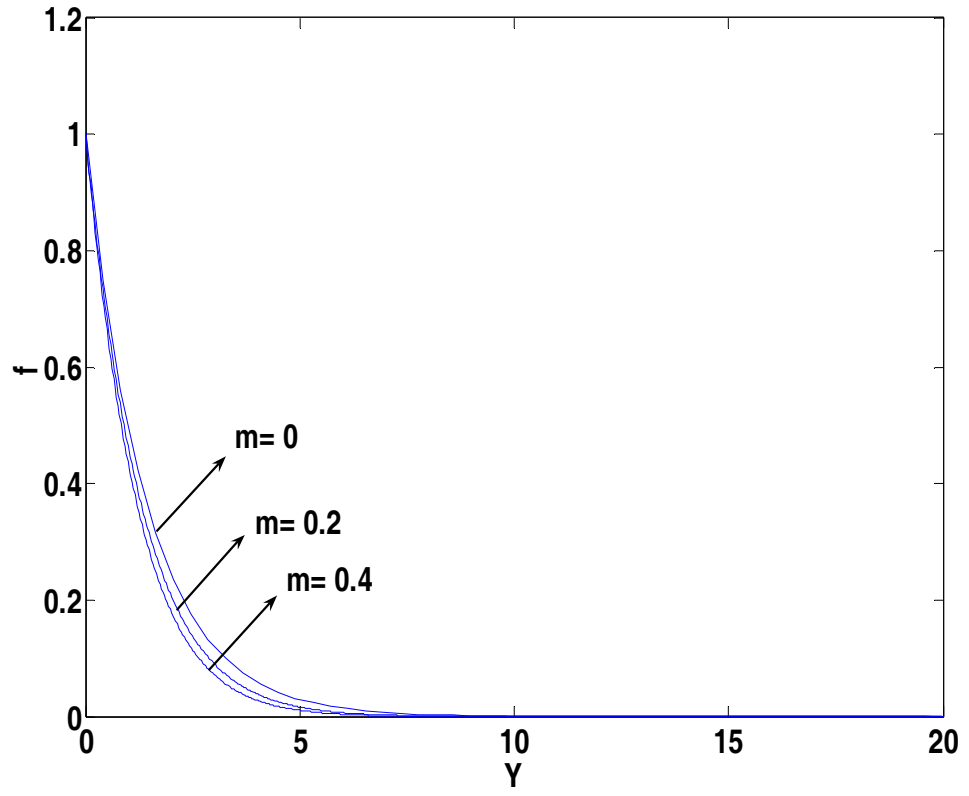
Şekil 6.2 Değişik $m>0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)



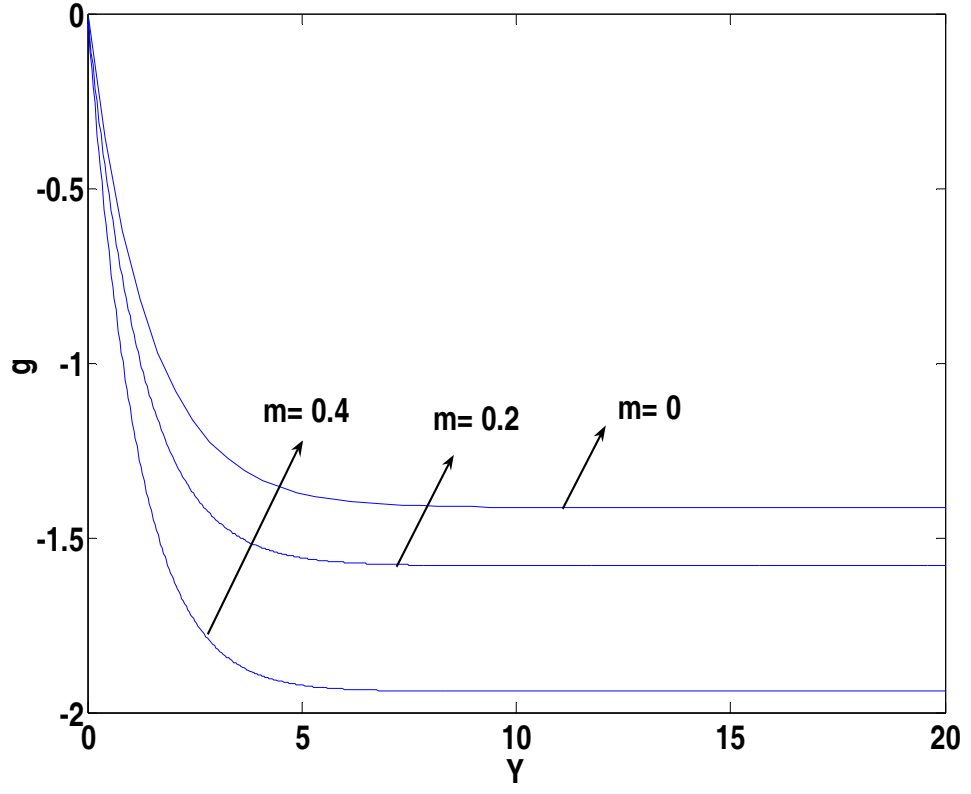
Şekil 6.3 Değişik $m > 0$ değerleri için f' fonksiyonu ($k_1=1$)



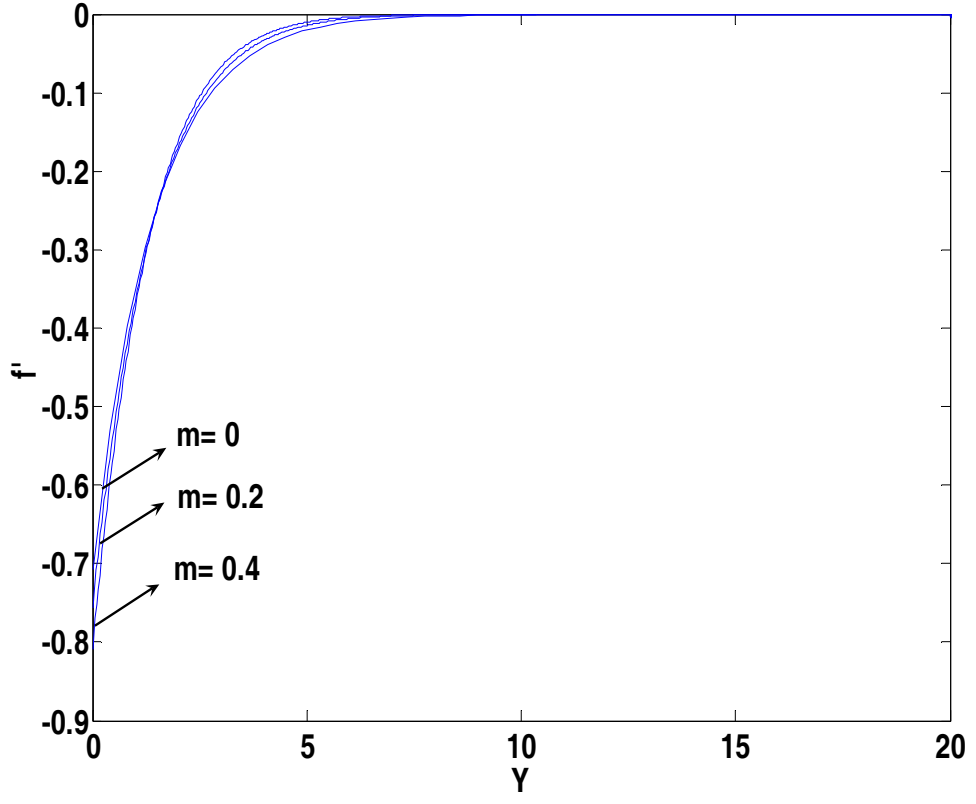
Şekil 6.4 Değişik $m > 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)



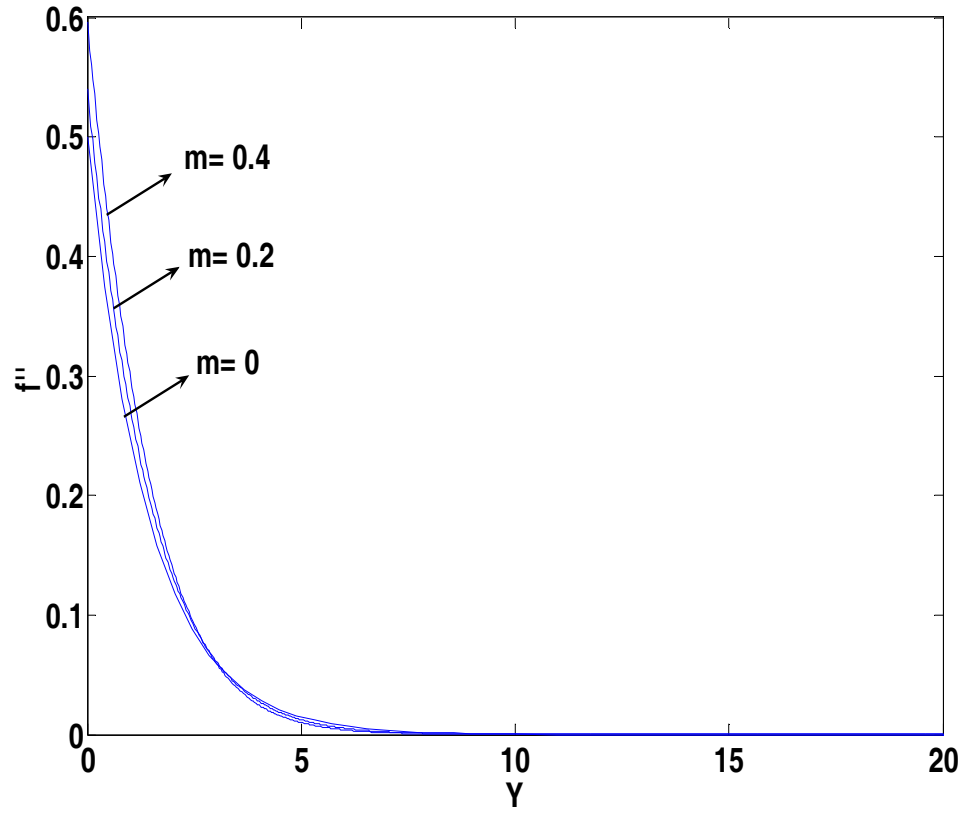
Şekil 6.5 Değişik $m>0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)



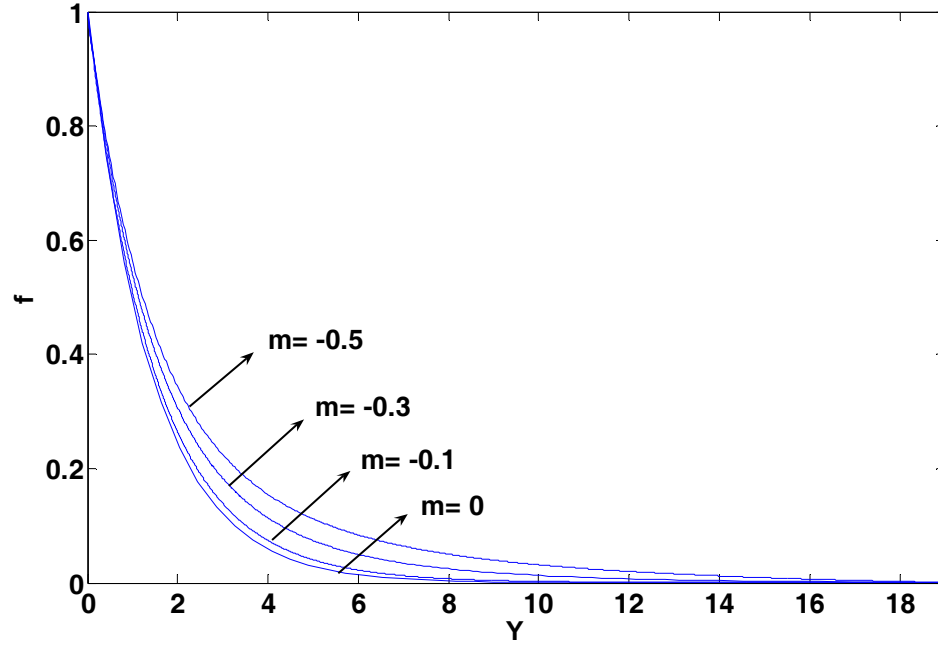
Şekil 6.6 Değişik $m>0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)



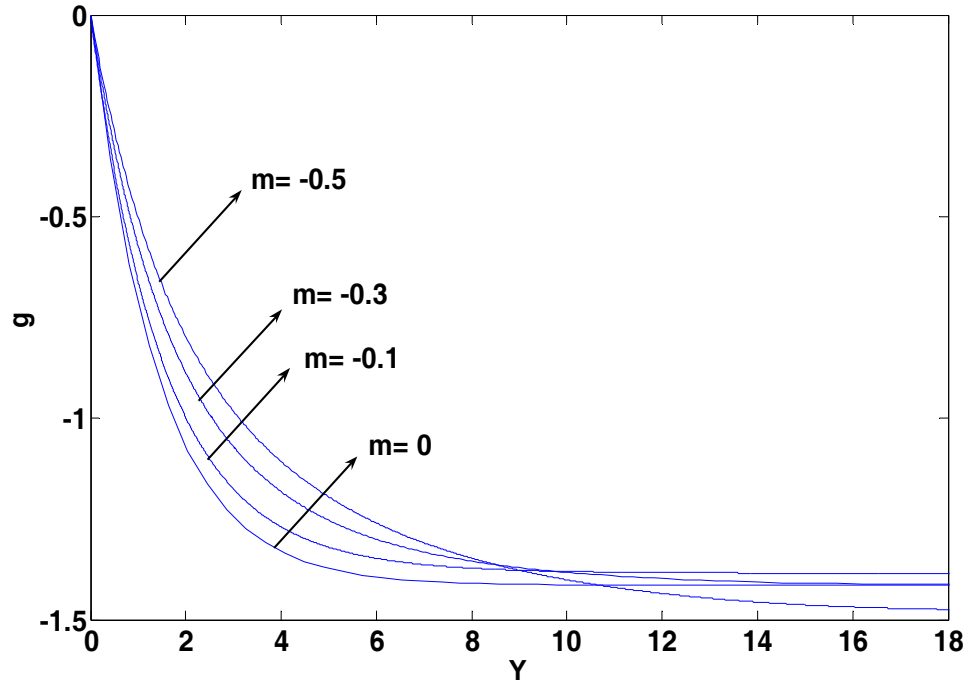
Şekil 6.7 Değişik $m>0$ değerleri için f' fonksiyonu ($k_1=1$)



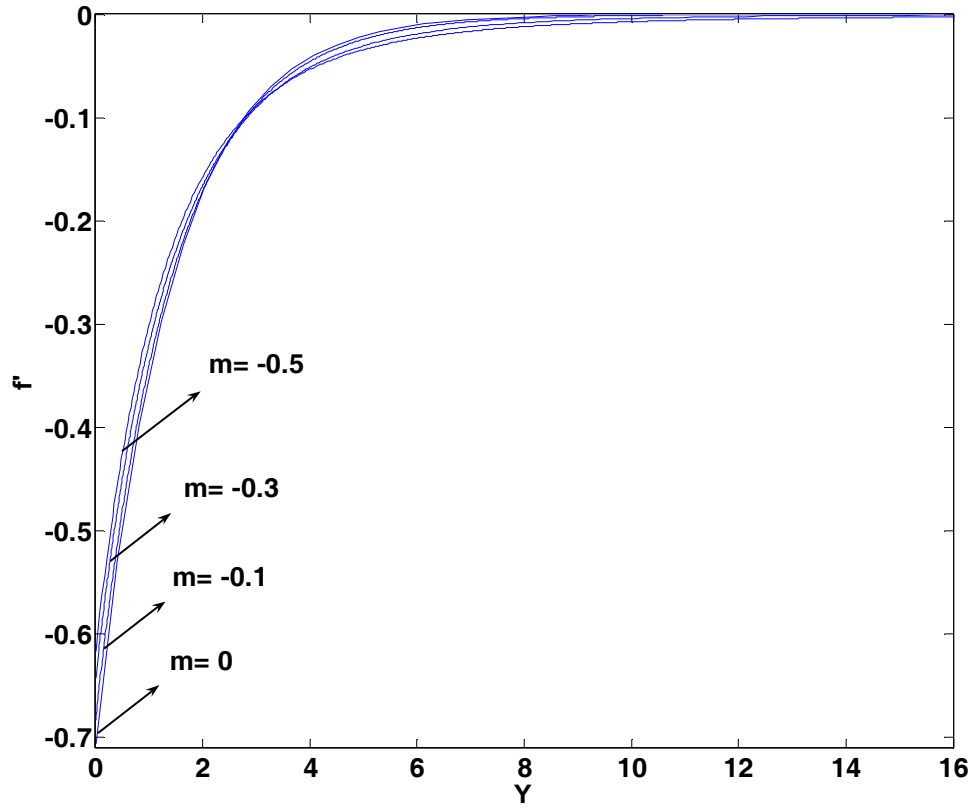
Şekil 6.8 Değişik $m > 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)



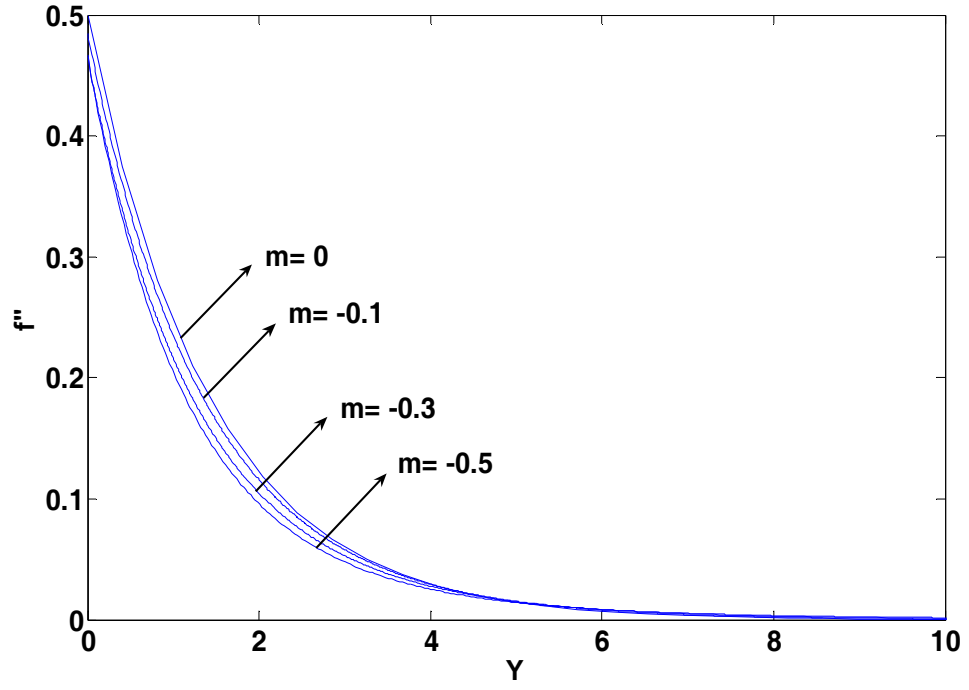
Şekil 6.9 Değişik $m < 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)



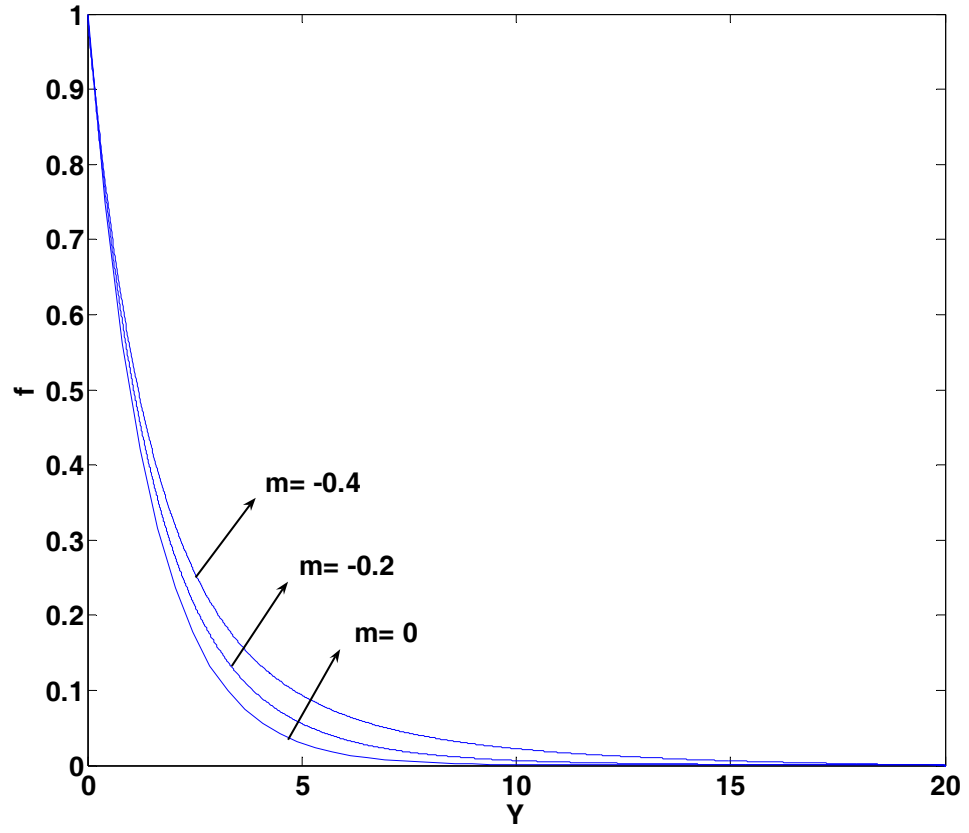
Şekil 6.10 Değişik $m < 0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)



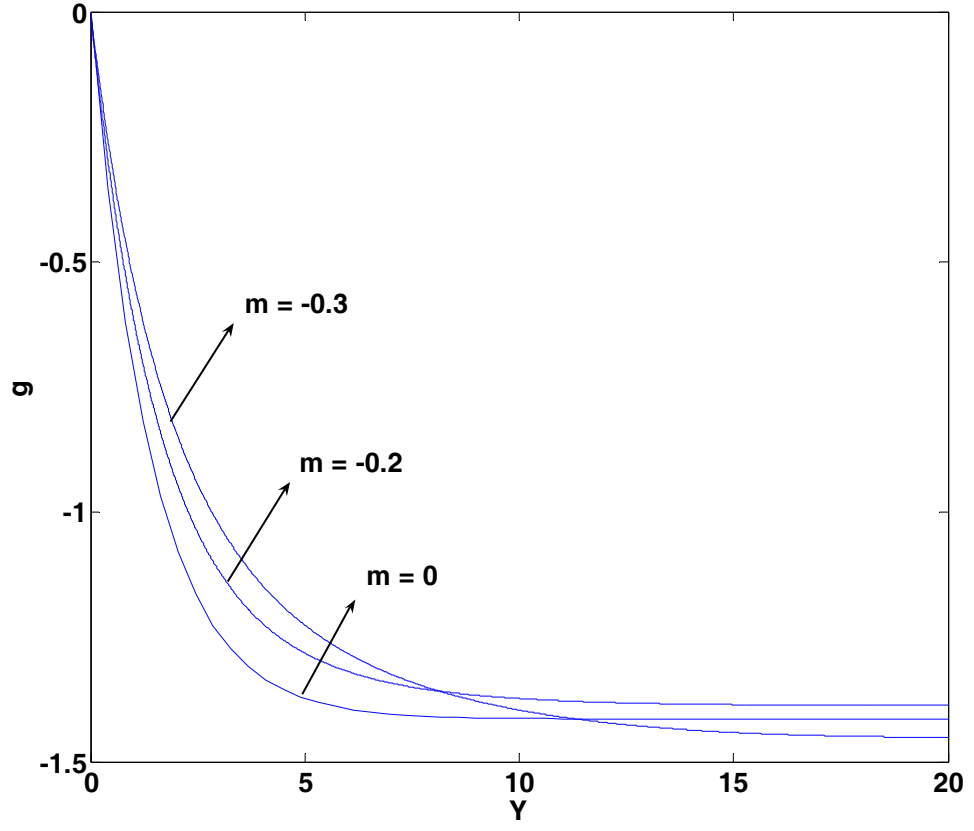
Şekil 6.11 Değişik $m < 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)



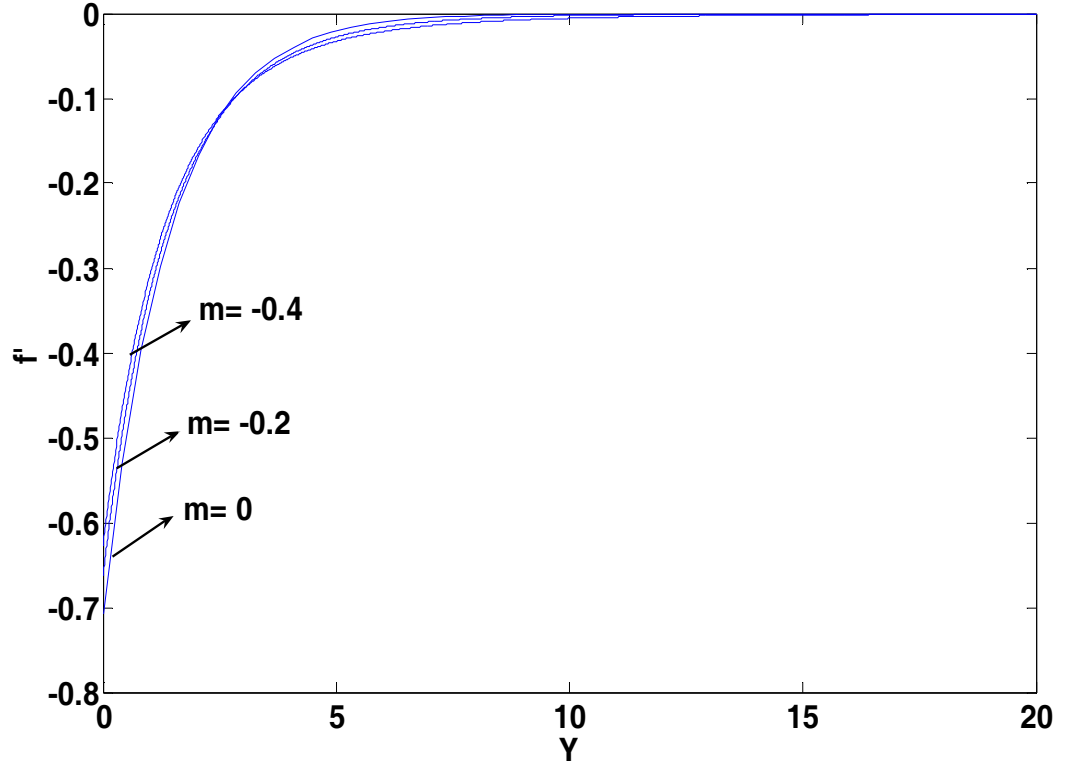
Şekil 6.12 Değişik $m < 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)



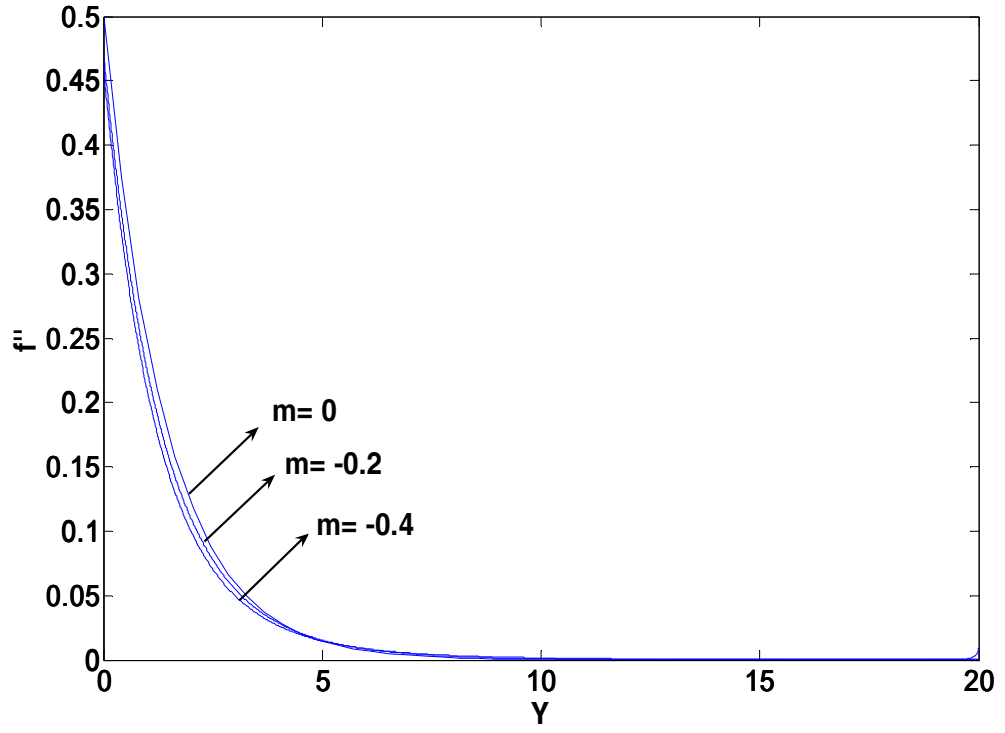
Şekil 6.13 Değişik $m < 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)



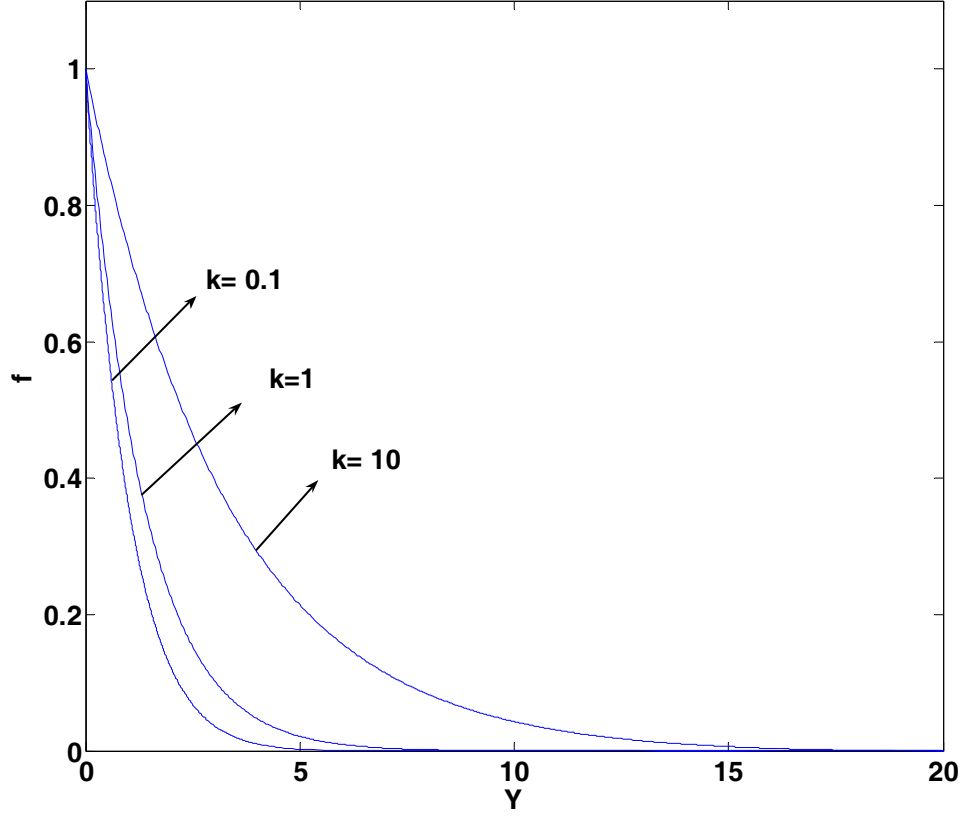
Şekil 6.14 Değişik $m < 0$ değerleri için g fonksiyonu ($k_1=1$)



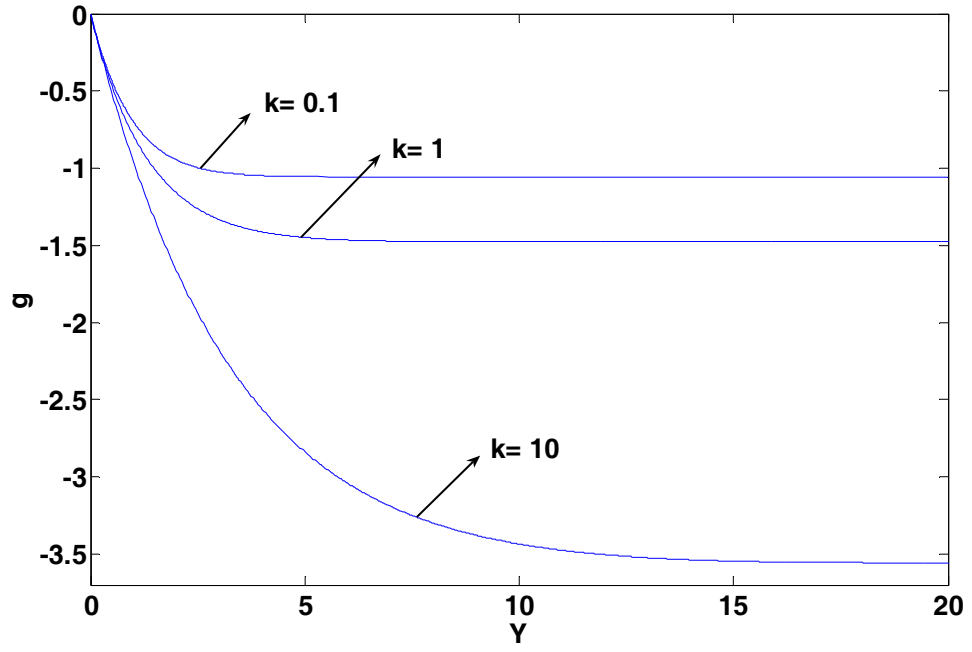
Şekil 6.15 Değişik $m < 0$ değerleri için f fonksiyonu ($k_1=1$)



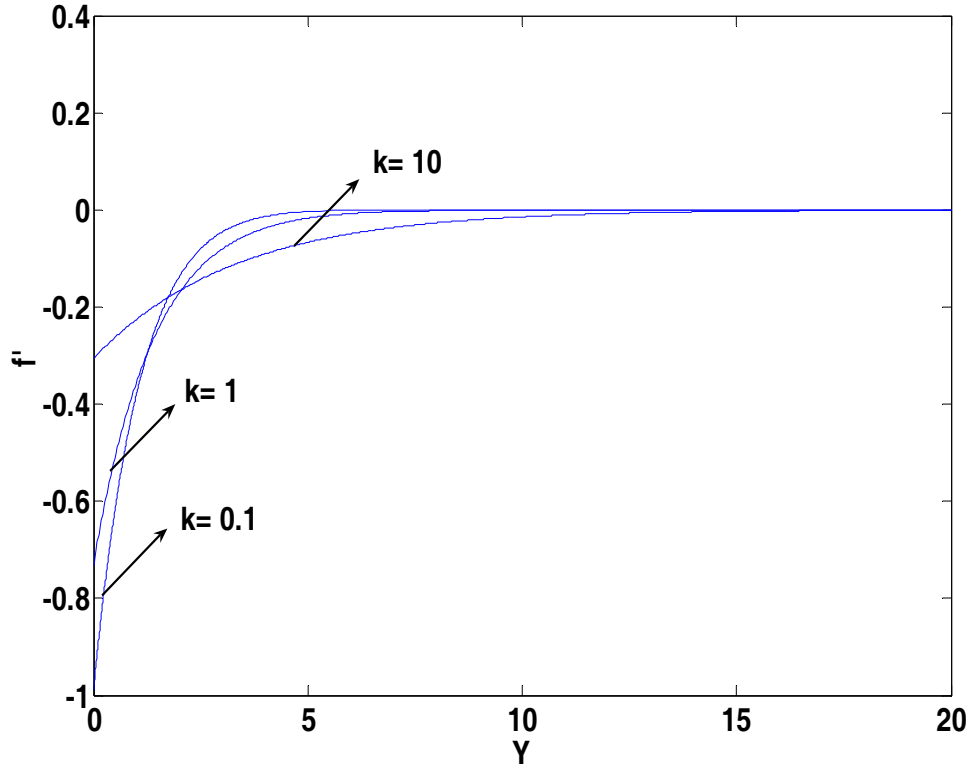
Şekil 6.16 Değişik $m < 0$ değerleri için f'' fonksiyonu ($k_1=1$)



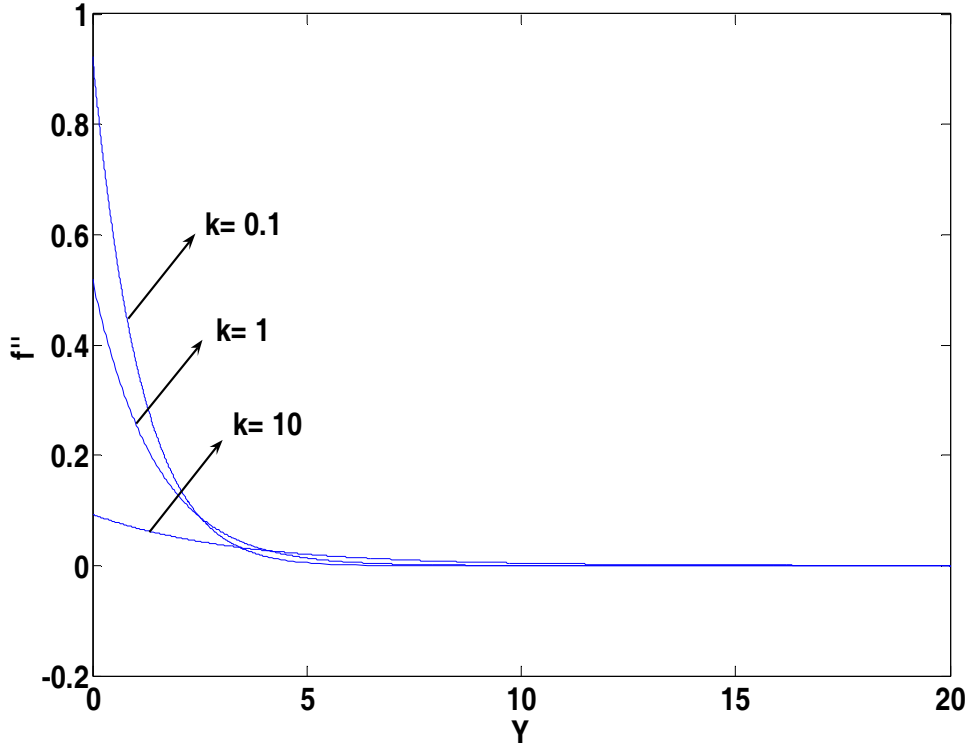
Şekil 6.17 Değişik k değerleri için f fonksiyonu ($m=0.1$)



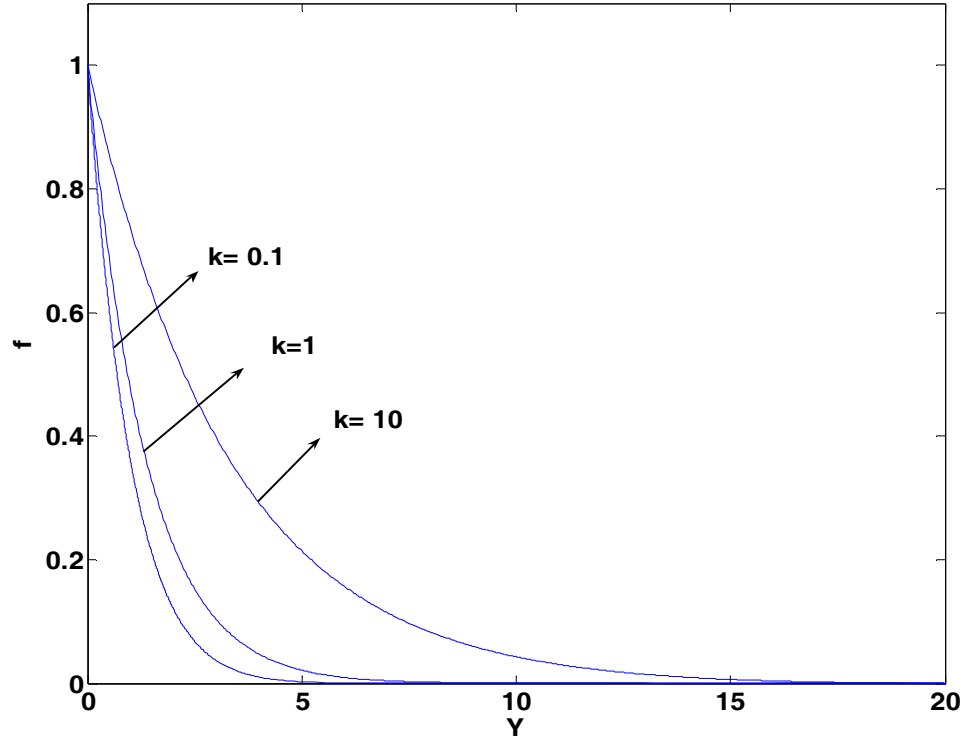
Şekil 6.18 Değişik k değerleri için g fonksiyonu ($m=0.1$)



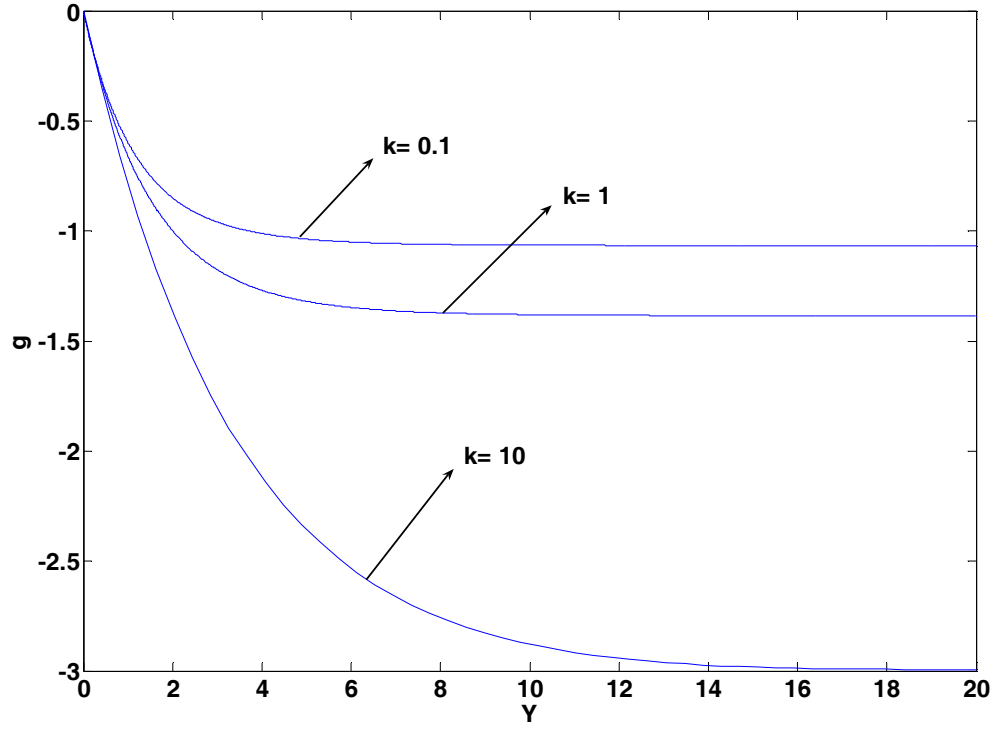
Şekil 6.19 Değişik k değerleri için f' fonksiyonu ($m=0.1$)



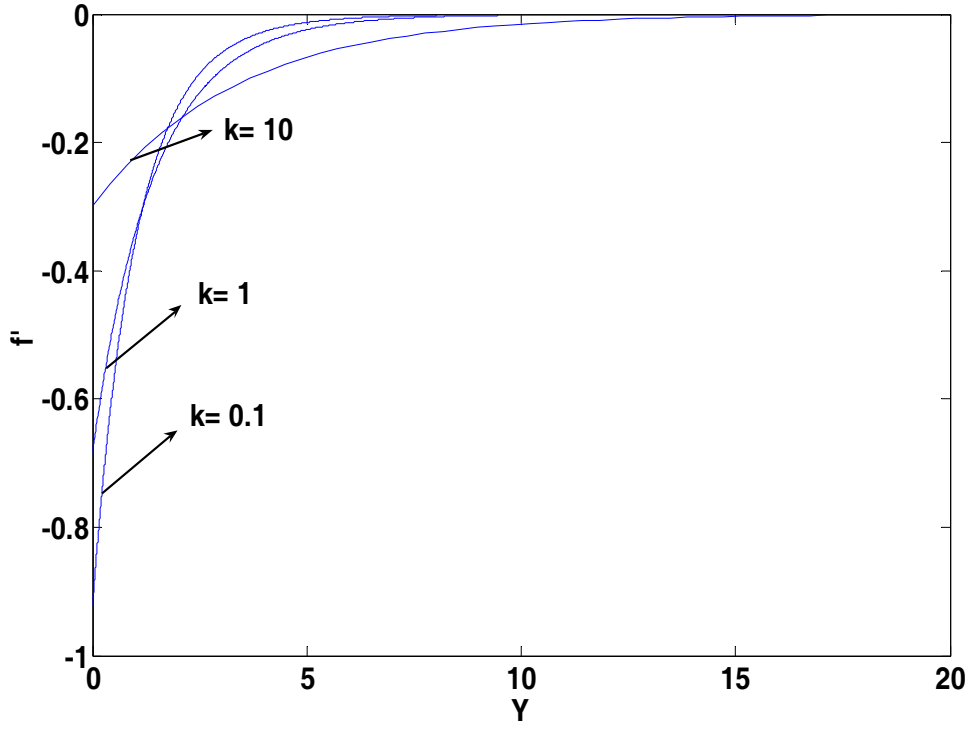
Şekil 6.20 Değişik k değerleri için f'' fonksiyonu ($m=0.1$)



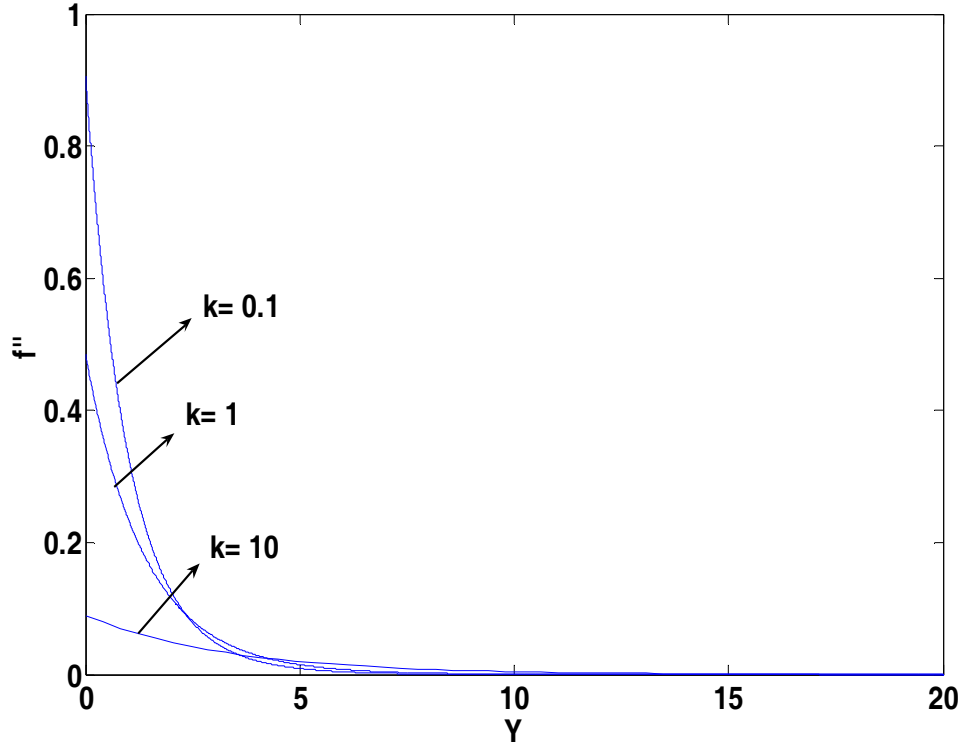
Şekil 6.21 Değişik k değerleri için f fonksiyonu ($m = -0.1$)



Şekil 6.22 Değişik k değerleri için g fonksiyonu ($m = -0.1$)



Şekil 6.23 Değişik k değerleri için f' fonksiyonu ($m = -0.1$)



Şekil 6.24 Değişik k değerleri için f'' fonksiyonu ($m = -0.1$)

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada önce genelleştirilmiş ikinci derece bir akışkan için kartezyen koordinatlarda boyutsuz hareket denklemleri bünye denklemi üzerinden gidilerek çıkarılmıştır. Bu modelin en önemli özelliği farklı m değerleri için kabaran (shear thickening) ve incelen (shear thinning) akışkan özelliğinden başka, elastik etkileri içeren 2. derece özellikleri de içermesidir. Bu modele ait hareket denkleminin sınır tabakası teorisi uygulanmış, modelin ölçekleme dönüşümü kabul ettiği ve bu ölçekleme dönüşümünün klasik sınır tabakasından ziyade özel bir durum olan durgun akışkan içinde gerdirilmiş plaka problemine daha uygun olduğu bulunan kısıtlamalardan gösterilmiştir. Ölçekleme metodu ile kısmi diferansiyel formdan adi diferansiyel forma indirgediğimiz diferansiyel denklem takımımıza çeşitli nümerik metotlar denenmiştir. Başlangıç noktasındaki tekillikten dolayı klasik sonlu farklar algoritması yerine daha gelişmiş, tekil noktalarda adım sayısını değiştirebilen özel bir tekil sınır değer problemi çözücüsü (SBVP) denenmiştir. Power-law akışkanı temsil eden farklı m değerleri ve ikinci derece etkileri temsil eden farklı k_1 değerleri için sonuçlar bulunmuştur. Aynı k_1 değeri için incelen bir akışkanda ($m < 0$) azalan m değeri için sınır tabakasının kalınlaştığı, kabaran bir akışkanda ise ($m > 0$) incelendiği gözlemlenmiştir. Değişik durumlardaki m değerlerinden farklı olarak ikinci derece etkilerin m sabit tutularak artırılması sınır tabakasının kalınlaştırdığı bulunan diğer bir sonuçtur. Nümerik çözümlerden elde edilen diğer bir sonuç ise sınır tabakası denklemlerinin çözüm hassasiyetinin ikinci derece etkilerden (k_1) daha çok farklı m değerlerine bağlı olmasıdır. Farklı m değerleri için bulunan hassas sonuçlar $m = -0.5$ ile 0.5 arasında değişirken, $m = 0$, $m = 0.1$, $m = -0.1$ değerleri için çok farklı ($k_1 = 10$) ikinci derece etkiler denenmiştir. Zaten bu $m = -0.5 - 0.5$ arasında çok farklı power-law akışkanların olması bulunan sonuçların yeterli olmasını göstermektedir.

Görüldüğü gibi deneyselcilerin çok kullandığı power-law tipi akışkan ile daha çok teoriklerin üzerinde çok çalıştığı, çeşitli geometriler için analitik çözümlerin yapıldığı, termodinamik uyumu incelenmiş ikinci derece akışkan birleştirilmiştir. Tabii ki burada yapılan çalışmalar ilerletilebilir. Örneğin önerilen ikinci model olan power-law ikinci derece akışkanı için aynı çözümler yapılabilir. 3. derece akışkanlarda benzer şekilde genelleştirilebilir. Çalışmada ısı alışverişi ihmal edilmiştir. İleriki bir çalışma olarak ısı alışverişi de hesaba katılabilir. Elde ettiğimiz ölçekleme dönüşümünden başka farklı çözüm grupları da araştırılabilir. Sınır tabakası denklemlerinin direk olarak nümerik integrasyonu yapılabilir.

Ayrıca bu konuda yapılacak deneysel çalışmalar da faydalı olacaktır. Elde ettiğimiz hareket denklemleri kullanılarak değişik tipte akışlar incelenebilir.

8. KAYNAKLAR

- [1] M. Reiner, 1945, Mathematical Theory of Dilatancy, Am J. Math. 67, 350-362 p.
- [2] R.L. Rivlin, 1948, The Hydrodynamics of non Newtonian Fluids, Proc R. Soc. London A 193, 260-281 p.
- [3] J. G. Oldroyd, 1950, On the Formulation of Rhological Equations Of State, Proc R. Soc. A200, 523-541
- [4] W. Noll, 1955, On the Continuity of the Solid and Fluid States, J. Ration. Mech. Anal. 4 , 3-81
- [5] B.R. Bird ,1976, Useful non-Newtonian Models, Ann. Rev. Fluid Mech. 8, 13-34.
- [6] B.R. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, 1977, Dynamics of Polymeric Liquids, vol. 1, Wiley, New York.
- [7] C.S. Man, Q. X. Sun, 1987, On the Significance of Normal Stress Effects in the Flow of Glaciers, J. Glaciology 33, 268-273.
- [8] C.S. Man, 1992, Nonsteady Channel Flow of Ice As a Modified Second-Order Fluid with Power-Law Viscosity, Arch. Rational Mech. Anal. 119, 35-57.
- [9] H. Franchi, B. Straughan, 1993, Nonexistence Results in the Generalized Theory of a Fluid of Second Grade, J. Math. Anal. Appl. 180, 122-137 p.
- [10] G. Gupta, Massoudi, 1993, Flow of a Generalized Second Grade Fluid Between Heated Plates, Acta Mech. 99, 21-33 p.
- [11] M. Massoudi, T. X. Phuoc, 2001, Fully Developed Flow of a Modified Second Grade Fluid with Temperature Dependent Viscosity, Acta Mech. 150, 23-37 p.

- [12] M. Massoudi, T. X. Phuoc, 2004, Flow of a Generalized Second Grade non-Newtonian Fluid with Variable Viscosity, *Continuum Mech. Thermodyn.* 16, 529-538 p.
- [13] T. Hayat, M. Khan, 2005, Homotopy Solutions for a Generalized Second-Grade Fluid Past a Porous Plate, *Nonlinear Dynamics* 42, 395-405 p.
- [14] J.E. Dunn, R.L. Fosdick, 1974, Thermodynamics, Stability and Boundedness of Fluids of Complexity 2 and Fluids of Second Grade. *Arch. Rational Mech. Anal.* 56, 191-252 p.
- [15] K. R. Rajagopal, R.L. Fosdick, 1980, Thermodynamics and Stability of Fluids of Third Grade Proc. Roy. Soc., London, Series A 339, 351-377 p.
- [16] J.E. Dunn, K.R. Rajagopal, 1995, Fluids of Differential Type: Critical Review and Thermodynamic Analysis, *Int. J. Engineering Sci.* 33, 689-729 p.
- [17] M. Massoudi, A. Vaidya, 2007, On some Generalizations of the Second Grade Fluid Model, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, to be published.
- [18] J. B. McLeod, K. R. Rajagopal, 1987, On the Uniqueness of Flow of the Navier-Stokes Fluid due to a Stretching Boundary, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 98, 385-393 p.
- [19] K. R. Rajagopal, T. Y. Na, A.S. Gupta, 1984, Flow of a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet, *Rheologica Acta* 23, 213-215 p.
- [20] W.C. Troy, E.A. Overman, G.B. Ermentrout, 1987, Uniqueness of a Flow a Second Order Fluid past a Stretching Sheet, *Quart. Appl. Math.* 44, 753-755 p.
- [21] K. Vajravelu, D. Rollins, 1991, Heat Transfer in a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet, *J. Math. Anal. Appl.* 158, 241-255 p.
- [22] M. Pakdemirli, 1991, İkinci Derece Akışkanlar İçin Sınır Tabakası Denklemlerinin Benzerlik Çözümleri, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, İstanbul.

[23] Mishra S.P., 1966, Free Convection Flow of a Second Order Fluid Past a Hot Vertical Plate, Proc. Ind. Acad. Sciences LXIV, 291-303 p.

[24] H. Schlichting, 1951, Boundary-Layer Theory, McGraw Hill, New York.

[25] G. W. Bluman, S. Kumei, 1989 Symmetries and Differential Equations, Springer Verlag, New York, 1989.

[26] H. Stephani, 1989, Differential Equations: Their Solution Using Symmetries, Cambridge University Press, New York.

9. EK: SONLU FARKLAR METODUNU KULLANAN PROGRAM

```

function out=secondgrade(flag,x,y,ya,yb,k,m)
%   k = ;
%   [tau,y] = sbvp('',' ',' ',' ',k,m);

switch flag
    case 'f' % diferansiyel denklemin sađ tarafı
        A=k*(1-m)*y(2);
        B=(y(1)^2)+(1-m)*y(2)*y(3)-(1-m^2)*((abs(y(3)))^m)*y(4)-
        k*(2*y(1)*y(4)-(y(3)^2));
        if y(2)==0 || y(3)==0
            out= [y(3)
                -y(1)/(1-m)
                y(4)
                0];
        else
            out= [y(3)
                -y(1)/(1-m)
                y(4)
                B/A];
        end
    case 'df/dy' % Jakobiyenler
        if y(2)==0 || y(3)==0
            C=0;
            D=0;
            E=0;
            G=0;
        else
            C=((2*y(1))/(k*(1-m)*y(2)))-((2*y(4))/((1-m)*y(2)));
            D=(-y(1)^2)/(k*(1-
            m)*y(2)^2)+(1+m)*((abs(y(3)))^m)*y(4)/(k*(y(2)^2)+(2*y(1)*y(4))
            /((1-m)*(y(2)^2)-(y(3)^2)/((1-m)*(y(2)^2)));
            E=(1/k)-((1+m)*m*((abs(y(3)))^(m-1))*y(4))/(k*y(2)+(2*y(3))/((1-
            m)*y(2)));
            G=(-1*(1+m)*((abs(y(3)))^m)/(k*y(2))-(2*y(1))/y(2));
        end
        out=[0,0,1,0
            -1,0,0,0
            0,0,0,1
            C,D,E,G];
    case 'R' % sınır koşulumuz
        out=[ya(1)-1;ya(2);yb(1);yb(3)];
    case 'dR/dya' % ya sınır koşulunun jakobiyeni
        out=[1,0,0,0
            0,1,0,0
            0,0,0,0
            0,0,0,0];
    case 'dR/dyb' % yb sınır koşulunun jakoniyeni
        out=[0,0,0,0

```

```
        0,0,0,0
        1,0,0,0
        0,0,1,0];
case 'tau'
    out=linspace(0,20,50);
case 'bvpop' % çözüm seçenekleri
    out = sbvpset('RelTol','', 'AbsTol','');
otherwise
error('unknown flag');
end
```