MANİFOLDLARIN TOPOLOJİSİ

Uğur YILMAZ

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Bilim Uzmanlığı Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran, 2007

KABUL:

Uğur YILMAZ tarafından hazırlanan "MANİFOLDLARIN TOPOLOJİSİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Bilim Uzmanlığı Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 22/06/2007

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA (ZKÜ)

Üye : Yrd. Doç. Dr. İmdat İŞCAN (GİRESUN ÜNİV.)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (ZKÜ)

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .. / .. /2007

Doç. Dr. Mustafa SÖZEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bilim Uzmanlığı Tezi

MANİFOLDLARIN TOPOLOJİSİ

UĞUR YILMAZ

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA
Haziran, 2007, 53 sayfa

Bu tezde, ilk iki bölümde topolojik uzaylarla ilgili bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde m-boyutlu topolojik ve düzgün manifold kavramı çalışılmıştır. Son bölümde, kompakt topolojik manifoldların bir Öklid uzayına gömülebildiği ve özellikle de 2-boyutlu kompakt topolojik manifoldların bilinen sınıflandırılması, Kahn (1995) de olduğu gibi incelenmiştir. Bu çalışma için temel kaynaklarımız Bülbül (2004), Kahn (1995), Sabuncuoğlu (2004) dür.

Anahtar Sözcükler: Topolojik ve düzgün manifold, Kompaktlık, Birimin parçalanışı, Manifoldların gömülmesi, Kompakt yüzeyler.

Bilim Kodu: 404.04.01.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

TOPOLOGY OF MANİFOLDS

UĞUR YILMAZ

Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Yusuf KAYA

June, 2007, 53 pages

In this thesis, in the first two chapters, some facts related to topological spaces are given. In the third chapter, m-dimensional topological and smooth manifolds are studied. In the last chapter, embeddibility of compact manifolds into an Euclidean space and, in particular, the known classification of 2-dimensional compact manifolds is examined as in Kahn (1995). Our main references for this study are Bülbül (2004), Kahn (1995), Sabuncuoğlu (2004).

Key Words: Topological and Smooth Manifold, Compactness, Partitions of Unity, Embedding of Manifolds, Compact Surfaces.

Science Code: 403.04.01.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince benden yardımlarını ve ilgisini esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA' ya, Yüksek Lisans eğitimim sürecinde benden manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen önce anne ve babam olmak üzere bütün aileme, Tez çalışmamın son anlarına denk gelmiş olmasına rağmen benle beraber yoğun çaba harcayan sevgili eşime, Zonguldak Anadolu Teknik Lisesi sayın yöneticilerine ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

SİMGELER DİZİNİ

$\Im$	:	topolojik yapı
A°	:	A nın içi
$\overline{A}$	:	A nın kapanışı
df_x	:	f nin x noktasındaki diferensiyeli
$\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$	:	f nin x_i değişkenine göre kısmi türevi
$Df(x)$	:	f nin x noktasındaki Jakobiyeni
$\mathbb{A}$	:	tam atlas
$\mathbb{R}^{m+1}$	:	$(m+1)$-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{S}^m$	:	m-boyutlu birim küre yüzeyi
φ	:	koordinat sistemi
M^m	:	m-boyutlu bir manifold
P^m	:	m-boyutlu projektif düzlem
T^2	:	2-boyutlu tor yüzeyi
K^2	:	2-boyutlu klein şişesi

BÖLÜM 1

GENEL TANIMLAR

1.1 TOPOLOJİK UZAYLARDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 X boştan farklı bir küme ve $\Im$, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\Im$ ailesine X üzerinde bir ***topoloji*** (veya ***topolojik yapı***) denir.

i) $X, \phi \in \Im$,

ii) $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \Im \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \Im, \quad n \in \mathbb{N}$,

iii) Λ bir indis kümesi olmak üzere $\lambda \in \Lambda, G_\lambda \in \Im \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$.

$\Im$, X üzerinde bir topoloji ise $(X, \Im)$ ikilisine ***topolojik uzay*** denir. $\Im$ nin elemanlarına da bu topolojik uzayın "***açık kümeleri***" adı verilir.

Tanım 1.1.2 $(X, \Im)$ bir topolojik uzay, $U \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer bir $G \in \Im$ kümesi için $x \in G \subset U$ sağlanıyorsa bu $U \subset X$ kümesine $x \in X$ noktasının bir komşuluğu denir. Bir $x \in X$ noktasının tüm komşuluklarından oluşan aile $\mathbb{U}_\Im(x)$ ile gösterilir.

$(X, \Im)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$\overset{o}{A} = \{x \in X \ : \ \exists U \in \mathbb{U}_\Im(x) \text{ için } x \in U \subset A\}$, $\overline{A} = \{x \in X \ : \ \forall U \in \mathbb{U}_\Im(x) \text{ için } U \cap A \neq \varnothing\}$

kümelerine sırasıyla A nın ***içi*** ve ***kapanışı*** denir.

A° açık, $\overline{A}$ kapalı bir kümedir.

Tanım 1.1.3 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x,y\in X$ ve $x\neq y$ için $G,H\subset X$ açık alt kümeleri, $x\in G$, $y\in H$ ve $G\cap H=\varnothing$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa $(X,\Im)$ topolojik uzayına bir ***Hausdorff Uzayı*** veya T_2***-Uzayı*** denir.

Tanım 1.1.4 $(X,\Im)$ ve $(Y,\Im^*)$ iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ noktasının her açık V komşuluğu için $f(U)\subset V$ olacak şekilde x_0 noktasının en az bir U açık komşuluğu mevcut ise f fonksiyonuna x_0 ***noktasında süreklidir*** denir.

Eğer f fonksiyonu her $x\in X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna X ***kümesi üzerinde süreklidir*** veya kısaca ***süreklidir*** denir.

Tanım 1.1.5 $(X,\Im)$ ve $(Y,\Im^*)$ iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir bire-bir ve örten fonksiyon olsun. Eğer hem f hem de f^{-1} sürekli ise f ye bu topolojik uzaylar arasında ***homeomorfizma*** (veya ***topolojik eşyapı dönüşümü***) adı verilir.

Eğer iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizma varsa bu iki uzaya ***homeomorfik*** veya ***topolojik eşyapılı uzaylar*** denir.

Tanım 1.1.6 $(X,\Im)$ topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. I, indis kümesi olmak üzere, $(U_\lambda)_{\lambda\in I}$, A nın bir örtümü, yani $A\subset\bigcup_{\lambda\in I}U_\lambda$ olsun. Eğer her $\lambda\in I$ için U_λ açık, yani $U_\lambda\in\Im$ ise $(U_\lambda)_{\lambda\in I}$ ailesine A kümesinin bir ***açık örtümü*** denir.

Tanım 1.1.7 X bir küme $A\subset X$ ve $\mathbb{U}=(U_\lambda)_{\lambda\in I}$, A nın bir örtümü olsun. Eğer bir $I'\subset I$ için $\mathbb{U}'=(U_\lambda)_{\lambda\in I'}$ ailesi A nın yine bir örtümü oluyorsa $\mathbb{U}'$ ne $\mathbb{U}$ nun bir ***alt örtümü*** denir.

Tanım 1.1.8 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin $(X,\Im)$ topolojik uzayındaki her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü bulunabiliyorsa A kümesine ***kompakttır*** denir.

Tanım 1.1.9 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyor ise bu $(X,\Im)$ topolojik uzayına ***bağlantılıdır*** denir.

Teorem 1.1.1 $(X,\Im)$ bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ $(X,\Im)$ da $\varnothing$ ve X den başka hem açık ve hem de kapalı küme yoktur (Bülbül, 2004).

Tanım 1.1.10 Bir A kümesi doğal sayılar kümesinin bir alt kümesine denk ise A ya ***sayılabilir bir küme*** denir. Başka bir deyişle, $f : A \to \mathbb{N}$ bire bir fonksiyonu tanımlanabiliyorsa, A kümesine ***sayılabilirdir*** denir.

Tanım 1.1.11 Bir topolojik uzayın her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa, bu topolojik uzaya ***birinci sayılabilir uzay*** veya kısaca $A_1 -$ ***uzayı*** denir.

Tanım 1.1.12 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve $\mathbb{B} \subset \Im$ olsun. Eğer, her $G \in \Im$ için $\exists \mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$ öyle ki $G = \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B$ şeklinde yazılabiliyorsa bu $\mathbb{B}$ ailesine $\Im$ topolojisi için bir ***taban*** adı verilir.

Teorem 1.1.2 X bir küme ve $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ olsun. $\mathbb{B}$ nin X üzerindeki bir topolojinin tabanı olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

i) $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$ ve

ii) Her $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists B_x \in \mathbb{B}$ öyle ki $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$ sağlanmasıdır (Bülbül, 2004).

1.2 ÇARPIM UZAYLARI

Tanım 1.2.1 $(X_1,\Im_1)$, $(X_2,\Im_2)$ iki topolojik uzay ise $\mathbb{B}=\{O_1\times O_2 \mid O_1\in\Im_1, O_2\in\Im_2\}$ ailesi $X_1\times X_2$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir topolojinin tabanıdır. Bir tabanı $\mathbb{B}$ ailesi olan topolojiye $\Im_1$ ve $\Im_2$ nin çarpım topolojisi denir ve $\Im_1\times\Im_2$ ile gösterilir. $(X_1\times X_2,\Im_1\times\Im_2)$ topolojik uzayına da $(X_1,\Im_1)$, $(X_2,\Im_2)$ topolojik uzaylarının ***çarpım topolojik uzayı*** denir.

Gerçekten, $\mathbb{B}$ ailesi, $X_1\times X_2$ kümesi üzerinde bir topolojinin tabanıdır. $\mathbb{B}$ ailesi Teorem 1.1.12 nin *i)* ve *ii)* şartlarını sağlar. $X_1\times X_2\in\Im_M\times\Im_N$ olup a şıkkı sağlanır. $U_1\times V_1\in\mathbb{B}$ ve $U_2\times V_2\in\mathbb{B}$ ise, $(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$ olduğundan b şıkkı da sağlanır.

Tanım 1.2.2 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve $N\subset X$ bir alt küme olsun. Eğer $\overline{N}=X$ ise N alt kümesine $(X,\Im)$ topolojik uzayında ***yoğundur*** denir.

Tanım 1.2.3 Bir topolojik uzayın sayılabilir bir topoloji tabanı varsa, bu topolojik uzaya ***ikinci sayılabilir uzay*** veya kısaca $A_2-uzayı$ denir.

Tanım 1.2.4 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve $I=[0,1]$ kapalı aralığı olmak üzere her $f:I\to X$ sürekli fonksiyonuna bu topolojik uzayda bir ***yol*** veya ***eğri*** denir. Eğer $f(0)=x$ ve $f(1)=y$ ise f yolu x ve y noktalarını birleştiriyor denir.

Tanım 1.2.5 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her iki noktası bu uzayda bir yol ile birleştirilebiliyorsa, diğer bir ifade ile, her $x,y\in X$ için $\exists f:I\to X$ sürekli, $f(0)=x$ ve $f(1)=y$ yazılabiliyorsa, bu $(X,\Im)$ topolojik uzayına ***yol bağlantılıdır*** denir.

Bir alt kümenin yol bağlantılı olması, o küme üzerindeki alt uzayın yol bağlantılı olması ile tanımlanır.

Teorem 1.2.1 Yol bağlantılı her topolojik uzay bağlantılıdır (Bülbül, 2004).

1.3 BÖLÜM UZAYLARI

Tanım 1.3.1 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay, $Y \neq \varnothing$ bir küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli yapan Y üzerindeki en ince topoloji olan

$$\Im_f^* = \left\{ H \in Y \;\middle|\; f^{-1}(H) \in \Im \right\}$$

topolojisine, f nin Y üzerinde ürettiği ***tümel topoloji*** veya ***bitiş topolojisi*** denir.

$(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve "$\sim$" X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bir $x \in X$ noktasının denklik sınıfı $[x] := \{ y \in X \;|\; x \sim y \}$ olmak üzere $X/\sim := \{ [\mathrm{x}] \;|\; x \in X \}$ sınıflar kümesine X in "$\sim$" bağıntısına göre bölüm kümesi denir.

$(X,\Im)$ topolojik uzay ve "$\sim$" denklik bağıntısı verildiğinde $f : X \rightarrow X/\sim$, $f(x) := [x]$ fonksiyonu ile $X/\sim$ bölüm kümesi üzerinde üretilen tümel topolojiye bölüm topolojisi ve bu topoloji ile $X/\sim$ bölüm kümesine yani $(X/\sim, \Im_f^*)$ topolojik uzayına da $(X,\Im)$ topolojik uzayının bir ***bölüm uzayı*** denir. Bu f fonksiyonuna da ***bölüm fonksiyonu*** adı verilir.

1.4 TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Tanım 1.4.1 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay olsun.

i) Eğer her $x, y \in X, x \neq y$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme, $(x \in G, y \notin G)$ ve $(x \notin H, y \in H)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, bu $(X,\Im)$ topolojik uzayına bir T_1-***uzayı*** denir.

ii) Eğer her kapalı $A \subset X$ ve $x \notin A$ için G ve H açık altkümeleri, $x \in G$, $A \subset H$ ve $G \cap H = \varnothing$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu $(X,\Im)$ topolojik uzayına bir T_3-***uzayı*** denir.

iii) Hem T_1-*uzayı* hemde T_3-*uzayı* olan bir topolojik uzaya ***regüler uzay*** denir.

Teorem 1.4.1 $(X,\Im)$ topolojik uzayının bir T_3-*uzayı* olması için gerek ve yeter koşul, her $x\in X$ noktasında kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanının bulunmasıdır (Bülbül, 2004).

Tanım 1.4.2 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her kapalı $A,\ B\subset X$ ve $A\cap B=\varnothing$ için G ve H açık altkümeleri, $A\subset H$, $B\subset G$ ve $G\cap H=\varnothing$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu $(X,\Im)$ topolojik uzayına bir T_4-***uzayı*** denir.

Teorem 1.4.2 (*Urysohn Lemması*) $(X,\Im)$ topolojik uzayı bir T_4-*uzayıdır* $\Leftrightarrow$ $(X,\Im)$ da kapalı ve ayrık herhangi iki A ve B kümeleri için $f(A)\subset\{0\}$ ve $f(B)\subset\{1\}$ koşullarını sağlayan bir $f:X\to[0,1]\subset\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır (Bülbül, 2004).

1.5 $\mathbb{R}^m$ DE TÜREVLENEBİLME

Tanım 1.5.1 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ ve $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Eğer f nin her bir değişkene göre $r.$ dereceden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna C^r sınıfındandır denir.

Tanım 1.5.2 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonu C^1 sınıfından olsun. $1\le i\le n$ ve $1\le j\le m$ olmak üzere $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{n\times m}$ matrisine f nin x noktasındaki ***jakobiyen matrisi*** denir ve $Df(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.3 U ve V, $\mathbb{R}^m$ nin açık alt alt kümeleri ve $f:U\to V$ fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu bir homeomorfizma ve f, f^{-1} fonksiyonları C^r-sınıfından ise f fonksiyonuna C^r ***-difeomorfizma*** denir. C^∞ **-** *difeomorfizma* yerine kısaca ***difeomorfizma*** denir.

BÖLÜM 2

PARAKOMPAKTLIK VE METRİKLENEBİLME

Bu bölümde manifoldların topolojisini daha yakından tanımaya yardımcı olacak olan parakompakt topolojik uzaylar çalışılacaktır. Bu amaçla Bülbül (2004) den bir derleme yapılacaktır.

2.1 PARAKOMPAKT UZAYLAR

Tanım 2.1.1 X bir küme, $\mathbb{U}$ ve $\mathbb{V}$, X 'in iki örtümü olsunlar. Eğer her $U \in \mathbb{U}$ için $U \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathbb{V}$ varsa, bu $\mathbb{U}$ örtümüne $\mathbb{V}$ nin bir ***inceltilmişi*** denir ve $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.2 $(X, \Im)$ bir topolojik uzay ve $\mathbb{U} \subset \mathbb{P}(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının $\mathbb{U}$ nun en çok sonlu sayıda elemanını kesen bir komşuluğu varsa, bu $\mathbb{U}$ ailesine ***yerel sonlu aile*** denir. Eğer her $x \in X$ noktası $\mathbb{U}$ nun en çok sonlu sayıda elemanının içine düşüyorsa, o takdirde bu $\mathbb{U}$ ailesine ***nokta sonlu*** aile adı verilir. Açıkça görüldüğü gibi her yerel sonlu aile aynı zamanda nokta sonludur.

Teorem 2.1.1 $(X, \Im)$ bir topolojik uzay ve $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, X$ in alt kümelerinin yerel sonlu bir ailesi ise, $\{\overline{A_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesi de yerel sonludur.

İspat $x \in X$ herhangi iki nokta olsun. $U \in \mathbb{U}_\Im(x)$ açık komşuluğu $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ için $U \cap A_\lambda = \varnothing$ koşulunu sağlasın. Buradan, her $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ için $U \cap \overline{A_\lambda} = \varnothing$ elde edilir.

Teorem 2.1.2 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer $\{A_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ yerel sonlu bir aile ise, $\bigcup\limits_{\lambda\in\wedge}\overline{A_\lambda}=\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\wedge}A_\lambda}$ sağlanır. Bunun sonucu olarak, kapalı kümelerin yerel sonlu bir ailesinin birleşimi de kapalıdır.

İspat Her $\lambda\in\Lambda$ için $\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$ olduğundan $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$ dir. Diğer yandan $x\in\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$ olsun. Her $U\in\mathbb{U}_\Im(x)$ için $U\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\neq\varnothing$ olmalıdır. Fakat $\{A_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ yerel sonlu olduğundan, $\exists U^*\in\mathbb{U}_\Im(x)$ ve $n\in\mathbb{N}$ öyleki $\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ için $U^*\cap A_\lambda=\varnothing$ yazılabilir. Buradan $U^*\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_n}A_\lambda\right)=\varnothing$, dolayısıyla $x\notin\overline{\bigcup\limits_{\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_n}A_\lambda}$ dir. Fakat $x\notin\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}=\left(\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}}\right)\cup\left(\overline{\bigcup\limits_{\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_n}A_\lambda}\right)$ olduğundan $x\in\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_{\lambda_i}}$ dir. Buradan en az bir $k\in\{1,2,.....,n\}$ için $x\in\overline{A_{\lambda_k}}$ ve dolayısıyla $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ elde edilir.

Tanım 2.1.3 Bir $(X,\Im)$ Hausdorff uzayının her açık örtümünün açık ve yerel sonlu bir inceltilmişi varsa bu $(X,\Im)$ topolojik uzayına ***parakompakttır*** denir.

Tanım 2.1.4 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve $\mathbb{U}\subset\mathbb{P}(X)$ olsun. Eğer her bir $\mathbb{U}_n$ yerel sonlu olmak üzere $\mathbb{U}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{U}_n$ şeklinde yazılabiliyorsa, bu $\mathbb{U}$ ailesine $\sigma-$ ***yerel sonlu aile*** denir.

Teorem 2.1.3 Bir $(X,\Im)$ regüler uzayı için aşağıdaki ifadeler denktirler:

i) $(X,\Im)$ parakompakttır,

ii) X in her açık örtümünün bir $\sigma-$ yerel sonlu açık inceltilmişi vardır,

iii) X in her açık örtümünün (açık olması gerekmeyen) yerel sonlu bir inceltilmişi vardır,

iv) X in her açık örtümünün yerel sonlu bir kapalı inceltilmişi vardır.

İspat i) $\Rightarrow$ **ii)** tanımdan açıktır.

ii) $\Rightarrow$ **iii)** $\mathbb{U}, X$ in bir açık örtümü ve $\mathbb{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}_n$ bunun $\sigma -$ yerel sonlu ve açık bir inceltilmişi olsun. Buradaki her bir $\mathbb{V}_n$ yerel sonlu bir açık küme ailesidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{V}_n := \{V_{n\alpha} | \alpha \in \Lambda\}$ ve $W_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_{n\alpha}$ ile gösterilirse, $\{W_1, W_2, ...\}$, X in bir örtümüdür. Eğer $A_n := W_n - \bigcup_{i<n} W_i$ olarak tanımlanırsa, $\mathbb{U}^* := \{A_n \cap V_{n\alpha} \,|\, \alpha \in \Lambda, n = 1, 2, ...\}$ ailesinin $\mathbb{U}$ nun aranan yerel sonlu inceltilmişi olduğu görülür. Gerçekten, $\mathbb{U}^*$ önce $\mathbb{V}$ nin ve o nedenle de $\mathbb{U}$ nun bir inceltilmişidir. Diğer yandan, her $x \in X$ için $x \in A_n \subset W_n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$; ve $\mathbb{V}_n$ **,** $\mathbb{W}_n$ nin bir örtümü olduğundan da $x \in V_{n\alpha}$ olacak şekilde bir $V_{n\alpha} \in \mathbb{V}_n$ vardır. Şu halde $x \in A_n \cap V_{n\alpha}$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{U}^*$, X in bir örtümüdür.

Şimdi de $\mathbb{U}^*$ ın yerel sonlu olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için $x \in \bigcup_{n=1}^{k} W_n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $\bigcup_{n=1}^{k} W_n$ açık ve $\mathbb{V}$ nin yerel sonlu olduğundan, x in öyle bir U_m komşuluğu vardır ki $\mathbb{V}_m$ nin en çok sonlu sayıda elemanını keser ve $x \in U_m \subset \bigcup_{n=1}^{k} W_n$ koşulunu sağlar. Şu halde $U := \bigcap_{m=1}^{k} U_m$ da x in bir komşuluğudur ve $j > k$ için $U \cap A_j = \varnothing$ olduğundan U **,** $\mathbb{U}^*$ ın en çok sonlu sayıda elemanını keser.

iii) $\Rightarrow$ **iv)** $\mathbb{U}, X$ in bir açık örtümü olsun. Her $x \in X$ için bir $U_x \in \mathbb{U}, x \in U_x$ olacak şekilde seçilsin. $(X, \mathfrak{I})$ regüler olduğundan, $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$ olacak şekilde bir V_x açık kümesi vardır. $\mathbb{V} := \{V_x | x \in X\}$, X in bir açık örtümüdür. $\mathbb{A} := \{A_\nu | \nu \in I\}$, $\mathbb{V}$ nin yerel sonlu bir inceltilmişi olsun. $\mathbb{A}^* := \left\{ \overline{A_v} \middle| v \in I \right\}$ da X 'in yerel sonlu bir örtümüdür ve her $v \in I$ için, eğer $A_v \subset V_x$ ise, $\overline{A_v} \subset \overline{V_x} \subset U_x$ olacak şekilde bir $U_x \in \mathbb{U}$ mevcut olduğundan $A^*, \mathbb{U}$ nun kapalı bir inceltilmişidir.

iv) $\Rightarrow$ **i)** $\mathbb{U}$, X 'in bir açık örtümü ve $\mathbb{V}$ bunun yerel sonlu kapalı bir inceltilmişi olsun. Her $x \in X$ için W_x, x in en çok sonlu sayıda $V \in \mathbb{V}$ yi kesen açık komşuluğu olmak üzere $\mathbb{W} = \left\{ W_x \middle| x \in X \right\}$ açık örtümünü göz önüne alalım. $\mathbb{A}$, $\mathbb{W}$ nin yerel sonlu kapalı bir inceltilmişi olsun. Her $V \in \mathbb{V}$ için $\overset{*}{V} := X - \bigcup \left\{ A \in \mathbb{A} \middle| A \cap V = \varnothing \right\}$ olarak tanımlansın. Teorem 2.1.2 e göre her bir $\overset{*}{V}$ açıktır. $\mathbb{V}$ bir örtüm olduğundan, her $x \in X$ için $x \in V$ olacak şekilde bir $V \in \mathbb{V}$ vardır. Bu V ile elde edilen $\overset{*}{V}$ da x i içerir. Bu, $\overset{*}{V}$ ın tanımından kolayca görülür. O halde ; $\overset{*}{\mathbb{V}} := \left\{ \overset{*}{V} \middle| V \in \mathbb{V} \right\}$ X 'in bir açık örtümüdür.

Şimdi de $\overset{*}{\mathbb{V}}$ in yerel sonlu olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için, x in en çok sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \in \mathcal{A}$ kümelerini kesen bir N_x komşuluğu vardır. Fakat $\mathbb{A}$ bir örtüm olduğundan $N_x \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$ sağlanır. Bu nedenle, eğer $N_x \cap \overset{*}{V} \neq \varnothing$ ise,

$N_x \cap \overset{*}{V} \subset \left(A_1 \cap \overset{*}{V} \right) \cup \ldots\ldots \cup \left(A_n \cap \overset{*}{V} \right)$ olduğundan, en az bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $A_k \cap \overset{*}{V} \neq \varnothing$ ve buradan da $A_k \cap V \neq \varnothing$ elde edilir. Diğer yandan $\mathbb{A}$ **,** $\mathbb{W}$ 'nin bir inceltilmişi olduğundan, her A_k bir W_x in içinde bulunur ve her bir W_x en çok sonlu sayıda $V \in \mathbb{V}$ yi kestiğinden, her A_k da en çok sonlu sayıda $V \in \mathbb{V}$ yi keser. O halde $N_x \cap \overset{*}{V} \neq \varnothing$ en çok sonlu sayıda $\overset{*}{V} \in \overset{*}{\mathbb{V}}$ için doğrudur. Bu nedenle $\overset{*}{\mathbb{V}}$ yerel sonludur.

Son olarak, her $V \in \mathbb{V}$ için $V \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathbb{U}$ seçelim. Bu şekilde oluşturulan $\overset{*}{\mathbb{U}} := \left\{ U \cap V \middle| V \in \mathbb{V} \right\}$ ailesi $\mathbb{U}$ nun yerel sonlu ve açık inceltilmişi olur. Bu $\overset{*}{\mathbb{U}}$ ın sadece örtüm olduğunu göstermek yeter. Bu ise, $\mathbb{V}$ nin örtüm ve $V \subset U \cap \overset{*}{V}, (V \in \mathbb{V})$ olmasının bir sonucudur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.5 $(X, \Im)$ bir topolojik uzay olsun. Bu topolojik uzayın her açık örtümünün sayılabilir bir alt örtümü varsa, bu topolojik uzaya bir ***Lindelöf uzayı*** denir.

Teorem 2.1.4 Her regüler Lindelöf uzayı parakompakttır.

İspat $(X, \Im)$ bir regüler Lindelöf uzayı ve $\mathbb{U}$**,** X in bir açık örtümü ise, bunun $\overset{*}{\mathbb{U}}$ gibi sayılabilir bir alt örtümü vardır. Bu $\overset{*}{\mathbb{U}}$, $\mathbb{U}$nun yerel sonlu bir inceltilmişidir.

Teorem 2.1.5 Her kompakt Hausdorff uzayı parakompakttır.

İspat X bir kompakt Hausdorff uzay olsun. X kompakt olduğundan X uzayının her $\mathbb{A}$ açık örtüsünden sonlu bir $\mathcal{B}$ alt örtüsü çıkarılır. $\mathcal{B}$ alt örtüsünün, $\mathbb{A}$ örtüsünün bir incelmişi olduğu kolayca görülür. Ayrıca, X uzayının her x elemanının, $\mathcal{B}$ incelmişinin sonlu sayıda elemanı ile kesişimi boştan farklı olan bir komşuluğu vardır. Çünkü, $\mathcal{B}$ sonludur. Böylece, X uzayının her açık örtüsünün bir yerel sonlu açık incelmişi vardır.

Her kompakt Hausdorff uzayının parakompakt olduğunu gördük ancak her parakompakt uzay kompakt değildir.

Örnek 2.1.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, üzerinde tanımlanmış doğal topolojiye göre parakompakttır; ama kompakt değildir.

Çözüm $\mathbb{R}$ uzayının bir A açık örtüsünü alalım. Bu örtüden, $[n, n+1]$ aralığını örten sonlu sayıda elemanı alıp (bunu yapabiliriz çünkü $[n, n+1]$ aralığının kompakt olduğunu biliyoruz), bunları $(n-1, n+2)$ açık aralığı ile kesiştirelim. Bu kesişimden elde ettiğimiz koleksiyonları B_n ile gösterelim. B_n kolleksiyonlarının birleşiminden elde edilen B koleksiyonu , A açık örtüsünün bir yerel sonlu açık incelmişidir. Bu da , $\mathbb{R}$ uzayının parakompakt olduğunu gösterir.

Ancak, $\mathbb{R}$ uzayının açık aralıklarından oluşan $A = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ açık örtüsü alındığında, bu örtüden $\mathbb{R}$ uzayını örtecek sonlu bir alt örtü seçilemez. Bunun sonucu olarak da, $\mathbb{R}$ uzayı kompakt değildir.

Teorem 2.1.6 Her metrik uzay parakompakttır.

İspat Her metrik uzay regüler olduğundan bir önceki teoreme göre, bir metrik uzayın her açık örtümünün $\sigma-$yerel sonlu bir açık inceltilmişinin bulunduğunu göstermek yeter.
(X, d) bir metrik uzay ve $\mathbb{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ bunun bir açık örtümü olsun. I indis kümesini *iyi sıralanmış* kabul edelim.

Bir $\alpha \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $A_{n,\alpha} := \left\{ x \in U_\alpha \,\middle|\, d(x, X - U_\alpha) \geq \frac{1}{2^n} \right\}$ olarak tanımlanırsa, $X - U_\alpha$ kapalı olduğundan $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\alpha}$ olduğu görülür. Şimdi de,

$B_{n,\alpha} := \{ x \in A_{n,\alpha} \mid x \notin A_{n+1,\beta}, \beta < \alpha \}$ ve $V_{n,\alpha} := \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, B_{n,\alpha}) < \frac{1}{2^{n+3}} \right\}$ olarak tanımlansınlar.

$V_{n,\alpha}$ açıktır ve $V_{n,\alpha} \subset U_\alpha$ sağlanır. Gerçekten her $x \in V_{n,\alpha}$ için $d(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$ olacak şekilde bir $y \in B_{n,\alpha}$ vardır. Buradan $y \in A_{n,\alpha}$ ve dolayısıyla $y \in U_\alpha$ ve $d(y, X - U_\alpha) \geq \frac{1}{2^n}$ sağlanır.

Buradan da, $d(x, X - U_\alpha) \geq d(y, X - U_\alpha) - d(x, y) > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ve bu nedenle $x \notin X - U_\alpha$, yani $x \in U_\alpha$ elde edilir.

Bir $x \in X$ verildiğinde $\alpha \in I$, $x \in U_\alpha$ koşulunu sağlayan en küçük indis olsun. $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\alpha}$ olduğundan en az bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $x \in A_{n,\alpha}$ sağlanır. α'nın tanımına göre buradan $x \in B_{n,\alpha}$ ve bu nedenle de $x \in V_{n,\alpha}$ dır. $\mathbb{V}_n := \{V_{n,\alpha} | \alpha \in I\}$ olarak tanımlanırsa, $\mathbb{V}_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}_n$, X'in bir açık örtümüdür. Her $V_{n,\alpha} \subset U_\alpha$ olduğundan da $\mathbb{V}$, $\mathbb{U}$'nun bir inceltilmişidir.

Son olarak her bir $\mathbb{V}_n$ nin yerel sonlu olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce $\alpha \neq \beta$ için $d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ olduğunu gösterelim. $\beta < \alpha$ kabul edelim. $x \in B_{n,\alpha}$ ve $y \in A_{n,\beta}$ keyfi alalım. $B_{n,\alpha}$ nın tanımına göre $x \notin A_{n+1,\beta}$ ve bu nedenle $d(x, X - U_\beta) < \frac{1}{2^{n+1}}$ dır. Fakat $y \in A_{n,\beta}$ olduğundan $d(y, X - U_\beta) \geq \frac{1}{2^n}$ yazılabilir.

Buradan, $d(x, y) \geq d(y, X - U_\beta) - d(x, X - U_\beta) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ elde edilir. Fakat $B_{n,\beta} \subset A_{n,\beta}$ olduğundan $d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ sağlanır. Şimdi de bundan yararlanarak

$d(V_{n,\alpha}, V_{n,\beta}) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ olduğunu gösterebiliriz: $V_{n,\alpha}$ nın tanımından $x \in V_{n,\alpha}$ ve $y \in V_{n,\beta}$ için $d(x, B_{n,\alpha}) < \frac{1}{2^{n+3}}$ ve $d(y, B_{n,\beta}) < \frac{1}{2^{n+3}}$ olduğundan,

$$d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) \leq d(B_{n,\alpha}, x) + d(x, y) + d(y, B_{n,\beta}) \Rightarrow$$

$d(x, y) \geq d(B_{n,\alpha}, B_{n,\beta}) - d(B_{n,\alpha}, x) - d(y, B_{n,\beta}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}} - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}}$, böylece $d(V_{n,\alpha}, V_{n,\beta}) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ elde edilmiş olur. Buradan herhangi bir $x \in X$ noktasının $\frac{1}{2^{n+3}}$ yarıçaplı açık küresel komşuluğunun $\mathbb{V}_n$ nin en çok bir elemanını kestiği sonucu çıkartılır. Çünkü, eğer

$y \in K\left(x, \frac{1}{2^{n+3}}\right) \cap V_{n,\alpha}$ ve $z \in K\left(x, \frac{1}{2^{n+3}}\right) \cap V_{n,\beta}$ olsaydı,

$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}}$ olur du ki bu $d\left(V_{n,\alpha}, V_{n,\beta}\right) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ olması ile çelişirdi. Şu halde her bir $\mathbb{V}_n$ yerel sonlu ve dolayısıyla $\mathbb{V}$ **,** $\sigma-$yerel sonludur.

Teorem 2.1.7 Her parakompakt uzay normaldir.

İspat $(X,\Im)$ parakompakt olsun. $(X,\Im)$ nun önce regüler olduğunu gösterelim: $A \subset X$ kapalı ve $x \notin A$ ise, $(X,\Im)$ Hausdorff olduğundan her $y \in A$ için $x \notin \overline{V_y}$ olacak şekilde bir V_y açık kümesi vardır. Buradan, $\mathbb{V} := \left\{V_y \middle| y \in A\right\} \cup \{X - A\}$ ailesi X 'in bir açık örtümüdür.

$(X,\Im)$ parakompakt olduğundan $\mathbb{V}$ nin $\mathbb{W}$ gibi açık ve yerel sonlu bir inceltilmişi vardır. $V := \bigcup\{W \in \mathbb{W} | W \cap A \neq \varnothing\}$ olarak tanımlayalım. Bu V açıktır ve $\mathbb{W}$ bir örtüm olduğundan $A \subset V$ sağlanır. Ayrıca $\mathbb{W}$ yerel sonlu olduğundan,

$\overline{V} := \bigcup\left\{\overline{W} \middle| W \in \mathbb{W}, W \cap A \neq \varnothing\right\}$ sağlanır. Diğer yandan $\mathbb{W}$, $\mathbb{V}$ nin bir inceltilmişi olduğundan, V 'nin tanımında kullanılan her W kümesi de en az bir V_y nin içinde kalır. Buradan $\overline{W} \subset \overline{V}$ ve bu nedenle

$x \notin \overline{W}$, ve dolayısıyla $x \notin \overline{V}$ elde edilir. Böylece, $x \in X - \overline{V}$, $A \subset V$ ve $V \cap \left(X - \overline{V}\right) = \varnothing$ olduğu görülür. Şu halde $(X,\Im)$ regülerdir.

Şimdi de A ve B, X 'de kapalı ve ayrık iki küme olsun. Regülerlikten dolayı, her $x \in B$ için $\overline{V_x} \cap A = \varnothing$ olacak şekilde bir V_x açık kümesi vardır.Yukarıdaki yöntem aynen uygulanırsa,

$\overset{*}{\mathbb{V}} := \{V_x \mid x \in B\} \cup \{X - B\}$ X'in bir açık örtümüdür. $\overset{*}{\mathbb{W}}$ bunun açık ve yerel sonlu bir inceltilmişi olsun.

$\overset{*}{V} := \bigcup \left\{ \overset{*}{W} \in \overset{*}{\mathbb{W}} \middle| \overset{*}{W} \cap B \neq \varnothing \right\}$ olarak tanımlanırsa, bu $\overset{*}{V}$ açıktır ve $B \subset \overset{*}{V}$ sağlanır. Ayrıca $\overset{*}{\mathbb{W}}$ yerel sonlu olduğundan $\overline{\overset{*}{V}} := \bigcup \left\{ \overline{\overset{*}{W}} \middle| \overset{*}{W} \in \overset{*}{\mathbb{W}}, \overset{*}{W} \cap B \neq \varnothing \right\}$ dir.

Diğer yandan $\overset{*}{\mathbb{W}}$**,** $\overset{*}{\mathbb{V}}$ ın bir inceltilmişi olduğundan, $\overset{*}{W} \cap B \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan her $\overset{*}{W} \in \overset{*}{\mathbb{W}}$ kümesi için de, $\overset{*}{W} \subset V_x$ olacak şekilde bir $V_x \in \overset{*}{\mathbb{V}}$ vardır. Buradan $\overline{\overset{*}{W}} \subset \overline{V_x}$ ve bu nedenle $\overline{\overset{*}{W}} \cap A = \varnothing$, dolayısıyla $\overline{\overset{*}{V}} \cap A = \varnothing$ elde edilir. Buradan, $A \subset X - \overline{\overset{*}{V}}, B \subset \overset{*}{V}$, ve $\overset{*}{V} \cap \left(X - \overline{\overset{*}{V}} \right) = \varnothing$ sağlandığı görülür. Şu halde $(X, \Im)$ normaldir.

Böylece parakompakt uzayların kompakt Hausdorff uzayları ile normal uzaylar arasında yer aldığı, diğer ifade ile

Kompakt Hausdorff Uzay $\Rightarrow$ Parakompakt Uzay $\Rightarrow$ Normal Uzay sağlandığı elde edilir.

Teorem 2.1.8 Her regüler $A_2 -$ *uzayı* parakompakttır.

İspat Her $A_2 -$ *uzayı* Lindelöf uzayı olduğundan (Bülbül, 2004), Teorem 2.1.5 den dolayı uzay parakompakttır.

Bir sonraki bölümde çalışılacak olan manifoldlar Hausdorff ve $A_2 -$ *uzayı* olan topolojik uzaylar olacaktır. O halde $T_3 -$ *uzayı* olan manifoldlar parakompakt topolojik uzaylardır.

BÖLÜM 3

MANİFOLDLAR

Bu bölümde topolojik ve düzgün manifold tanımları verilecek daha çok düzgün manifoldlar ile ilgili bazı sonuçlar Sabuncuoğlu (2004) den yararlanarak çalışılacaktır.

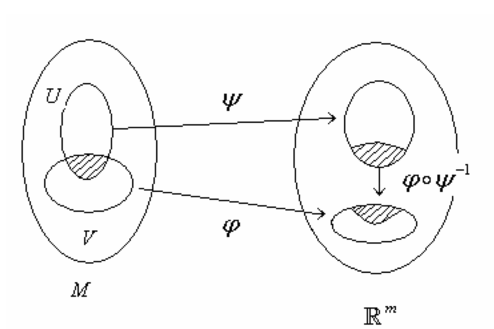
3.1 MANİFOLDLAR

Tanım 3.1.1 M her hangi bir topolojik uzay ve $V \subset M$ açık olsun. $\psi : V \subset M \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir homeomorfizma ise ψ ye M üzerinde ***m-boyutlu koordinat sistemi (m-dimensional chart)*** denir. Burada ki m sayısı M ye bağlı sabit bir sayıdır.

M üzerindeki m-boyutlu koordinat sistemlerinin bir kümesi $\mathcal{A}$ olsun.

i) Eğer $\mathcal{A}$ da ki koordinat sistemi fonksiyonlarının tanım kümelerinin birleşimi M ye eşit oluyor ve

ii) $\psi : U \to \mathbb{R}^m$ ve $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$, M üzerinde, $U \cap V \neq \varnothing$ olan $\mathcal{A}$ nın iki elemanı için ***koordinat değişimi (change of coordinats)*** olarak isimlendirilen; $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir C^∞ difeomorfizma oluyor ise $\mathcal{A}$ ya M üzerinde C^∞ ***atlas*** denir. Şekil 3.1 e bakınız.



Şekil 3.1 Koordinat değişim fonksiyonu.

Eğer yukardaki tanımda sadece *i)* şartını alırsak yani $\forall x \in M$ için bu noktanın $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olan bir açık komşuluğu bulunabiliyorsa bu manifolda ***topolojik manifold*** denir.

Bir küme üzerinde birden fazla atlas tanımlanabilir. $\mathscr{A}$, M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir atlas olsun. $\mathscr{A}$ nın elemanlarıyla düzgün örtüşen her koordinat sistemi, yine $\mathscr{A}$ nın elemanı oluyorsa, $\mathscr{A}$ *ya* M üzerinde bir ***tam atlas*** denir. $\mathscr{A}$, M topolojik uzayı üzerinde bir atlas ise $\mathscr{A}$ atlasını kapsayan bir ve yalnız bir tam atlas olduğu (Sabuncuoğlu, 2004) kaynağında ispatlanmıştır.

M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir $\mathscr{A}$, C^{∞}- tam atlası bulunabiliyorsa M kümesine m-boyutlu ***türevlenebilir manifold*** veya ***düzgün manifold*** denir ve $(M^m, \mathscr{A})$ veya kısaca M^m ile gösterilir.

M üzerinde verilen herhangi bir atlası kapsayan tek bir tam atlas bulunabileceğinden, M bu atlasla birlikte düzgün manifold olur.

Açıkça her türevlenebilir manifold bir topolojik manifolddur.

Örnek 3.1.1 Her $m \geq 1$ doğal sayısı için

$\mathbb{R}^m = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_m \right) \mid \forall 1 \leq i \leq m \text{ için } x_i \in \mathbb{R} \right\}$ *m*- boyutlu Öklid uzayı düzgün bir manifolddur.

Ayrıca $B^m = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_m \right) \in \mathbb{R}^m : {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_m}^2 < 1 \right\}$ açık birim dairesi de *m*-boyutlu düzgün bir manifolddur.

Örnek 3.1.2 $\mathbb{S}^m = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_{m+1} \right) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_m}^2 + {x_{m+1}}^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *birim küresi m-* boyutlu düzgün bir manifolddur.

Gerçekten, her $1 \leq i \leq m$ için $U_i^+ := \left\{ x \in \mathbb{S}^m \middle| x = (x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}), x_i > 0 \right\}$ ve $U_i^- := \left\{ x \in \mathbb{S}^m \middle| x = (x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}), x_i < 0 \right\}$ olarak tanımlanırsa ve

$\varphi^{\pm}{}_i : U^{\pm}{}_i \to \left(D^m\right)^{\circ} \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi_i^{\pm}(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1},\ x_{i+1}, x_{i+2}, ...x_m, x_{m+1})$

ile verilirse bu dönüşümlerin tersleri de $\left(\varphi^{\pm}{}_i\right)^{-1}(y) = \left(y_1, y_2, ..., y_{i-1},\ \pm\sqrt{1 - \|y\|^2},\ y_i,\ y_m\right)$ olup $\left(\varphi^{\pm}{}_i\right) \circ \left((\varphi_j)^{\pm}\right)^{-1}$ fonksiyonları düzgün örtüşürler. Dolayısıyla $\mathscr{A} = \left\{\left(\varphi^{\pm}{}_i, U_i^{\pm}\right)\right\}_{1 \leq i \leq m}$ ailesi $\mathbb{S}^m$ için düzgün atlas olup $\mathbb{S}^m$ bir düzgün manifolddur.

Örnek 3.1.3 M ve N sırasıyla m ve $n-$boyutlu iki manifold olsun. Bu durumda $M \times N$ kümesi doğal çarpım topolojisi ile birlikte bir topolojik uzaydır. Bu topolojik uzaya, M ve N topolojik uzaylarının çarpım uzayı dendiğini biliyoruz.

M ve N Hausdorff uzayı olduğundan $M \times N$ de Hausdorff uzayıdır. $M \times N$ nin $(m+n)$ boyutlu bir düzgün manifold olduğu (Sabuncuoğlu, 2004) de gösterilmiştir.

Tanım 3.1.2 $\mathbb{R}^m$de üst yarı uzay denilen $\mathbb{R}_+^m$ kümesi $\mathbb{R}_+^m = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\right\}$ ile tanımlanır.

Bu durumda $\partial\mathbb{R}_+^m = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0\right) \mid \forall\ 1 \leq i \leq m-1\ için\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$ olacaktır. Eğer düzgün manifold tanımındaki $\varphi : U \to U'$ koordinat sistemlerinde $U' \subset \mathbb{R}^m$ açık yerine $U' \subset \mathbb{R}_+^m$ açık olarak alınırsa ***sınırı olan manifold*** kavramına ulaşılır. Sınırı olan *M* manifoldunun sınırı ∂M ile gösterilir ve *M* nin atlasına ait koordinat sistemleri altında görüntüsü $\partial\mathbb{R}_+^m$ de olan *M* nin tüm noktalarından oluşur. Açıkça $\partial M \subset M$ dir. Eğer $\partial M = \varnothing$ ise *M* ye ***sınırı olmayan manifold*** denir.

∂M nin $(m-1)$-boyutlu, sınırı olmayan düzgün bir manifold olduğu gösterilebilir (Burns & Gidea, 2005).

Topolojik anlamdaki sınır tanımı ile manifoldun sınırı tanımı genel olarak farklıdırlar. Örneğin, $B^2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$ açık birim dairesinin $\mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesi olarak sınırı $\mathbb{S}^1$ birim çemberidir, ancak manifold olarak sınırı $\partial\left(B^2\right) = \varnothing$ dir.

$Int(M) = M \setminus \partial M$ ile tanımlanır.

Örnek 3.1.3 $\mathbb{R}^m$ de m-boyutlu kapalı *birim daire*

$$D^m = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2 \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır. Bu birim daire**,** m-boyutlu sınırı olan bir manifolddur ve sınırı $(m-1)$-boyutlu

$\mathbb{S}^{m-1} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2 = 1 \right\}$ birim küresidir.

Yani $\partial D^m = \mathbb{S}^{m-1}$ dir. Ayrıca $\partial\left(D^m\right)^{\circ} = \varnothing$

3.2 DİFERENSİYELLENEBİLİR DÖNÜŞÜMLER

Tanım 3.2.1 M , $m-$boyutlu bir manifold olmak üzere;

i) $f : M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\xi : U \to \xi(U)$, M^m içinde bir koordinat sistemi olmak üzere, $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, f nin, ξ ye bağlı bir ***koordinat gösterimi*** denir.

ii) $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve M nin bir p noktası verilsin. p noktasında ki en az bir $\xi : U \to \xi(U)$ koordinat sistemi için, $\xi : \xi(U) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi $\xi(p)$ noktasında diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu p noktasında ***diferensiyellenebilirdir (düzgündür)*** denir.

Uyarı 3.2.1 Bu tanım ilk başta, $\xi : U \to \xi(U)$ koordinat sistemine bağlıymış gibi görünüyor. Gerçekte öyle değildir. Daha açık olarak söylersek, f fonksiyonu p

noktasında diferensiyellenebilir ise, p noktasındaki her $\eta : V \to \eta(V)$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi, $\eta(p)$ noktasında diferensiyellenbilirdir. Şimdi bunu göstereceğiz.

ξ ve η düzgün örtüştüğünden, $\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap V) \to \xi(U \cap V)$ dönüşümü, $\eta(p)$ noktasında diferensiyellenbilir. $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\xi(p)$ noktasında diferensiyellenebilir olduğundan, zincir kuralına göre, $(f \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \eta^{-1})$ fonksiyonu $\eta(p)$ noktasında düzgündür. $(f \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \eta^{-1}) = f \circ \eta^{-1}$ olduğundan, $f \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu, $\eta(p)$ noktasında diferensiyellenbilirdir.

Tanım 3.2.2 $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu M manifoldunun her p noktasında düzgün (diferensiyellenebilir) ise, f fonksiyonu M üstünde düzgündür, (diferensiyellenebilirdir) denir.

Teorem 3.2.1 $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun M üstünde düzgün olması için gerek ve yeter koşul, M içindeki her $\eta : V \to \eta(V)$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ koordinat gösteriminin düzgün olmasıdır.

İspat $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu M üstünde düzgün olsun. M içindeki bir $\eta : V \to \eta(V)$ koordinat sistemi göz önüne alalım. Her $p \in V$ için, f fonksiyonu p noktasında düzgün olduğundan, Uyarı 3.2.1 göz önüne alınarak, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun, V her $\eta(p)$ düzgün olduğu anlaşılır. Bu durum, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ gösteriminin düzgün olduğunu gösterir.

Karşıt olarak, M içindeki her bir $\eta : V \to \eta(V)$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ gösteriminin düzgün olduğunu varsayalım. $p \in M$ olsun. p noktasında alınan her bir $\xi : U \to \xi(U)$ koordinat sistemi için, $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi $\xi(p)$ noktasında düzgün olur. Tanım 3.2.1 e göre, f fonksiyonu p noktasında düzgündür.

Teorem 3.2.2 $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım bölgeleri M yi örtecek çoklukta ξ koordinat sistemleri için, $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimleri düzgün ise f fonksiyonu M üstünde düzgün fonksiyondur.

İspat Tanım bölgeleri M yi örtecek çoklukta ξ koordinat sistemleri için, $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimleri düzgün olsun. M içinde bir $\eta : V \to \eta(V)$ koordinat sistemini göz önüne alalım. $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun da düzgün olduğunu göstereceğiz. $q \in \eta(V)$ olsun. $q = \eta(p)$ olacak biçimde, V kümesinde bir ve yalnız bir p noktası vardır. $p \in U$ ve $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi düzgün olacak biçimde en az bir $\xi : U \to \xi(U)$ koordinat sistemi vardır. ξ ve η düzgün örtüştüğünden, $\xi \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu da düzgündür. Buna göre, $\left(f \circ \xi^{-1}\right) \circ \xi \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu da düzgündür. $\left(f \circ \xi^{-1}\right) \circ \xi \circ \eta^{-1} = f \circ \eta^{-1}$ olduğundan, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu q noktasında düzgündür. Bu yolla, $f \circ \eta^{-1}$ fonksiyonunun, $\eta(V)$ kümesinin her q noktasında düzgün olduğu görülür.

M den $\mathbb{R}$ ye giden düzgün fonksiyonların kümesini, $\Im(M)$ ile göstereceğiz.

$f, g \in \Im(M)$ olmak üzere, her $p \in M$ için, $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$ eşitliği ile tanımlı $f+g$ fonksiyonu da düzgün fonksiyondur. Gerçekten, M üstündeki her ξ koordinat sistemi için,

$(f+g) \circ \xi^{-1} = f \circ \xi^{-1} + g \circ \xi^{-1}$ yazılabilir. $f \circ \xi^{-1}$ ve $g \circ \xi^{-1}$ fonksiyonları da düzgün olduğundan, toplamları da düzgündür.

$f, g \in \Im(M)$ olmak üzere, her $p \in M$ için, $(fg)(p) = f(p)g(p)$ eşitliğiyle tanımlı fg fonksiyonu da düzgün fonksiyondur. Gerçekten, M üstündeki her ξ koordinat sistemi için,
$(fg) \circ \xi^{-1} = \left(f \circ \xi^{-1}\right)\left(g \circ \xi^{-1}\right)$ yazılabilir. $f \circ \xi^{-1}$ ve $g \circ \xi^{-1}$ fonksiyonları da düzgün olduğundan, çarpımları da düzgündür.

$c \in \mathbb{R}$ ve $f \in \Im(M)$ olmak üzere, her $p \in M$ için, $(cf)(p) = cf(p)$ eşitliği ile tanımlı cf fonksiyonu da düzgün fonksiyondur. Gerçekten, M üstündeki her ξ koordinat sistemi için, $(cf)\circ\xi^{-1} = c\left(f\circ\xi^{-1}\right)$ yazılabilir. $f\circ\xi^{-1}$ fonksiyonu düzgün olduğundan, bu fonksiyonun bir sayı ile çarpımı da düzgündür.

Tanım 3.2.3 $\phi : M^m \to N^n$ bir fonksiyon olsun. p noktasında en az bir $\xi : U \to \xi(U)$ ve $\phi(p)$ noktasında en az bir $\mu : V \to \mu(V)$ koordinat sistemi $\mu\circ\phi\circ\xi^{-1}$ dönüşümü, $\xi(p)$ noktasında düzgün(diferensiyellenebilir) olacak biçimde bulunabiliyorsa, ϕ dönüşümü, p noktasında düzgündür (diferensiyellenebilirdir) denir.

$\phi : M^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları için $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ koordinat sistemleri birim dönüşüm alınır.

Uyarı 3.2.2 $\mu\circ\phi\circ\xi^{-1}$ dönüşümünün tanım kümesi, $\phi^{-1}\left(\phi(U)\cap V\right)$ kümesinin, ξ deki görüntüsüdür.

Tanım 3.2.4 ϕ, M^m manifoldundan N^n manifolduna giden bir fonksiyonu M manifoldunun her p noktasında düzgün(diferensiyellenebilir) ise, f fonksiyonu M üstünde düzgündür(diferensiyellenebilirdir) denir.

Teorem 3.2.3 ϕ, M^m manifoldundan N^n manifolduna giden bir fonksiyon olsun. ϕ dönüşümünün, M^m üstünde düzgün olması için gerek ve yeter koşul, M^m üstündeki her $\xi : U \to \xi(U)$ koordinat sistemi ve N^n üstündeki her $\mu : V \to \mu(V)$ koordinat sistemi için, $\mu\circ\phi\circ\xi^{-1}$ dönüşümlerinin düzgün olmasıdır.

Bu teoremin ispatı 3.2.1 teoremin ispatına benzer biçimde kolayca yapılabilir.

Teorem 3.2.4 $\phi : M^m \to N^n$ fonksiyonu verilsin. Tanım bölgeleri M ve N yi örtecek çoklukta ξ ve μ koordinat sistemleri için, $\mu\circ\phi\circ\xi^{-1}$ dönüşümleri düzgün ise ϕ dönüşümü M üstünde düzgün fonksiyondur.

İspat Tanım bölgeleri M ve N yi örtecek çoklukta ξ ve μ koordinat sistemleri için, $\mu\circ\phi\circ\xi^{-1}$ dönüşümleri düzgün olsun. M ve N içinde sırasıyla, ξ_1 ve μ_1 koordinat sistemlerini göz önüne alalım. $\mu_1\circ\phi\circ(\xi_1)^{-1}$ dönüşümünün düzgün olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $\mu_1\circ\phi\circ(\xi_1)^{-1}$ dönüşümünün tanım bölgesinde bir $\xi_1(p)$ noktası alalım. p noktasında en az bir ξ, $\phi(p)$ noktasında en az bir μ koordinat sistemi için, $\mu\circ\phi\circ\xi^{-1}$ dönüşümü, $\xi(p)$ noktasında düzgündür. ξ_1 ile ξ , μ_1 ile μ düzgün örtüştüklerinden,

$$\xi\circ(\xi)^{-1}:\xi_1(U\cap U_1)\to\xi(U\cap U_1)$$

$$\mu_1\circ\mu^{-1}:\mu(V\cap V_1)\to\mu_1(V\cap V_1)$$

dönüşümleri düzgündür. Zincir kuralından dolayı,

$\left(\mu_1\circ\mu^{-1}\right)\circ\left(\mu_1\circ\phi\circ(\xi_1)^{-1}\right)\circ\left(\xi\circ(\xi_1)^{-1}\right)$ dönüşümü, $\xi_1(p)$ noktasında düzgündür. Bu dönüşümün, $\mu_1\circ\phi\circ(\xi_1)^{-1}$ dönüşümüne eşit olduğu hemen görülebilir.

Sonuç 3.2.1 $\phi:M^m\to N^n$ fonksiyonu düzgün dönüşüm ise süreklidir.

Sonuç 3.2.2 $\phi:M^m\to N^n$ fonksiyonu düzgün dönüşüm ise, bu dönüşümün, M nin her açık alt manifolduna kısıtlanışı da düzgündür.

Tanım 3.2.5 $\phi:M^m\to N^n$ düzgün dönüşümünün tersi varsa ve tersi de düzgün ise, ϕ dönüşümüne bir ***difeomorfizma*** adı verilir. M ve N manifoldları verildiğinde, M den N ye giden bir difeomorfizma varsa, M manifoldu, N manifolduna difeomorfiktir, denir.

BÖLÜM 4

MANİFOLDLARIN TOPOLOJİSİ VE İKİ BOYUTLU KOMPAKT MANİFOLDLAR

Bu bölümde, $m-$boyutlu herhangi bir M manifoldunun $(m+k)-$boyutlu bir Öklid uzayına gömülebileceği (embedinginin yapılabileceğini) ve 2-boyutlu manifoldların sınıflandırılması üzerine sonuçlar Kahn (1995) kaynağından yararlanarak incelenecektir.

4.1 MANİFOLDLARIN GÖMÜLMESİ

Teorem 4.1.1 M , $m-$boyutlu düzgün bir manifold olsun. Bu durumda; M bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ M yol bağlantılıdır.

Teorem 1.2.1 den dolayı yol bağlantılı her uzay bağlantılı olduğundan, teoremdeki sadece birinci yönü ispatlamak yeterlidir. $x_0 \in M$ keyfi bir nokta ve

$$N := \{ y \in M \mid \exists f : [0,1] \to M \text{ sürekli öyleki } f(0) = x_0 \text{ ve} f(1) = y \}$$

olsun. N nin yol bağlantılı olacağı açıktır. N nin hem açık hem kapalı ve $N \neq \varnothing$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yerel olarak M , $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olduğundan $N \neq \varnothing$ dir.

M , yerel olarak $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olduğundan M bir A_1- *uzayıdır.* $(x_k) \subset N$ bir dizi ve $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = z$ olsun.

İddia: $z \in N$ dir. $O \in U_\mathfrak{Z}(z)$ açık ve $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olan bir komşuluk olsun. Yakınsaklıktan dolayı $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall\, k \geq n_0$ için $x_k \in O$ dır. $\forall k \geq n_0$ için $x_k \in N$

olduğundan $f:[0,1]\to M$ sürekli, öyleki $f(0)=x_0$ ve $f(1)=x_k$ yazılabilir. O, $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olduğundan yol bağlantılıdır. O halde, $x_k \in O$ ve $z\in O$ olduğundan $\exists\, g:[0,1]\to M$ sürekli $g(0)=x_k$, $g(1)=z$ sağlanır.

Şimdi,

$$h:[0,1]\to M \ , \ h(t)=\begin{cases} f(2t) \ , \ 0\le t\le \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1) \ , \ \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $f(1)=g(0)=x_k$ olduğundan, h süreklidir ve $h(0)=x_0$ ve $h(1)=z$ sağlanır. Böylece $z\in N$ ve N kapalıdır.

N nin açık olduğunu göstermek için, $O\subset M$ açık, $z\in O$ ve O, $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olsun. Eğer z ile x_0 arasında yukarıdaki h fonksiyonu gibi sürekli bir yol varsa, O daki herhangi iki nokta sürekli bir yol ile bağlanabileceğinden özellikle z ile x_0 arasında da sürekli bir yol vardır.

O halde $O\subset N$ dir. $\forall z\in N$ için $\exists\, O\subset M$ açık için $z\in O\subset N$ elde edilir ve dolayısıyla N açıktır. Sonuç olarak $N=M$ elde edilir.

Aşağıda, kompakt bir topolojik manifoldun $\mathbb{R}^m$ nin kapalı bir alt kümesi gibi düşünülebileceğini ve sonuç olarak da kompakt bir manifoldun metrik uzay olacağını göstereceğiz. Bu sonuçlar $A_2-uzayı$ olan topolojik manifoldlar içinde geçerlidir.

Teorem 4.1.2 $(X,\Im)$ kompakt, $(Y,\Im^*)$ Hausdorff ve $f:X\to Y$ bire-bir, örten ve sürekli ise, bu f fonksiyonu bir homeomorfizmadır (Bülbül, 2004).

Tanım 4.1.1 $(X,\Im)$ bir topolojik uzay ve $\mathbb{U}=\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, X in bir açık örtümü ve $\forall x\in M$ $\mathbb{U}$ ailesine ait sadece sonlu tane kümede bulunsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ fonksiyon ailesine $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ örtümüne göre ***birimin parçalanışı*** denir,

i) $f_\alpha : X \to I = [0,1]$ sürekli,

ii) $f_\alpha(x) = 0$ eğer $x \notin O_\alpha$

iii) $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1$, ($\forall x \in X$ için).

$\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi üzerindeki koşuldan ve *ii)* den *iii)* deki toplamı sonlu bir toplamı olacağı açıktır. Burada *iii)* şartından dolayı *birimin parçalanışı* ismi kullanılmaktadır.

Teorem 4.1.3 M kümesi m*-boyutlu* kompakt bir manifold olsun. Bu durumda M nin sonlu elemanlı bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüm vardır ki her bir U_α, $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik ve bu açık örtüme göre bir $\{f_\alpha\}$ birimin parçalanışı mevcuttur.

İspat: M nin her bir elemanı $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olacak şekilde açık bir $\mathbb{U}$ örtümü bulunabilir. M kompakt olduğundan bu örtümün $\{U_1, U_2, ...U_k\}$ gibi sonlu bir alt örtümünü seçebiliriz.

$\forall x \in U_i$ için $x \in V_{x,i} \subseteq \overline{V_{x,i}} \subset U_i$ olacak şekilde $V_{x,i} \subset U_i$ kümeleri seçilebilir. Çünkü M bir T_4-*uzayıdır.* Hatta $V_{x,i}$, $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olacak şekilde seçilebilir. Açıkça $\left\{V_{x,i} \middle| 1 \le i \le k \text{ ve } x \in M\right\}$ ailesi M nin bir açık örtümüdür ve M kompakt olduğundan $O_1, O_2, ...O_n$ gibi bir sonlu alt örtüm vardır. Buradan $\forall\ 1 \le i \le n$ için $\exists\ 1 \le j \le k$ öyleki $\overline{O_i} \subset U_j$ dir.

Urysohn Lemması kullanılarak $\forall 1 \le j \le n$ için $g_j : M \to I$, $g_j(x) = \begin{cases} 1 \ , \text{ eğer } x \in \overline{O_i} \\ 0 \ , \text{ eğer } x \notin U_j \end{cases}$

sürekli fonksiyonlarını tanımlayabiliriz.

$\{O_i\}_{1 \le i \le n}$ örtüm olduğu için $\forall x \in M$ için $\exists\ 1 \le j \le n$ öyle ki $g_j(x) = 1$ dir. Böylece $\forall x \in M$ için $\sum_{j=1}^{n} g_j(x) > 0$ dır. $f_i(x) = \dfrac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} g_j(x)}$ olarak tanımlanırsa $f_i : M \to I$

fonksiyonları açıkca süreklidirler ve $\sum_{i}^{n} f_i(x)=1$ dir. Eğer $x\notin U_j \Rightarrow g_j(x)=0$ ve böylece $f_j(x)=0$ dır. $\{O_i\}_{1\le i\le n}$ örtüm olduğundan $\sum_i f_i(x)=1$ olacağı açıktır.

Tanım 4.1.2 $(X,\Im)$ ve $(Y,\Im^*)$ iki topolojik uzay olsun. Eğer bir $f:X\to f(X)\subset Y$ fonksiyonu bire-bir , sürekli ve $f^{-1}:f(X)\to X$ ters fonksiyonu da sürekli ise, diğer bir ifade ile f , X ile $f(X)$ görüntüsü arasında bir homeomorfizma ise, bu f fonksiyonuna, $(X,\Im)$ dan $(Y,\Im^*)$ içine bir ***gömme fonksiyonu*** denir. Burada $f(X)$ alt uzay topolojisi ile göz önüne alınmaktadır.

Böyle bir f fonksiyonu varsa, X , f ile Y içine *gömülmüştür* denir. Buna göre, eğer $(X,\Im)$, $(Y,\Im^*)$ ın bir alt uzayına homeomorf ise, X , Y içine gömülmüş olur.

Teorem 4.1.4 M , $m-$boyutlu kompakt bir manifold olsun. Bu durumda n yeterince büyük alınırsa bir $\phi:M\to\mathbb{R}^n$ sürekli ve $1-1$ fonksiyonu vardır. (Bu durumda M kompakt olduğundan Teorem 4.1.2 ye göre $\phi:M\to\phi(M)\subset\mathbb{R}^n$ bir homeomorfizmadır).

İspat $\{U_i\}$, M nin bir açık örtüsü ve Teorem 4.1.3 den $1\le i\le k$ için $\{f_i\}$ bu açık örtüme karşılık gelen birimin parçalanışı olsun. $n=(m+1)k$ alalım ve $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{m+1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{m+1}}_{k-\text{tane}}$ olsun. Her bir $\mathbb{R}^{m+1}$ için D^m ile $\mathbb{R}^m$ başlangıç merkezli 1 yarıçaplı daire, yani $D^m=\{x\in\mathbb{R}^{m+1}:\|x\|\le 1 \text{ ve } x_{m+1}=0\}\subset\mathbb{R}^{m+1}$ olsun. C^{m+1} de D^m üzerine kurulan ve tepe noktası $(0,0,\ldots,0,1)$ olan koni olsun.

$$\phi_i:M\to C^{m+1}\subseteq\mathbb{R}^{m+1},\ \phi_i(x)=\begin{cases}(f_i(x)\cdot x,\ 1-f_i(x)) & ,\quad x\in U_i \text{ ise}\\ (0,0,...,0,1) & ,\quad x\notin U_i \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada U_i ler $U_i=(D^m)^0\subset\mathbb{R}^m$ olarak alınabilir ve $f_i(x)\cdot x$ iç çarpımı göstermektedir. Bu anlamlıdır çünkü $x\in U_i$ ise x, D^m nin bir noktası olacağından bir sıralı $m-$lidir. Bu ϕ_i ler süreklidir. Çünkü $x \in \partial U_i$ ve $x_l \to x$ ise $f_i(x_l) \to 0$ olup $\phi_i(x_l) \to (0,0,0,0,...0,1)$ dir.

$\phi : M \to \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_k(x)) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{(m+1)k}$

olarak tanımlarsak, her bir ϕ_i sürekli olduğundan ϕ süreklidir.

Şimdi ϕ nin $1-1$ ve kapalı fonksiyon yani kapalı kümeyi kapalı kümeye götüreceğini gösterelim.

$x, y \in M$ olsun. Bir i için $x, y \in U_i$ olduğunu kabul edelim. Eğer $f_i(x) \neq f_i(y)$ ise $\phi_i(x) \neq \phi_i(y)$ olup $\phi(x) \neq \phi(y)$ olacağı açıktır. Eğer $f_i(x) = f_i(y)$ ve $\phi(x) = \phi(y)$ ise ilgili koordinatların eşitliği yazılırsa, $f_i(x) \cdot x = f_i(y) \cdot y$ olur ve buradan $f_i(x) = f_i(y)$ olduğundan $x = y$ çıkar. Burada $f_i(x) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Diğer taraftan herhangi bir $x \in M$ için $\exists 1 \leq i \leq k$ öyle ki $f_i(x) > 0$, yani $x \in U_i$ dir. Eğer $y \notin U_i$ ise $f_i(y) = 0$ olur ve buradan kolayca $\phi(x) \neq \phi(y)$ elde edilir. O halde ϕ, 1-1 dir. M kompakt ve ϕ sürekli olduğundan $\phi(M) \subset \mathbb{R}^n$ kompakttır.

Böylece $\phi : M \to \phi(M) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt Hausdorff bir uzaydan yine kompakt Hausdorff bir uzaya giden sürekli ve 1-1 bir fonksiyon olur.

Eğer $K \subset M$ kapalı ise K kompakttır. O halde $\phi(K) \subset \phi(M)$ kompakt olup kapalı olmak zorundadır. O halde ϕ kapalı kümeyi kapalı kümeye götüren 1-1 bir fonksiyondur.

Böylece ϕ bir homeomorfizmadır.

Sonuç 4.1.1 Kompakt bir manifold bir metrik uzaydır, hatta $\mathbb{R}^n$ nin bir kapalı alt topolojik uzayıdır.

4.2 İKİ BOYUTLU TOPOLOJİK MANİFOLD ÖRNEKLERİ

Aşağıdaki örnekte Projektif uzay olarak bilinen m-boyutlu bir manifold örneğini inceleyeceğiz. Bu örnek m=2 için Projektif düzlem olarak bilinir ve 2 -boyutlu olmasına rağmen $\mathbb{R}^3$ ün herhangi bir alt uzayına homeomorfik değildir ancak $\mathbb{R}^4$ ün bir alt uzayına homeomorfiktir.

Örnek 4.2.1 $\mathbb{S}^m := \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1 \right\}$ standart birim küre yüzeyi olmak üzere, $\mathbb{S}^m$ üzerinde

$$x \sim y :\Leftrightarrow x = y \text{ veya } x = -y$$

şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır ve $\forall x \in \mathbb{S}^m$ için $[x] = \{x, -x\}$ dir. $-x$ e x in karşı (antipodal) noktası denir. P^m, $\mathbb{S}^m$ in $\sim$ bağıntısına göre bölüm uzayı yani, $P^m = \mathbb{S}^m / \sim$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $p : \mathbb{S}^m \to P^m$, $p(x) = [x]$ fonksiyonu örten olup ayrıca bölüm uzayı topolojisi gereğince süreklidir.

Teorem 4.2.1 P^m kompakt, bağlantılı ve m -boyutlu manifolddur.

İspat $\mathbb{S}^m$ kompakt ve bağlantılıdır. O halde p sürekli olduğundan $p\left(\mathbb{S}^m\right) = P^m$ kompakt ve bağlantılıdır.

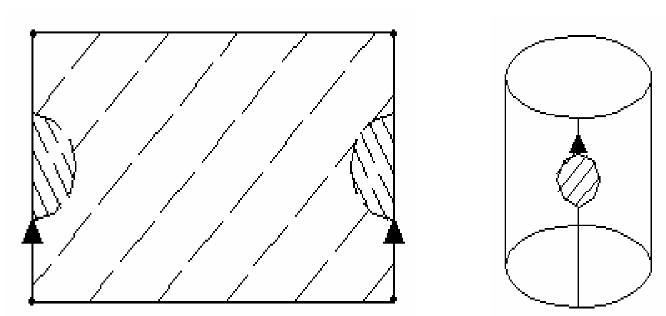
Şimdi de P^m nin m -boyutlu bir topolojik manifold olduğunu gösterelim. Bir $x \in S^m$ için $p(x) = [x] \in P^m$ olsun. $x \in O \subset \mathbb{S}^m$ açık ve O daki her noktanın x ile yaptığı açı $\frac{\pi}{2}$ den kesin küçük olsun.

O da birbirinin karşı noktası olmadığından p, O yu $1-1$ olarak $p(O)$ ya götürür ve $[x] \in p(O)$ dır. Fakat, bölüm uzayı tanımı gereğince, P^m nin bir alt kümesi açıktır ancak ve ancak o kümenin p ye göre ters resmi açıktır. p nin O ya kısıtlanışı $1-1$ olduğundan $p^{-1}\left(p(0)\right) = O \cup \{-x : x \in O\}$ olacaktır. O halde yukarıda ki eşitliğin sağ tarafı açık iki kümenin birleşimi olarak açıktır ve dolayısıyla $p(O) \subset P^m$ açıktır. Benzer şekilde p, O nun açık alt kümelerini $p(O)$ nun açık alt kümelerine götürür. O halde $p : O \to p(O)$ bir homeomorfizmadır. $\mathbb{S}^m$ manifold olduğundan O kümesi $\mathbb{R}^m$ ye homemorfik olarak seçilebilir.

Bunun sonucu olarak herhangi bir $[x] \in P^n$ noktasının $p(O)$ ile gösterdiğimiz ve $\mathbb{R}^n$ ye homeomorfik olan açık bir komşuluğu bulunmaktadır. Böylece P^m, m-boyutlu bir topolojik manifolddur.

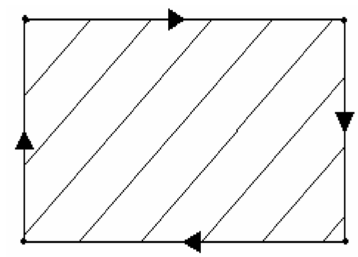
Aşağıda bazı 2-*boyutlu* topolojik manifold örnekleri bölüm uzayı şeklinde sıralanmıştır.

Örnek 4.2.2 Şekil 4.1 deki kareyi düşünelim. Oklar hangi kenarın hangi kenar ile özdeşleşeceğini göstermektedir. Bu özdeşleşme sonunda oluşacak uzay kesik silindire homeomorfiktir.



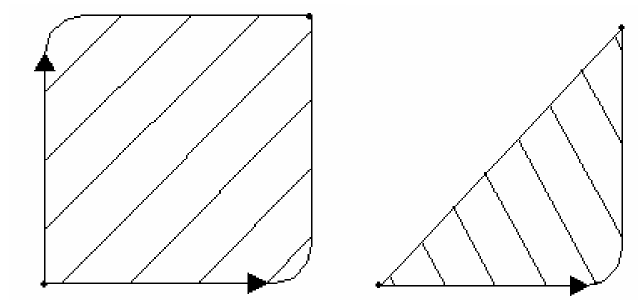
Şekil 4.1 Kesik silindirin oluşumu.

Örnek 4.2.3 Şekil 4.2 deki kareyi düşünelim. Okun yönü özdeşleşen kenarları ve özdeşleşme yönünü göstermek üzere bu özdeşleşme sonunda oluşan bölüm uzayı Möbius şeridine homeomorfiktir.



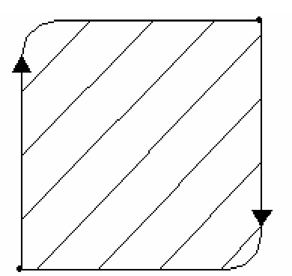
Şekil 4.2 Möbius şeridinin oluşumu.

Örnek 4.2.4 Şekil 4.3 deki şekli düşünelim. Verilen özdeşleşme sonunda oluşan bölüm uzayı küreye homeomorfiktir.



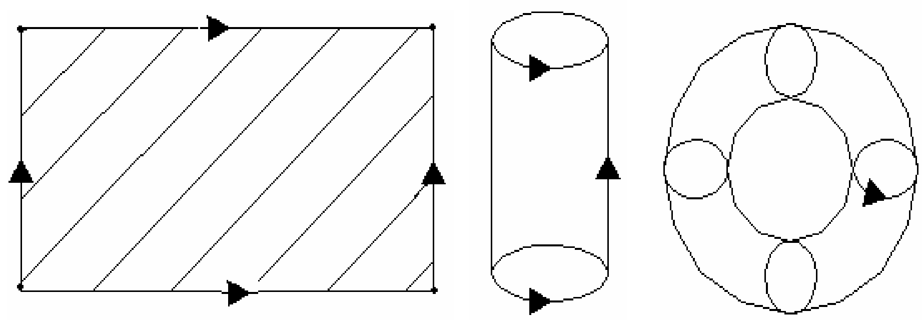
Şekil 4.3 Kürenin oluşumu.

Örnek 4.2.5 Şekil 4.4 şekli düşünelim. Verilen özdeşleşme sonunda oluşan bölüm uzayı P^2 Projektif düzlemine homeomorfiktir (Kahn 1995).



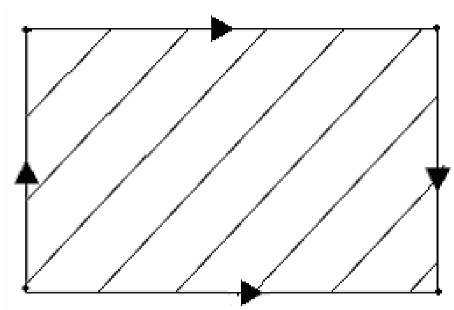
Şekil 4.4 Projektif düzlemin oluşumu.

Örnek 4.2.6 Şekil 4.5 deki kareyi düşünelim. Verilen özdeşleşmeler sonunda oluşan bölüm uzayı tor yüzeyine homeomorfiktir.



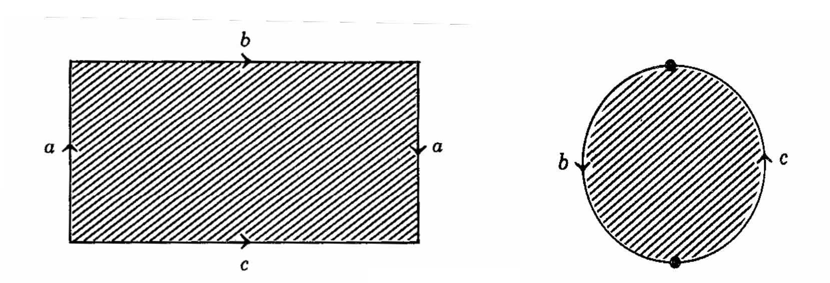
Şekil 4.5 Tor yüzeyinin oluşumu.

Örnek 4.2.7 Şekil 4.6 şekli düşünelim. Verilen özdeşleşmeler sonunda oluşan bölüm uzayı Klein şişesine homeomorfiktir.



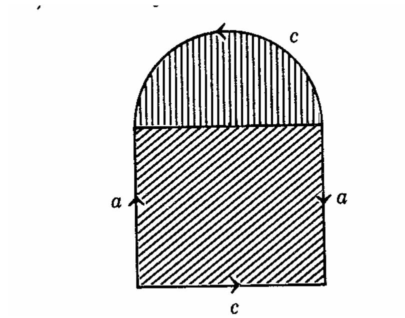
Şekil 4.6 Klein şişesinin oluşumu.

Örnek 4.2.8 P^2 projektif düzlemi S^2 küre yüzeyinden bir açık dairenin çıkarılması ve bu çıkarılan yere Möbius şeridinin eklenmesi ile oluşan uzaya homeomorfiktir. Elde edilen yüzeyin P^2 ye homeomorfik olduğunu göstermek için Möbius şeridini ve ona eklenecek daireyi Şekil 4.7 de ki gibi temsil edelim.



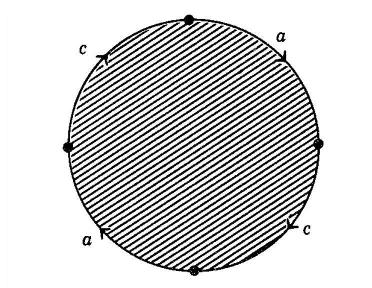
Şekil 4.7 Bir Möbius şeridi ve ona eklenecek bir daire (Kahn,1995).

Eğer Şekil 4.7 deki iki b yi özdeşleştirirsek, Şekil 4.8 daki uzayı elde ederiz.



Şekil 4.8 İki b nin özdeşleştirilmesi (Kahn, 1995).

Hatta sırasıyla c lerin yönünü değiştirirsek sonuçta değişen bir şey olmaz. O halde elde edilen uzay Şekil 4.9 daki uzaya homeomorfiktir.



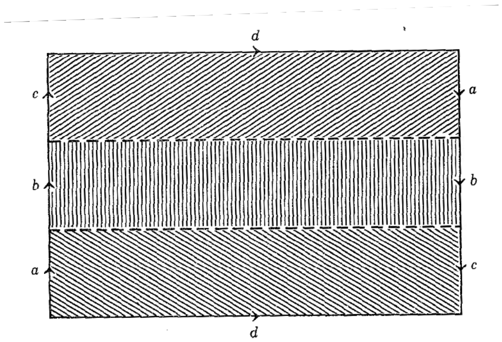
Şekil 4.9 c lerin yönünün değişmiş hali (Kahn, 1995).

Şekil 4.9 daki dairenin sınırınaki başlangıca göre simetrik noktalar özdeşleşmiş olacağından sonuç P^2 projektif düzlemidir.

Örnek 4.2.9 Klein şişesi, $\mathbb{S}^2$ küre yüzeyinden iki farklı dairenin çıkarılması ve yerlerine birer Möbius şeridi eklenmesiyle oluşan uzaya homeomorfiktir.

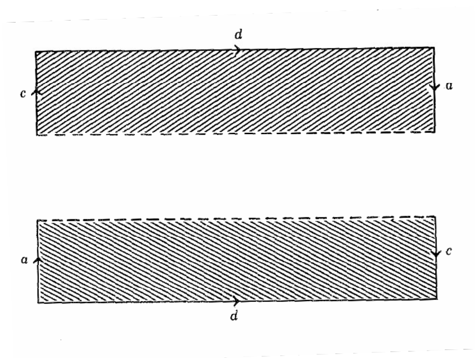
Aslında Klein şişesinin iki Möbius şeridinin sınırları boyunca birbirine eklenmesiyle oluşan uzaya homeomorfik olduğunu göstreceğiz. Buradan, oluşan uzayın iki Möbius şeridinin dikdörtgensel ince bir şeride eklenmesiyle oluşan uzaya da homeomorfik olacağı açıktır. Buradan da dikdörtgensel ince şeridin, iki farklı daire çıkarılmış küre yüzeyine homeomorfik olacağı açıktır.

Klein şişesini Şekil 4.10 de ki gibi temsil edelim.



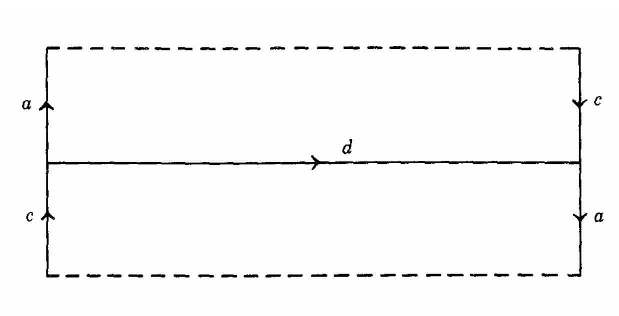
Şekil 4.10 Klein şişesinin bir temsili (Kahn, 1995).

Şekil 4.10 da ki kesikli çizgili yerler bu uzayda çembere homeomorfik dir. Bu kesikli çizgiler arasındaki bölge de Möbius şeridini göstermektedir. Geriye kalan kısmında Möbius şeridi olduğunu göstermek için Şekil 4.11 yi düşünelim.



Şekil 4.11 Klein şişesinden bir Möbius şeridi çıkarılması (Kahn, 1995).

Buradan Şekil 4.11 yi hemen Şekil 4.12 gibi düşünebiliriz.



Şekil 4.12 Bir Möbius şeridi çıkarılmış Klein şişesinin temsili (Kahn, 1995).

Bu Şekil 4.12 yi de Şekil 4.13 gibi düşünebiliriz.

Şekil 4.13 Bir Möbius şeridi çıkarılmış Klein şişesinin başka bir temsili (Kahn, 1995).

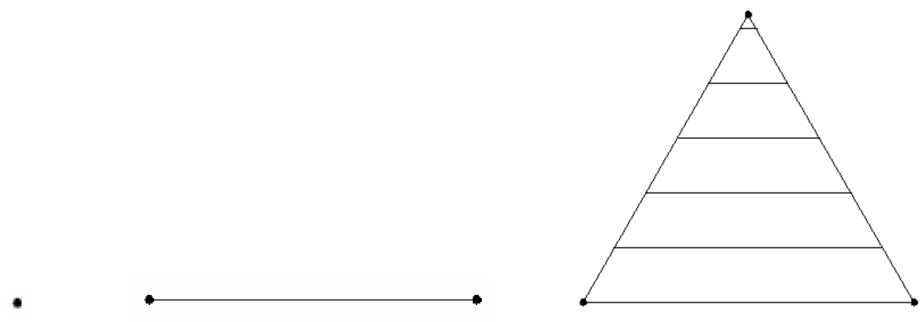
Bu ise kesikli çizgilerin sınır olduğu Möbius şerididir.

4.3 İKİ BOYUTLU KOMPAKT MANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI

Tanım 4.3.1 2-Kompleks diye adlandıracağımız ***Simpleksel Kompleks (Simplicial Komplex)*** noktaların veya I aralıklarının veya üçgenlerin (içi dahil) ayrık birleşimlerinin verilen bir denklik bağıntısına göre bölüm uzayıdır. Bu denklik bağıntısı:

i) ya köşe noktaları başka köşe noktalara özdeş kılar (Örneğin; farklı aralıkların uç noktalarını veya üçgenin köşe noktalarını).
ii) ya da, farklı üçgenlerin birer kenarlarını birbirine lineer olarak özdeş kılar (veya hiçbir özdeşleştirme yapmaz).

Örnek 4.3.1 En basit örnekler, Şekil 4.14 de görüldüğü gibi bir nokta kapalı aralık veya bir üçgendir. Bunların herbirine ***simpleks*** diyeceğiz. Örneğin bir nokta 0-simplekstir, bir aralık 1-simplekstir. Başka bir örnek üçgensel prizma yüzeyidir. Bu yüzeyde 4 köşe, 6 kenar (veya aralık) ve 4 de üçgen bulunmaktadır. Bu üçgenlerin köşelerini özdeşleme bağıntısına göre farklı 4 üçgenin bir bölüm uzayıdır



Şekil 4.14 0,1 ve 2 kompleks

Bir 2-kompleks de ki bazı simplekslerin birleşiminden oluşan kümeye kompleksin ***alt kompleksi*** denir.

Teorem 4.3.1 M kompakt, bağlantılı ve 2-boyutlu bir topolojik manifold olsun. Bu manifoldun 2-kompleks olduğunu düşünelim. Bu durumda M,

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

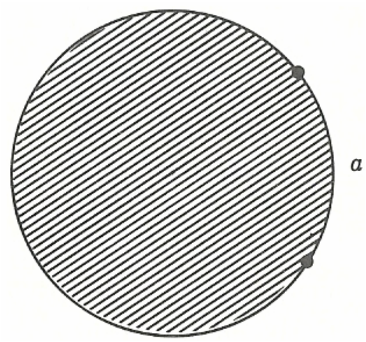
dairesinin bir bölüm uzayıdır. Burada denklik bağıntısı D^2 nin sınırı olan çember üzerindeki sonlu sayıda kapalı aralık çiftlerinin özdeşleştirilmesiyle oluşur.

İspat M nin 2-kompleks olan ve 2-daireye homeomorfik olan tüm alt kümelerinin ailesini düşünelim. M **,** 2-simplekslerin sonlu sayıda birleşimlerinden oluşan bir 2-kompleks olduğundan, yalnızca sonlu sayıda alt kompleks vardır. Her tek 2-simpleks veya üçgen D ye homeomorfik olduğundan, M nin böyle alt kümelerinin ailesi boş kümeden farklıdır.

M de simplekslerin (kenarlar, köşeler ve üçgenler) D ye homeomorfik böyle bir maksimal K kompleksi seçelim. Burada maksimalin anlamı K kompleksinden daha büyük ve D ye homeomorfik olan başka bir kompleks yoktur. Böyle bir maksimal K nın varlığı açıkça bellidir, çünkü M de sadece sonlu sayıda simpleks vardır.

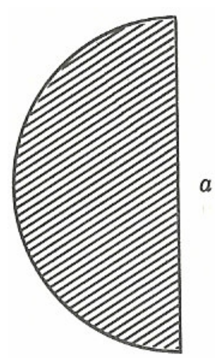
Eğer L, D ye homeomorfik olacak şekilde M nin bir alt kompleksi (yada bir kompleksi) ve T, L ile bir kenarı ortak ve bu kenar L ile lineer olarak özdeş ve L ye yalnızca bu kenar boyunca değmek üzere bir üçgen olsun, bu durumda $L \cup T$, D ile homeomorfiktir. İspatın en önemli adımı olan bu durumu adım adım ispatlayalım.

L nin D ye homeomorfik olduğu veriliyor. T üçgenini nin ekleneceği kenar sınırdaki a yayına homeomorfiktir.



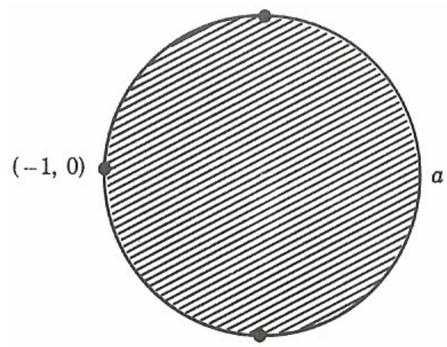
Şekil 4.15 D nin sınırında T nin ekleneceği a aralığı (Kahn, 1995).

Bu da $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$ yarı dairesine homeomorfiktir ve burada a $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ ya karşılık gelmektedir.



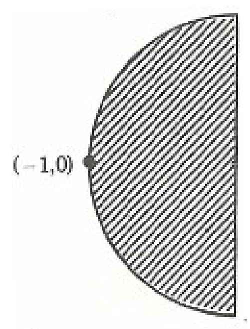
Şekil 4.16 D ye homeomorfik yarı daire (Kahn, 1995).

Şekil 4.17 in Şekil 4.18 ye homeomorfik olacağı açıktır. Bunu a yayını dairenin sınırının



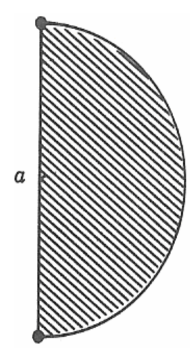
Şekil 4.17 D ye homeomorfik daire (Kahn, 1995).

yarısı alarak kolayca görebiliriz.



Şekil 4.18 Yarı daire (Kahn, 1995).

Diğer yandan, K ya eklemek ya da a kenarı boyunca özdeşleştirmek istediğimiz tek üçgen dairein diğer yarısına homeomorfiktir.

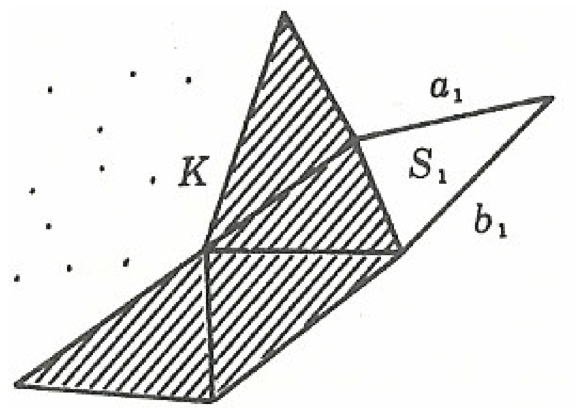


Şekil 4.19 Üçgenin homeomorfik olduğu dairenin diğer yarısı (Kahn, 1995).

Şekil 4.18 ile Şekil 4.19 un birbirine a kenarı boyunca özdeşlenmesi sonucu oluşan uzay yani K ile bir üçgenin birleşimi tam daireye homeomorfiktir.

İspatı tamamlamak için, $T_1, T_2, ...T_j$, M de olupda maksimal K kompleksinde olmayan üçgenler olsun. M bağlantılı olduğundan, her bir T_i nin $K \cup T \cup .... \cup T_{i-1}$ ile bir yüzü (kenarı) paylaşacak şekilde sıralandığını kabul edebiliriz. T_1 i K nın yalnızca bir yüzü ile özdeşleşecek şekilde K ya ekleyelim. Geri kalan yüzleri özdeşleştirmiyoruz ve böylece oluşan yeni simpleksi S_1 ile gösterelim.

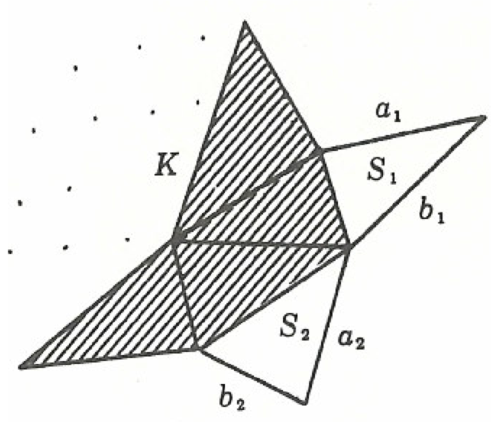
Buradan, taralı kısım K yı göstermek üzere Şekil 4.20 yi elde ediyoruz.



Şekil 4.20 S_1 simpleksi (Kahn, 1995).

$K \cup T_1$ i elde edecek şekilde özdeşleştirilecek olan yeni kompleksin yüzlerini a_1 ve b_1 olarak adlandıralım. Önceki açıklamalarımız $K \cup S_1$ in D ye homeomorfik olduğunu gösterir.

T_2, $K \cup T_1$ ile bir yüz boyunca kesişmek zorunda olduğundan, Şekil 4.21 de ki gibi, bir S_2 üçgenini $K \cup S_1$ e bir yüz boyunca olan noktaları özdeşleştirerek fakat kalan yüzleri daha sonra özdeşleştirecek şekilde ekleyelim.



Şekil 4.21 S_2 in eklenmesi (Kahn, 1995).

Yine önceki açıklamalarımızdan $K \cup S_1 \cup S_2$, D ye homeomorfiktir ve tüm yüzler boyunca uygun özdeşleştirmeler yapılarak $K \cup T_1 \cup T_2$, $K \cup S_1 \cup S_2$ nin bölüm uzayıdır. Elbette S_2, K ile değil de S_1 ile bir kenarını paylaşabilir. Burada verilen bir kenar boyunca ancak iki üçgenin kesişebileceğini not edelim. Bizim uzayımız 2-boyutlu bir manifold olduğundan bunu bir noktanın bir komşuluğundan uygun bir aralığı çıkararak görmek mümkündür.

Böylece devam edilirse, $K \cup T_1 \cup .... \cup T_j$ sadece sınırdaki yay (kenar) parçalarının özdeşleştirilmesi ile D ye homeomorfik olan $K \cup S_1 .... \cup S_j$ nin bölüm uzayıdır. Fakat $M = K \cup T_1 \cup .... \cup T_j$ olduğundan ispat biter.

Bu kompleks kavramını açıkça kullandığımız tek yerdir.

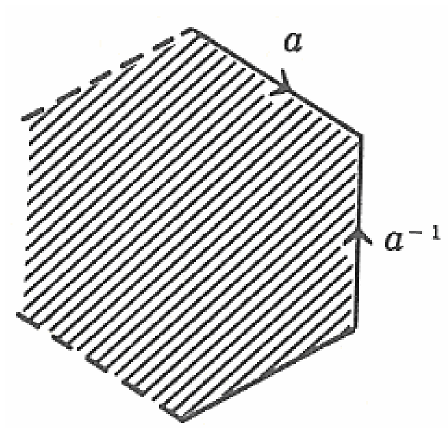
Teorem 4.3.2 Kompleks olan herhangi bir kompakt, bağlantılı ve 2-boyutlu M manifoldu 2-boyutlu küre yüzeyinden sonlu sayıda dairesel deliğin çıkarılması ve yerlerine;

i) her bir ucu bir çift delik ile özdeşleşecek şekilde kulp (kesik silindir) eklenmesi veya

ii) bir deliğe bir cross-cap (veya Möbius şeridi), yani Möbius şeridinin sınırı, dairesel deliğin sınırı ile özdeşleşecek şekilde eklenmesi ile oluşan yeni uzaya homeomorfiktir.

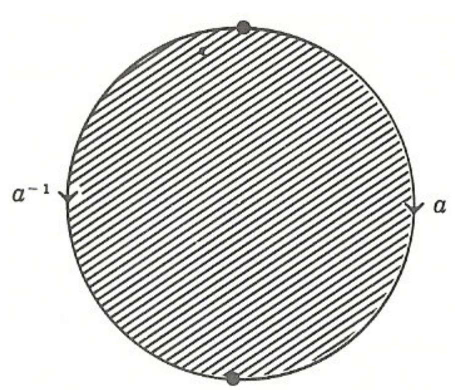
İspat Teorem 4.3.1 den M nin sınırdaki yay parçalarının özdeşleştirilmesi ile 2-dairenin bölüm uzayı olduğunu biliyoruz. İddiamız M nin bir D dairesine üç tip özdeşleme yoluyla homeomorfik olduğudur.

a) Ters yönde yönlendirilmiş ve özdeşleştirilecek olan iki komşu kenar (a^{-1} ile a nın ters yönde oklandırılmasını göstereceğiz.)



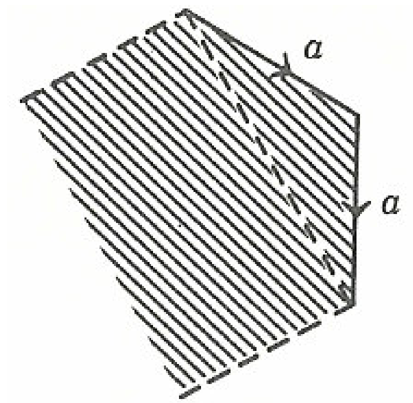
Şekil 4.22 Ters yönde komşu iki kenar (Kahn, 1995).

En basit durumda, Şekil 4.23 $\mathbb{S}^2$ küresini verir.



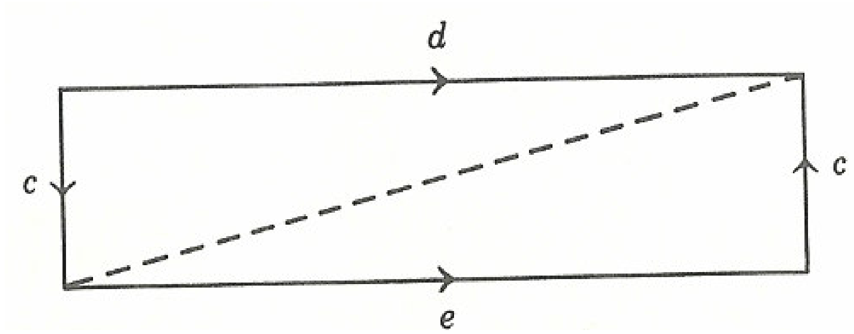
Şekil 4.23 Kürenin oluşumu (Kahn, 1995).

b) Aynı yönde yönlendirilmiş ve özdeşleştirilecek olan iki komşu kenar Şekil 4.24 de gösterilmiştir.



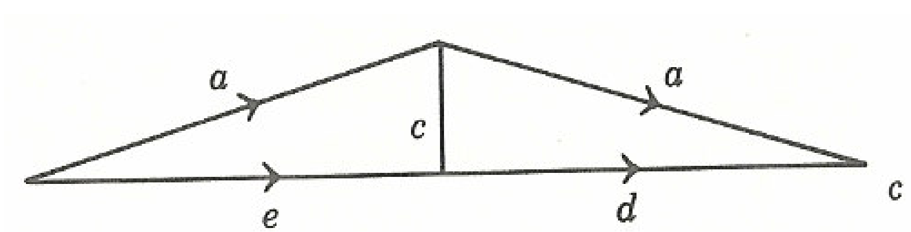
Şekil 4.24 Aynı yönde komşu iki kenar (Kahn, 1995).

Bu durum bir deliğe eklenmiş bir cross-cap ya da Möbius şerididir. Kesikli doğru, bir deliği ve Möbius şeridini oluşturan a lar ile çevrelenmiş bir üçgeni temsil eder. Bunu



Şekil 4.25 Möbius şeridi (Kahn, 1995).

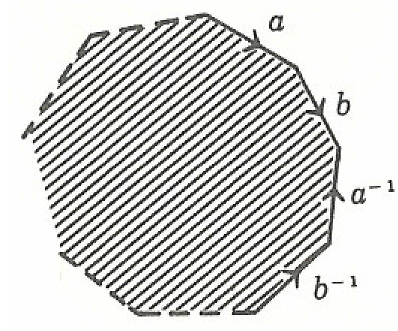
görmek için Şekil 4.25 deki gibi bir Möbius şeridi alıp, kesikli doğru boyunca keselim, özdeşleşen kenarları iki a ile gösterelim. Şekil 4.26 aynı uzayın yeni bir gösterimidir.



Şekil 4.26 Möbius şeridinin değişik bir gösterimi (Kahn, 1995).

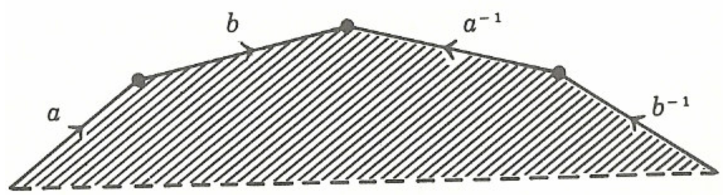
ed yi Şekil 4.24 deki kesikli çizgi olarak düşünürsek açıkca bir sınır çemberi elde ederiz.

c) Şekil 4.27 de ki gibi a ve b sırasıyla a^{-1} ve b^{-1} ile özdeşleştirilecek olsun.



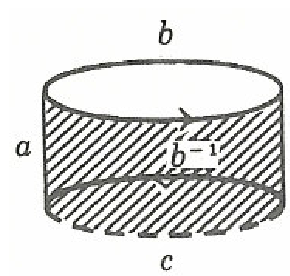
Şekil 4.27 a ve b nin sırasıyla a^{-1} ve b^{-1} ile özdeşleştirilmesi (Kahn, 1995).

Bunun iki dairesel deliğe kulp (kesik silindir) eklenmesi olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için ilgili kısmı çıkarırsak aşağıdaki Şekil 4.28 i elde ederiz.



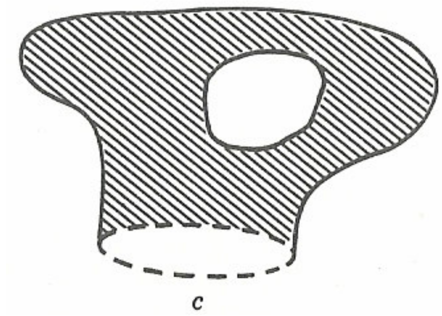
Şekil 4.28 Şekil 4.27 de ki ilgili bölgenin kesimi (Kahn, 1995).

(Burada c kestiğimiz doğrudur) Eğer a ile a^{-1} yi özdeşlersek aşağıdaki Şekil 4.29 yi elde ederiz.



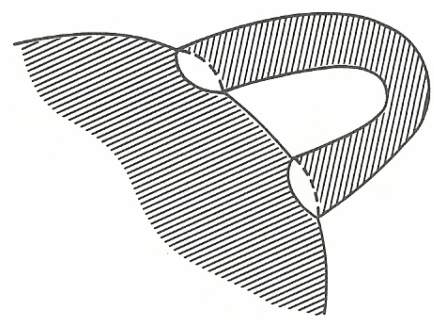
Şekil 4.29 a ve a^{-1} in özdeşleştirilmesi (Kahn, 1995).

b ve b^{-1} i özdeşleştirirsek yani b^{-1} i b nin üzerine yapıştırırsak Şekil 4.30 de olduğu gibi c ye yapışık bir patlak tor elde ederiz.



Şekil 4.30 Patlak Tor (Kahn, 1995).

Böylece bir patlak torun bir küredeki delik ile özdeşleştirilmesinden elde edilen uzayın, bir kulpun bir kürenin iki deliğine eşleştirilmesinden elde edilen uzaya homeomorf olduğunu göstermek kolaydır. Yani iddiamız doğrudur.



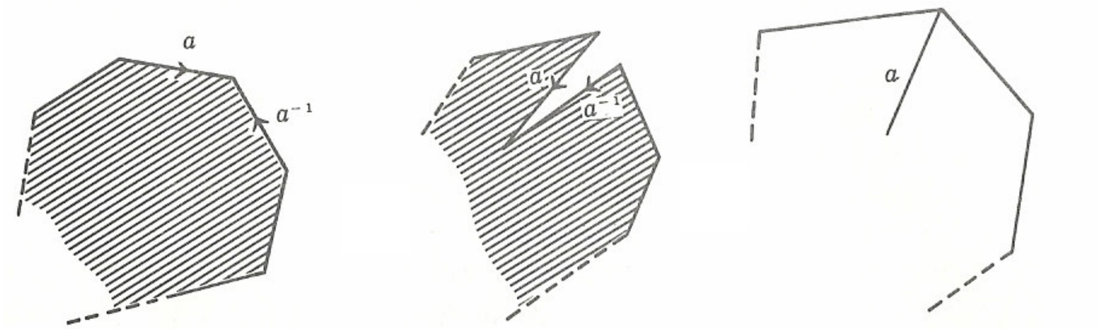
Şekil 4.31 Küre yüzeyine bir kulp takma (Kahn, 1995).

Eğer M nin bu üç çeşit özdeşleler yoluyla bir daireye denk olduğunu gösterebilirsek, sonuca ulaşırız. İspatın kalanı, bu üç çeşit forma sistematik indirgeme olacaktır. Bunu adım adım gösterelim.

D dairesi örneğin $aba^{-1}bcc^{-1}$ ile gösterebileceğimiz kenarlara sahip olsun. Bu $aba^{-1}bcc^{-1}$ ifadesine D dairesi için bir ***kelime*** diyeceğiz.

Bir harfle gösterilen her kenar iki defa oluşacaktır. Çünkü her özdeşleştirme iki kenarı birbirine yapıştırır. a saat yönünde a^{-1} ise saat yönünün tersine yönlendirilmiş demektir. Adımlarımız bir kelimeyi daha basit bir forma indirgeyecektir.

i) Eğer en az dört kenar varsa a ve a^{-1} tipindeki komşu kenarlar kelimeden çıkarılabilir. Bu durum en iyi aşağıdaki Şekil 4.32 le açıklanabilir.



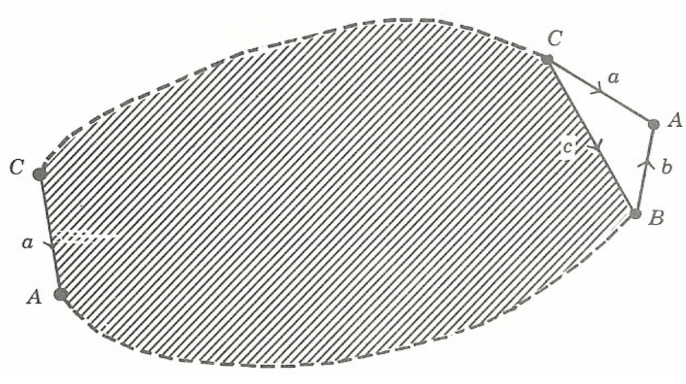
Şekil 4.32 Komşu kenarların kelimeden çıkarılması (Kahn, 1995).

Ters yönü göstermek için a^{-1} yazmamız yeterlidir, ancak karmaşıklığı önlemek için ok larıda ekleyebiliriz.

Kısaca, eğer aa^{-1} varsa hemen özdeşleştirmeyi yaparız ve böylece geriye iki kenar daha eksik olan bir daire kalır, Şekil 4.32 de ki sağdaki şekil.

ii) İddia ediyoruz ki D nin sınırındaki tüm kenarlar, D den M elde edilirken birbirine özdeşleştirilmiş kabul edilebilir.

Özdeşleşmemiş iki kenar varsa, bunlar A ve B ile adlandırılan komşu iki kenar olmak zorundadırlar.

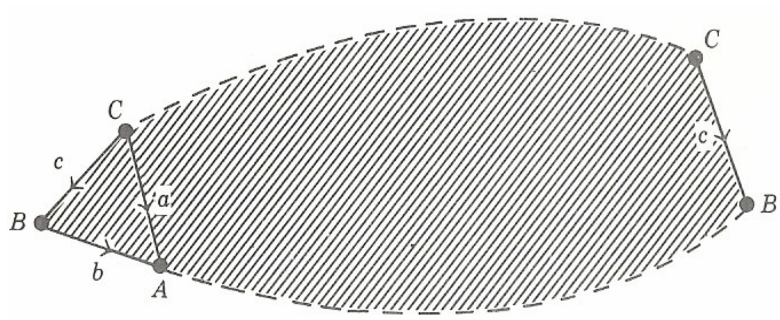


Şekil 4.33 Özdeşleşmemiş komşu iki kenar (Kahn, 1995).

Bu durumun Şekil 4.33 de ki gibi olduğunu varsayabiliriz. Burada C ile B yi birleştirecek şekilde bir c doğrusu ekleyelim.

Bir önceki adımımız gereği saat yönündeki a ile saat yönünün tersine yönlendirilmiş b nin özdeşleştirilmemiş olduğunu kabul edebiliriz, yani a şeklin solunda gösterdiğimiz gibi başka bir kenar ile özdeşleşsin.

ABC üçgenini kesip çıkararak sola yapıştıralım.



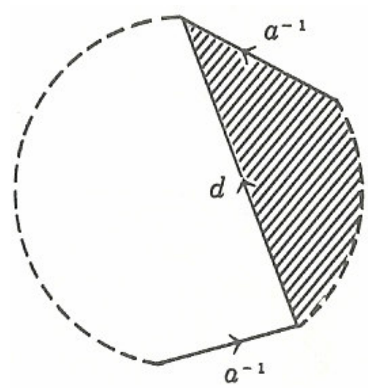
Şekil 4.34 ABC üçgeninin kesilip eklenmesi (Kahn, 1995).

Her iki c de özdeşleştirileceğinden manifoldu veya bölüm uzayını değiştirmiş olmayız.

Yeni şeklimiz A ile özdeş olacak şekilde bir tane daha az köşeye ve B ile özdeş olacak şekilde bir tane daha fazla köşeye sahiptir. Yukarıdaki adım *i)* nin üst üste tekrarlanması sonucu bir tek A köşesine özdeş olan köşelerin sayısını sıfıra indirgeyebiliriz. Böylelikle tüm kenarların özdeşleşmiş olduğu görülür. Doğal olarak bu yeni daire, sınırdaki özdeşleştirmelerle ilk daireden tamamen farklıdır. Fakat her durumda M manifoldu her birinin bölüm uzayına homeomorfik olacaktır.

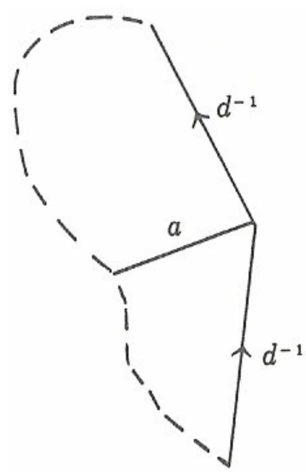
iii) Varsayalım ki aynı kuvvetle iki a bulunsun. Örneğin, $abcb^{-1}c^{-1}a$. O zaman bu iki a nın komşu olduğunu kabul edebiliriz.

Şekil 4.35 deki d yi ve taralı bölgeyi göz önüne alalaım. Bir sonraki adımı açıklayabilmek için d yi ekleyip tarama yapalım.



Şekil 4.35 Aynı üslü iki a nın olması durumu (Kahn, 1995).

Şekil 4.36 daki gibi d boyunca kesip, şeklin kalanını a^{-1} boyunca yapıştıralım.

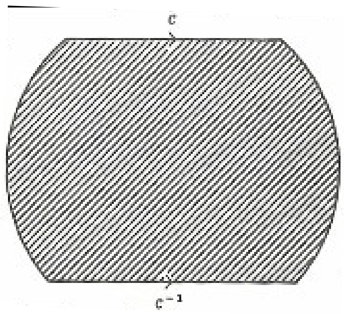


Şekil 4.36 Taralı bölgenin kesilip eklenmesi (Kahn, 1995).

Sonuç uygun özdeştirmelerle M ye homeomorfik olan bir dairedir. a^{-1} dışındaki hiçbir kenar ve sıralamalar değiştirilmemiştir. Ancak iki a^{-1} yrine komsu olan iki d^{-1} gelmiştir Bu işlemi böyle tüm çiftler komşu olana kadar tekrarlayabiliriz.

Eğer tüm çiftler komşu ve aynı kuvvette ise ler Örnek 4.2.9 ve bu ispattaki b) şıkkından M bazı dairesel delikler çıkarılmış küre ve çıkarılan bu yerlere Möbius şeridi eklenmiş uzaya homeomorfiktir. Böylece bu durumdaki ispat tamamlanır.

iv) Şimdi de Şekil 4.37 deki gibi komşu olmayan bir çift c ve c^{-1} kenarları olduğunu kabul edelim. Burada c ve c^{-1} arasında bir d olduğunu ve c^{-1} den sonra d^{-1} in geldiğini iddia ediyoruz.



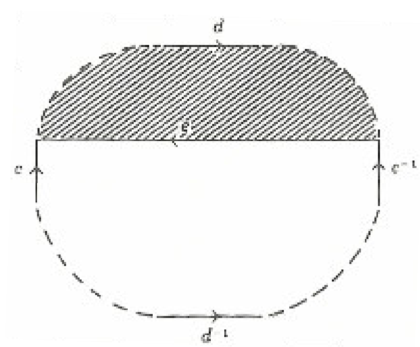
Şekil 4.37 Komşu olmayan c ve c^{-1} kenarlarının olması hali (Kahn, 1995).

Adım *iii)* de ispatladığımız gibi a ve a çifti komşudur. Sağ yarı çemberde aa şeklinde bir tek komşu çift olduğunu kabul edelim. Ohalde sol yarı çemberdeki hiçbir kenar, sağ yarı çemberdeki hiçbir kenar ile özdeşleştirilemez.

Buradan sağ yarı çemberdeki her köşe ve sol yarı çemberdeki her köşe kendi aralarında özdeşleşmiştir sonucuna varılır. Buradan c nin iki köşesinin özdeşleşmediği sonucu çıkar ki bu da adım *ii)* ile çelişir.

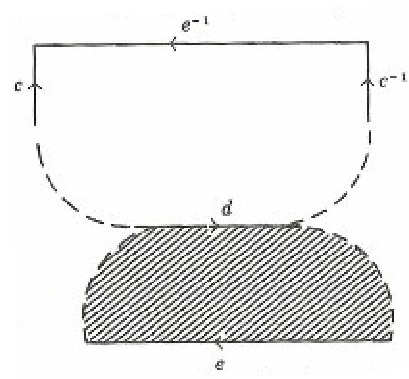
Böylece sağ yarı çemberde, sol yarı çemberdeki d^{-1} ile özdeşleşecek bir d vardır(d^{-1} olmak zorundadır çünkü eğer d olsaydı adım *iii)* gereği d ile d komşu olacaklardı).

v) c ve d , $....c....d.....c^{-1}.....d^{-1}$ sıralamasında ise bunu $....cdc^{-1}d^{-1}...$ sıralamasında olacak şekilde dönüştürebiliriz. Bunu aşağıdaki şekiller dizisi ile açıklayabiliriz.



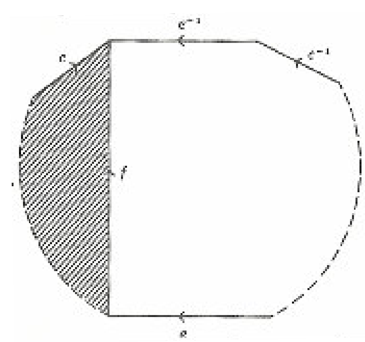
Şekil 4.38 $....c....d.....c^{-1}.....d^{-1}$ nin bir temsili (Kahn, 1995).

Şekil 4.38 deki e ve taralı bölge bir sonraki Şekil 4.39 yi açıklamak için verilmiştir.



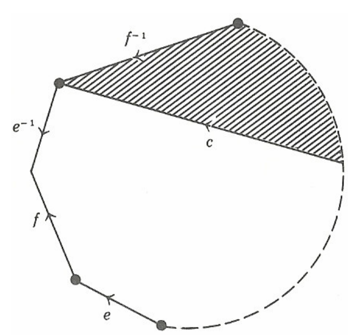
Şekil 4.39 İki d nin özdeşleşmesi (Kahn, 1995).

Buradan Şekil 4.40 elde edilir.



Şekil 4.40 İki d nin özdeşleşmesinin başka bir temsili (Kahn, 1995).

Bir kez daha f boyunca kesip, c boyunca yapıştıralım.



Şekil 4.41 $...efe^{-1}f^{-1}...$ formuna getirme (Kahn, 1995).

Bu $....c....d.....c^{-1}.....d^{-1}$ ifadesini $....efe^{-1}f^{-1}...$ ifadesi ile değiştirir. Bu işlem sırasında aa tipindeki çiftlerin bir değişikliğe uğramayacağı kolayca görülebilir.

Buradan şu sonuca varırız: ya iki kenarımızın olduğu durumda (ki bu durum küre durumu) veya Örnek 4.2.8 deki gibi bir projektif düzlem = bir cross-cap eklenmiş küre olurki bu durumda *i)* adımımız geçersizdir ya da ispatın b) şıkkındaki gibi olası cross-caplar eklenmiş küre veya ispatın c) adımında olduğu gibi kulplar eklenmiş küre durumları mevcuttur. Burada bir Möbius şeridi (vaya cross-cap) nin aa ile ve bir kulpunda $cdc^{-1}d^{-1}$ ile gösterildiğini de belirtelim.

Teorem 4.3.2 aslında tam değildir. Çünkü bu teoremdeki kompleks olan kompakt 2-manifoldların tanımlanması tek değildir. Aynı 2-manifoldun mümkün olan tanımlamaları arasındaki esnekliği aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

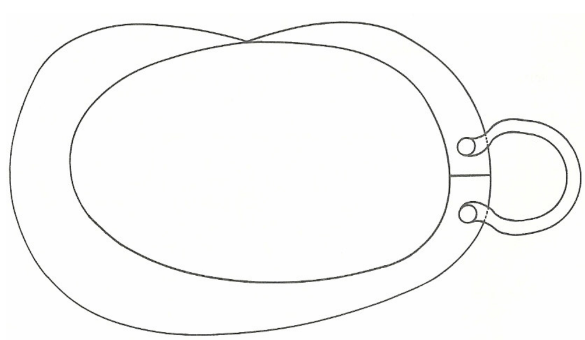
Teorem 4.3.3 2-manifolda eklenmiş herhangi üç cross-cap (Möbius şeridi) kaldıralabilir ve yerine bir kulp ve bir cross-cap konularak başlangıçdaki manifolda homeomorfik bir manifold elde edilebilir.

İspat İspat için aşağıdakileri göstermek yeterlidir.

a) Bir kulp eklenmiş Möbius şeridi (yani bir kulp ve bir cross-cap) ile
b) Bir Klein şişesi eklenmiş Möbius şeridi homeomorfiktir.

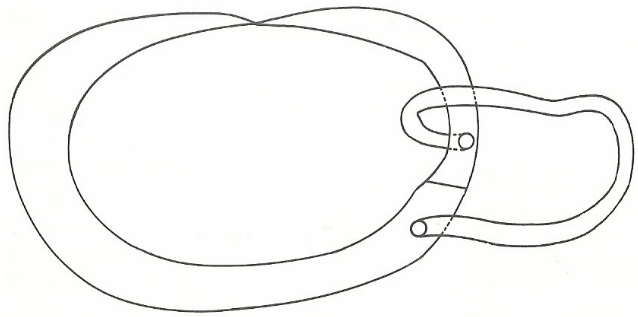
Aşağıdaki durumları göz önüne alalım.

i)



Şekil 4.42 Bir Möbius şeridine bir kulp eklenmesi (Kahn, 1995).

ii)



Şekil 4.43 Bir Möbius şeridine bir Klein şişesinin eklenmesi (Kahn, 1995).

Şekil 4.42 ve Şekil 4.43 yukarıdaki a) ve b) şıklarını temsil ederler. Möbius şeridi yalnızca bir yüze sahip olduğundan b) şıkkındaki ayaklardan biri Mobius şeridi boyunca kaydırılırsa a) ve b) durumunun aynı (homeomorfik) olduklarını görürüz. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç olarak herhangi 2-boyutlu bir kompakt manifoldun Küre, Tor, ve Projektif düzlemin uygun şekilde birbirine eklenmesi ile elde edilebileceğini göstermiş olduk.

Yukarıda, verilen iki boyutlu kompakt küre, tor, projektif düzlem ve Klein şişesi manifoldlarının birbirine homeomorfik olmayan 2-boyutlu manifoldlar olduğu bilinmektedir (Kahn, 1995).

Yönlendirilebilir ve 2-boyutlu bir kompakt manifoldun küre, tor yada en genel anlamda sunlu $n \geq 2$ delikli tor yada bunlardan birine homeomorfik olduğu bilinmektedir. Yönlendirilemez durumda yani kompakt yüzeyin bir Möbius şeridi içermesi durumunda yüzeyin Projektif düzlem ya da sonlu tane projektif düzlemin birbirine eklenmesinden oluşan yüzeye homeomorfik olduğu bilinmektedir. Bu ve benzeri sonuçlar için Armstrong (1983), Kinsey (1993), Massey (1997) kaynaklarına bakılabilir.

Daha yüksek boyutlu manifoldların sınıflandırılması halen açık bir problemdir. Hatta 3-boyutta bile sınıflandırma henüz yapılamamıştır.

KAYNAKLAR

Armstrong, M. A. (1983) *Basic Topology*, Springer-Verlag, New York, Inc., p. 251.

Burns, K. and Gidea, M. (2005) *Differential Geometry and Topology*, Chapman &Hall/Crc, p. 389.

Bülbül, A. (2004) *Genel Topoloji,* Hacettepe Üniversitesi, Ankara, p. 312.

Kahn, W. D. (1995) *Topology,* Dover Publications, Inc., New York, p. 217.

Kinsey, L.C. (1993) *Topology Of Surfaces,* Springer-Verlag, New York, Inc., p. 279.

Massey, S.W. (1997) *A Basic Course in Algebric Topology*, Springer Verlag, New York Inc., p. 428.

Sabuncuoğlu, A. (2004) *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, p. 593.

ÖZGEÇMİŞ

Uğur YILMAZ 1975 yılında Zonguldak`ta doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı; Zonguldak Uzunmehmet Lisesi'nden mezun olduktan sonra Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 2000 yılında mezun oldu; 2000 yılında Zonguldak Sivriler İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı; 2001 yılından itibaren de Zonguldak Anadolu Teknik Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır; evli olan Uğur YILMAZ, halen 2004 yılında kabul edildiği Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres:	Tepebaşı Mah. Ahmet Galatalı Sok. Gözde Sitesi Blok: B/13 Daire:10 MERKEZ / ZONGULDAK
Ev Tel:	(372) 256 4100
Tel:	(533) 615 9555
E-Posta:	uyilmaz75@mynet.com