

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARDA SOLİTON TIPLERİ

Mehmet AKBOĞA

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

OCAK 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARDA SOLİTON TIPLERİ

Tez Yazarı
Mehmet AKBOĞA

Danışman
Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN

OCAK 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Para-Sasakian Manifoldlarda Soliton Tipleri
Yazarı: Mehmet AKBOĞA
İlk Teslim Tarihi: 15.12.2023
Savunma Tarihi: 22.01.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Ahmet YILDIZ İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım ‘‘Para-Sasakian Manifolddarda Soliton Tipleri’’ Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

22.01.2024

Mehmet AKBOĞA



ÖNSÖZ

“Para-Sasakian Manifolddarda Soliton Tipleri” adlı bu tez çalışması Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programında yazılmıştır.

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesinde ve her aşamasında yardımını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN’e mesailerini bana ayırarak çalışmamın her aşamasında destek ve yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet YILDIZ’a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi desteğini hiç eksik etmeyen eşime ve aileme saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Mehmet AKBOĞA

ELAZIĞ, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.2. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları	10
2.3. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları	11
2.4. Sasakian Manifoldlar	13
3. PARADEĞME MANIFOLDLAR	15
3.1. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldlar	15
3.2. Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar	15
3.3. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldların Torsiyon Tensörü	17
3.4. Para-Sasakian Manifoldlar	18
3.5. Para-Sasakian Manifoldlarda Ricci Soliton	19
4. RICCI SOLİTON ŞARTINI SAĞLAYAN PARA SASAKIAN MANİFOLDLAR	23
5.SONUÇLAR.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Para-Sasakian Manifolddarda Soliton Tipleri

Mehmet AKBOĞA

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2024, Sayfa: xiii + 48

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde bu çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk olarak hemen hemen para-değme manifoldlar, para-değme manifoldlar ve para-Sasakian manifoldlar tanımlandıktan sonra bir para-Sasakian manifold üzerinde soliton tipleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde Ricci soliton denklemini sağlayan bir para-Sasakian manifoldunda Weyl konformal eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü ve konharmonik eğrilik tensörü için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Para-değme manifoldlar, para-Sasakian manifoldlar, Ricci soliton, Riemann eğrilik tensörü, Weyl konformal eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, konharmonik eğrilik tensörü.

ABSTRACT

Soliton Types in the Para-Sasakian Manifolds

Mehmet AKBOĞA

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2024, Pages: xiii + 48

This study prepared as a masters thesis, consists of four chapters. The first section is the introduction. In the second section, the base definitions and concepts used in the subsequent sections of this study are given. In the third section, firstly almost para-contact manifolds, para-contact manifolds and para-Sasakian manifolds are introduced, then soliton types is introduced on a para-Sasakian manifold. In the fourth section, some characterizations are given for the Weyl conformal curvature tensor, the projective curvature tensor and the conharmonic curvature tensor on a para-Sasakian manifold which is satisfied Ricci soliton equation.

Keywords: Para-contact manifolds, para-Sasakian manifolds, Ricci soliton, Riemann curvature tensor, Weyl conformal curvature tensor, projective curvature tensor, conharmonic curvature tensor.

SİMGELER VE KISALTMALAR

B	: İkinci Temel Form
M	: Manifold
C	: Weyl konformal tensörü
N_F	: F nin Nijenhuis torsion tensörü
g	: Metrik tensör
D	: Normal koneksiyon
Ric	: Ricci tensörü
IR	: Reel sayılar cümlesi
ϕ	: (1-1) tipinde tensör alanı
$[\cdot]$: Lie Parantez operatörü
C^∞	: Diferansiyellenebilme
$Rcur$: M nin Riemann eğrilik tensörü
τ	: Skaler Eğrilik
η	: 1-form
A_ξ	: Şekil operatörü
∇	: M üzerinde afin koneksiyon
K	: Konharmonikal eğrilik tensörü
$\chi(M)$: M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$T_p(M)$: p noktasında teğet uzay
P	: Projektif eğrilik tensörü
Q	: Ricci operatörü

1. GİRİŞ

Manifoldlar teorisi Diferansiyel Geometrinin en kapsamlı ve önemli konularından biri olup çalışmaların daha basit, kolay ve işlem yapılabilir uzaylar cinsinden karakterize edilebilir olduğundan bilimsel olarak popüler duruma gelmiştir. Manifoldlar konusu diğer çalışma alanlarında da kullanıldığından özellikle fizik ve cebir gibi alanlarda paydaş çalışma alanı olmuştur. Manifoldlar teorisi her geçen gün yeni bilgilerin elde edildiği ortak bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Hamilton [1] 1982’de sabit eğrilikli manifold üzerinde kanonik bir metrik bulmak için Ricci akışı kavramını ortaya attı. Daha sonra Ricci akışı, Riemann manifoldlarını özellikle de pozitif eğriliğe sahip manifoldların incelenmesinde güçlü bir araç haline geldi. Perelman([2,3]) Poincare varsayımını kanıtlamak için Ricci akışını ve kavramlarını kullandı. Ricci akışı aşağıdaki gibi tanımlanan Riemann manifoldu üzerindeki metrikler için bir devrim denklemdir.

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = -2Ric_{ij}.$$

Ricci akışının çözümlerinin limiti olarak bir Ricci soliton ortaya çıkar. Ricci akışına yönelik bir çözüm, yalnızca bir diffeomorfizm ölçeklendirmeden oluşan tek bir parametre grubuyla hareket ediyorsa Ricci soliton olarak adlandırılır. Bir Riemann manifold (M, g) , üzerindeki Ricci solitonu (g, θ_4, λ) , bir Einstein metriğinin genelleştirilmesidir, öyle ki;

$$L_{\theta_4} g + 2Ric + 2\lambda g = 0,$$

burada Ric Ricci tensor, L_{θ_4} M üzerindeki vektör alanları boyunca Lie türev operatörüdür ve λ bir gerçel sayıdır [4]. λ sayısının sırasıyla negatif, sıfır ve pozitif olmasına göre Ricci solitonun daralan, sabit ve genişleyen olduğu söylenir.

Son yirmi yıldır Ricci soliton geometrisi birçok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. Özellikle, Parelman’ın 1904’te ortaya atılan uzun süredir devam eden Poincare varsayımını çözmek için Ricci solitonlarını uygulamasından sonra daha önemli hale geldi[5]. Sharma, değme geometri de Ricci solitonlarını inceledi. Daha sonra değme metrik manifoldlarda ki Ricci solitanlar çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir ([6,7,8]). Bejan ve Crasmareanu [9], Blaga [10], Chandra ve ark.[11], Chen ve Deshmukh [12], Deshmukh ve ark.[13], He ve Zhu [14], Nagaraja ve Premalata [15], Tripathi [16].

T.Adati ve K.Matsumoto (1997), para-Sasakian ve özel para-Sasakian manifoldları tanımladılar [17]. I.Sato ve K.Matsumoto tarafından tanıtılan neredeyse paradeğme bir

manifoldun özel durumları olarak kabul edilir. Aynı makale içinde yazarlar Konformal simetrik para-Sasakian manifoldları incelediler ve n -boyutlu ($n>3$) para-Sasakian manifoldun konformal olarak düz ve özel para-Sasakian manifold olduğunu ispatladılar [18].

Yukarıdaki çalışmalardan yola çıkarak bu tez para-Sasakian manifoldlar üzerindeki Ricci solitonların incelenmesini ele almaktadır. Tez şu şekilde düzenlenmiştir. 2-3 Bölümler de para-Sasakian manifold ve Ricci soliton ile ilgili temel denklemler ve tanımlar verilmiştir. 4- Bölüm de M para-Sasakian manifoldu üzerinde bir (g, ξ, λ) Ricci solitonun her zaman genişleyen olduğu gösterildi. Daha sonra M para-Sasakian manifold üzerinde C Weyl Konformal eğrilik tensörünün flat olması durumlarında M üstünde bir Einstein manifoldu olduğu incelendi. Projektif eğrilik tensörü para-Sasakian manifoldlarda Ricci soliton ile gösterilip projektif eğrilik tensörünün flat olması durumun da quasi-Einstein manifold olduğu incelendi. Daha sonra M üzerinde bazı simetri şartları incelendi.

Son olarak Ricci solitonlu para-Sasakian manifoldun bir örneği oluşturuldu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1.1: M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den \mathbb{R} ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir ve (M, g) ile gösterilir [20].

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye bağlantılı manifold adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye basit bağlantılıdır denir [21].

Tanım 2.1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M)$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow \nabla(\theta_1, \theta_2) = \nabla_{\theta_1} \theta_2$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için,

$$\text{i) } \nabla_{\theta_1}(\theta_2 + \theta_3) = \nabla_{\theta_1} \theta_2 + \nabla_{\theta_1} \theta_3,$$

$$\text{ii) } \nabla_{f\theta_1 + g\theta_2} \theta_3 = f\nabla_{\theta_1} \theta_3 + g\nabla_{\theta_2} \theta_3,$$

$$\text{iii) } \nabla_{\theta_1}(f\theta_2) = f\nabla_{\theta_1} \theta_2 + \theta_1(f)\theta_2,$$

özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir Afin koneksiyon adı verilir [22].

Tanım 2.1.3: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü;

$$\text{i) } \nabla_{\theta_1} \theta_2 - \nabla_{\theta_2} \theta_1 = [\theta_1, \theta_2], \text{ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),}$$

ii) $\theta_1 g(\theta_2, \theta_3) = g(\nabla_{\theta_1} \theta_2, \theta_3) + g(\theta_2, \nabla_{\theta_1} \theta_3)$, (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği) şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu veya M nin Levi-Civita koneksiyonu adı verilir [22].

Tanım 2.1.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \mathcal{X}(M)$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow \nabla(\theta_1, \theta_2) = \nabla_{\theta_1} \theta_2$$

şeklinde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}(M)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_{\theta_1} \theta_2$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir.

Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya Lineer koneksiyon (veya kovaryant türev) adı verilir [21].

$\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

- i) $\nabla_{\theta_1 + \theta_2} \theta_3 = \nabla_{\theta_1} \theta_3 + \nabla_{\theta_2} \theta_3$,
- ii) $\nabla_{f\theta_1} \theta_2 = f \nabla_{\theta_1} \theta_2$,
- iii) $\nabla_{\theta_1} (\theta_2 + \theta_3) = \nabla_{\theta_1} \theta_2 + \nabla_{\theta_1} \theta_3$,
- iii) $\nabla_{\theta_1} (f\theta_2) = f \nabla_{\theta_1} \theta_2 + \theta_1(f)\theta_2$,

dir.

Tanım 2.1.5: (M, g) bir Riemann manifoldu, N de M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$Rcur : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \longrightarrow Rcur(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3,$$

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \nabla_{\theta_1} \nabla_{\theta_2} \theta_3 - \nabla_{\theta_2} \nabla_{\theta_1} \theta_3 - \nabla_{[\theta_1, \theta_2]} \theta_3, \quad (2.1)$$

ile tanımlanan $Rcur$ fonksiyonu M üzerinde bir (1,3)-tensör alanıdır ve M nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca $Rcur(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4)$ tensörüne M nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.

Her $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5 \in \mathcal{X}(M)$ için Riemann eğrilik tensörü $Rcur$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$i) Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = -Rcur(\theta_2, \theta_1)\theta_3, \quad (2.2)$$

$$ii) g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) = -g(Rcur(\theta_2, \theta_1)\theta_4, \theta_3), \quad (2.3)$$

$$iii) Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + Rcur(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + Rcur(\theta_3, \theta_1)\theta_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$iv) g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) = g(Rcur(\theta_3, \theta_4)\theta_1, \theta_2), \quad (2.5)$$

$$v) g(\theta_1, Rcur(\theta_2, \theta_3)\theta_4) = -g(Rcur(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_1), \theta_1), \quad (2.6)$$

Tanım 2.1.6: (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde sırası ile ξ ve bir r -form ω olmak üzere,

$\theta_{52}, \dots, \theta_{5r} \in T_p M (r \geq 1)$ vektörleri için M üzerinde;

$$(C_\xi \omega)(P)(\theta_{52}, \dots, \theta_{5r}) = \omega(\xi(P), \theta_{52}, \dots, \theta_{5r}), \quad (2.7)$$

olacak şekilde tanımlanan $(C_\xi \omega)$ $(r-1)$ formuna ω nın ξ ile kontraksiyonu denir [23].

Tanım 2.1.7: (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu

$$Q(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) - g(\theta_1, \theta_2)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(\theta_1, \theta_2) \neq 0$ olmak üzere;

$$\tau(\theta_1, \theta_2) = \frac{g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_2, \theta_1)}{Q(\theta_1, \theta_2)} \quad (2.8)$$

eşitliğine Π nin kesitsel eğriliği denir ve $\tau(\Pi)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.1.8: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$Ric: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow Rcur$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow Ric(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n g(Rcur(e_i, \theta_1)\theta_2, e_i) \quad (2.9)$$

denklemleri ile tanımlı $(0,2)$ -tipindeki Ric tensör alanına, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir [4]. Ayrıca Q Ricci operatörü

$$g(Q\theta_1, \theta_2) = Ric(\theta_1, \theta_2), \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır [25].

Tanım 2.1.9: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Her $\theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = ag(\theta_1, \theta_2), \quad (2.11)$$

olacak biçimde M üzerinde bir a fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü Ric , metrik tensör g nin bir katı ise M ye Einstein manifoldu adı verilir [24].

Tanım 2.1.10: Bir M değme metrik manifoldu için;

$$Q = aId + b\eta \otimes \xi \quad (2.12)$$

eşitliği var ise η -Einstein olarak adlandırılır. Burada Q Ricci operatörü, a ve b , M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır [17].

Tanım 2.1.11: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$\tau = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i), \quad (2.13)$$

değerine M nin skalar eğriliği adı verilir [24].

Tanım 2.1.12: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Her $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin Weyl konformal eğrilik tensör alanı

$$\begin{aligned} C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Q\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Q\theta_2 \right] \\ + \frac{\tau}{(n-1)(-2)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \end{aligned} \quad (2.14)$$

ile tanımlanır [24].

Tanım 2.1.13: $n \geq 4$ için $C=0$ ise M manifoldu konformal flat olarak adlandırılır [24].

Tanım 2.1.14: M $n \geq 2$ boyutlu C^∞ sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde tanımlı (0,2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere Λ_A endomorfizmi

$$\Lambda_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \quad (2.15)$$

$$(\theta_1 \Lambda_A \theta_2)\theta_3 = A(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - A(\theta_1, \theta_3)\theta_2, \quad (2.16)$$

ile tanımlanır. Eger $A = g$ alınırsa son denklem

$$(\theta_1 \Lambda_g \theta_2)\theta_3 = g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2, \quad (2.17)$$

biçimine indirgenir [26].

M üzerinde $(0, k)$ -tipinde $(k \geq 1)$ bir T tensör alanı ve $(0, 2)$ -tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde $Rcur \bullet T$ ve $Q(A, T)$ tensörleri sırası ile;

$$\begin{aligned} (Rcur \bullet T)(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1k}; \theta_1, \theta_2) &= -T(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1k}) - \dots \\ &\quad -T(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{1k}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

ve

$$\begin{aligned} Q(A, T)(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1k}; \theta_1, \theta_2) &= -T((\theta_1 \Lambda_A \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1k}) - \dots \\ &\quad -T(\theta_1, \theta_2, \dots, (\theta_1 \Lambda_A \theta_2)\theta_{1k}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

biçiminde tanımlanır [25].

Böylece (2.18) ve (2.19) denklemlerinde $T = Rcur$ ve $A = g$ alındığında, sırası ile,

$$\begin{aligned} (Rcur \bullet Rcur)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -Rcur(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}) - \dots \\ &\quad -Rcur(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{14}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Q(g, Rcur)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -Rcur((\theta_1 \Lambda_g \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}) - \dots \\ &\quad -Rcur(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, Rcur(\theta_1 \Lambda_g \theta_2)\theta_{14}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

denklemleri, $T = C$ ve $A = g$ alındığında

$$\begin{aligned} (Rcur \bullet C)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -C(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}) - \dots \\ &\quad -C(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{14}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} Q(g, C)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -C((\theta_1 \Lambda_g \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}) - \dots \\ &\quad -C(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, (\theta_1 \Lambda_g \theta_2)\theta_{14}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

denklemleri, $T = S$ ve $A = g$ alındığında

$$\begin{aligned} (Rcur \bullet Ric)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -Ric(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}) - \dots \\ &\quad -Ric(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_{14}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
Q(g, C)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -C((\theta_1 \Lambda_g \theta_2) \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) - \dots \\
&- C(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, Rcur(\theta_1 \Lambda_g \theta_2) \theta_{14}),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ve ayrıca $A = S$, $T = Rcur$ için (2.19) denkleminde

$$\begin{aligned}
Q(Ric, Rcur)(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}; \theta_1, \theta_2) &= -Rcur((\theta_1 \Lambda_S \theta_2) \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}) - \dots \\
&- Rcur(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, Rcur(\theta_1 \Lambda_S \theta_2) \theta_{14})
\end{aligned} \tag{2.26}$$

olarak elde edilir. Eğer M nin her p noktası için bundan başka,

$Rcur \bullet Rcur = 0$ ise M ye semisimetriktir denir [26].

$Rcur \bullet Ric = 0$ ise M ye Ricci-semisimetriktir denir [25].

$Rcur \bullet C = 0$ ise M ye Weyl-semisimetriktir denir [25].

Tanım 2.1.15: $n \geq 3$ boyutlu bir (M, g) Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $Rcur \bullet Rcur$ ve $O(g, Rcur)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye pseudosimetriktir denir.

Yani M nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart,

$U_R = \{p \in M : Q(g, Rcur) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $Rcur \bullet Rcur = L_{Rcur} Q(g, Rcur)$ olmasıdır. L_{Rcur}, U_{Rcur} üzerinde bir fonksiyondur [27].

Tanım 2.1.16: $n \geq 3$ boyutlu bir (M, g) Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $Rcur \bullet Ric$ ve $Q(g, R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye Ricci-pseudosimetrik manifold denir [27].

Yani, M 'nin Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart,

$U = \left\{ p \in M : S - \frac{\tau}{n} g \neq 0 \right\}$ kümesi üzerinde $Rcur \bullet Ric = L_{Ric} Q(g, Ric)$ olmasıdır. L_{Ric}, U_{Ric}

üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.17: $n \geq 4$ boyutlu bir (M, g) Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $Rcur \bullet C$ ve $Q(g, C)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye Weyl-pseudosimetrik manifold denir [27].

Yani, M nin Weyl-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$U_C = \{p \in M : p \in M \text{ de } C \neq 0\}$ kümesi üzerinde $Rcur \bullet C = L_C Q(g, C)$ olmasıdır. L_C, U_C üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.18: Eğer $Rcur \bullet Rcur$ ve $Q(Ric, Rcur)$ tensörleri lineer bağımlı ise yani, $Rcur \bullet Rcur = LQ(Ric, Rcur)$ ise M ye genelleştirilmiş Ricci-pseudo simetriktir denir [27].

Yukarıda numaralı tanımlarda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir [22].

$$Rcur \bullet Rcur = 0 \subset Rcur \bullet Ric = 0,$$

$$Rcur \bullet Rcur = 0 \subset Rcur \bullet C = 0,$$

$$Rcur \bullet Ric = 0 \subset Rcur \bullet Ric = L_{Ric} Q(g, Ric),$$

$$Rcur \bullet Rcur = 0 \subset Rcur \bullet Rcur = L_{Rcur} Q(g, Rcur),$$

$$Rcur \bullet C = 0 \subset Rcur \bullet C = L_{Ric} Q(g, C),$$

$$Rcur \bullet Rcur = L_{Rcur} Q(g, Rcur) \subset Rcur \bullet Ric = L_{Ric} Q(g, Ric),$$

$$Rcur \bullet Rcur = L_{Rcur} Q(g, Rcur) \subset Rcur \bullet C = L_C Q(g, C).$$

Eğer M semisimetrik olmayan fakat pseudosimetrik bir manifold ise M ye proper pseudosimetrik, Ricci-semisimetrik olmayan fakat Ricci-pseudosimetrik manifold ise M ye proper Ricci-pseudosimetrik, Weyl-semisimetrik olmayan fakat Weyl-pseudosimetrik bir manifold ise M ye proper Weyl-pseudosimetriktir denir.

Tanım 2.1.19: Bir (M, g) $n > 3$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_{\theta_1} Ric)(\theta_2, \theta_3) = \alpha(\theta_1) Ric(\theta_2, \theta_3), \quad (2.27)$$

olacak şekilde bir $\alpha(\theta_1)$ 1-formu var ise M ye Ricci-rekürent manifold denir [25].

$$(\nabla_{\theta_1} Ric)(\theta_2, \theta_3) = \alpha(\theta_1) Ric(\theta_2, \theta_3) + \beta(\theta_1) g(\theta_2, \theta_3), \quad (2.28)$$

olacak biçimde $\alpha(\theta_1)$ ve $\beta(\theta_1)$ 1-formları var ise M ye genelleştirilmiş Ricci-rekürent denir [28]. Ric nin kovaryant türevi ∇Ric

$$(\nabla_{\theta_1} Ric)(\theta_2, \theta_3) + (\nabla_{\theta_2} Ric)(\theta_1, \theta_3) + (\nabla_{\theta_3} Ric)(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (2.29)$$

ile tanımlanır ise M ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir [25].

Bundan başka g metrik tensörünün türevi

$$(\nabla_{\theta_1} g)(\theta_2, \theta_3) + \nabla_{\theta_2} g(\theta_2, \theta_3) - g(\nabla_{\theta_1} T, \theta_3) - g(\theta_2, \nabla_{\theta_1} \theta_3), \quad (2.30)$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.1.20: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathcal{X}(M)$ için M nin konharmonik eğrilik tensörü

$$K(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Q\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Q\theta_2 \right], \quad (2.31)$$

ile tanımlanır [29].

Tanım 2.1.21: Eğer $K=0$ ise M manifoldu konharmonik flat manifold olarak adlandırılır [24].

Tanım 2.1.22: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathcal{X}(M)$ için M nin Projektif eğrilik tensörü;

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-1} [Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \quad (2.32)$$

ile tanımlanır [26].

Tanım 2.1.22: Eğer $P=0$ ise M manifoldu projektif flat manifold olarak adlandırılır.

2.2. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

Tanım 2.2.1: M bir n -boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırası ile $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1 -form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı θ_1 olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1, \quad (2.33)$$

$$\phi^2 \theta_1 = -\theta_1 + \eta(\theta_1)\xi, \quad (2.34)$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir hemen hemen değme yapısı denir. M bu yapı ile bir hemen hemen değme manifoldu olarak adlandırılır [24].

Teorem 2.2.1: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için

$$i) \phi\xi = 0, \quad (2.35)$$

$$ii) \eta(\phi\theta_1) = 0, \quad (2.36)$$

$$iii) rank\phi = n - 1, \quad (2.37)$$

dir [24].

Tanım 2.2.2: Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(\theta_1) = g(\theta_1, \xi), \quad (2.38)$$

$$g(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) - \eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (2.39)$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapısı, (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de hemen hemen değme metrik manifoldu denir [24].

Sonuç 2.2.1: n -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\phi\theta_1, \theta_2) = -g(\theta_1, \phi\theta_2) \quad (2.40)$$

dir [24].

Tanım 2.2.3: n -boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Herbir η 1-formu için $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin değme yapısı ve M ye de değme manifoldu denir [24].

Teorem 2.2.2: n -boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(\theta_1, \phi\theta_2) = d\eta(\theta_1, \theta_2) \quad (2.41)$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır [24].

Tanım 2.2.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \phi\theta_2) \quad (2.42)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın temel 2-formu denir [24].

2.3. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldların Torsiyon Tensörü

Tanım 2.3.1: V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J: V \rightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir kompleks yapı denir. $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu R ile göstererek $M \times R$ manifoldunu göz önüne alalım. $M \times R$ üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$$\left(\theta_1, f \frac{d}{dt} \right)$$

şeklindedir. Burada θ_1, M ye teğet bir vektör alanı, tR nin bir koordinatı ve $f, M \times R$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. $M \times R$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J \left(\theta_1, f \frac{d}{dt} \right) = (\phi \theta_1) - f \cdot \xi \cdot \eta(\theta_1) \frac{d}{dt}$$

ile tanımlanır [24].

Sonuç 2.3.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan J dönüşümü $M \times R$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır [24].

Tanım 2.3.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}(M)$ için;

$$N_F(\theta_1, \theta_2) = F^2[\theta_1, \theta_2] + [F\theta_1, F\theta_2] - F[F\theta_1, \theta_2] - F[\theta_1, F\theta_2]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin Nijenhuis torsion tensörü denir [4].

$F = J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$\begin{aligned} N_J(\theta_1, \theta_2) &= J^2[\theta_1, \theta_2] + [J\theta_1, J\theta_2] - J[J\theta_1, \theta_2] - J[\theta_1, J\theta_2] \\ &= -[\theta_1, \theta_2] + [J\theta_1, J\theta_2] - J[J\theta_1, \theta_2] - J[\theta_1, J\theta_2] \end{aligned} \quad (2.43)$$

dir [24].

Tanım 2.3.3: Hemen hemen kompleks manifoldu (M, J) verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [24].

Tanım 2.3.4: Eğer $M \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir [24].

2.4. Sasakian Manifolds

Tanım 2.4.1: M , değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan n -boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise, M Sasakian yapıya sahiptir denir. Bazen Sasakian manifold normal değme metrik manifold olarak da adlandırılır [24].

Teorem 2.4.1: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) bir Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}(M)$ için;

$$(\nabla_{\theta_1} \phi)\theta_2 = -g(\theta_1, \theta_2)\xi + \eta(\theta_2)\theta_1 \quad (2.44)$$

dir [24]. Burada;

$$\nabla_{\theta_1}(\phi\theta_2) = (\nabla_{\theta_1} \phi)\theta_2 + \phi\nabla_{\theta_1} \theta_2$$

dir.

Sonuç 2.4.1: M bir Sasakian manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü $Rcur$ olmak üzere;

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi = \eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2 \quad (2.45)$$

dir [24].

Teorem 2.4.2: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. ∇ Levi Civita koneksiyonu, M nin eğrilik tensörü $Rcur$ olmak üzere M Sasakian manifolddur. n -boyutlu Sasakian manifoldlarda aşağıdaki ilişkiler geçerlidir.

$$\nabla_{\theta_1} \xi = -\phi\theta_1 \quad (2.46)$$

$$Rcur(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = g(\theta_1, \theta_3)g(\theta_2, \theta_4) - g(\theta_2, \theta_3)g(\theta_1, \theta_4) \quad (2.47)$$

$$\eta(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3) = g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2) - g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1) \quad (2.48)$$

$$Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 = -g(\theta_1, \theta_2)\xi + \eta(\theta_2)\theta_1 \quad (2.49)$$

$$Rcur(\theta_1, \xi) = -g(\theta_1, \theta_2)\xi + \eta(\theta_2)\theta_1 \quad (2.50)$$

$$Rcur(\theta_1, \xi)\xi = -\theta_1 + \eta(\theta_1)\xi \quad (2.51)$$

$$Ric(\theta_1, \xi) = (n-1)\eta(\theta_1) \quad (2.52)$$

dir [24].

Uyarı: Bir Sasakian manifoldu bir K -değme manifoldudur fakat tersi sadece boy $M = 3$ olması halinde geçerlidir [24].

Sonuç 2.4.2: M bir Sasakian manifold olsun. $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}(M)$ ve ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere;

$$Rcur(\theta_1, \xi)\theta_2 = -(\nabla_{\theta_1}\phi)\theta_2 \quad (2.53)$$

dir [24].

Sonuç 2.4.3: M , değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan n -boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} Rcur(\theta_1, \theta_2)\phi\theta_3 &= \phi R(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g((\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 \\ &+ g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 - g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

dir [24].

Sonuç 2.4.4: M bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= -\phi R(\theta_1, \theta_2)\phi\theta_3 + g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \\ &+ g(\phi\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

dir [24].

3. PARADEĞME MANİFOLDLAR

Bu bölümde konunun anlaşılabilirliğini sağlayacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen paradeğme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 3.1.1: M n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, ϕ , ξ , η da M üzerinde sırasıyla (1,1)-tipinde bir tensor alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ , ξ , η için, M üzerinde

$$i) \eta(\xi) = 1 \quad (3.1)$$

$$ii) \phi^2 = Id - \eta \otimes \xi \quad (3.2)$$

iii) $D = \text{çekirdek } \eta$; η tarafından üretilen dağıtım hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir; (3.3)

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen paradeğme yapı ve bu yapı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne bir hemen hemen paradeğme manifold denir [30].

Teorem 3.1.1: (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsü hemen hemen paradeğme manifold olmak üzere;

$$i) \phi(\xi) = 0 \quad (3.4)$$

$$ii) \eta \circ \phi = 0 \quad (3.5)$$

$$iii) \text{rank } \phi = n - 1 \quad (3.6)$$

dir [30].

3.2. Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen paradeğme manifoldlar üzerinde bir metrik tanımlayacağız ve bazı özelliklerini ele alacağız.

Teorem 3.2.1: (M, ϕ, ξ, η) n -boyutlu bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. Bu durumda M manifoldu üzerinde bir \bar{G} yarı-Riemann metrik tensor alanı

$$\bar{G}(\theta_1, \xi) = \eta(\theta_1), \quad \forall \theta_1 \in \chi(M) \quad (3.7)$$

olacak şekilde vardır [30].

Teorem 3.2.2: (M^n, ϕ, ξ, η) bir hemen hemen paradeğme diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifold üzerinde $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$i) g(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = -g(\theta_1, \theta_2) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \quad (3.8)$$

$$ii) \eta(\theta_1) = g(\theta_1, \xi) \quad (3.9)$$

özelliklerini sağlayacak şekilde bir g yarı-Riemann metriği vardır [30].

Sonuç 3.2.1: M hemen hemen paradeğme manifoldu üzerinde

$$\eta(\theta_1) = g(\theta_1, \xi) \quad (3.10)$$

$$g(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = -g(\theta_1, \theta_2) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)$$

olacak şekilde g yarı-Riemann metriği için

$$g(\phi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \phi\theta_2) = 0 \quad (3.11)$$

dır.

Tanım 3.2.1: (M^n, ϕ, ξ, η) bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. (3.8) ve (3.9) koşullarını sağlayan g yarı-Riemann metriği (M^n, ϕ, ξ, η) üzerinde hemen hemen paradeğme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen paradeğme metrik yapı, $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de hemen hemen paradeğme metrik manifold denir [30].

Tanım 3.2.2: (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı ile birlikte M^n için lokal ortonormal baz sistemi inşa edilebilir. M^n nin bir koordinat komşuluğu U olsun. U da ξ ya ortogonal olacak şekilde bir birim vektör alanı θ_{11} olsun ve $|\phi\theta_{11}|^2 = -1$ dir. Bu durumda (3.4), (3.5) ve (3.8) den

$$\begin{aligned} g(\phi\theta_{11}, \xi) &= g(\phi^2\theta_{11}, \phi\xi) + \eta(\phi\theta_{11})\eta(\xi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\phi\theta_{11}, \theta_{11}) &= g(\phi^2\theta_{11}, \phi\theta_{11}) - \eta(\phi\theta_{11})\eta(\theta_{11}) \\ &= -g(\theta_{11}, \phi\theta_{11}), \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$g(\phi\theta_{11}, \theta_{11}) = 0, \quad (3.12)$$

olacak şekilde $\phi\theta_{11}$, ξ ve θ_{11} e diktir. Benzer şekilde U üzerinde ξ , θ_{11} ve $\phi\theta_{11}$ e dik olacak şekilde bir θ_{12} birim vektör alanı alabiliriz. $|\phi\theta_{12}|^2 = -1$ olur. $\phi\theta_{12}, \xi, \theta_{11}, \phi\theta_{11}$, ve $\phi\theta_{12}$ ye diktir. Bu şekilde devam edilirse U üzerinde $(\theta_{11}, \phi\theta_{11}, \xi)$, $i=1, \dots, n$ lokal ortonormal bazı elde edilir ve bu baza ϕ -bazı denir[30].

Tanım 3.2.3: M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı verilsin. $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}(M)$ için

$$F(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \phi\theta_2) \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlı antisimetrik F dönüşümüne (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme metrik yapısının temel 2-formu denir [30].

Sonuç 3.2.2: M^n yarı-Riemann manifold olsun. F temel 2-form ters simetriktir ve Tanım 3.2.2 yardımıyla $\eta \wedge F^n \neq 0$ dır.

Sonuç 3.2.3 : M^n üzerinde bir hemen hemen paradeğme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere M^n yönlendirilebilirdir.

3.3. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldların Torsiyon Tensörü

Tanım 3.3.1: M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M nin her p noktası için $J^2 = I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması varsa o zaman M üzerindeki (I, I) tipindeki J tensor alanına bir hemen hemen parakompleks yapı denir. Bir J hemen hemen parakompleks yapısı ile verilen manifoldda bir hemen hemen parakompleks manifold denir [31].

Teorem 3.3.1: (M^n, ϕ, ξ, η) bir hemen hemen paradeğme manifoldu olsun. Bu takdirde $M^n \times R$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı vardır [31].

Tanım 3.3.2: M^n üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı J olsun. M^n üzerinde J tensor alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(\theta_1, \theta_2) &= J^2[\theta_1, \theta_2] + [J\theta_1, J\theta_2] - J[J\theta_1, \theta_2] - J[\theta_1, J\theta_2] \\ &= [\theta_1, \theta_2] + [J\theta_1, J\theta_2] - J[J\theta_1, \theta_2] - J[\theta_1, J\theta_2], \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklindedir [32].

Tanım 3.3.3: (M^n, J) hemen hemen parakompleks manifold olsun. O zaman $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilir denir [32].

Tanım 3.3.4: Eğer $M^n \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen parakompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen paradeğme yapısına normaldir denir [32].

Önerme 3.3.1: M nin (ϕ, ξ, η) hemen hemen paradeğme yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_\phi - 2d \otimes \xi = 0, \quad (3.15)$$

olmasıdır [30].

3.4. Para-Sasakian Manifolddlar

Tanım 3.4.1: Bir n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold M üzerinde $(1,1)$ - tensör alanı ϕ , bir vektör alanı ξ , bir 1-form η ve Riemann metrik g olduğunda, M nin hemen hemen para-değme Riemann yapısı (ϕ, ξ, η, g) dir. Eğer (ϕ, ξ, η, g) aşağıdaki eşitlikleri sağlarsa M ye para-Sasakian manifold ya da kısaca P-Sasakian manifold denir[34].

$\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için,

$$i) \phi^2 \theta_1 = \theta_1 - \eta(\theta_1)\xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \eta(\phi\theta_1) = 0, \quad (3.16)$$

$$ii) g(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) - \eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \quad (3.17)$$

$$iii) \nabla_{\theta_1} \xi = -\phi\theta_1, \quad (3.18)$$

$$iv) (\nabla_{\theta_1} \phi)\theta_2 = g(\theta_1, \theta_2)\xi - \eta(\theta_2)\theta_1 + \eta(\theta_2)\eta(\theta_1)\xi, \quad (3.19)$$

$$v) g(\theta_1, \phi\theta_2) = g(\phi\theta_1, \theta_2) \quad (3.20)$$

dır [34].

Ayrıca bir para-Sasakian manifold

$$(\nabla_{\theta_1} \eta)\theta_2 = -g(\theta_1, \theta_2)\xi + \eta(\theta_2)\eta(\theta_1), \quad (3.21)$$

eşitliğini sağlarsa özel para-Sasakian manifold olarak tanımlanır [34].

Önerme 3.4.1: M^n para-Sasakian manifold ve M nin eğrilik tensörü R_{cur} ve Ricci tensörü Ric olsun. O zaman $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için aşağıdaki şartlar sağlanır [30].

$$i) Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi = \eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_2)\theta_1 \quad (3.22)$$

$$ii) Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 = \eta(\theta_2)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_2)\xi \quad (3.23)$$

$$iii) Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 = \theta_1 - \eta(\theta_1)\xi \quad (3.24)$$

$$iv) Ric(\theta_1, \xi) = (1-n)\eta(\theta_1), \quad (3.25)$$

$$v) \eta(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3) = g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2) - g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1). \quad (3.26)$$

3.5. Para-Sasakian Manifoldlarda Ricci Soliton

n -boyutlu bir para-Sasakian manifold M olsun. M de bir Ricci soliton (g, θ_4, λ) olmak üzere $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için

$$(L_{\theta_4}g)(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0,$$

dır. Burada L_{θ_4} , θ_4 vektör alanı boyunca Lie türev operatörüdür. Bu denklem

$$g(\nabla_{\theta_1}\theta_4, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2}\theta_4) + 2Ric\theta_1, \theta_2 + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (3.27)$$

şekline gelir. (3.27) eşitliğinde $\theta_4 = \xi$ kullanılıp sonra da (3.18) denkleminde,

$$g(-\phi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, -\phi\theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (3.28)$$

elde edilir. Böylece (3.28) denkleminde

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = g(\phi\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2), \quad (3.29)$$

sonucuna varırız. (3.29) denklemini sağlayan para-Sasakian manifold M^n neredeyse (nearly) quasi-Einstein manifolddur [34]. Diğer yandan (3.29) denkleminde θ_2 yerine ξ yazıp (3.18) denklemini kullanarak

$$(1-n)\eta(\theta_1) = -\lambda\eta(\theta_1), \quad (3.30)$$

elde ederiz. Böylece $\lambda = n-1$ sonucuna ulaşırız. Bu eşitlik, $n > 1$ olduğundan her zaman $\lambda > 0$ dir. O halde aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.5.1. Bir n -boyutlu para-Sasakian manifold M^n de Ricci soliton (g, ξ, λ) her zaman genişleyen (expanding) dir.

Sonuç 3.5.1 Bir n -boyutlu para-sasakian manifold M olsun. (3.29) denkleminde θ_1 yerine $\phi\theta_1$, θ_2 yerine de $\phi\theta_2$ yazarak

$$Ric(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = g(\phi^2\theta_1, \phi\theta_2) - \lambda g(\phi\theta_1, \phi\theta_2) \quad (3.31)$$

denklemini elde ederiz. (3.31) denkleminde (2.40) eşitliği kullanılırsa

$$Ric(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = g(\theta_1, \phi\theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2) - \lambda\eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (3.32)$$

elde edilir. Tekrar (3.29) denkleminde θ_1 yerine $\phi\theta_1$ yazılırsa,

$$Ric(\phi\theta_1, \theta_2) = g(\phi^2\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\phi\theta_1, \theta_2) \quad (3.33)$$

dır. (3.33) denkleminde (2.40) eşitliği kullanıldığında

$$Ric(\phi\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2) - \lambda\eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (3.34)$$

denklemini elde edilir. (3.31) ve (3.32) denklemleri kullanılarak sonuç olarak

$$Ric(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = Ric(\theta_1, \theta_2) - \lambda\eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (3.35)$$

eşitliği yazılabilir.

Örnek 3.4.1 Bir 5-boyutlu manifold $M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in R^5\}$ yi göz önüne alalım, burada $(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in R^5$ deki standart koordinatlardır. M de lineer bağımsız e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 standart bazları,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$e_5 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial z},$$

olarak verilsin. g Riemann metrik olmak üzere

$$g(e_i, e_j) = 1, \quad i = j \text{ ise,}$$

$$g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \text{ ise } i, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

olarak tanımlansın. $\forall \theta_1 \in \mathcal{X}(M)$ için η 1-formu $\eta(\theta_1) = g(\theta_1, e_5)$ ile tanımlı olsun. Ayrıca ϕ , $(1, 1)$ -tensör alanı

$$\phi e_1 = e_1, \quad \phi e_2 = e_2, \quad \phi e_3 = e_3, \quad \phi e_4 = e_4, \quad \phi e_5 = 0.$$

şeklinde verilsin. Böylece $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\eta(e_5) = 1, \quad \phi^2\theta_1 = \theta_1 - \eta(\theta_1)e_5,$$

$$g(\phi\theta_1, \phi\theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) - \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)$$

dır. Burada $e_5 = \xi$ olarak alırsak (φ, ξ, η, g) , M üzerinde değme metrik yapısıdır [32].

Yukarıdaki denklemler yardımı ile

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 0, [e_1, e_3] = 0, [e_1, e_4] = 0, [e_1, e_5] = e_1, \\ [e_2, e_3] &= 0, [e_3, e_4] = 0, [e_2, e_4] = 0, [e_2, e_5] = e_2, \\ [e_3, e_5] &= e_3, [e_4, e_5] = e_4, \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. ∇ bir Riemann koneksiyonu, g bir metrik tensör olmak üzere Koszul formülü,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\theta_1}\theta_2, \theta_3) &= \theta_1g(\theta_2, \theta_3) + \theta_2g(\theta_3, \theta_1) - \theta_3g(\theta_1, \theta_2) \\ &\quad - g(\theta_1, [\theta_2, \theta_3]) + g(\theta_2, [\theta_3, \theta_1]) + g(\theta_3, [\theta_1, \theta_2]), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. $e_5 = \xi$ alınarak Koszul formülünde uygulanır ise

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_1 &= -e_5, \nabla_{e_1}e_2 = 0, \nabla_{e_1}e_3 = 0, \nabla_{e_1}e_4 = 0, \nabla_{e_1}e_5 = e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 &= 0, \nabla_{e_2}e_2 = -e_5, \nabla_{e_2}e_3 = 0, \nabla_{e_2}e_4 = 0, \nabla_{e_2}e_5 = e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1 &= 0, \nabla_{e_3}e_2 = 0, \nabla_{e_3}e_3 = -e_5, \nabla_{e_3}e_4 = 0, \nabla_{e_3}e_5 = e_3, \\ \nabla_{e_4}e_1 &= 0, \nabla_{e_4}e_2 = 0, \nabla_{e_4}e_3 = 0, \nabla_{e_4}e_4 = -e_5, \nabla_{e_4}e_5 = e_4, \\ \nabla_{e_5}e_1 &= 0, \nabla_{e_5}e_2 = 0, \nabla_{e_5}e_3 = 0, \nabla_{e_5}e_4 = 0, \nabla_{e_5}e_5 = 0. \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda kolayca görülebilirki (φ, ξ, η, g) yapısı ile M , 5-boyutlu para-Sasakian manifolddur [35]. Böylece

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \nabla_{\theta_1}\nabla_{\theta_2}\theta_3 - \nabla_{\theta_2}\nabla_{\theta_1}\theta_3 - \nabla_{[\theta_1, \theta_2]}\theta_3,$$

denklemleri ile verilen Riemann Eğrilik tensörü yardımı ile

$$\begin{aligned} Rcur(e_1, e_2)e_1 &= e_2, Rcur(e_1, e_2)e_2 = -e_1, Rcur(e_1, e_3)e_1 = e_3, \\ Rcur(e_1, e_3)e_3 &= -e_1, Rcur(e_1, e_4)e_1 = e_2, Rcur(e_1, e_2)e_2 = -e_1, \\ Rcur(e_1, e_5)e_1 &= e_5, Rcur(e_1, e_5)e_5 = -e_1, Rcur(e_2, e_3)e_2 = e_3, \\ Rcur(e_2, e_3)e_3 &= -e_2, Rcur(e_2, e_4)e_2 = e_4, Rcur(e_2, e_4)e_4 = -e_2, \\ Rcur(e_2, e_5)e_2 &= e_5, Rcur(e_2, e_5)e_5 = -e_2, Rcur(e_3, e_4)e_3 = e_4, \\ Rcur(e_3, e_4)e_4 &= -e_3, Rcur(e_3, e_5)e_3 = e_5, Rcur(e_3, e_5)e_5 = -e_3, \\ Rcur(e_4, e_5)e_4 &= e_5, Rcur(e_4, e_5)e_5 = -e_4, \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Yukarıdaki denklemler yardımı

$$Ric(e_1, e_1) = -4, Ric(e_2, e_2) = -4, Ric(e_3, e_3) = -4, Ric(e_4, e_4) = -4, Ric(e_5, e_5) = -4$$

elde edilir. Buradan

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = -4g(\theta_1, \theta_2),$$

sonucuna ulaşılır. Bu yüzden manifold bir Einstein manifoldudur. Ricci tensörünün yukarıdaki ifadesinin yardımı ile kolayca doğrulanabilir ki, $\lambda > 0$ dır. Dolayısıyla 5-boyutlu para-Sasakian manifoldunda Ricci Soliton genişleyendir. Böylece Teorem 3.4.1., 5-boyutlu manifoldda doğrulanır.

Şimdi η -Ricci soliton şartını göz önüne alalım. Bunun için

$$(L_{\theta_4}g)(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0,$$

eşitliğinin bir para-Sasakian manifold üzerinde sağlandığını varsayalım. Yukarıdaki ispata benzer bir ispatla $\theta_4 = \xi$ olarak

$$(L_{\xi}g)(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0,$$

denklemini inceleyelim. Bu denklem

$$g(\nabla_{\theta_1}\xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2}\xi) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0,$$

şekline gelir. (3.18) denkleminden,

$$g(-\phi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, -\phi\theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0,$$

elde edilir. Böylece (3.20) denkleminden

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = g(\phi\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2) - \gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (3.36)$$

sonucuna ulaşırız. Diğer yandan (3.25) ve (3.17) denklemini kullanarak

$$(1-n)\eta(\theta_1) = -\lambda\eta(\theta_1) - \gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_2),$$

elde edilir. Bu denklem yardımı ile

$$n-1 = \lambda + \gamma,$$

sonucuna ulaşırız. $n-1 = \lambda$ olduğundan $\gamma = 0$ dır. O halde aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.4.2: Bir n-boyutlu para-Sasakian manifold M^n de η -Ricci soliton mevcut değildir.

4. RICCI SOLİTON ŞARTINI SAĞLAYAN PARA SASAKIAN MANİFOLDLAR

Bu bölümde Riemann eğrilik tensörü $Rcur$, Ricci tensörü Ric , Weyl konformal eğrilik tensörü C ve projektif eğrilik tensörü P olmak üzere, bir para-Sasakian manifold M üzerinde tanımlı Ricci soliton kullanılarak Weyl konformal eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensörü ile ilgili bazı eğrilik şartları verilmiştir.

4.1. Ricci soliton ve η -Ricci soliton ile para-Sasakian manifoldlar

Bu bölümde ilk olarak bir para-Sasakian manifold üzerinde Ricci soliton denklemini sağlandığında semi-simetriklik ve pseudo simetriklik, daha sonra da flat olma şartlarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.1: Ricci soliton denklemini sağlayan bir n -boyutlu para-Sasakian manifold M olsun. M de $Rcur.Ric=0$ şartı sağlandığında, yani M manifoldu Ricci semi-simetrik ise, M bir Einstein manifoldudur.

İspat. M manifoldunda Riemann eğrilik tensörü $Rcur$ ve Ricci tensörü Ric olmak üzere $Rcur \cdot Ric = 0$ denklemi $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_6, \theta_5 \in \chi(M)$ için

$$(Rcur(\theta_6, \theta_5) Ric)(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. (4.1) denklemi,

$$Rcur(\theta_6, \theta_5) Ric(\theta_1, \theta_2) - Ric(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \theta_2) - Ric(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) = 0, \quad (4.2)$$

dır. Böylece

$$Ric(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \theta_2) + Ric(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) = 0, \quad (4.3)$$

dır. (3.29) denklemi yardımı ile (4.3) denklemi,

$$\begin{aligned} &g(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \phi\theta_2) - \lambda g(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \theta_2) \\ &+ g(\phi\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) - \lambda g(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

yazılabilir. (4.4) denkleminde θ_1 yerine ξ yazılırsa,

$$g(Rcur(\theta_6, \theta_5)\xi, \phi\theta_2) - \lambda g(Rcur(\theta_6, \theta_5)\xi, \theta_2) - \lambda g(\xi, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) = 0, \quad (4.5)$$

bulunur. (4.5) denkleminde (2.45) eşitliği kullanılarak,

$$g(\eta(\theta_6)\theta_5 - \eta(\theta_5)\theta_6, \phi\theta_2) - \lambda g(\eta(\theta_6)\theta_5 - \eta(\theta_5)\theta_6, \theta_2) - \lambda g(\xi, Rcur(\theta_6, \theta_5), \theta_2) = 0, \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) denkleminde θ_6 yerine ξ kullanıldığında

$$g(\eta(\xi)\theta_6 - \eta(\theta_6)\xi, \phi\theta_2) - \lambda g(\eta(\xi)\theta_6 - \eta(\theta_6)\xi, \theta_2) - \lambda g(\xi, Rcur(\xi, \theta_6)\theta_2) = 0, \quad (4.7)$$

yazılabilir. (2.33) ve (2.36) eşitlikleri (4.7) denkleminde kullanılırsa

$$g(\theta_5, \phi\theta_2) - \lambda g(\theta_5, \theta_2) + \lambda \eta(\theta_5)\eta(\theta_2) - \lambda g(\xi, Rcur(\xi, \theta_5)\theta_2) = 0, \quad (4.8)$$

bulunur. (4.8) denkleminde (2.49) eşitliği kullanıldığında

$$g(\theta_5, \phi\theta_2) - \lambda g(\theta_5, \theta_2) + \lambda \eta(\theta_5)\eta(\theta_2) - \lambda g(\xi, \eta(\theta_2)\theta_5 - g(\theta_5, \theta_2)\xi) = 0, \quad (4.9)$$

veya

$$g(\theta_5, \phi\theta_2) - \lambda g(\theta_5, \theta_2) + \lambda \eta(\theta_5)\eta(\theta_2) - \lambda \eta(\theta_5)\eta(\theta_2) + \lambda g(\theta_5, \theta_2) = 0, \quad (4.10)$$

yazılabilir. (4.10) denkleminde

$$g(\theta_5, \phi\theta_2) = 0, \quad (4.11)$$

bulunur. (4.11) denkleminde (2.42) eşitliği olan $g(\theta_5, \phi\theta_2) = d\eta(\theta_5, \theta_2)$ kullanıldığında,

$$d\eta = 0 \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.24) eşiliğinden

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = -\lambda g(\theta_1, \theta_2)$$

elde ederiz. Böylece M manifoldu bir Einstein manifoldudur.

Teorem 4.1.2: Ricci soliton denklemini sağlayan bir n -boyutlu para-Sasakian manifold M olsun. M de $Rcur.Ric = L_1Q(g, Ric)$ şartı sağlandığında, yani M manifoldu Ricci pseudo-simetrik ise, M bir Einstein manifoldudur.

İspat: M manifoldunda Riemann eğrilik tensörü $Rcur$, Ricci tensörü Ric , metrik tensör g olmak üzere $Rcur.Ric = L_1 Q(g, Ric)$ denklemi $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_6, \theta_5 \in \chi(M)$ için

$$(Rcur(\theta_6, \theta_5) Ric)(\theta_1, \theta_2) = L_1 Q(g, Ric)(\theta_1, \theta_2) \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir. (4.13) denklemi,

$$\begin{aligned} & Rcur(\theta_6, \theta_5)R(\theta_1, \theta_2) - Ric(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \theta_2) - Ric(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) \\ &= (\theta_6 \Lambda_g \theta_5) Ric(\theta_1, \theta_2) - Ric((\theta_6 \Lambda_g \theta_5)\theta_1, \theta_2) - Ric(\theta_1 (\theta_6 \Lambda_g \theta_5), \theta_2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} & Ric(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \theta_2) + Ric(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) \\ &= L_1 \left[Ric((\theta_6 \Lambda_g \theta_5)\theta_1, \theta_2) + Ric(\theta_1, (\theta_6 \Lambda_g \theta_5)\theta_2) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

veya

$$\begin{aligned} & Ric(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_6, \theta_2) + Ric(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) \\ &= L_1 \left[\begin{aligned} & g(\theta_5, \theta_1) Ric(\theta_6, \theta_2) - g(\theta_6, \theta_1) Ric(\theta_6, \theta_2) \\ & + g(\theta_5, \theta_1) Ric(\theta_6, \theta_1) - g(\theta_6, \theta_2) Ric(\theta_5, \theta_1) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

dır.(3.29) denklemi yardımı ile (4.16) denklemi

$$\begin{aligned} & g(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \phi\theta_2) - \lambda g(Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_1, \theta_2) \\ & + g(\phi\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) - \lambda g(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_5)\theta_2) \\ &= L_1 \left[\begin{aligned} & -g(\theta_5, \theta_1) g(\theta_6, \phi\theta_2) - \lambda g(\theta_5, \theta_1) g(\theta_6, \theta_2) \\ & + g(\theta_6, \theta_1) g(\theta_5, \phi\theta_2) + \lambda g(\theta_6, \theta_1) g(\theta_5, \theta_2) \\ & + g(\theta_5, \theta_2) g(\theta_6, \phi\theta_1) - \lambda g(\theta_5, \theta_2) g(\theta_6, \theta_1) \\ & + g(\theta_6, \theta_2) g(\theta_5, \phi\theta_1) + \lambda g(\theta_6, \theta_2) g(\theta_5, \theta_1) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılabilir.(4.17) denklemde θ_1 yerine ξ yazılır ve gerekli hesaplar yapılırsa

$$g(R(\theta_6, \theta_5)\xi, \phi\theta_2) = L_1 \left[-\eta(\theta_5) g(\theta_6, \phi\theta_2) + \eta(\theta_6) g(\theta_5, \phi\theta_2) \right], \quad (4.18)$$

bulunur. (4.18) denklemde (2.45) eşitliği kullanılarak

$$\eta(\theta_6) g(\theta_5, \phi\theta_2) - \eta(\theta_5) g(\theta_6, \phi\theta_2) = L_1 \left[-\eta(\theta_5) g(\theta_6, \phi\theta_2) + \eta(\theta_6) g(\theta_5, \phi\theta_2) \right],$$

veya

$$(1 - L_1) \left[\eta(\theta_6) g(\theta_5, \phi\theta_2) - \eta(\theta_5) g(\theta_6, \phi\theta_2) \right] = 0, \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) denklemde ya $(1 - L_1) = 0$ ya da

$$\eta(\theta_6)g(\theta_5, \phi\theta_2) - \eta(\theta_5)g(\theta_6, \phi\theta_2) = 0, \quad (4.20)$$

dır. $L_1=1$ ise M üzerinde $Rcur.Ric=Q(g,Ric)$ dir. Diğer yandan, (3.29) eşitliği (4.20) denkleminde kullanılırsa

$$\eta(\theta_6)Ric(\theta_5, \theta_2) + \lambda\eta(\theta_6)g(\theta_5, \theta_2) - \eta(\theta_5)Ric(\theta_6, \theta_2) - \lambda\eta(\theta_5)g(\theta_6, \theta_2) = 0, \quad (4.21)$$

bulunur. (4.21) denkleminde $\theta_6 = \xi$ alırsak

$$Ric(\theta_5, \theta_2) = -\lambda g(\theta_5, \theta_2)$$

elde ederiz. Böylece M manifoldu bir Einstein manifoldudur.

Teorem 4.1.3: Ricci soliton denklemini sağlayan n -boyutlu bir para-Sasakian manifold M olsun. $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin Weyl konformal eğrilik tensörü flat ise M bir Einstein manifoldudur.

İspat: M nin Weyl konformal eğrilik tensörü C olsun. $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için Q Ricci operatörü olmak üzere (2.14) eşitliğinden,

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi M manifoldu üzerinde Ricci soliton denkleminin sağlandığını göz önüne alalım. Bu durumda (4.22) denklemini

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - 2(n-1)g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.23)$$

olarak yazabiliriz. M manifoldu Weyl konformal flat ise $C=0$ dir. (4.23) denkleminde

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-2} \left[-2(n-1)g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + 2(n-1)g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.24)$$

elde ederiz. (4.24) denkleminde $\theta_3 = \xi$ kullanırsak

$$Rcur(\theta_1, \theta_2) \xi = \frac{1}{n-2} \left[-2(n-1)\eta(\theta_2)\theta_1 + 2(n-1)\eta(\theta_1)\theta_2 + \eta(\theta_2)\phi\theta_1 - \eta(\theta_1)\phi\theta_2 \right] - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2 \right], \quad (4.25)$$

yazılabilir.(4.25) denkleminde (2.45) eşitliği kullanılırsa,

$$\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_2)\theta_1 = \frac{2(n-1)}{n-2} \left[\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_2)\theta_1 \right] + \frac{1}{n-2} \left[\eta(\theta_2)\phi\theta_1 - \eta(\theta_1)\phi\theta_2 \right] - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2 \right], \quad (4.26)$$

elde edilir. Bu denklemi düzenlersek

$$\left(1 - \frac{2(n-1)}{n-2} - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \right) \left[\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_2)\theta_1 \right] + \frac{1}{n-2} \left[\eta(\theta_2)\phi\theta_1 - \eta(\theta_1)\phi\theta_2 \right] = 0, \quad (4.27)$$

veya

$$\left(\frac{-n(n-1)-\tau}{(n-1)(n-2)} \right) \left[\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_2)\theta_1 \right] + \frac{1}{n-2} \left[\eta(\theta_2)\phi\theta_1 - \eta(\theta_1)\phi\theta_2 \right] = 0, \quad (4.28)$$

elde edilir.(4.28) denkleminde $\theta_1 = \xi$ eşitliği kullanılarak,

$$\left(\frac{-n(n-1)-\tau}{(n-1)(n-2)} \right) \left[\theta_2 - \eta(\theta_2)\xi \right] - \frac{1}{n-2} \phi\theta_2 = 0, \quad (4.29)$$

olur. (4.29) denkleminde düzenlemeler yapıldığında,

$$\phi\theta_2 = \left(1 + \frac{\tau}{n-1} \right) \left[\theta_2 - \eta(\theta_2)\xi \right], \quad (4.30)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece (4.30) denklemi θ_1 ile çarpılırsa,

$$g(\phi\theta_2, \theta_1) = \left(1 + \frac{\tau}{n-1} \right) \left[g(\theta_2, \theta_1) - \eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \right], \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) denkleminde (3.29) eşitliği kullanılarak,

$$Ric(\theta_1, \theta_2) + \lambda g(\theta_1, \theta_2) = \left(1 + \frac{\tau}{n-1}\right) [g(\theta_1, \theta_2) - \eta(\theta_2)\eta(\theta_1)], \quad (4.32)$$

veya

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = \left(1 + \frac{\tau}{n-1} - \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) - \left(1 + \frac{\tau}{n-1}\right) \eta(\theta_2)\eta(\theta_1) \quad (4.33)$$

elde ederiz. Böylece M manifoldu bir η -Einstein manifoldudur.

Teorem 4.1.4: η -Ricci soliton denklemini sağlayan n -boyutlu bir Weyl konformal flat para-Sasakian manifold mevcut değildir.

İspat: Teorem 4.1.2 deki ispata benzer bir hesaplamayla

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 \\ + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \\ + \gamma g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1)\xi - \gamma g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_2)\xi \\ + \gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_3)\theta_2 - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3)\theta_1 \end{array} \right] \quad (4.34)$$

$$+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2],$$

olarak yazılabilir. M manifoldu Wely konformal flat ise $C = 0$ dir. (4.34) denkleminde

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 \\ + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \\ + \gamma g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1)\xi - \gamma g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_2)\xi \\ + \gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_3)\theta_2 - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3)\theta_1 \end{array} \right] \quad (4.35)$$

$$- \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2],$$

elde ederiz (4.35) denkleminde $\theta_1 = \xi$ kullanırsak

$$Rcur(\xi, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} g(\phi\theta_2, \theta_3)\xi - 2\lambda g(\theta_2, \theta_3)\xi - \eta(\theta_3)\phi\theta_2 \\ + 2\lambda\eta(\theta_3)\theta_2 + \gamma g(\theta_2, \theta_3)\xi - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3)\xi \\ + \gamma\eta(\theta_3)\theta_2 - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3)\xi \end{array} \right] \quad (4.36)$$

$$- \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(\theta_2, \theta_3)\xi - \eta(\theta_3)\theta_2],$$

yazılabilir. (4.36) denkleminde ξ çarparsak

$$g(Rcur(\xi, \theta_2, \theta_3, \xi)) = \frac{1}{n-2} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3) - 2\lambda g(\theta_2, \theta_3) + 2\lambda \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) \right] \\ - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3) - \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) \right], \quad (4.37)$$

elde edilir. Bu denklemi düzenlersek

$$\left(\frac{\tau}{(n-1)} - (n-2) \right) \left[g(\theta_2, \theta_3) - \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) \right] \\ = g(\phi\theta_2, \theta_3) - (2\lambda - \gamma) g(\theta_2, \theta_3) + (2\lambda - \gamma) \eta(\theta_2)\eta(\theta_3) \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38) denklemini düzenlersek,

$$g(\phi\theta_2, \theta_3) = \left(\frac{\tau - (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} + (2\lambda - \gamma) \right) \left[g(\theta_2, \theta_3) - \eta(\theta_2)\eta(\theta_3) \right] \quad (4.39)$$

olur. (4.39) dekleminde (3.29) eşitliği kullanılarak,

$$Ric(\theta_2, \theta_3) + \lambda g(\theta_2, \theta_3) + \gamma \eta(\theta_2)\eta(\theta_3) \\ = \left(\frac{\tau - (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} + (2\lambda - \gamma) \right) \left[g(\theta_2, \theta_3) - \eta(\theta_2)\eta(\theta_3) \right] \quad (4.40)$$

veya

$$Ric(\theta_2, \theta_3) = \left(\frac{\tau - (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} + (\lambda - \gamma) \right) g(\theta_2, \theta_3) \\ - \left(\frac{\tau - (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} + 2\lambda \right) \eta(\theta_2)\eta(\theta_3) \quad (4.41)$$

elde ederiz. (4.41) denkleminde $\theta_3 = \xi$ alırsak

$$Ric(\theta, \xi) = -(\lambda + \gamma)\eta(\theta_2) \quad (4.42)$$

elde ederiz. Bu ise $\gamma = 0$ demektir. Böylece M η -Ricci soliton şartını sağlayan manifoldu Wely konformal flat değildir.

Teorem 4.1.5: n -boyutlu bir para-Sasakian manifold M olsun. M üzerinde Ricci soliton şartı ile verilen Riemann eğrilik tensörü $Rcur$ ve Weyl konformal eğrilik tensörü C olmak üzere $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_6 \in \chi(M)$ için $Rcur(\theta_6, \theta_4) \bullet C = 0$ şartını sağlıyorsa, yani M manifoldu Weyl semi-simetrik ise, M bir η -Einstein manifoldudur.

İspat. $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için (1.14) eşitliğinden,

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Q\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Q\theta_2 \right] \\ + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \quad (4.43)$$

yazılır. (4.43) denkleminde (3.29) eşitliği kullanılırsa,

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - 2\lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right. \\ \left. + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 \right. \\ \left. + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 \right. \\ \left. - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \quad (4.44)$$

bulunur. (4.44) denklemi düzenlenerek,

$$C(\theta_1, \theta_2)Z = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ - \frac{1}{n-2} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 \right] \\ + \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.45)$$

elde edilir. (4.45) denklemi kullanılarak M üzerinde $Rcur(\theta_6, \theta_4) \cdot C = 0$ şartının sağlandığını varsayalım. Bu durumda sırası ile,

$$Rcur(\theta_6, \theta_4)C(\theta_1, \theta_2)Z = Rcur(\theta_6, \theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ - \frac{1}{n-2} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 \right] \\ + \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \right], \quad (4.46)$$

$$C(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ - \frac{1}{n-2} \left[g(f\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 - g(f\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)f\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)f\theta_2 \right] \\ + \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \right], \quad (4.47)$$

$$C(\theta_1 Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1 Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2)\theta_3 \\ - \frac{1}{n-2} \left[g(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 \right] \\ + \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)} \left[g(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \right], \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
C(\theta_1, \theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3 &= Rcur(\theta_1, \theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3 \\
&- \frac{1}{n-2} \left[g(\phi\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \theta_1 - g(\phi\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + g(\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \phi\theta_1 - g(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \phi\theta_2 \right] \\
&+ \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \theta_1 - g(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \theta_2 \right],
\end{aligned} \tag{4.49}$$

yazılabilir. (4.46)-(4.49) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
&Rcur(\theta_6, \theta_4) Rcur(\theta_1, \theta_2) \theta_3 - Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1, \theta_2) \theta_3 \\
&- Rcur(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1, \theta_2) \theta_3 - Rcur(\theta_1, \theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3 \\
&- \frac{1}{n-2} \left[g(\theta_2, \theta_3) Rcur(\theta_6, \theta_4) \phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3) Rcur(\theta_6, \theta_4) \phi\theta_2 \right. \\
&\quad \left. + g(\phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1, \theta_3) \theta_2 - g(\theta_2, \theta_3) \phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1 \right. \\
&\quad \left. + g(\phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_2, \theta_3) \theta_1 - g(\theta_1, \theta_3) \phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + g(\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \phi\theta_1 - g(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_3) \phi\theta_2 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

yazılabilir. (4.50) denkleminde $\theta_3 = \xi$ alırsak ve (2.45) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&Rcur(\theta_6, \theta_4) Rcur(\theta_1, \theta_2) \xi - Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1, \theta_2) \xi \\
&- Rcur(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_2) \xi - Rcur(\theta_1, \theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \xi \\
&- \frac{1}{n-2} \left[\eta(\theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \phi\theta_1 - \eta(\theta_1) Rcur(\theta_6, \theta_4) \phi\theta_2 \right. \\
&\quad \left. + \eta(\theta_2) \phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1 + \eta(\theta_1) \phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + g(\phi\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4) \xi) \theta_1 - g(\phi\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4) \xi) \theta_2 \right] = 0,
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
&Rcur(\theta_6, \theta_4) (\eta(\theta_1) \theta_2 - \eta(\theta_2) \theta_1) - \eta(Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1) \theta_2 \\
&+ \eta(\theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1 - \eta(\theta_1) Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_2 \\
&+ \eta(\theta_2) Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1 - Rcur(\theta_1, \theta_2) (\eta(\theta_6) \theta_4 - \eta(\theta_4) \theta_6) \\
&- \frac{1}{n-2} \left[\eta(\theta_2) (Rcur(\theta_6, \theta_4) \phi\theta_1 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_1) \right. \\
&\quad \left. - \eta(\theta_1) (Rcur(\theta_6, \theta_4) \phi\theta_2 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4) \theta_2) \right. \\
&\quad \left. - g(\phi\theta_2, \eta(\theta_6) \theta_4 - \eta(\theta_4) \theta_6) \theta_1 \right. \\
&\quad \left. + g(\phi\theta_1, \eta(\theta_6) \theta_4 - \eta(\theta_4) \theta_6) \theta_2 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece

$$\begin{aligned}
& \eta(\theta_1)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 - \eta(\theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 - \eta(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1)\theta_2 \\
& + \eta(\theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 - \eta(\theta_1)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 \\
& - \eta(\theta_6)Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 - \eta(\theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_6 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2) \\ -\eta(\theta_6)g(\phi Y, \theta_4)\theta_1 + \eta(\theta_4)g(\phi Y, \theta_6)\theta_1 \\ +\eta(\theta_6)g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 - \eta(\theta_4)g(\phi\theta_1, \theta_6)\theta_2 \end{array} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

bulunur. Tekrar (4.52) denkleminde $\theta_6 = \xi$ alındığında,

$$\begin{aligned}
& -g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1, \xi)\theta_2 + g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2, \xi)\theta_1 \\
& - Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + \eta(\theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{array} \right] = 0,
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& g(Rcur(\xi, \theta_4)\xi, \theta_1)\theta_2 - g(Rcur(\xi, \theta_4)\xi, \theta_2)\theta_1 \\
& - Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + \eta(\theta_4)\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 - g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \end{array} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

yazabiliriz. (3.24) eşitliği (4.53) denkleminde kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& Rcur(\theta_4, \theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_4)Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 - Rcur(\theta_4, \theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_4)Rcur(\xi, \theta_2)\theta_1 \\
& - Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + \eta(\theta_4)\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_4)\eta(\theta_2)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 + g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \end{array} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

bulunur.(4.54) denklemini düzenlersek,

$$\begin{aligned}
& -2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 - \eta(\theta_4)(Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 - Rcur(\xi, \theta_2)\theta_1) \\
& + \eta(\theta_4)\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_4)\eta(\theta_2)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 + g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \end{array} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

yazılabilir. (4.55) denkleminde (2.4) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
& -2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + \eta(\theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 - \eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 + g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \end{array} \right] = 0, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

bulunur. (2.45) eşitliği (4.56) denkleminde kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
& -2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 - 2\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 + g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \end{array} \right] = 0,
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& 2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + 2\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 - g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \end{array} \right] = 0, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.57) denklemi θ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned}
& 2g(Rcur(\theta_1, \theta_2)V, \theta) - 2g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_4) + 2g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(-g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta, \phi\theta_1) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1, \phi\theta)) \\ -\eta(\theta_1)(-g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta, \phi\theta_2) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2, \phi\theta)) \\ +g(\phi\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta) - g(\phi\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) \end{array} \right] = 0,
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& 2g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) - 2g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_4) + 2g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(-g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta, \phi\theta_1) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1, \phi\theta)) \\ -\eta(\theta_1)(-g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta, \phi\theta_2) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2, \phi\theta)) \\ +g(\phi\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta) - g(\phi\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) \end{array} \right] = 0, \tag{4.58}
\end{aligned}$$

denklemlerine ulaşırız. (4.58) denklemi düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
& 2g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) - 2g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_4) + 2g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} -\eta(\theta_2)\eta(\theta)g(\phi\theta_1, \theta_4) + \eta(\theta_1)\eta(\theta)g(\theta_4, \phi\theta_2) \\ +g(\phi\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta) - g(\phi\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) \end{array} \right] = 0, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.59) denkleminde $\theta_1 = \theta = e_i$ alınıp (3.11) eşitliği kullanıldığında,

$$2Ric(\theta_2, \theta_4) - 2\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + (n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) - \frac{1}{n-2} [g(\phi\theta_2, \theta_4) + g(\phi\theta_2, \theta_4) - ng(\phi\theta_2, \theta_4)] = 0,$$

$$2Ric(\theta_2, \theta_4) + 2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) - \frac{1}{n-2} [(n-2)g(\phi\theta_2, \theta_4)] = 0,$$

veya

$$2Ric(\theta_2, \theta_4) + 2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + g(\phi\theta_2, \theta_4) = 0, \quad (4.60)$$

bulunur. (4.60) denkleminde (3.29) kullanılarak

$$2Ric(\theta_2, \theta_4) + 2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + Ric(\theta_2, \theta_4) + \lambda g(\theta_2, \theta_4) = 0,$$

veya

$$3Ric(\theta_2, \theta_4) + \lambda g(\theta_2, \theta_4) + 2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) = 0, \quad (4.61)$$

elde edilir. (4.61) denkleminde,

$$Ric(\theta_2, \theta_4) = -\frac{\lambda}{3} g(\theta_2, \theta_4) - \frac{2\lambda}{3} \eta(\theta_2)\eta(\theta_4), \quad (4.62)$$

veya

$$Ric(\theta_2, \theta_4) = -\frac{n-1}{3} g(\theta_2, \theta_4) - \frac{2(n-1)}{3} \eta(\theta_2)\eta(\theta_4), \quad (4.63)$$

elde edilir. Böylece M manifoldu bir η -Einstein manifoldudur.

Teorem 4.1.6: Bir para-Sasakian manifold M olsun. M üzerinde Ricci soliton şartı ile verilen eğrilik tensörü $Rcur$ ve Wely konformal eğrilik tensörü C olmak üzere $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_6 \in \chi(M)$ için $Rcur(\theta_6, \theta_4) \bullet C = L_2 Q(g, C)$ şartını sağlıyorsa, yani M manifoldu Wely pseudo-simetrik ise, M bir η -Einstein manifoldudur.

İspat: $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için (2.14) eşitliğinden

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left[g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \quad (4.64)$$

yazılır. (4.64) denkleminde (3.29) eşitliği kullanılırsa

$$C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - 2\lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \\ +\lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 \\ +\lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 \\ -g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

bulunur. (4.65) denklemi düzenlenerek

$$\begin{aligned} C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &- \frac{1}{n-2} [g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2] \\ &+ \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \end{aligned} \quad (4.66)$$

elde edilir. İspat için (4.66) denklemi kullanılarak M üzerinde $Rcur(\theta_6, \theta_4) \cdot C = L_2 Q(g, C)$ şartını sağladığını varsayalım. Bu durumda (4.64)-(4.66) denklemlerinden

$$\begin{aligned} &Rcur(\theta_6, \theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &- Rcur(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2)\theta_3 - Rcur(\theta_1, \theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_3 \\ &- \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} g(\theta_2, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 \\ +g(\phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g(\theta_2, \theta_3)\phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 \\ g(\phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \\ +g(\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_3)\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= L_2 \begin{bmatrix} g(\theta_4, C(\theta_1, \theta_2)\theta_3)\theta_6 - g(\theta_6, C(\theta_1, \theta_2)\theta_3)\theta_4 - g(\theta_1, \theta_4)C(\theta_6, \theta_2)\theta_3 \\ +g(\theta_1, \theta_6)C(\theta_4, \theta_2)\theta_3 - g(\theta_2, \theta_4)C(\theta_1, \theta_6)\theta_3 + g(\theta_6, \theta_2)C(\theta_1, \theta_4)\theta_3 \\ -g(\theta_3, \theta_4)C(\theta_1, \theta_2)\theta_6 + g(\theta_6, \theta_3)C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.67)$$

yazılabilir. (4.67) denkleminde $\theta_3 = \xi$ alırsak ve (2.45) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &Rcur(\theta_6, \theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi - Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_2)\xi \\ &- Rcur(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2)\xi - Rcur(\theta_1, \theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\xi \\ &- \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} \eta(\theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - \eta(\theta_1)Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 \\ +\eta(\theta_2)\phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1 + \eta(\theta_1)\phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2 \\ +g(\phi\theta_2, Rcur(\theta_6, \theta_4)\xi)\theta_1 - g(\phi\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\xi)\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= L_2 \begin{bmatrix} g(\theta_4, C(\theta_1, \theta_2)\xi)\theta_6 - g(\theta_6, C(\theta_1, \theta_2)\xi)\theta_4 - g(\theta_1, \theta_4)C(\theta_6, \theta_2)\xi \\ +g(\theta_1, \theta_6)C(\theta_4, \theta_2)\xi - g(\theta_2, \theta_4)C(\theta_1, \theta_6)\xi + g(\theta_6, \theta_2)C(\theta_1, \theta_4)\xi \\ -\eta(\theta_4)C(\theta_1, \theta_2)\theta_6 + \eta(\theta_6)C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

veya

$$\begin{aligned}
& Rcur(\theta_6, \theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi - Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_2)\xi \\
& - Rcur(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2)\xi - Rcur(\theta_1, \theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\xi \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{aligned}
& \eta(\theta_2)(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1) \\
& - \eta(\theta_1)(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2) \\
& + g(\phi\theta_2, \eta(\theta_6)\theta_4 - \eta(\theta_4)\theta_6)\theta_1 - g(\phi\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\xi)\theta_2
\end{aligned} \right] \\
= L_2 & \left[\begin{aligned}
& Ag(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\theta_6 - Ag(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\theta_6 \\
& + \frac{1}{n-2}g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\theta_6 - \frac{1}{n-2}g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\theta_6 \\
& Ag(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\theta_4 - Ag(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\theta_4 \\
& + \frac{1}{n-2}g(\phi\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\theta_4 - \frac{1}{n-2}g(\phi\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\theta_4 \\
& - Ag(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_6)\theta_2 + Ag(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\theta_6 \\
& - \frac{1}{n-2}g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_6)\phi\theta_2 + \frac{1}{n-2}g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\phi\theta_6 \\
& + Ag(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_4)\theta_2 + Ag(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\theta_4 \\
& - \frac{1}{n-2}g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + \frac{1}{n-2}g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\phi\theta_4 \\
& - Ag(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\theta_6 + Ag(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_6)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2}g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\phi\theta_6 + \frac{1}{n-2}g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_6)\phi\theta_1 \\
& - Ag(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\theta_4 + Ag(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& + \frac{1}{n-2}g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\phi\theta_4 - \frac{1}{n-2}g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_4)\phi\theta_1 \\
& - \eta(\theta_4)C(\theta_1, \theta_2)\theta_6 + \eta(\theta_6)C(\theta_1, \theta_2)\theta_4
\end{aligned} \right] \tag{4.69}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Burada $A = \frac{\tau + 2(n-1)\lambda}{(n-1)(n-2)}$ dir.

Böylece

$$\begin{aligned}
& Rcur(\theta_6, \theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi - Rcur(Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1, \theta_2)\xi \\
& - Rcur(\theta_1, Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2)\xi - Rcur(\theta_1, \theta_2)Rcur(\theta_6, \theta_4)\xi \\
& - \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} \eta(\theta_2)(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\theta_6, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\theta_6, \theta_4)\theta_2) \\ -\eta(\theta_6)g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + \eta(\theta_4)g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 \\ -\eta(\theta_6)g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 - \eta(\theta_4)g(\phi\theta_1, \theta_6)\theta_2 \end{bmatrix} \\
& = L_2 \begin{bmatrix} A\{g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\theta_6 - g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\theta_6 + g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\theta_4 \\ -g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\theta_4 - g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_6)\theta_2 + g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\theta_6 \\ +g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_4)\theta_2 - g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\theta_4 - g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\theta_6 \\ +g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_6)\theta_1 + g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\theta_4 - g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_4)\theta_1\} \\ + \frac{1}{n-2} \{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\theta_6 - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\theta_6 + g(\phi\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\theta_4 \\ -g(\phi\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\theta_4 - g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_6)\phi\theta_2 + g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\phi\theta_6 \\ -g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + g(\theta_1, \theta_6)\eta(\theta_2)\phi\theta_4 - g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\phi\theta_6 \\ +g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_6)\phi\theta_1 + g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_1)\phi\theta_4 - g(\theta_2, \theta_6)\eta(\theta_4)\phi\theta_1\} \\ -\eta(\theta_4)C(\theta_1, \theta_2)\theta_6 + \eta(\theta_6)C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.70}
\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar (4.70) denkleminde $\theta_6 = \xi$ alındığında

$$\begin{aligned}
& -g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1, \xi) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2, \xi)\theta_1 \\
& - Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + \eta(\theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi \\
& - \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{bmatrix} \\
& = L_2 \begin{bmatrix} A\{g(\theta_2, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\theta_2\} \\ + \frac{1}{n-2} \{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\xi - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\ +g(\theta_2, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\phi\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\theta_4 \\ -2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\phi\theta_4\} + C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.71}
\end{aligned}$$

yazabiliriz.(3.23) eşitliği (4.71) denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned}
& Rcur(\theta_4, \theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_4)Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 - Rcur(\theta_4, \theta_2)\theta_1 + \eta(\theta_4)Rcur(\xi, \theta_2)\theta_1 \\
& - Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + \eta(\theta_4)\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_4)\eta(\theta_2)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{bmatrix} \\
= L_2 & \begin{bmatrix} A\{g(\theta_2, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\theta_2\} \\ + \frac{1}{n-2}\{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\xi - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\ + g(\theta_2, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\phi\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\theta_4 \\ - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\phi\theta_4\} + C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

bulunur. (2.4) eşitliği (4.72) denkleminde kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
& -2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 - \eta(\theta_4)(Rcur(\xi, \theta_1)\theta_2 - Rcur(\xi, \theta_2)\theta_1) \\
& + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 - \eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{bmatrix} \\
= L_2 & \begin{bmatrix} A\{g(\theta_2, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\theta_2\} \\ + \frac{1}{n-2}\{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\xi - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\ + g(\theta_2, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\phi\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\theta_4 \\ - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\phi\theta_4\} + C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

yazılabilir. (4.73) denkleminden

$$\begin{aligned}
& -2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 - \eta(\theta_4)Rcur(\theta_1, \theta_2)\xi + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 - \eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \begin{bmatrix} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{bmatrix} \\
= L_2 & \begin{bmatrix} A\{g(\theta_2, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\theta_2\} \\ + \frac{1}{n-2}\{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\xi - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\ + g(\theta_2, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\phi\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\theta_4 \\ - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\phi\theta_4\} + C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

bulunur. (2.45) eşitliği (4.74) denkleminde kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
& -2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 - 2\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{array} \right] \\
= L_2 & \left[\begin{array}{l} A\{g(\theta_2, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\theta_2\} \\ + \frac{1}{n-2}\{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\xi - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\ + g(\theta_2, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\phi\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\theta_4 \\ - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\phi\theta_4\} + C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{array} \right] \quad (4.75)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& 2Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4 - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + 2\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1) \\ -\eta(\theta_1)(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2 - \phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2) \\ -g(\phi\theta_2, \theta_4)\theta_1 + g(\phi\theta_1, \theta_4)\theta_2 \end{array} \right] \\
= L_2 & \left[\begin{array}{l} A\{g(\theta_2, \theta_4)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\theta_2\} \\ + \frac{1}{n-2}\{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\xi - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\xi \\ + g(\theta_2, \theta_4)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_4)\phi\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\theta_2 + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\theta_4 \\ - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)\phi\theta_2 + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)\phi\theta_4\} + C(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \end{array} \right] \quad (4.76)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.76) denklemi θ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned}
& 2g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) - 2g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_4) + 2g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{l} \eta(\theta_2)(g(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_1, \theta) - g(\phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1, \theta)) \\ -\eta(\theta_1)(g(Rcur(\xi, \theta_4)\phi\theta_2, \theta) - g(\phi Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2, \theta)) \\ + g(\phi\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta) - g(\phi\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) \end{array} \right] \\
= L_2 & \left[\begin{array}{l} A\{g(\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta)\} \\ + \frac{1}{n-2}\{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\eta(\theta) - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\eta(\theta) \\ + g(\theta_2, \theta_4)g(\phi\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_4)g(\phi\theta_2, \theta) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\theta_2, \theta) \\ + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2)g(\theta_4, \theta) - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\phi\theta_2, \theta) + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)g(\phi\theta_4, \theta)\} \\ + g(C(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) \end{array} \right], \quad (4.77)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& 2g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) - 2g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_4) + 2g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{aligned} & \eta(\theta_2)(-g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta, \phi\theta_1) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_1, \phi\theta)) \\ & -\eta(\theta_1)(-g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta, \phi\theta_2) - g(Rcur(\xi, \theta_4)\theta_2, \phi\theta)) \\ & +g(\phi\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta) - g(\phi\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) \end{aligned} \right] \\
& = L_2 \left[\begin{aligned} & A\{g(\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta)\} \\ & + \frac{1}{n-2} \{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\eta(\theta) - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\eta(\theta) \\ & +g(\theta_2, \theta_4)g(\phi\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_4)g(\phi\theta_2, \theta) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\theta_2, \theta) \\ & +\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)g(\theta_4, \theta) - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\phi\theta_2, \theta) + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)g(\phi\theta_4, \theta)\} \\ & +g(C(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) \end{aligned} \right], \tag{4.78}
\end{aligned}$$

denkleminde ulaşırız. (4.78) denkleminde işlemler yapılıp dzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
& 2g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) - 2g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_4) + 2g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)\theta_1 \\
& + \frac{1}{n-2} \left[\begin{aligned} & -\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)g(\phi\theta_1, \theta) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\theta, \phi\theta_2) \\ & +g(\phi\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta) - g(\phi\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) \end{aligned} \right] \\
& = L_2 \left[\begin{aligned} & A\{g(\theta_2, \theta_4)g(\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_4)g(\theta_2, \theta)\} \\ & + \frac{1}{n-2} \{g(\phi\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1)\eta(\theta) - g(\phi\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)\eta(\theta) \\ & +g(\theta_2, \theta_4)g(\phi\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_4)g(\phi\theta_2, \theta) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\theta_2, \theta) \\ & +\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)g(\theta_4, \theta) - 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_4)g(\phi\theta_2, \theta) + 2\eta(\theta_1)\eta(\theta_2)g(\phi\theta_4, \theta)\} \\ & +g(C(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta) \end{aligned} \right], \tag{4.79}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.79) denkleminde $\theta_1 = \theta = e_i$ alınıp (2.9) eşitliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
& 2Ric(\theta_2, \theta_4) + 2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + \frac{1}{n-2}g(\phi\theta_2, \theta_4) \\
& = L_2 \left[2(n-1)Ag(\theta_2, \theta_4) + \frac{2}{n-2}\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + Ric(\theta_2, \theta_4) - g(\phi\theta_2, \theta_4) \right], \tag{4.80}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& 2Ric(\theta_2, \theta_4) + 2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + g(\phi\theta_2, \theta_4) \\
& = L_2 \left[2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + Ric(\theta_2, \theta_4) + g(\phi\theta_2, \theta_4) \right], \tag{4.81}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.81) denkleminde dzenlersek

$$(1-L_2)[2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)+2Ric(\theta_2,\theta_4)+g(\phi\theta_2,\theta_4)]=0,$$

elde edilir. Böylece ya

$$1-L_2=0$$

veya

$$2(n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4)+2Ric(\theta_2,\theta_4)+g(\phi\theta_2,\theta_4)=0 \quad (4.82)$$

elde edilir. $L_2=1$ ise M üzerinde $Rcur(\theta_2,\theta_4)\cdot C=Q(g,C)$ dir. Diğer yandan (4.82) denkleminde,

$$Ric(\theta_2,\theta_4)=-\frac{\lambda}{3}g(\theta_2,\theta_4)-\frac{2\lambda}{3}\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \quad (4.83)$$

yazılabilir. (4.83) denkleminde (3.30) eşitliği kullanıldığında,

$$Ric(\theta_2,\theta_4)=-\frac{1-\lambda}{3}g(\theta_2,\theta_4)-\frac{2(\lambda-1)}{3}\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \quad (4.84)$$

elde edilir. Böylece M manifoldu bir η -Einstein manifoldudur.

Teorem 4.1.7: Ricci soliton şartını sağlayan bir n -boyutlu para-Sasakian manifoldu M projektif flat ise M manifoldu neredeyse (nearly) quasi-Einstein manifoldudur.

İspat. M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in \chi(M)$ için M nin Projektif eğrilik tensörü (2.32) eşitliğinden

$$P(\theta_1,\theta_2)\theta_3=Rcur(\theta_1,\theta_2)\theta_3-\frac{1}{n-1}[Ric(\theta_2,\theta_3)\theta_1-Ric(\theta_1,\theta_3)\theta_2], \quad (4.85)$$

biçiminde yazılır. Bu denkleminde (3.29) kullanılarak

$$P(\theta_1,\theta_2)\theta_3=Rcur(\theta_1,\theta_2)\theta_3-\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} -g(\phi\theta_2,\theta_3)\theta_1-\lambda g(\theta_2,\theta_3)\theta_1 \\ +g(\phi\theta_1,\theta_3)\theta_2+\lambda g(\theta_1,\theta_3)\theta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi M manifoldunun projektif flat manifold olduğunu varsayalım. Böylece

$$Rcur(\theta_1,\theta_2)\theta_3=\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} -g(\phi\theta_2,\theta_3)\theta_1-\lambda g(\theta_2,\theta_3)\theta_1 \\ +g(\phi\theta_1,\theta_3)\theta_2+\lambda g(\theta_1,\theta_3)\theta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

bulunur. (4.87) denklemi θ vektör alanı ile iç çarpım yapılarak,

$$g(Rcur(\theta_1,\theta_2)\theta_3,\theta)=\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} -g(\phi\theta_1,\theta_3)g(\theta_2,\theta)-g(\phi\theta_2,\theta_3)g(\theta_1,\theta) \\ +\lambda g(\theta_1,\theta_3)g(\theta_2,\theta)-\lambda g(\theta_1,\theta_3)g(\theta_1,\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

yazılabilir.(4.88) denkleminde $\theta_i=\theta=e_i$, $1 \leq i \leq n$ alındığında,

$$Ric(\theta_2, \theta_3) = -g(\phi\theta_2, \theta_3) - \lambda g(\theta_2, \theta_3), \quad (4.89)$$

elde ederiz. Böylece bu sonuç M manifoldunun neredeyse (nearly) quasi-Einstein manifoldu olduğunu ispatlar.

Teorem 4.1.8: η -Ricci soliton şartını sağlayan bir n -boyutlu projektif flat para-Sasakian manifoldu mevcut değildir.

İspat: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin Projektif eğrilik tensörü (2.32) eşitliğinden

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-1} [Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \quad (4.90)$$

biçiminde yazılır. Bu denklemde (3.36) kullanılarak

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} -g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3)\theta_1 \\ +g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + \gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_3)\theta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.91)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi M manifoldunun projektif flat manifold olduğunu varsayalım. Böylece

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} -g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3)\theta_1 \\ +g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + \gamma\eta(\theta_1)\eta(\theta_3)\theta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

bulunur. (4.92) denklemi θ vektör alanı ile iç çarpım yapılarak,

$$g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta) = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} -g(\phi\theta_2, \theta_3)g(\theta_1, \theta) - \lambda g(\phi\theta_2, \theta_3)g(\theta_1, \theta) \\ -\gamma g(\theta_1, \theta)\eta(\theta_2)\eta(\theta_3) + g(\phi\theta_1, \theta_3)g(\theta_2, \theta) \\ +\lambda g(\theta_1, \theta_3)g(\theta_2, \theta) + \gamma g(\theta_2, \theta)\eta(\theta_1)\eta(\theta_3) \end{bmatrix}, \quad (4.93)$$

yazılabilir. (4.93) denklemde $\theta_1 = \theta = e_i$, $1 \leq i \leq n$ alındığında,

$$Ric(\theta_2, \theta_3) = -g(\phi\theta_2, \theta_3) - \lambda g(\theta_2, \theta_3) - \gamma\eta(\theta_2)\eta(\theta_3), \quad (4.94)$$

elde ederiz. Böylece son denklemde $\theta_3 = \xi$ alırsak

$$Ric(\theta_2, \xi) = -(\lambda + \gamma)\eta(\theta_2),$$

elde ederiz. Bu ise $\gamma = 0$ demektir. Böylece M manifoldu projektif flat şartını sağlamaz.

Teorem 4.1.9: Ricci soliton şartını sağlayan bir n -boyutlu para-Sasakian manifoldu M konharmonik flat ise M manifoldu bir neredeyse (nearly) quasi-Einstein manifoldudur.

İspat: Bir n -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin Projektif eğrilik tensörü (2.31) eşitliğinden

$$K(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-1} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)Q\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)Q\theta_2 \right], \quad (4.95)$$

olduğunu biliyoruz. (4.95) denkleminde (3.36) kullanılarak,

$$K(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ - \frac{1}{n-1} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 \right. \\ \left. - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 + 2\lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + 2\lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.96)$$

elde ederiz. Şimdi M manifoldunun konhamonik flat manifold olduğunu varsayalım. Böylece

$$Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-1} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 \right. \\ \left. - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 + 2\lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + 2\lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.97)$$

bulunur. (4.76) denkleminde θ vektör alanı ile iç çarpım yapılarak,

$$g(Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta) = \frac{1}{n-1} \left[g(\phi\theta_2, \theta_3)g(\theta_1, \theta) - g(\phi\theta_1, \theta_3)g(\theta_2, \theta) \right. \\ \left. + g(\theta_2, \theta_3)g(\phi\theta_1, \theta) - g(\theta_1, \theta_3)g(\phi\theta_2, \theta) \right. \\ \left. + 2\lambda g(\theta_2, \theta_3)g(\theta_1, \theta) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_3)g(\theta_2, \theta) \right], \quad (4.98)$$

yazılabilir. (4.98) denkleminde $\theta_1 = \theta = e_i$, $1 \leq i \leq n$ alındığında,

$$Ric(\theta_2, \theta_3) = g(\phi\theta_2, \theta_3) + \frac{2\lambda(1-n)}{n-2} g(\theta_2, \theta_3),$$

elde ederiz. Böylece bu sonuç M manifoldunun neredeyse (nearly) quasi-Einstein manifoldu olduğunu ispatlar.

Teorem 4.1.10: η -Ricci soliton şartını sağlayan bir n -boyutlu konharmonik flat para-Sasakian manifoldu mevcut değildir.

İspat: Bir önceki teoremin ispatına benzer bir yöntemle gösterilebilir.

Örnek 4.1.1: Bir 3-boyutlu bir manifold $M = R^3$ standart kartezyen koordinatları $\{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere vektör alanlarını

$$e_1 = e^x \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = e^x \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_3 = -\frac{\partial}{\partial x},$$

ile tanımlayalım. M nin Riemann metriği g olmak üzere $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ve η bir 1-form olmak üzere $\eta(\theta_3) = g(\theta_3, e_3)$ eşitliği ile verilsin. M de bir ϕ , $(1,1)$ -tensör alanını

$\phi(e_1)=e_1$, $\phi(e_2)=e_2$ ve $\phi(e_3)=0$ olarak tanımlayıp $\xi=e_3$ alırsak (ϕ, ξ, η, g) ifadesi M üzerinde bir para-kontak yapı olur [36]. Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere

$$[e_1, e_2]=0, [e_1, e_3]=e_1, [e_2, e_3]=e_2,$$

dır. Koszul formülü yardımı ile

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_2 &= 0, & \nabla_{e_1}e_3 &= e_1, & \nabla_{e_1}e_1 &= -e_3, \\ \nabla_{e_2}e_3 &= e_2, & \nabla_{e_2}e_2 &= -e_3, & \nabla_{e_2}e_1 &= 0, \\ \nabla_{e_3}e_3 &= 0, & \nabla_{e_3}e_2 &= 0, & \nabla_{e_3}e_1 &= 0, \end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. Bu eşitliklerden (ϕ, ξ, η, g) yapısının M üzerinde bir para-Sasakian manifold olduğu görülür [36]. Diğer yandan Ricci soliton denklemini sağlayan 3-boyutlu manifold M üzerinde Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= \begin{bmatrix} -g(\phi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\phi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \\ +g(\theta_2, \theta_3)\phi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\phi\theta_2 \end{bmatrix} \\ &- \left(\frac{\tau}{2} + 2\lambda\right) [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \end{aligned} \quad (4.99)$$

ile tanımlanır. (4.99) denkleminde,

$$\begin{aligned} Rcur(e_1, e_2)e_2 &= \left(2 - \frac{\tau}{2} - 2\lambda\right)e_1, & Rcur(e_1, e_3)e_3 &= \left(1 - \frac{\tau}{2} - 2\lambda\right)e_1, \\ Rcur(e_2, e_1)e_1 &= \left(-2 + \frac{\tau}{2} + 2\lambda\right)e_2, & Rcur(e_2, e_3)e_3 &= \left(1 - \frac{\tau}{2} - 2\lambda\right)e_2, \\ Rcur(e_3, e_1)e_1 &= \left(-2 + \frac{\tau}{2} + 2\lambda\right)e_3, & Rcur(e_3, e_2)e_2 &= \left(-1 + \frac{\tau}{2} + 2\lambda\right)e_3, \\ Rcur(e_1, e_2)e_3 &= 0, & Rcur(e_3, e_2)e_3 &= \left(1 - \frac{\tau}{2} - 2\lambda\right)e_2, & Rcur(e_3, e_1)e_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.100)$$

elde edilir. (4.100) denkleminde

$$\begin{aligned} Ric(e_1, e_2) &= -(4 - \tau - 4\lambda), & Ric(e_2, e_2) &= -(4 - \tau - 4\lambda), \\ Ric(e_3, e_3) &= -(4 - \tau - 4\lambda), & Ric(e_1, e_2) &= 0, & Ric(e_1, e_3) &= 0, & Ric(e_2, e_3) &= 0, \end{aligned} \quad (4.101)$$

sonucu elde edilir. (4.101) denkleminde $Ric(\theta_1, \theta_2) = -2g(\theta_1, \theta_2)$ olduğu görülür. M^3 Ricci soliton denklemini sağlayan bir para sasakian manifold olduğunu göz önüne almak şartıyla, (3.28) denklemini baz vektörlerine göre yazarsak

$$\begin{aligned} -g(e_1, e_1) + Ric(e_1, e_1) + \lambda g(e_1, e_1) \\ -g(e_2, e_2) + Ric(e_2, e_2) + \lambda g(e_2, e_2) \\ -g(e_3, e_3) + Ric(e_3, e_3) + \lambda g(e_3, e_3) &= 0, \end{aligned}$$

elde ederiz. Son denklemden $\lambda = 1$ dir. Böylece M^3 manifoldunda bir Ricci soliton $(g, e_3, 1)$ olarak bulunur. Şimdi M^3 manifold için Projektif eğrilik tensörünü göz önüne alalım. Bu durumda,

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{2}[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \quad (4.102)$$

denkleminde (3.29) eşitliğini kullanarak

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = Rcur(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} g(\theta_2, \phi\theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \phi\theta_3)\theta_2 \\ +g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

elde ederiz. Buradan eğrilik tensörünün bileşenlerini kullanarak

$$P(e_1, e_2)e_1 = Rcur(e_1, e_2)e_1 - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -g(e_2, \phi e_1)e_1 - \lambda g(e_2, e_1)e_1 \\ +g(e_1, \phi e_1)e_2 + \lambda g(e_1, e_1)e_2 \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

sonucunu elde ederiz. Burada baz bileşenleri kullanarak

$$\begin{aligned} P(e_1, e_2)e_1 &= e_2, & P(e_1, e_2)e_2 &= -e_1, & P(e_1, e_2)e_3 &= 0, \\ P(e_1, e_3)e_1 &= e_3, & P(e_1, e_3)e_2 &= 0, & P(e_1, e_3)e_3 &= e_1, \\ P(e_2, e_3)e_1 &= 0, & P(e_2, e_3)e_2 &= -e_3, & P(e_2, e_3)e_3 &= -e_2, \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\sum_{i,j,k} P(e_i, e_j)e_k = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

elde edilir, ki bu sonuç bize M^3 manifoldunun bir projektif flat manifold olduğunu gösterir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada Ricci-soliton denklemini sağlayan bir para-Sasakian manifold üzerinde Weyl konformal eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü ve konharmonik eğrilik tensörü tanımlanarak bazı simetri ve eğrilik şartlarını sağlaması ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, 17, 255–306.
- [2] Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, 1–39. <https://arxiv.org/pdf/math/0211159.pdf>
- [3] Perelman, G. (2003). Ricci flow with surgery on three manifolds, <http://arXiv.org/abs/math/0303109>, 2003, 1–22.
- [4] Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, *Mathematics and general relativity, Contemp. Math.*, 71, 237–262.
- [5] Sharma, R. (2008). Certain results on k -contact and (k, μ) -contact manifolds, *J. Geom.*, 89, 138–147.
- [6] Ashoka, S. R., Bagewadi, C. S., & Ingalahalli, G. (2013). Certain Results on Ricci Solitons in Sasakian Manifolds. *Hindawi Publishing Corporation Geometry*, 1-5.
- [7] Ashoka, S. R., Bagewadi, C. S., & Ingalahalli, G. (2014). A geometry on Ricci solitons in (LCS) n -manifolds. *Diff. Geom.-Dynamical Systems*, 16, 50-62.
- [8] Bagewadi, C. S., & Ingalahalli, G. (2012). Ricci solitons in Lorentzian α -Sasakian manifolds. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (NS)*, 28(1), 59-68.
- [9] Bejan C. L., Crasmareanu, M. (2011). Ricci Solitons in manifolds with quasi-contact curvature, *Publ. Math. Debrecen*, 78, 235-243.
- [10] Blaga, A. M. (2015). η -Ricci solitons on para-kenmotsu manifolds, *Balkan J. Geom. Appl.*, 20, 1-13.
- [11] Chandra, S., Hui, S. K., & Shaikh, A. A. (2015). Second order parallel tensors and Ricci solitons on (LCS) n -manifolds. *Commun. Korean Math. Soc.*, 30(2), 123-130.
- [12] Chen, B. Y., & Deshmukh, S. (2014). Geometry of compact shrinking Ricci solitons. *Balkan J. Geom. Appl.*, 19(1), 13-21.
- [13] Deshmukh, S., Alodan, H., & Al-Sodais, H. (2011). A note on Ricci solitons. *Balkan J. Geom. Appl.*, 16(1), 48-55.
- [14] He, C., Zhu, M. (2011). Ricci solitons on Sasakian manifolds. *arXiv preprint arXiv:1109.4407*.
- [15] Nagaraja, H. G., & Premalatha, C. R. (2012). Ricci solitons in Kenmotsu manifolds. *Journal of Mathematical analysis*, 3(2), 18–24.
- [16] Tripathi, M. M. (2008). Ricci solitons in contact metric manifolds. *arXiv preprint arXiv:0801.4222*.
- [17] Adati, T., & Matumoto, K. (1977). On conformally recurrent and conformally symmetric P-Sasakian manifolds. *TRU Mathematics*, 13(1), 25-32.
- [18] Sato I. and Matsumoto K., On P-Sasakian manifolds satisfying certain conditions, (1979), *Tensor N.S.*, 33, 173-178.
- [19] De, U., Guha, N. (1992). On a type of P-Sasakian manifold. *İstanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics Physics and Astronomy*, 51, 35-39.
- [20] Chaki M.C., On pseudo-symmetric manifolds, 1987, *Analele Stintifice Ale Universitatii, Al:I. CUZA. Dinlasi, Romania*, 33-53
- [21] Arslan K., Murathan C, Yıldız A., Özgür C , Pseudo-symmetric contact metric manifolds in the sense of M. C. Chaki, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math*, 50(3), 124-132.
- [22] Blair D.E., Koufogiorgos T., Papantoniou B.J., 1995, Contact Metric Manifolds satisfying a nullity condition. *Israel Journal of Mathehatics*, 91, 189-214
- [23] Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1996). *Foundations of Differential Geometry, Volume 2* (Vol. 61). John Wiley & Sons.
- [24] Blair D.E. (1976). Contact manifolds in Riemannian geometry 1976, *Lectures Notes in Mathematics* 509. Springer-Verlag, Berlin, 146 p

- [25] Hacısalihoğlu H.H. (1983). Differential Geometry, İnönü University Press, 895p
- [26] Yano K., Kon M. (1984). Structure on Manifolds, World Scientific, 508p.58
- [27] Deszcz R. (1990). On Pseudosymmetric Spaces. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 49, 134-145
- [28] De, U. C., Guha, N., Kamilya, D. (1995). On generalize Ricci-recurrent manifolds. *Tensor (N.S.)* 56(3), 312-317.
- [29] Ishii Y. (1957). On Conharmonic transformations, *Tensor, N.S.*, 7, 73-89
- [30] Zamkovoy, S. (2009). Canonical Connections on Paracontact Manifolds, *Ann Glob Anal Geom.*, 36, 37-60.
- [31] Kaneyuki, S., & Williams, F. L. (1985). Almost paracontact and parahodge structures on manifolds. *Nagoya Mathematical Journal*, 99, 173-187.
- [32] Bucki, A., & Miernowski, A. (1985). Almost r-paracontact connections. *Acta Mathematica Hungarica*, 45(3-4), 327-336.
- [33] Adati T., Miyazawa T. (1979). On P-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions, *Tensor, N.S.*, 33, 173-178
- [34] Ingalahalli, G., Bagewadi, C. S. (2012). Ricci solitons in α -Sasakian manifolds. *ISRN Geometry*, 2012, 1-13.
- [35] De, U. C., Han, Y., & Mandal, K. (2017). On para-Sasakian manifolds satisfying certain curvature conditions. *Filomat*, 31(7), 1941-1947.
- [36] Shukla, S. S., & Shukla, M. K. (2010). On ϕ -symmetric Para-Sasakian manifolds. *Int. J. Math. Analysis*, 4(16), 761-769.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet AKBOĞA

[Redacted text block]

[Redacted text block]

[Redacted text block]

