

**T.C.**  
**SİNOP ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**$f$  – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ  
TEOREMLER**

**KÜBRA BELİN KÜNTECİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**

**PROF. DR. SEVDA AKDAĞ**

**SİNOP-2024**

## TEZ KABUL

**Kübra BELİN KÜNTECİ** tarafından hazırlanan “*f* –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER” başlıklı bu çalışma, 24.01.2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Başkan** Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ  
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

**Üye (Danışman)** Prof. Dr. Sevda AKDAĞ  
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

**Üye** Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI  
Ankara Üniversitesi / Fen Fakültesi

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Fadime DİRİK

.....

## ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim

Kübra BELİN KÜNTECİ

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### $f$ –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

KÜBRA BELİN KÜNTECİ

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. SEVDA AKDAĞ

Bu tez çalışması temelde üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde ilk olarak yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılmıştır. Daha sonra klasik Korovkin tipi teorem ve istatistiksel Korovkin tipi teorem verilmiştir. İstatistiksel yakınsaklık oranı tanıtılarak bu kavram yardımı ile istatistiksel Korovkin tipi teoremin oranı hesaplanmıştır. Ayrıca Bögel süreklilik kavramı tanıtılarak sürekli fonksiyonlar uzayını kapsayan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı tanıtılmıştır. Böylece Bögel sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetli olan ve bir sınırsız modülüs fonksiyonu yardımı ile tanımlanan  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Bu kavram kullanılarak tek ve çift değişkenli pozitif lineer operatörler için sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde Korovkin tipi teoremler verilmiştir. Ayrıca Bögel sürekli fonksiyonlar için  $f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi teorem verilmiştir. Üstelik elde edilen sonuçların klasik durumlardan daha kuvvetli olduğunu gösteren örnekler verilmiştir. Son olarak  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranı tanımlanmış ve elde edilen Korovkin tipi teoremlerin  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranları hesaplanmıştır.

**ANAHTAR KELİMELER:** İstatistiksel yakınsaklık; Pozitif lineer operatör; Korovkin tipi yaklaşım teoremi; Bögel süreklilik, Modülüs fonksiyonu;  $f$  –istatistiksel yakınsaklık

Ocak 2024, 58 Sayfa

## ABSTRACT

### MSC THESIS

## $f$ –STATISTICAL CONVERGENCE AND KOROVKIN TYPE THEOREMS

KÜBRA BELİN KÜNTECİ

SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. SEVDA AKDAĞ

This thesis consists mainly of three chapters. The first chapter has been devoted to introduction. In the second chapter, first of all the concepts of density and statistical convergence have been introduced. Then the classical Korovkin type theorem and the statistical Korovkin type theorem have been given. The rate of statistical convergence has been introduced and the rate of the statistical Korovkin type theorem has been calculated with the help of this concept. Furthermore, the concept of Bögel continuity has been introduced and the space of Bögel continuous functions, which covers the space of continuous functions, has been introduced. Thus, Korovkin type theorems for Bögel continuous functions have been given. In the third part, the concept of  $f$  –statistical convergence, which is stronger than the usual convergence and is defined with the help of an unbounded modulus function, has been introduced. Using this concept, Korovkin-type theorems on the space of continuous functions for positive linear operators in one and two variables have been given. Moreover, a Korovkin-type theorem for Bögel continuous functions has been given with the help of  $f$  –statistical convergence. Moreover, examples have been given to show that the results obtained are stronger than the classical cases. Finally, the rate of  $f$  –statistical convergence has been defined and the rates of  $f$  –statistical convergence of the obtained Korovkin type theorems has been calculated.

**KEYWORDS:** Statistical convergence; Positive linear operator; Korovkin type approximation theorem; Bögel continuity; Modulus function;  $f$  –statistical convergence

January 2024, 58 Page

## TEŞEKKÜR

Öncelikle tezimin her aşamasında bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen, beni daima cesaretlendiren ve çalışmamın bu aşamaya gelmesini sağlayan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Sevda Akdağ'a teőekkürlerimi sunarım. Yine bu yola birlikte girdiğimiz ancak bu yolu benden önce yürüyen sevgili arkadaşım Selin ınar'a dostluğu ve desteği için çok teşekkür ederim.

Gerek seminer gerek tez çalışmam boyunca canım oğlum Doğa Künteci'ye benim yokluğumu hissettirmeyen ve beni hayatım boyunca destekleyen sevgili annem Serpil Belin'e; şu an aramızda olmayan, yaşamı boyunca benden desteğini hiç esirgemeyen, beni daima yüreklendiren ve bana inanan sevgili babam Mustafa Belin'e ve hep yanımda duran canım kardeşim Büşra Belin'e hayatımı güzelleştirdikleri için teşekkür ederim. Ayrıca canım eşim Ersoy Künteci'ye bana gösterdiği sevgi, verdiği destek ve cesaret özellikle de sonsuz sabrı için minnettarım. Son olarak küçük güneş ışığım Doğa Künteci'ye sevgilerimi iletmek isterim, onun sarılmaları ve gülümsemeleri bana her zaman cesaret verdi.

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>TEZ KABUL</b> .....	ii
<b>ETİK BEYANI</b> .....	iii
<b>ÖZET</b> .....	iv
<b>ABSTRACT</b> .....	v
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	vi
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	vii
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	viii
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. GENEL BİLGİLER</b> .....	2
2.1. İstatistiksel Yakınsaklık .....	2
2.2. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri .....	5
2.2.1. Klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremi.....	6
2.2.2. İstatistiksel Korovkin tipi teorem .....	8
2.2.3. Bölge sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi teorem .....	14
<b>3. MATERYAL METOT</b> .....	21
<b>4. BULGULAR</b> .....	22
4.1. $f$ –Yoğunluk .....	22
4.2. $f$ –İstatistiksel Yakınsaklık.....	27
4.3. $f$ –İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı ile Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri .....	29
4.3.1. $f$ –İstatistiksel yakınsaklık oranı .....	41
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	47
<b>KAYNAKLAR</b> .....	48
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	50

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$ D $	: $D$ kümesinin eleman sayısı
$\delta$	: Doğal yoğunluk
$c$	: Yakınsak diziler uzayı
$st$	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$C(K)$	: $K$ üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı
$B(K)$	: $K$ üzerinde tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _{C(K)}$	: $C(K)$ uzayının alışılmış supremum normu
$D(T)$	: $T$ operatörünün tanım kümesi
$R(T)$	: $T$ operatörünün değer kümesi
$\Delta_{x,y}[g(u, v)]$	: $g$ fonksiyonunun karışık farkı
$C_b(K)$	: $K$ üzerinde tanımlı tüm $B$ -sürekli fonksiyonların uzayı
$B_b(K)$	: $K$ üzerinde tanımlı tüm $B$ -sınırlı fonksiyonların uzayı
$d_f$	: $f$ – yoğunluk
$\omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2)$	: Karışık $B$ -süreklilik modülü

## 1. GİRİŞ

İlk kez 1951 yılında Steinhaus (1951) tarafından tanıtılan istatistiksel yakınsaklık kavramı aynı yıl Fast (1951) tarafından çalışılmıştır. 1981 yılında Friedman ve Sember (1981) ve daha sonra 1985 yılında Fridy'nin (Fridy, 1985) çalışmaları ile hızlı bir gelişme gösteren istatistiksel yakınsaklık kavramı Toplanabilme Teorisi (Schoenberg, 1959; Fridy, 1985), Fonksiyonel Analiz (Connor, 1988, 1989, 2000; Demirci ve Orhan, 1999; Kline, 1995), Ölçü Teorisi (Miller, 1995; Miller ve Orhan, 2001) ve Yaklaşım Teorisi (Atlıhan ve Orhan, 2008; Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman 2003) gibi bir çok alanda araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Korovkin tipi yaklaşım teorisinin ortaya çıkmasıyla bu sonuçlar birçok araştırmacı tarafından farklı uzaylarda genişletilmiş ve farklı yakınsaklık türleri yardımı ile yaklaşım incelenmiştir. Bunların en önemlilerinden biri istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teorisi olup Gadjiev ve Orhan tarafından 2002 yılında ispatlanmıştır. Ayrıca, Korovkin tipi yaklaşım teorisindeki süreklilik yerine Bögel süreklilik ( $B$ -süreklilik) kavramı kullanılarak Korovkin teorisi 1986 yılında C. Badea, I. Badea ve H. H. Gonska (1986) tarafından  $B$ -süreklilik fonksiyonlar uzayında çalışılmıştır.

Modülüs fonksiyonu ilk kez 1953 yılında Nakano tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra Ruckle (1973) modülüs fonksiyonu yardımı ile dizi uzayları üzerinde çalışmıştır. Ayrıca birçok araştırmacı tarafından modülüs fonksiyonu yardımı ile elde edilen dizi uzayları incelenmiştir. Son yıllarda Aizpru vd. (2014) sınırsız bir modülüs fonksiyonu yardımı ile yeni bir yoğunluk kavramı elde etmişlerdir. Elde ettikleri bu yeni yakınsama metodu istatistiksel yakınsaklık kavramının bir genellemesi olup, alışılmış yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındadır ve  $f$ -istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde  $f$ -istatistiksel yakınsaklık yardımı ile ilk olarak tek değişkenli ve çift değişkenli lineer pozitif operatörler için Korovkin tipi teoremler verilecektir. Daha sonra  $f$ -istatistiksel yakınsaklık yardımı ile sürekli fonksiyonların uzayından daha geniş olan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir. Son olarak  $f$ -istatistiksel yakınsaklık oranı tanımlanarak karışık  $B$ -süreklilik modülü yardımı ile oran hesaplanacaktır.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel bilgilere yer verilecektir.

### 2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde doğal yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. Ayrıca yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgili örnekler verilecektir.

$\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesini göstermek üzere Niven ve Zuckerman (1980) tarafından tanımlanan doğal yoğunluk kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

**2.1.1. Tanım:**  $D \subset \mathbb{N}$  ve  $D_n = \{k \leq n : k \in D\}$  olsun.  $|D|$  ifadesi  $D$  kümesinin eleman sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : k \in D\}|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu ifadeye  $D$  kümesinin doğal yoğunluğu denir ve  $\delta(D)$  ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

**2.1.2. Örnek:**  $D_n = \{k : k = 2m, m \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere  $D$  kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n; k = 2m, m \in \mathbb{N}\}|}{n}$$

olup,

$$\frac{|D_n|}{n} = \begin{cases} \frac{n-1}{2n}, & n \text{ tek,} \\ \frac{n}{2n}, & n \text{ çift,} \end{cases}$$

olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n|}{n} = \frac{1}{2}$$

olup böylece  $\delta(D) = \frac{1}{2}$  olduğu görülür.

Benzer şekilde  $\delta(\mathbb{N}) = 1$ ,  $\delta(\{k : k = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ ,  $\delta(\{k : k = n^2, n \in \mathbb{N}\}) = 0$ ,  $\delta(\{k_j : k_1, k_2, \dots, k_p, p \text{ sonlu } k \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, p\}) = 0$  olacaktır. Ayrıca asal sayılar kümesi sıfır yoğunluktadır.

Doğal yoğunluk için bir başka karakterizasyon şu şekilde verilebilir:

$(b_n)$  pozitif tamsayıların bir dizisi ve  $D = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere  $\delta(D)$  mevcut ise

$$\delta(D) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n}$$

olur (Niven ve Zuckerman, 1980).

Ayrıca bir  $D$  kümesinin yoğunluğu mevcut ise bu durumda  $\delta(\mathbb{N} \setminus D) = 1 - \delta(D)$  olur (Niven ve Zuckerman, 1980; Freedman ve Sember, 1981).

**2.1.3. Tanım:**  $x = (x_k)$  reel terimli bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

olacak şekilde bir  $\gamma$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi  $\gamma$  sayısına “*istatistiksel yakınsaktır*” denir ve  $st - \lim x_k = \gamma$  ile gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Bir dizinin alışılmış anlamda yakınsaklığı, dizinin yakınsadığı sayının her  $\varepsilon > 0$  komşuluğunda diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunurken bu komşuluğun dışında ise sonlu adette teriminin bulunması anlamına gelmekteydi. Daha önce gösterdik ki sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bu ise yakınsak her dizinin aynı zamanda istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. Böylece  $c$  ile yakınsak diziler uzayını,  $st$  ile istatistiksel yakınsak diziler uzayını gösterecek olursak  $c \subset st$  olduğu açıktır. Ancak bu önermenin karşınının her zaman doğru olmayacağını aşağıdaki örnek göstermektedir.

**2.1.4. Örnek:**  $x = (x_k)$  dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} k + 1, & k = m^2, \\ 0, & k \neq m^2, \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın.  $x_k = \{2, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 10, \dots\}$  olup  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : k = m^2, m \in \mathbb{N}\}|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olacağından  $st - \lim x_k = 0$  olur. Ancak açıkça görülmektedir ki  $x = (x_k)$  dizisinin iraksak ve sıfıra yakınsak iki alt dizisi mevcut olduğundan alışılmış anlamda yakınsak değildir.

**2.1.5. Örnek:**  $x = (x_k)$  dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \\ 0, & k \neq m^2, \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın.  $x_k = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$  olup  $st - \lim x_k = 0$  elde edilir.

Yukarıda verilen 2.1.4 Örnek'te göz önüne alınan dizi üsten sınırsız aynı zamanda iraksak, 2.1.5 Örnek'te ise sınırlı iraksak bir dizi bulunmaktadır. Ancak aynı zamanda bu diziler sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerdir. Buna istinaden şu sonucu verebiliriz. Biliyoruz ki yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat istatistiksel yakınsak olan diziler her zaman sınırlı olmak zorunda değildir.

İstatistiksel yakınsaklık için bir başka karakterizasyon aşağıdaki teoremle verilmiştir.

**2.1.6. Teorem:**  $x = (x_k)$  dizisi için  $st - \lim x_k = \ell$  olması için gerek ve yeter koşul  $\delta\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$  ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \ell$  olacak şekilde en az bir  $(n_k)$  indis dizisi vardır (Salat, 1980; Fridy, 1985; Connor, 1989).

Yani "0" yoğunluklu indis kümesi dışında kalan ("1" yoğunluklu indis kümesi üzerinde)  $x$  dizisi  $\ell$  sayısına alışılmış (Cauchy) anlamda yakınsak ise  $st - \lim x_k = \ell$  olur.

Örneğin;  $x = (x_k)$  dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} k^2, & k = \text{asal sayı}, \\ 3, & k \neq \text{asal sayı}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $x_k = \{3, 4, 9, 3, 25, 3, 49, 3, 3 \dots\}$  olup

$$\delta(\{k \leq n : k = \text{asal sayı}, k \in \mathbb{N}\}) = 0$$

ve böylece  $\delta(\{k \leq n: k \neq \text{asal sayı}, k \in \mathbb{N}\}) = 1$  elde edilir. Ayrıca 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde  $x = (x_k)$  dizisi 3 sayısına alışılmış (Cauchy) anlamında yakınsak olduğundan  $st - \lim x_k = 3$  olur.

**2.1.7. Teorem:**  $x = (x_k)$  ve  $y = (y_k)$  dizileri için  $st - \lim x_k = \ell_1$ ,  $st - \lim y_k = \ell_2$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda

i)  $st - \lim(x_k + y_k) = \ell_1 + \ell_2$ ,

ii)  $st - \lim(\lambda \cdot x_k) = \lambda \cdot \ell_1$  (Fast, 1951).

## 2.2. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan bazı fonksiyon uzayları, temel tanımlar ve yaklaşım teorisinde önemli bir yeri olan Korovkin tipi teoremler tanıtılacaktır.

**$B[a, b]$  Uzayı :**  $[a, b]$  aralığı üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca  $\|f\|_{B[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$  normu ile  $B[a, b]$  uzayı bir Banach uzayıdır.

**$C[a, b]$  Uzayı :**  $[a, b]$  aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır.  $a, b$  uç noktalarında bu uzayın elemanları sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır.  $f \in C[a, b]$  için  $\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$  alışılmış supremum normu ile birlikte  $C[a, b]$  bir Banach uzayıdır.

**2.2.1. Tanım:**  $S$  ve  $V$  iki fonksiyon uzayı olmak üzere eğer  $S$  den alınmış herhangi bir  $f$  fonksiyonuna  $V$  'de bir ve yalnız bir  $g$  fonksiyonu karşılık getiren bir  $T$  kuralı varsa o takdirde  $S$  uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu durumda  $g(x) = T(f; x)$  şeklinde gösterilir.

$S$  uzayı  $T$  operatörünün tanım kümesi olup  $S = D(T)$  ile gösterilir. Bu durumda  $g(x) = T(f; x)$ ,  $V$  uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki  $g$  fonksiyonlarının kümesi  $T$  operatörünün değer kümesi olarak adlandırılır ve bu küme  $R(T)$  ile gösterilir. Dolayısıyla  $R(T) \subseteq V$  sağlanır.

$S$  uzayının lineer fonksiyon uzayı olması durumunda lineer operatör tanımını verebiliriz.

**2.2.2. Tanım:**  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$   $S$  uzayında herhangi iki fonksiyon ve  $a_1$  ve  $a_2$  keyfi iki reel sayı olmak üzere  $T$  operatörü

$$T(a_1f_1 + a_2f_2; x) = a_1T(f_1; x) + a_2T(f_2; x)$$

koşulunu gerçekleştiriyor ise bu takdirde  $T$  operatörüne “*lineer operatör*” denir.

Lineer operatörler kümesi içinde önemli bir alt sınıf pozitif lineer operatörler olup aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**2.2.3. Tanım:** Kabul edelim ki  $S^+ = \{f \in S : f(x) \geq 0\}$  ve  $V^+ = \{g \in V : g(x) \geq 0\}$  olsun. Eğer  $S$  uzayında tanımlanmış  $T$  lineer operatörü  $S^+$  kümesindeki herhangi bir  $f$  fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise o takdirde  $T$  operatörüne “*pozitif lineer operatör*” denir.

Örneğin;  $f \in C[0,1]$  olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan Bernstein polinomlar dizisi  $\binom{n}{k} x^k \geq 0$  ve  $(1-x)^{n-k} \geq 0$  olduğu için bir pozitif lineer operatördür (Bernstein, 1912).

Ayrıca  $T$  pozitif lineer operatör olsun.  $f(x) \leq g(x)$  iken  $T(f; x) \leq T(g; x)$  olduğundan  $T$  pozitif lineer operatörü monoton artandır.

### 2.2.1. Klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremi

H. Bohman 1951 yılında toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin  $[0,1]$  aralığında sürekli bir  $g$  fonksiyonuna yakınsaması problemini incelemiştir. H. Bohman  $x \in [0,1]$ ,  $0 \leq \gamma_{k,n} \leq 1$  olmak üzere

$$D_n(g; x) = \sum_{k=0}^n g(\gamma_{k,n}) p_{k,n}(x), \quad p_{k,n}(x) \geq 0$$

şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin  $n \rightarrow \infty$  için  $[0,1]$  aralığında bir  $g$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşulların

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(1) - 1 \|_{C[0,1]} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(u) - x \|_{C[0,1]} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(u^2) - x^2 \|_{C[0,1]} &= 0,\end{aligned}$$

olduğunu göstermiştir. Burada araştırılan operatörlerin değeri  $g$  fonksiyonunun  $[0,1]$  aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır. 1953 yılında P.P. Korovkin, Bohman'ın elde ettiği bu koşulların genel halde de gerçekleştiğini göstermiş ve böylece aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

**2.2.1.1. Teorem:**  $D_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatörlerin dizisi eğer

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(1) - 1 \|_{C[a,b]} = 0,$
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(u) - x \|_{C[a,b]} = 0,$
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(u^2) - x^2 \|_{C[a,b]} = 0,$

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir  $g \in C[a, b]$  fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| D_n(g) - g \|_{C[a,b]} = 0,$$

olur (Korovkin, 1960).

**2.2.1.2. Örnek:** (2.2.1)'de tanımlanan Bernstein polinomlar dizisi için

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(u; x) = x, \quad B_n(u^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olduğu basit hesaplamalarla elde edilir (Lorentz, 1986). Böylece;

- i)  $\| B_n(1) - 1 \|_{C[0,1]} = 0$  olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| B_n(1) - 1 \|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir.
- ii)  $\| B_n(u) - x \|_{C[0,1]} = 0$  olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| B_n(u) - x \|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir.
- iii)  $\| B_n(u^2) - x^2 \|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| \leq \frac{1}{4n}$  olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| B_n(u^2; x) - x^2 \|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir. Böylece 2.2.1.1. Teorem'in (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanır. O halde herhangi bir  $g \in C[0,1]$  fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| B_n(g) - g \|_{C[0,1]} = 0$$

olur.

Ayrıca,  $x \in [0, r]$  ve  $g \in C[0, r]$  olmak üzere

$$S_n(g; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanan pozitif lineer operatöre Szasz operatörleri denir (Szász, 1950).

Szasz operatörü için

$$S_n(1; x) = 1, \quad S_n(u; x) = x, \quad S_n(u^2; x) = x^2 + \frac{x}{n}$$

olduğu görülebilir. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(1) - 1\|_{C[0,r]} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u) - x\|_{C[0,r]} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u^2) - x^2\|_{C[0,r]} = 0,$$

olduğu elde edilir. Bu ise Szasz operatörlerinin de 2.2.1.1. Teorem ile verilen klasik Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını gösterir. Böylece her  $g \in C[0, r]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(g) - g\|_{C[0,r]} = 0$$

elde edilir.

## 2.2.2. İstatistiksel Korovkin tipi teorem

İlk kez 2002 yılında Gadjiev ve Orhan istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi vermişlerdir. Böylece farklı yakınsaklık türleri yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi matematikçiler tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Bu önemli sonuç aşağıdaki gibidir.

**2.2.2.1. Teorem:**  $D_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatörlerin dizisi eğer

i)  $st - \lim \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} = 0,$

ii)  $st - \lim \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} = 0,$

iii)  $st - \lim \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} = 0,$

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir  $g \in C[a, b]$  fonksiyonu için

$$st - \lim \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = 0$$

olur (Gadjiev ve Orhan, 2002).

**İspat:**  $g \in C[a, b]$  ise  $g$  sürekli bir fonksiyon olduğundan  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır öyle ki  $|u - x| < \delta$  olduğunda  $\forall x, u \in [a, b]$  için

$$|g(u) - g(x)| < \varepsilon \tag{2.2.2.1}$$

olur. Ayrıca,  $|u - x| \geq \delta$  olduğunda

$$\frac{|u-x|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(u-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (2.2.2.2)$$

olacaktır.  $g \in C[a, b]$  olduğundan  $g$  aynı zamanda sınırlı olup böylece  $\forall x \in [a, b]$  için  $|g(x)| \leq M$  olacak şekilde  $\exists M > 0$  vardır. Buradan

$$|g(u) - g(x)| \leq |g(u)| + |g(x)| \leq 2M$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte (2.2.2.2) ifadesini kullanarak

$$|g(u) - g(x)| \leq 2M \frac{(u-x)^2}{\delta^2}$$

olduğu elde edilir. Böylece  $\forall x, u \in [a, b]$  için

$$|g(u) - g(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(u-x)^2}{\delta^2} \quad (2.2.2.3)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Gerçekten  $|u-x| < \delta$  ise (2.2.2.3) eşitsizliği (2.2.2.1) eşitsizliğinden elde edilir,  $|u-x| \geq \delta$  ise (2.2.2.3) eşitsizliği yine sağlandığı görülür. Bu durumda  $D_n$  pozitif ve lineer bir operatör olduğundan (2.2.2.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |D_n(g; x) - g(x)| &\leq D_n(|g(u) - g(x)|; x) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\ &\leq D_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(u-x)^2; x\right) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\ &= \varepsilon D_n(1, x) + \frac{2M}{\delta^2} D_n((u-x)^2; x) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\ &= \varepsilon + \varepsilon(D_n(1, x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} D_n(u^2 - 2xu + x^2; x) \\ &\quad + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon |D_n(1, x) - 1| + \frac{2M}{\delta^2} [(D_n(u^2; x) - x^2) - 2x(D_n(u, x) - x) \\ &\quad + x^2(D_n(1; x) - 1)] + M |D_n(1, x) - 1| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon |D_n(1, x) - 1| + \frac{2M}{\delta^2} [|D_n(u^2; x) - x^2| + 2x|D_n(u, x) - x| \\ &\quad + x^2|D_n(1; x) - 1|] + M |D_n(1, x) - 1| \\ &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \|x^2\|_{C[a,b]} + M\right) |D_n(1, x) - 1| \\ &\quad + \frac{4M\|x\|_{C[a,b]}}{\delta^2} |D_n(u, x) - x| + \frac{2M}{\delta^2} |D_n(u^2; x) - x^2| \end{aligned}$$

elde edilir.  $K = \max\left\{\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} (\|x^2\|_{C[a,b]} + 2\|x\|_{C[a,b]} + 1)\right\}$  dersek bu durumda

$$|D_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + K\{|D_n(u^2; x) - x^2| + |D_n(u, x) - x| + |D_n(1, x) - 1|\}$$

bulunur. O halde her iki tarafın  $[a, b]$  üzerinden supremumu alınırsa

$$\begin{aligned} \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} &\leq \varepsilon + K\{\|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} + \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \\ &\quad + \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]}\} \end{aligned}$$

bulunur. Verilmiş bir  $\varepsilon' > 0$  için  $\varepsilon > 0$  seçelim öyle ki  $\varepsilon' > \varepsilon$  olsun. Bu durumda son eşitsizlikten

$$E = \{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}$$

$$E_1 = \left\{n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}$$

$$E_2 = \left\{n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}$$

$$E_3 = \left\{n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Buradan  $E \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3$  olduğunu kolayca görebiliriz.

Böylece

$$\begin{aligned} |\{n \leq N: \|D_n(g) - g(x)\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}| &\leq \left| \left\{n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\} \right| \\ &\quad + \left| \left\{n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\} \right| \\ &\quad + \left| \left\{n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte her iki tarafı  $\frac{1}{N}$  ile çarpıp  $N \rightarrow \infty$  için limit alınırsa (i), (ii), (iii) den dolayı

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}| = 0$$

olup dolayısı ile  $st - \lim \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = 0$  elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsak olduğundan Bernstein polinomlar dizisinin 2.2.2.1. Teorem’de verilen istatistiksel Korovkin tipi teoremi sağladığı kolayca görülebilir. Şimdi 2.2.1.1. Teorem’de verilen klasik Korovkin teoremini sağlamayan ancak 2.2.2.1. Teorem’de verilen istatistiksel Korovkin tipi teoremi sağlayan bir örnek verelim.

**2.2.2.2. Örnek:**  $\{B_n\}$ , (2.2.1)’de verilen Bernstein polinomları ve  $a = (a_n)$

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = k^2, \\ 0, & n \neq k^2, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şekilde tanımlı bir dizi olsun. Buradaki  $a_n$  dizisinin ıraksak bir dizi ve aynı zamanda  $st - \lim a_n = 0$  olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda

$$P_n(g; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(g; x) \quad (2.2.2.4)$$

şeklinde tanımlı  $C[0,1]$  uzayında tanımlı  $P_n$  pozitif lineer operatörler dizisini göz önüne alalım. 2.2.1.2. Örnek’ten

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(u; x) = x, \quad B_n(u^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olduğunu biliyoruz.

1)  $P_n(1; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(1; x) = 1 + a_n$  olup böylece;

$$\|P_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |a_n| = a_n$$

elde edilir. Buradan her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: \|P_n(1) - 1\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\}|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |a_k| \geq \varepsilon\}|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olup dolayısı ile  $st - \lim \|P_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir.

2)  $P_n(u; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(u; x) = (1 + a_n)x$  olup böylece;

$$\|P_n(u) - x\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |a_n x| = a_n$$

elde edilir. Buradan

$$st - \lim \|P_n(u) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir.

3)  $P_n(u^2; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(u^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} + \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) a_n$  olup böylece;

$$\|P_n(u^2) - x^2\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} + \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) a_n \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| + \sup_{x \in [0,1]} |x^2 a_n| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} a_n \right| \\ &\leq \frac{1}{4n} + a_n + \frac{1}{4n} a_n \end{aligned}$$

olup böylece  $st - \lim \|P_n(u^2) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir. Böylece (2.2.2.4) ile tanımlı  $P_n$  pozitif lineer operatörler dizisi 2.2.2.1. Teorem'in (i), (ii), (iii) koşullarını sağlar. O halde her  $g \in C[0,1]$  fonksiyonu için

$$st - \lim \|P_n(g) - g\|_{C[0,1]} = 0$$

olup istatistiksel yakınsaklık yardımı ile tanımlı Korovkin tipi teorem sağlanır ancak  $\|P_n(u) - x\|_{C[0,1]} = a_n$  olup  $(a_n)$  ıraksak bir dizi olduğundan klasik Korovkin teoremini sağlamaz. Bu da istatistiksel Korovkin tipi teoremin daha güçlü olduğu sonucunu doğurur.

Gadjiev ve Orhan tarafından bir dizinin  $0 < \beta < 1$  oranı ile bir  $\ell$  sayısına istatistiksel yakınsaklık oranı aşağıdaki şekilde tanımlanmış ve bu tanım kullanarak 2.2.2.1 Teorem'in istatistiksel yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

**2.2.2.3. Tanım:**  $a = (a_k)$  sayı dizisi,  $0 < \beta < 1$  ve  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |a_k - \ell| \geq \varepsilon\}|}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise  $\beta$  oranı ile  $\ell$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum

$$a_k - \ell = st - o(k^{-\beta}), \quad k \rightarrow \infty$$

ile gösterilir (Gadjiev ve Orhan, 2002).

**2.2.2.4. Teorem:**  $D_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatör dizisi  $n \rightarrow \infty$  iken

- i)  $\|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} = st - o(n^{-\beta_1})$ ,
- ii)  $\|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} = st - o(n^{-\beta_2})$ ,
- iii)  $\|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} = st - o(n^{-\beta_3})$

koşullarını sağlasın. Bu durumda herhangi  $g \in C[a, b]$  fonksiyonu için  $n \rightarrow \infty$  iken

$\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  olmak üzere

$$\|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = st - o(n^{-\beta})$$

olur (Gadjiev ve Orhan, 2002).

**İspat:** (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlansın ve  $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  olsun. 2.2.2.1 Teorem'in ispatında olduğu gibi bir  $\varepsilon' > 0$  için  $\varepsilon > 0$  seçelim öyle ki  $\varepsilon' > \varepsilon$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}| &\leq \left| \left\{ n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her tarafı  $\frac{1}{N^{1-\beta}}$  ile çarparsak

$$\begin{aligned} \frac{|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}|}{N^{1-\beta}} &\leq \frac{\left| \left\{ n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|}{N^{1-\beta}} \\ &+ \frac{\left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|}{N^{1-\beta}} \\ &+ \frac{\left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|}{N^{1-\beta}} \end{aligned}$$

olur.  $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  olduğundan eşitsizliğin sağ tarafındaki  $\frac{1}{N^{1-\beta}}$  ifadeleri yerine daha büyük olan  $\frac{1}{N^{1-\beta_1}}, \frac{1}{N^{1-\beta_2}}, \frac{1}{N^{1-\beta_3}}$  alınır ve  $N \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}|}{N^{1-\beta}} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|}{N^{1-\beta_1}} \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|}{N^{1-\beta_2}} \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|}{N^{1-\beta_3}} \end{aligned}$$

olup (i), (ii), (iii) kullanılarak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}|}{N^{1-\beta}} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = st - o(n^{-\beta})$$

olup ispat tamamlanır.

### 2.2.3. Bögel sürekliliği için Korovkin tipi teorem

Bögel sürekliliği ( $B$ -süreklilik) ilk kez 1934 yılında K. Bögel tarafından tanıtılmış ve daha sonra süreklilik kavramı yerine Bögel-süreklilik kavramı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoreminin Bögel sürekliliği fonksiyon uzayı içinde geçerli olduğu C. Badea, I. Badea ve H. H. Gonksa tarafından gösterilmiştir.

Sürekliliği fonksiyonlar uzayını kapsayan  $B$ -sürekliliği fonksiyonların uzayında Korovkin tipi teoremleri vermeden önce bazı temel kavramları hatırlatalım.

$X$  ve  $Y$ ,  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesinin kompakt iki alt kümesi olmak üzere  $K = X \times Y$  ve  $g: K \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $g$  fonksiyonunun karışık farkı  $\Delta_{x,y}[g(u, v)]$  ile gösterip

$$\Delta_{x,y}[g(u, v)] = g(u, v) - g(u, y) - g(x, v) + g(x, y)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$B$ -süreklilik kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

**2.2.3.1. Tanım:**  $g: K \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(x, y) \in K$  noktasında  $B$ -sürekliliği olması için gerek ve yeter şart her  $\varepsilon > 0$  için  $|u - x| < \delta$  ve  $|v - y| < \delta$  özelliklerini sağlayan herhangi  $(u, v) \in K$  için  $|\Delta_{x,y}[g(u, v)]| < \varepsilon$  olacak şekilde en az bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sayısının var olmasıdır. Yani

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y}[g(u, v)] = 0$$

olmasıdır (Bögel, 1934, 1935, 1962).

Tez boyunca

- $C_b(K)$  :  $K$  üzerinde tanımlı tüm  $B$ -sürekliliği fonksiyonların uzayını,
- $C(K)$  :  $K$  üzerinde tanımlı tüm sürekliliği fonksiyonların uzayını,
- $B(K)$  :  $K$  üzerinde tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların uzayını

göstereceğiz. Böylece, sürekliliği her fonksiyon  $B$ -sürekliliği olacağından  $C(K) \subset C_b(K)$  olduğu kolayca görülür. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani,  $B$ -sürekliliği her fonksiyonun sürekliliği olması gerekmez. Dahası  $\Delta_{x,y}[g(u, v)] = 0$  olan ve  $g(u, v) = d(u) + h(v)$  biçiminde yazılabilecek sınırsız  $B$ -sürekliliği fonksiyonlar da vardır.

Şimdi  $B$ -sürekli olan fakat sürekli olmayan bir örnek verelim.

**2.2.3.2. Örnek:**  $K = [0,1] \times [0,1]$  olmak üzere  $g: K \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$g(u, v) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ \frac{1}{u}, & u \neq 0, \end{cases} + \begin{cases} 0, & v = 0, \\ \frac{1}{v}, & v \neq 0, \end{cases}$$

ile tanımlansın.  $g$  sürekli bir fonksiyon olmayıp

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y}[g(u, v)] = 0$$

olduğundan  $B$ -sürekli değildir.

Bögel sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi teoremi vermeden önce ispatta kullanılacak olan ve C. Badea, I. Badea ve H. H. Gonksa tarafından verilen aşağıdaki Lemma'yı verelim.

**2.2.3.3. Lemma:** Bir  $g \in C_b(K)$  fonksiyonu verilsin. Bu durumda  $\forall \varepsilon > 0$  ve her  $(u, v), (x, y) \in K$  için

$$|\Delta_{x,y}[g(u, v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)(u - x)^2 + \beta(\varepsilon)(v - y)^2$$

olacak şekilde  $\lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon, g)$  ve  $\beta(\varepsilon) = \beta(\varepsilon, g)$  pozitif sayıları vardır (Badea vd, 1986)

**2.2.3.4. Tanım:**  $\Delta_{x,y}[g(u, v)] = g(u, v) - g(u, y) - g(x, v) + g(x, y)$  olmak üzere  $g: K \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve her  $(u, v), (x, y) \in K$  için  $|\Delta_{x,y}[g(u, v)]| \leq H$  olacak şekilde  $H > 0$  sayısı varsa  $g$  fonksiyonuna  $K$  üzerinde " $B$ -sınırlıdır" denir.

Ayrıca  $B_b(K)$ ,  $K$  üzerinde ki tüm  $B$ -sınırlı fonksiyonların uzayını gösterir. Şunu söyleyebiliriz ki  $K$ ,  $\mathbb{R}^2$  nin kompakt bir alt kümesi olduğundan  $C_b(K) \subset B_b(K)$  olduğunu görmek zor değildir.

Böylece  $B(K)$  uzayında ki alışılmış norm şu şekilde verilir: Her  $g \in B(K)$  için

$$\|g\|_{B(K)} = \sup_{(x,y) \in K} |g(x, y)|$$

ve ayrıca  $B_b(K)$  uzayındaki norm, her  $g \in B_b(K)$  için

$$\|g\|_{B_b(K)} = \sup_{(x,y),(u,v) \in K} |\Delta_{x,y}[g(u,v)]|$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tez boyunca sabit  $(x, y) \in K$  ve  $g \in C_b(K)$  için  $G_{x,y}(u, v)$  fonksiyonu

$$G_{x,y}(u, v) = g(u, y) + g(x, v) - g(u, v), \quad (u, v) \in K$$

şeklinde ve

$$e_0(u, v) = 1, \quad e_1(u, v) = u, \quad e_2(u, v) = v, \quad e_3(u, v) = u^2 + v^2$$

olarak göz önüne alınacaktır. Ayrıca her  $(x, y), (u, v) \in K$  için

$$\begin{aligned} \Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)] &= G_{x,y}(u, v) - G_{x,y}(u, y) - G_{x,y}(x, v) + G_{x,y}(x, y) \\ &= g(u, y) + g(x, v) - g(u, v) - [g(u, y) + g(x, y) - g(u, y)] \\ &\quad - [g(x, y) + g(x, v) - g(x, v)] + g(x, y) + g(x, y) - g(x, y) \\ &= g(u, y) - g(u, v) + g(x, v) - g(x, y) \\ &= -\Delta_{x,y}[g(u, v)] \end{aligned}$$

olup buradan hareketle  $g$  fonksiyonu  $B$ -sürekli ise  $\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y}[g(u, v)] = 0$  olduğu açıktır. Dolayısı ile  $g$  fonksiyonunun  $B$ -sürekliliği her sabit  $(x, y) \in K$  için  $G_{x,y}$  nin  $B$ -sürekliliğini gerektirir.

Tek indisli, çift değişkenli Bölge sürekli fonksiyonlar için klasik Korovkin Teoremi aşağıdaki gibi verilmiştir:

**2.2.3.5. Teorem:**  $L_n: C_b(K) \rightarrow B(K)$  pozitif lineer operatör için  $\{a_n(x, y)\}, \{b_n(x, y)\}, \{c_n(x, y)\}, (n \rightarrow \infty)$  iken  $K$  üzerinde sıfıra düzgün yakınsak fonksiyonlar olmak üzere her  $(x, y) \in K$  için

- i) Her  $(x, y) \in K$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $L_n(e_0; x, y) = 1$ ,
- ii)  $L_n(e_1; x, y) = e_1(x, y) + a_n(x, y)$ ,
- iii)  $L_n(e_2; x, y) = e_2(x, y) + b_n(x, y)$ ,
- iv)  $L_n(e_3; x, y) = e_3(x, y) + c_n(x, y)$ ,

koşulları sağlansın. O zaman  $\forall g \in C_b(K)$  için

$$\lim_n \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = 0$$

olur.

2.2.3.5. Teorem istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Demirci ve Dirik (2013) tarafından aşağıdaki şekilde ispatlanmıştır:

**2.2.3.6. Teorem:**  $L_n: C_b(K) \rightarrow B(K)$  pozitif lineer operatör için

i)  $\delta(\{n \in \mathbb{N}: L_n(e_0; x, y) = 1 \text{ her } (x, y) \in K \text{ için}\}) = 1$ ,

ii)  $st - \lim \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} = 0$ ,

iii)  $st - \lim \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} = 0$ ,

iv)  $st - \lim \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} = 0$

koşulları sağlanırsa herhangi  $g \in C_b(K)$  fonksiyonu için

$$st - \lim \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = 0$$

olur (Demirci ve Dirik, 2013).

**İspat:**  $g \in C_b(K)$  ve  $(x, y) \in K$  sabit olsun.  $E$  kümesi

$$E = \{n \in \mathbb{N}: L_n(e_0; x, y) = 1 \text{ her } (x, y) \in K \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (i) sağlandığından  $\delta(\mathbb{N} \setminus E) = 0$  olur.  $G_{x,y}$  fonksiyonunun  $B$ -sürekliliğini kullanırsak 2.2.3.3. Lemma'dan  $\forall \varepsilon > 0$ , her  $(u, v) \in K$  için

$$|\Delta_{x,y}[g(u, v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)(u - x)^2 + \beta(\varepsilon)(v - y)^2 \quad (2.2.3.1)$$

olacak şekilde  $\lambda(\varepsilon)$  ve  $\beta(\varepsilon)$  pozitif sayıları vardır. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y) &= L_n(-\Delta_{x,y}[g(u, v)]; x, y) \\ &= L_n(\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]; x, y) \end{aligned} \quad (2.2.3.2)$$

olur.  $\forall n \in E$  için  $L_n$  operatörünün monotonluğunu, lineerliğini ve (2.2.3.1), (2.2.3.2) kullanarak

$$\begin{aligned}
|L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &= |L_n(\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]; x, y)| \\
&\leq L_n(|\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]|; x, y) \\
&\leq L_n\left(\frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)(u - x)^2 + \beta(\varepsilon)(v - y)^2; x, y\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3}L_n(1; x, y) + \lambda(\varepsilon)L_n((u - x)^2; x, y) \\
&\quad + \beta(\varepsilon)L_n((v - y)^2; x, y) \\
&= \frac{\varepsilon}{3}L_n(e_0; x, y) + \lambda(\varepsilon)L_n(u^2 - 2ux + x^2; x, y) \\
&\quad + \beta(\varepsilon)L_n(v^2 - 2vy + y^2; x, y) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)\{L_n(u^2; x, y) - 2xL_n(u; x, y) + x^2L_n(1; x, y)\} \\
&\quad + \beta(\varepsilon)\{L_n(v^2; x, y) - 2yL_n(v; x, y) + y^2L_n(1; x, y)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha(\varepsilon) = \max\{\beta(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)\}$  ve  $d = \max\{|x|, |y|\}$  alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(\varepsilon)\{L_n(u^2; x, y) - 2xL_n(u; x, y) + x^2L_n(1; x, y) \\
&\quad + L_n(v^2; x, y) - 2yL_n(v; x, y) + y^2L_n(1; x, y)\} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(\varepsilon)\{(x^2 + y^2) \cdot L_n(e_0; x, y) - 2xL_n(e_1; x, y) \\
&\quad - 2yL_n(e_2; x, y) + L_n(e_3; x, y)\} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(\varepsilon)\{x^2 + y^2 - 2x(L_n(e_1; x, y) - x) \\
&\quad - 2y(L_n(e_2; x, y) - y) + (L_n(e_3; x, y) - (x^2 + y^2)) \\
&\quad + x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2\} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(\varepsilon)\{-2x(L_n(e_1; x, y) - e_1(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\gamma(L_n(e_2; x, y) - e_2(x, y)) + (L_n(e_3; x, y) - e_3(x, y))\} \\
& \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2d\alpha(\varepsilon)|L_n(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\
& \quad + 2d\alpha(\varepsilon)|L_n(e_2; x, y) - e_2(x, y)| \\
& \quad + \alpha(\varepsilon)|L_n(e_3; x, y) - e_3(x, y)|
\end{aligned}$$

olur. Burada  $\gamma(\varepsilon) = \max \{2d\alpha(\varepsilon), \alpha(\varepsilon)\}$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \gamma(\varepsilon)\{|L_n(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\
& \quad + |L_n(e_2; x, y) - e_2(x, y)| + |L_n(e_3; x, y) - e_3(x, y)|\}
\end{aligned}$$

olup, bu son eşitsizlik yardımı ile

$$\begin{aligned}
\|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \gamma(\varepsilon)\{\|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \\
& \quad + \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} + \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan verilmiş bir  $\varepsilon' > 0$  için  $3\varepsilon' > \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  seçilirse

$$K = \{n \leq N: \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon'\},$$

$$K_1 = \left\{n \leq N: \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\},$$

$$K_2 = \left\{n \leq N: \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\},$$

$$K_3 = \left\{n \leq N: \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}$$

olarak tanımlanmak üzere  $K \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3$  olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
\left| \left\{ n \leq N : \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon' \right\} \right| &\leq \left| \left\{ n \leq N : \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)} \right\} \right| \\
&+ \left| \left\{ n \leq N : \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)} \right\} \right| \\
&+ \left| \left\{ n \leq N : \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)} \right\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte her iki tarafı  $N$  ye böler,  $N \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N : \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon' \right\} \right|}{N} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N : \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)} \right\} \right|}{N} \\
&+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N : \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)} \right\} \right|}{N} \\
&+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N : \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)} \right\} \right|}{N}
\end{aligned}$$

olup (ii), (iii) ve (iv) hipotezlerini kullanırsak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \left\{ n \leq N : \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon' \right\} \right|}{N} = 0$$

yani her  $g \in C_b(K)$  fonksiyonu için  $st - \lim \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = 0$  elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

### 3. MATERYAL METOD

Bu tez çalışmasında ilk olarak Fast ve Steinhaus tarafından verilen istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Daha sonra P.P. Korovkin tarafından 1960 yılında verilen klasik Korovkin teoremi verilmiş ve 2002 yılında Gadjiev ve Orhan tarafından istatistiksel yakınsaklık yardımı ile verilen istatistiksel Korovkin teoremi ispatlanmıştır. Klasik Korovkin teoremindeki süreklilik yerine  $B$  – süreklilik alınarak Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında Korovkin teoremi C. Badea, I. Badea ve H. H. Gonska tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca Demirci ve Dirik (2013) tarafından verilen tek indisli çift değişkenli Bögel sürekli fonksiyonlar için istatistiksel Korovkin teoremi verilmiştir. Son olarak Bulgular bölümünde  $f$  –modülüs fonksiyonu tanıtılmış ve sınırsız bir  $f$  –modülüs fonksiyonu yardımı ile A. Aizpuru, M.C. List'an-García ve F. Rambla-Barreno (2004) tarafından verilen  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Daha sonra  $f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi teoremler tanıtılmış ve örneklerle elde edilen sonuçların klasik durumlarından daha kuvvetli olduğu gösterilmiştir. Son olarak  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranı tanımlanmış ve  $f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile elde edilen Korovkin tipi teoremlerin oranları hesaplanmıştır.

## 4. BULGULAR

### 4.1. $f$ –Yoğunluk

Bu bölümde ilk olarak Nakano (1953) tarafından tanıtılan modülüs fonksiyonu tanımlanacak daha sonra Aizpuru vd. (2014) tarafından tanımlanan  $f$  –yoğunluk kavramı ve özellikleri verilecektir.

**4.1.1. Tanım (Modülüs Fonksiyonu):**  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonu

1)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  için  $f(x + y) \leq f(x) + f(y),$

3)  $f$  artan,

4)  $f$  fonksiyonu 0 noktasında sağdan sürekli,

özelliklerini sağlarsa  $f$  fonksiyonuna bir “*modülüs fonksiyonu*” denir ve kısaca “modülüs” olarak adlandırılır (Nakano, 1953).

Bu özelliklerden bir modülüs fonksiyonunun  $\mathbb{R}^+$  üzerinde sürekli olması gerektiği, ayrıca  $f$  ve  $h$  iki modülüs fonksiyonu ve  $\alpha_1, \alpha_2$  pozitif reel sayılar olmak üzere  $f \circ h, \frac{f}{(1+f)}, \alpha_1 f + \alpha_2 h$  ve  $f \vee h$  fonksiyonlarının birer modülüs fonksiyonu olduğu sonucunu elde ederiz.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Bunu aşağıdaki örneklerle gösterebiliriz.

**4.1.2. Örnek:**  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda;

1)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  olur.

2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  için

$$f(x + y) = \frac{x + y}{x + y + 1} = \frac{x}{x + y + 1} + \frac{y}{x + y + 1} \leq \frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1} = f(x) + f(y)$$

elde edilir.

$$3) f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ olduğundan } f \text{ artandır.}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0) \text{ olduğundan } f, 0 \text{ noktasında sağdan süreklidir.}$$

$f(x) = \frac{x}{x+1}$  fonksiyonu için bu dört özellik sağlandığından 4.1.1 Tanım'dan  $f$  bir modülüs fonksiyonudur. Aynı zamanda  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  için  $|f(x)| = \left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 1$  olduğundan sınırlıdır.

**4.1.3. Örnek:**  $0 < p \leq 1$  olmak üzere  $f(x) = x^p$  fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$1) f(x) = 0 \Leftrightarrow x^p = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ olur.}$$

2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  için  $(x+y)^p \leq (x)^p + (y)^p$  olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Özel olarak  $t \geq 0$  için  $h(t) = 1 + t^p - (1+t)^p$  fonksiyonunu alalım. Bu durumda  $0 < p \leq 1$  için

$$h'(t) = p \cdot t^{p-1} - p \cdot (1+t)^{p-1} \geq 0 \quad (t \geq 0 \text{ ve } 0 < p \leq 1 \text{ için})$$

olduğundan  $h$  fonksiyonu artandır. Buradan  $t \geq 0$  için  $h(t) \geq h(0)$  olup böylece

$$h(t) = 1 + t^p - (1+t)^p \geq 0 = h(0)$$

elde edilir. Buradan  $(1+t)^p \leq 1 + t^p$  olur.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  için  $t = \frac{y}{x}$  alınırsa

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leq 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p = \frac{x^p + y^p}{x^p}$$

olur. Bu durumda

$$\frac{(x+y)^p}{x^p} \leq \frac{x^p + y^p}{x^p} \Rightarrow (x+y)^p \leq x^p + y^p$$

olup  $0 < p \leq 1$  olmak üzere  $f(x) = x^p$  fonksiyonu için  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  özelliği sağlanır.

$$3) f(x) = x^p \text{ için}$$

$$\begin{aligned} x \geq y &\Rightarrow 1 \geq \log_x y \Rightarrow p \geq p \cdot \log_x y \Rightarrow p \cdot \log_x x \geq p \log_x y \\ &\Rightarrow \log_x x^p \geq \log_x y^p \Rightarrow x^p \geq y^p \Rightarrow f(x) \geq f(y) \end{aligned}$$

olduğundan  $f$  artandır.

4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p = 0 = f(0)$  olduğundan  $f$ , 0 da sağdan süreklidir.

Böylece 4.1.1 Tanım'dan  $0 < p \leq 1$  için  $f(x) = x^p$  bir modülüs fonksiyonudur. Aynı zamanda  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty$  olup dolayısı ile  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonudur.

**4.1.4. Örnek:**  $f(x) = \log(x + 1)$  fonksiyonunu göz önüne alalım:

1)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$  olur.

2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  için  $1 + x + y \leq (1 + x)(1 + y)$  eşitsizliğini ve logaritmanın özelliğini kullanırsak;

$$\log(1 + x + y) \leq \log(x + 1) + \log(1 + y)$$

olup böylece  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  sağlanır.

3)  $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) olduğundan  $f$  artandır.

4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x + 1) = 0 = f(0)$  olup böylece  $f$  fonksiyonu 0 da sağdan süreklidir.

Böylece  $f$  bir modülüs fonksiyonudur. Ayrıca  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x + 1) = +\infty$  olup  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonudur.

Aizpuru vd. tarafından sınırsız bir modülüs fonksiyonu yardımı ile  $f$  –yoğunluk kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

**4.1.5. Tanım:**  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun.  $D \subset \mathbb{N}$  kümesinin  $f$  –yoğunluğu limit mevcut olması koşulu ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{i \leq n: i \in D\})}{f(n)}$$

şeklinde tanımlanır ve  $d_f(D)$  ile gösterilir (Aizpuru vd., 2014).

Burada  $f(x) = x$  alındığında  $f$  –yoğunluk kavramı doğal yoğunluk kavramı ile çakışır. Ayrıca  $(k_n)$  pozitif tam sayıların artan bir dizisi ve  $K = \{k_n: n \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere eğer  $d_f(K)$  mevcut ise bu durumda

$$d_f(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(k_n)}$$

ile verilir (Aizpuru vd., 2014).

$f$  –yoğunluğun bazı özellikleri şunlardır:

♦  $D \subseteq \mathbb{N}$  sonlu ise bu durumda  $\delta(D) = 0$  olduğunu biliyoruz. Eğer  $D \subseteq \mathbb{N}$  sonlu ise bir  $n_0, p \in \mathbb{N}$  vardır öyleki  $n \geq n_0$  için  $|D_n| = p$  olup her sınırsız  $f$  modülüs fonksiyonu için  $d_f(D) = 0$  olur. Gerçekten

$$d_f(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(p)}{f(n)} = 0$$

elde edilir.

♦ Eğer doğal yoğunluk mevcut ise  $\delta(\mathbb{N} \setminus D) = 1 - \delta(D)$  özelliğinin sağlandığını biliyoruz. Ancak sınırsız modülüs fonksiyonu için durum biraz farklıdır. Yani, genel olarak  $d_f(D) + d_f(\mathbb{N} \setminus D) = 1$  doğru değildir. Bunu göstermek için öncelikle kabul edelim ki  $D \subset \mathbb{N}$  ve  $d_f(D) = 0$  olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$f(n) \leq f(|D_n|) + f(|\mathbb{N} \setminus D_n|)$$

olduğundan

$$1 = \frac{f(n)}{f(n)} \leq \frac{f(|D_n|)}{f(n)} + \frac{f(|\mathbb{N} \setminus D_n|)}{f(n)} \leq \frac{f(|D_n|)}{f(n)} + \frac{f(n)}{f(n)}$$

olup  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\mathbb{N} \setminus D_n|)}{f(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} + 1$$

$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\mathbb{N} \setminus D_n|)}{f(n)} \leq 1$  ve dolayısı ile  $d_f(\mathbb{N} \setminus D) = 1$  elde edilir. Sonuç olarak

buradan  $D \subset \mathbb{N}$  ve  $d_f(D) = 0$  ise  $d_f(\mathbb{N} \setminus D) = 1$  olduğu görülür. Diğer yandan karşıtı doğru değildir. Buna aşağıdaki örneği verebiliriz.

**4.1.6. Örnek:**  $f(x) = \log(x + 1)$  modülüs fonksiyonu olduğunu göstermiştik. Eğer  $D = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  ve  $E = \mathbb{N} \setminus D = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$  ise bu durumda

$$d_f(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n : k = 2m, m \in \mathbb{N}\}|)}{f(n)} = 1$$

elde edilir. Gerçekten;

$$|D_n| = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise,} \\ n, & n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

olup  $f(x) = \log(x+1)$  olduğundan buradan

$$\frac{f(|D_n|)}{f(n)} = \begin{cases} \frac{\log\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)}{\log(n+1)}, & n \text{ tek ise,} \\ \frac{\log\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\log(n+1)}, & n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} = 1$$

olduğundan  $d_f(D) = 1$  olur.

Şimdi  $E$  kümesinin  $f$ -yoğunluğunu inceleyelim:

$$d_f(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(b_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(2n-1+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(2n)} = 1$$

elde edilir. Dolayısı ile  $d_f(\mathbb{N} \setminus D) = 1$  olup aynı zamanda  $d_f(D) = 1$  dir.

♦  $f$  sınırsız bir modülüs ve  $D \subseteq \mathbb{N}$  olsun.  $d_f(D) = 0$  ise  $\delta(D) = 0$  olur. Gerçekten,  $d_f(D) = 0$  olduğundan

$$d_f(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} = 0$$

olur. Bu durumda her  $p \in \mathbb{N}$  ve  $n \geq n_0$  için

$$\begin{aligned} \frac{f(|D_n|)}{f(n)} \leq \frac{1}{p} &\Rightarrow f(|D_n|) \leq \frac{1}{p} f(n) = \frac{1}{p} f\left(\frac{1}{p}n + \frac{1}{p}n + \dots + \frac{1}{p}n\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \left[ f\left(\frac{1}{p}n\right) + f\left(\frac{1}{p}n\right) + \dots + f\left(\frac{1}{p}n\right) \right] \\ &= \frac{1}{p} \cdot p \left[ f\left(\frac{1}{p}n\right) \right] = f\left(\frac{1}{p}n\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu ise  $f$  artan olduğundan  $|D_n| \leq \frac{1}{p}$ .  $n$  olması anlamına gelir. Böylece  $d_f(D) = 0$  ise  $\delta(D) = 0$  elde edilir. Ancak bunun tersinin doğru olması gerekmez.

Örneğin;  $f(x) = \log(x + 1)$  ve  $C = \{n^2: n \in \mathbb{N}\}$  kümesini göz önüne alırsak  $\delta(C) = 0$  iken  $d_f(C) = \frac{1}{2}$  olur.

## 4.2. $f$ –İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde Aizpuru vd. tarafından tanıtılan istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olan  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve temel özellikleri verilecektir.

**4.2.1. Tanım:**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay,  $x = (x_n)$   $X$  de bir dizi ve  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$d_f(\{i \in \mathbb{N}: \|x_i - \ell\| \geq \varepsilon\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{i \leq n: \|x_i - \ell\| \geq \varepsilon\})}{f(n)} = 0$$

ise  $x = (x_n)$  dizisi  $\ell$  sayısına  $f$  –istatistiksel yakınsaktır denir ve  $f_{st} - \lim x_n = \ell$  ile gösterilir (Aizpuru vd., 2014).

4.2.1. Tanım'dan aşağıdaki özellik elde edilir:

Eğer  $\lim x_n = x$  ve  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu ise  $f_{st} - \lim x_n = x$  dir. Gerçekten

$$\lim x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } \|x_n - x\| < \varepsilon$$

olur.  $|D_n| = |\{k \leq n: \|x_k - x\| \geq \varepsilon\}| \leq n_0$  olacağından

$$f(\{i \leq n: \|x_i - x\| \geq \varepsilon\}) \leq f(n_0)$$

olup böylece

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{i \leq n: \|x_i - x\| \geq \varepsilon\})}{f(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n_0)}{f(n)} = 0$$

elde edilir. Burada sıkıştırma teoremi gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{i \leq n: \|x_i - x\| \geq \varepsilon\})}{f(n)} = 0$$

yani  $f_{st} - \lim x_n = x$  elde edilir.

Sonuç olarak  $f$  sınırsız bir modülüs ise yakınsak her dizi  $f$  –istatistiksel yakınsaktır.

**4.2.2. Teorem :**  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun.  $X$  normlu uzayında  $x = (x_n)$  ve  $y = (y_n)$  dizileri için  $f_{st} - \lim x_n = \ell_1$  ve  $f_{st} - \lim y_n = \ell_2$  olmak üzere

1)  $f_{st} - \lim (x_n + y_n) = \ell_1 + \ell_2,$

2)  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $f_{st} - \lim ax_n = a \cdot \ell_1$

sağlanır (Aizpuru vd., 2014).

**4.2.3. Sonuç:**  $f, g$  sınırsız modülüs fonksiyonları  $X$  normlu bir uzay  $x = (x_n)$   $X$  de bir dizi ve  $\alpha, \beta \in X$  olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- a) Limit aynı kalmak üzere  $f_{st}$  –yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.
- b) Mevcut olduğu sürece  $f$  –istatistiksel limit tektir.
- c)  $f_{st} - \lim x_n = \alpha$  ve  $g_{st} - \lim x_n = \beta$  ise  $\alpha = \beta$  dir. Yani, iki farklı istatistiksel yakınsama metodu uyumludur (Aizpuru vd., 2014).

**4.2.4. Teorem:**  $X$  bir normlu uzay,  $x = (x_n)$   $X$  de bir dizi ve  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda  $f_{st} - \lim x_n = \ell$  olması için gerek ve yeter şart  $d_f(A) = 0$  ve  $\lim_{n \in \mathbb{N} \setminus A} x_n = \ell$  olacak şekilde  $A \subseteq \mathbb{N}$  kümesinin var olmasıdır (Aizpuru vd., 2014).

**İspat:** İlk olarak  $\forall j \in \mathbb{N}$  için  $B_j = \{i \in \mathbb{N}: \|x_i - \ell\| \geq \frac{1}{j}\}$  olsun. Bu durumda

$$B_{j+1} = \left\{i \in \mathbb{N}: \|x_i - \ell\| \geq \frac{1}{j+1}\right\}$$

ve  $B_j \subset B_{j+1}$  ,  $d_f(B_j) = 0$  olduğu açıktır.  $f_{st} - \lim x_n = \ell$  olduğundan sadece  $B_j$ 'lerin bazılarının boş olmadığı durumu ispatlamamız yeterli olacaktır. Kabul edelim ki  $B_1 \neq \emptyset$  olsun.  $r_1 \in B_1$  seçelim. Şimdi  $r_2 > r_1$  olacak şekilde  $r_2 \in B_2$  alalım ve eğer  $i \geq r_2$  ise  $\frac{f(|B_2(i)|)}{f(i)} \leq \frac{1}{2}$  olur. Tümevarım yolu ile  $r_j \in B_j$  alalım, eğer  $i \geq r_j$  ise  $\frac{f(|B_j(i)|)}{f(i)} \leq \frac{1}{j}$  olacak

şekilde bir  $r_1 < r_2 < r_3 \dots$  elde edilir. Şimdi  $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([r_j, r_{j+1}) \cap B_j)$  kümesini düşünelim.  $\forall i \geq r_1$  için  $r_j \leq i \leq r_{j+1}$  olacak şekilde  $j \in \mathbb{N}$  vardır ve eğer  $n \in A(i)$  ise  $n \leq r_{j+1}$  dir ki bu  $n \in B_j(i)$  olmasını sağlar. Böylece  $A(i) \subset B_j(i)$  olur ve buradan

$$\frac{f(|A(i)|)}{f(i)} \leq \frac{f(|B_j(i)|)}{f(i)} \leq \frac{1}{j} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|A(i)|)}{f(i)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|B_j(i)|)}{f(i)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{j}$$

olup  $d_f(A) = 0$  elde edilir.  $\varepsilon > 0$  sabit olsun  $\frac{1}{j} < \varepsilon$  olacak şekilde  $j \in \mathbb{N}$  alalım. Eğer  $i \in \mathbb{N} \setminus A$  ve  $i \geq r_j$  ise bu durumda  $r_k \leq i \leq r_{k+1}$  olacak şekilde  $k \geq j$  vardır ve bu  $i \notin B_k$  olduğu anlamına gelir. Böylece  $\|x_i - \ell\| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{j} < \varepsilon$  olur. Buradan  $\lim_{i \in \mathbb{N} \setminus A} x_i = \ell$  sonucunu elde ederiz.

Tersine;  $d_f(A) = 0$  ve  $\lim_{i \in \mathbb{N} \setminus A} x_i = \ell$  olacak şekilde  $A \subseteq \mathbb{N}$  kümesinin var olduğunu kabul edelim. Verilmiş bir  $\varepsilon > 0$  için eğer  $i > i_0$  ve  $i \in \mathbb{N} \setminus A$  ise  $\|x_i - \ell\| < \varepsilon$  olacak şekilde  $i_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu ise

$$\{i \in \mathbb{N}: \|x_i - \ell\| \geq \varepsilon\} \subseteq A \cup \{1, 2, \dots, i_0\}$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$d_f(\{i \in \mathbb{N}: \|x_i - \ell\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olup, bu ise ispatı tamamlar.

### 4.3. $f$ –İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı ile Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetli olan  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak ilk olarak sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi teoremler verilecektir. Daha sonra Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde  $f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

**4.3.1. Teorem:**  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve  $D_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatörler dizisi eğer

i)  $f_{st} - \lim \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} = 0,$

ii)  $f_{st} - \lim \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} = 0,$

iii)  $f_{st} - \lim \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} = 0$ ,

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir  $g \in C[a, b]$  fonksiyonu için

$$f_{st} - \lim \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = 0$$

olur (Bhardwaj ve Dhawan, 2018).

**İspat:**  $g \in C[a, b]$  ise  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır öyle ki  $|u - x| < \delta$  olduğunda  $\forall x, u \in [a, b]$  için

$$|g(u) - g(x)| < \varepsilon \quad (4.3.1)$$

olur. Ayrıca,  $|u - x| \geq \delta$  olduğunda

$$\frac{|u - x|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(u - x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

elde edilir. Burada özel olarak  $\varphi(u) = (u - x)^2$  dersek

$$\frac{\varphi(u)}{\delta^2} \geq 1 \quad (4.3.2)$$

olacaktır.  $g \in C[a, b]$  olduğundan  $g$  aynı zamanda sınırlı olup böylece  $\forall x \in [a, b]$  için

$|g(x)| \leq M$  olacak şekilde  $\exists M > 0$  vardır. Buradan

$$|g(u) - g(x)| \leq |g(u)| + |g(x)| \leq 2M$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte (4.3.2) ifadesini kullanarak

$$|g(u) - g(x)| \leq 2M \cdot \frac{\varphi(u)}{\delta^2}$$

olduğu elde edilir. Böylece  $\forall x, u \in [a, b]$  için

$$|g(u) - g(x)| < \varepsilon + 2M \cdot \frac{\varphi(u)}{\delta^2} \quad (4.3.3)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Gerçekten  $|u - x| < \delta$  ise (4.3.3) eşitsizliği (4.3.1) eşitsizliğinden elde edilir,  $|u - x| \geq \delta$  ise (4.3.3) eşitsizliği yine sağlandığı görülür. Bu durumda  $D_n$  pozitif ve lineer bir operatör olduğundan (4.3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |D_n(g; x) - g(x)| &\leq D_n(|g(u) - g(x)|; x) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\ &\leq D_n\left(\varepsilon + 2M \cdot \frac{\varphi(u)}{\delta^2}; x\right) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon D_n(1, x) + \frac{2M}{\delta^2} D_n(\varphi; x) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\
&= \varepsilon + \varepsilon(D_n(1, x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} D_n(\varphi; x) + |g(x)| |D_n(1, x) - 1| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon |D_n(1, x) - 1| + \frac{2M}{\delta^2} [(D_n(u^2; x) - x^2) - 2x(D_n(u, x) - x) \\
&\quad + x^2(D_n(1; x) - 1)] + M |D_n(1, x) - 1| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon |D_n(1, x) - 1| + \frac{2M}{\delta^2} [|D_n(u^2; x) - x^2| + 2x |D_n(u, x) - x| \\
&\quad + x^2 |D_n(1; x) - 1|] + M |D_n(1, x) - 1| \\
&\leq \varepsilon + \left( \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \|x^2\|_{C[a,b]} + M \right) |D_n(1, x) - 1| \\
&\quad + \frac{4M \|x\|_{C[a,b]}}{\delta^2} |D_n(u, x) - x| + \frac{2M}{\delta^2} |D_n(u^2; x) - x^2|
\end{aligned}$$

elde edilir.  $K = \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} (\|x^2\|_{C[a,b]} + 2\|x\|_{C[a,b]} + 1) \right\}$  dersek bu durumda

$$|D_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + K \{ |D_n(u^2; x) - x^2| + |D_n(u, x) - x| + |D_n(1, x) - 1| \}$$

bulunur. O halde her iki tarafın  $[a, b]$  üzerinde supremumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} &\leq \varepsilon + K \{ \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} + \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \\
&\quad + \|D_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} \}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece son eşitsizlikten, verilmiş bir  $\varepsilon' > 0$  için  $\varepsilon > 0$  seçelim öyle ki  $\varepsilon' > \varepsilon$  olsun. Bu durumda

$$E = \{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\},$$

$$E_1 = \left\{ n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\},$$

$$E_3 = \left\{ n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Buradan  $E \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3$  olduğunu kolayca görebiliriz.

Böylece

$$\begin{aligned}
|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}| &\leq \left| \{n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \} \right| \\
&+ \left| \{n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \} \right| \\
&+ \left| \{n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \} \right| \quad (4.3.4.)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{f(\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\})}{f(N)} &\leq \frac{f(\{n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \})}{f(N)} \\
&+ \frac{f(\{n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \})}{f(N)} \\
&+ \frac{f(\{n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \})}{f(N)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte  $N \rightarrow \infty$  için limit alınır (i), (ii), (iii) den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\})}{f(N)} = 0$$

olup dolayısı ile  $\forall g \in C[a, b]$  için  $f_{st} - \lim \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = 0$  elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$f$  sınırsız bir modülüs olmak koşulu ile daha önce yakınsak her dizinin  $f$  –istatistiksel yakınsak olduğunu göstermiştik. Şimdi  $f$  –istatistiksel Korovkin teoreminin koşullarını sağlayan fakat klasik Korovkin teoreminin koşullarını sağlamayan bir örnek verelim.

**4.3.2. Örnek:**  $a = (a_n)$  dizisi

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = m^2, \\ 0, & n \neq m^2, \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $0 < p \leq 1$  için  $f(x) = x^p$  modülüs fonksiyonu göz önüne alındığında  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{|k \leq n: |a_k - 0| \geq \varepsilon\})}{f(n)} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\{|k \leq n: k = m^2, m \in \mathbb{N}\})}{f(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\sqrt{n})}{f(n)} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n})^p}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^p} = 0
\end{aligned}$$

olup böylece  $f_{st} - \lim a_n = 0$  olduğu görülür.

Şimdi (2.2.1) de verilen  $(B_n)$  Bernstein polinomlarını ve  $a = (a_n)$  dizisini göz önüne alarak

$$Q_n(g; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(g; x) \quad (4.3.5)$$

şeklinde  $C[0,1]$  uzayında  $Q_n$  pozitif lineer operatörler dizisini tanımlayalım. Bu durumda 2.2.1.2. Örnek'ten

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(u; x) = x, \quad B_n(u^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olduğundan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

1)  $Q_n(1; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(1; x) = 1 + a_n$  olup böylece;

$$\|Q_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |a_n| = a_n$$

olup buradan  $f_{st} - \lim \|Q_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir.

2)  $Q_n(u; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(u; x) = (1 + a_n)x$  olup böylece;

$$\|Q_n(u) - x\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |a_n x| = a_n$$

olup buradan  $f_{st} - \lim \|Q_n(u) - u\|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir.

3)  $Q_n(u^2; x) = (1 + a_n) \cdot B_n(u^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} + \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) a_n$  olup böylece;

$$\begin{aligned}
\|Q_n(u^2) - x^2\|_{C[0,1]} &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} + \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) a_n \right| \\
&\leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| + \sup_{x \in [0,1]} |x^2 a_n| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} a_n \right| \\
&\leq \frac{1}{4n} + a_n + \frac{1}{4n} a_n
\end{aligned}$$

elde edilir. 4.2.2. Teorem'den  $f_{st} - \lim \|Q_n(u^2) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$  elde edilir.

Böylece (4.3.5) ile tanımlı  $(Q_n)$  pozitif lineer operatörler dizisinin 4.3.1. Teorem'in (i), (ii), (iii) koşullarını sağlandığı görülür. Buradan her  $g \in C[0,1]$  fonksiyonu için

$$f_{st} - \lim \|Q_n(g) - g\|_{C[0,1]} = 0$$

olup  $f$  –istatistiksel Korovkin teoremi sağlanır. Ancak

$$\|Q_n(u) - x\|_{C[0,1]} = a_n$$

olup  $(a_n)$  ıraksak bir dizi olduğundan klasik Korovkin teoremini sağlamaz. Bu da  $f$  –istatistiksel Korovkin teoreminin klasik Korovkin tipi teoremden daha güçlü olduğu sonucunu doğurur.

**4.3.3. Teorem:**  $X = [a, b]$ ,  $Y = [c, d]$  ve  $K = X \times Y$  olsun.  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve  $D_n: C(K) \rightarrow C(K)$  pozitif lineer operatör dizisi olmak üzere eğer

- i)  $f_{st} - \lim \|D_n(1; x, y) - 1\|_{C(K)} = 0$ ,
- ii)  $f_{st} - \lim \|D_n(t; x, y) - x\|_{C(K)} = 0$ ,
- iii)  $f_{st} - \lim \|D_n(\tau; x, y) - y\|_{C(K)} = 0$ ,
- iv)  $f_{st} - \lim \|D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(K)} = 0$

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir  $g \in C(K)$  fonksiyonu için

$$f_{st} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)\|_{C(K)} = 0$$

olur.

**İspat:**  $g \in C(K)$  ise  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır öyle ki  $\|(x, y) - (t, \tau)\| < \delta$  olduğunda

$$|g(t, \tau) - g(x, y)| < \varepsilon$$

olur. Ayrıca,  $\|(x, y) - (t, \tau)\| \geq \delta$  olduğunda

$$\frac{\sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (4.3.6)$$

elde edilir.  $g$  fonksiyonu aynı zamanda sınırlı olduğundan  $M_g > 0$  mevcuttur öyle ki

$$|g(t, \tau) - g(x, y)| \leq |g(t, \tau)| + |g(x, y)| \leq 2M_g$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte (4.3.6) ifadesini kullanarak

$$|g(t, \tau) - g(x, y)| \leq 2M_g \cdot \frac{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}{\delta^2}$$

olduğu elde edilir. Böylece her  $(x, y), (t, \tau) \in K$  için

$$|g(t, \tau) - g(x, y)| \leq \varepsilon + 2M_g \cdot \frac{[x^2 + y^2 - 2(xt + y\tau) + t^2 + \tau^2]}{\delta^2} \quad (4.3.7)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu durumda  $D_n$  pozitif ve lineer bir operatör olduğundan (4.3.7) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & |D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)| \\ & \leq D_n(|g(t, \tau) - g(x, y)|; x, y) + |g(x, y)| |D_n(1, x, y) - 1| \\ & \leq D_n \left( \varepsilon + 2M_g \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2(xt + y\tau) + t^2 + \tau^2}{\delta^2}; x, y \right) + |g(x, y)| |D_n(1, x, y) - 1| \\ & = \varepsilon D_n(1, x, y) + \frac{2M_g}{\delta^2} [(x^2 + y^2)(D_n(1; x, y) - 1) - 2x(D_n(t; x, y) - x) \\ & \quad - 2y(D_n(\tau; x, y) - y) + (D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2))] + |g(x, y)| |D_n(1, x, y) - 1| \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon |D_n(1, x, y) - 1| + \frac{2M_g}{\delta^2} [(x^2 + y^2) |D_n(1; x, y) - 1| + 2|x| |D_n(t; x, y) - x| \\ & \quad + 2|y| |D_n(\tau; x, y) - y| + |D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2)|] + M_g |L_n(1, x, y) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. O halde buradan

$$K = \max \left\{ \varepsilon + M_g + \frac{2M_g}{\delta^2} (\|x^2 + y^2\|_{C(K)} + 2\|x\|_{C(K)} + \|y\|_{C(K)} + 1) \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \|D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)\|_{C(K)} \\ & \leq \varepsilon + K [\|D_n(1; x, y) - 1\|_{C(K)} + \|D_n(t; x, y) - x\|_{C(K)} + \|D_n(\tau; x, y) - y\|_{C(K)} \\ & \quad + \|D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(K)}] \end{aligned}$$

bulunur. Verilmiş bir  $\varepsilon' > 0$  için  $\varepsilon > 0$  seçelim öyle ki  $\varepsilon' > \varepsilon$  olsun. Bu durumda

$$E = \{n \leq N: \|D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)\|_{C(K)} \geq \varepsilon'\}$$

$$E_1 = \left\{ n \leq N: \|D_n(1; x, y) - 1\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ n \leq N: \|D_n(t; x, y) - x\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right\}$$

$$E_3 = \left\{ n \leq N: \|D_n(\tau; x, y) - y\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right\}$$

$$E_4 = \left\{ n \leq N: \|D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Buradan  $E \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$  olduğunu kolayca görebiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} & |n \leq N: \|D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)\|_{C(K)} \geq \varepsilon'| \\ & \leq \left| n \leq N: \|D_n(1; x, y) - 1\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right| + \left| n \leq N: \|D_n(t; x, y) - x\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right| \\ & + \left| n \leq N: \|D_n(\tau; x, y) - y\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right| \\ & + \left| n \leq N: \|D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K} \right| \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

elde edilir. (4.3.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{f(|n \leq N: \|D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)\|_{C(K)} \geq \varepsilon'|)}{f(N)} \\ & \leq \frac{f(|n \leq N: \|D_n(1; x, y) - 1\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K}|)}{f(N)} \\ & + \frac{f(|n \leq N: \|D_n(t; x, y) - x\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K}|)}{f(N)} \\ & + \frac{f(|n \leq N: \|D_n(\tau; x, y) - y\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K}|)}{f(N)} \\ & + \frac{f(|n \leq N: \|D_n(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(K)} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{4K}|)}{f(N)} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte  $N \rightarrow \infty$  için limit alınırsa (i), (ii), (iii) ve (iv) den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{n \leq N: \|D_n(g(t, \tau); x, y) - g(x, y)\|_{C(K)} \geq \varepsilon'\}|)}{f(N)} = 0$$

bulunur.

Şimdi Akdağ (2021) tarafından verilen  $f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Bölge sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi yaklaşım teoremini verelim.

Bu kısımda kullanılan tüm notasyonlar 2.2.3. Bölüm’de olduğu gibi göz önüne alınmıştır.

**4.3.4. Teorem:**  $L_n: C_b(K) \rightarrow B(K)$  pozitif lineer operatörler dizisi ve  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olmak üzere

i) Her  $(x, y) \in K$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $L_n(e_0; x, y) = 1$ ,

ii)  $f_{st} - \lim \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} = 0$ ,

iii)  $f_{st} - \lim \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} = 0$ ,

iv)  $f_{st} - \lim \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} = 0$ ,

koşulları sağlanırsa herhangi  $g \in C_b(K)$  fonksiyonu için

$$f_{st} - \lim \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = 0$$

olur (Akdağ, 2021).

**İspat:**  $g \in C_b(K)$  ve  $(x, y) \in K$  sabit olsun.  $G_{x,y}$  fonksiyonunun sürekliliğini kullanırsak 2.2.3.3. Lemma’dan  $\forall \varepsilon > 0$  ve her  $(x, y) \in K$  için

$$|\Delta_{x,y}[g(u, v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)(u - x)^2 + \beta(\varepsilon)(v - y)^2 \quad (4.3.9)$$

olacak şekilde  $\lambda(\varepsilon)$  ve  $\beta(\varepsilon)$  pozitif sayıları vardır. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y) &= L_n(-\Delta_{x,y}[g(u, v)]; x, y) \\ &= L_n(\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]; x, y) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

olur.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $L_n$  operatörünün monotonluğunu, lineerliğini göz önüne alır ve (4.3.9) eşitsizliği, (4.3.10) eşitliği ve (i) hipotezini kullanırsak

$$\begin{aligned} |L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &= |L_n(\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]; x, y)| \\ &\leq L_n(|\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]|; x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L_n\left(\frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)(u-x)^2 + \beta(\varepsilon)(v-y)^2; x, y\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3}L_n(1; x, y) + \lambda(\varepsilon)L_n((u-x)^2; x, y) \\
&\quad + \beta(\varepsilon)L_n((v-y)^2; x, y) \\
&= \frac{\varepsilon}{3}L_n(e_0; x, y) + \lambda(\varepsilon)L_n(u^2 - 2ux + x^2; x, y) \\
&\quad + \beta(\varepsilon)L_n(v^2 - 2vy + y^2; x, y) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)\{L_n(u^2; x, y) - 2xL_n(u; x, y) + x^2L_n(1; x, y)\} \\
&\quad + \beta(\varepsilon)\{L_n(v^2; x, y) - 2yL_n(v; x, y) + y^2L_n(1; x, y)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha(\varepsilon) = \max\{\beta(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)\}$  ve  $d = \max\{|x|, |y|\}$  alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &= \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(\varepsilon)\{L_n(u^2; x, y) - 2xL_n(u; x, y) + x^2L_n(1; x, y) \\
&\quad + L_n(v^2; x, y) - 2yL_n(v; x, y) + y^2L_n(1; x, y)\} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(\varepsilon)\{(x^2 + y^2) \cdot L_n(e_0; x, y) - 2xL_n(e_1; x, y) \\
&\quad - 2yL_n(e_2; x, y) + L_n(e_3; x, y)\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2d\alpha(\varepsilon)|L_n(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\
&\quad + 2d\alpha(\varepsilon)|L_n(e_2; x, y) - e_2(x, y)| \\
&\quad + \alpha(\varepsilon)|L_n(e_3; x, y) - e_3(x, y)|
\end{aligned}$$

olur. Burada  $\gamma(\varepsilon) = \max\{2d\alpha(\varepsilon), \alpha(\varepsilon)\}$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \gamma(\varepsilon)\{|L_n(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\
&\quad + |L_n(e_2; x, y) - e_2(x, y)| + |L_n(e_3; x, y) - e_3(x, y)|\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlik yardımı ile

$$\begin{aligned} \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \gamma(\varepsilon)\{\|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \\ &\quad + \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} + \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan verilmiş bir  $\varepsilon' > 0$  için  $3\varepsilon' > \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  seçilirse

$$K = \{n \leq N: \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon'\}$$

$$K_1 = \left\{n \leq N: \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\},$$

$$K_2 = \left\{n \leq N: \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\},$$

$$K_3 = \left\{n \leq N: \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\},$$

olarak tanımlanmak üzere  $K \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3$  olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} \left|\{n \leq N: \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon'\}\right| &\leq \left|\left\{n \leq N: \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}\right| \\ &\quad + \left|\left\{n \leq N: \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}\right| \\ &\quad + \left|\left\{n \leq N: \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f\left(\left|\{n \leq N: \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon'\}\right|\right)}{f(N)} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|L_n(e_1) - e_1\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}\right|\right)}{f(N)} \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|L_n(e_2) - e_2\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}\right|\right)}{f(N)} \end{aligned}$$

$$+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|L_n(e_3) - e_3\|_{B(K)} \geq \frac{3\varepsilon' - \varepsilon}{9\gamma(\varepsilon)}\right\}\right|\right)}{f(N)}$$

olup (ii), (iii) ve (iv) hipotezlerini kullanırsak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon'\right\}\right|\right)}{f(N)} = 0$$

yani her  $g \in C_b(K)$  fonksiyonu için

$$f_{st} - \lim \|L_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

**4.3.5. Örnek:**  $I^2 = [0,1] \times [0,1]$  olsun. Her  $(x,y) \in I^2$  ve  $g \in C_b(I^2)$  için

$$U_n(g; x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} G_{x,y} \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \binom{n}{i} \binom{n-1}{j} x^i \cdot y^j \cdot (1-x-y)^{n-i-j}$$

ile tanımlı Pop ve Farcaş (2006) tarafından tanımlanan Bernstein-tipi operatörü göz önüne alalım. Bu durumda

$$U_n(e_0; x, y) = e_0(x, y), \quad U_n(e_1; x, y) = e_1(x, y), \quad U_n(e_2; x, y) = e_2(x, y),$$

$$U_n(e_3; x, y) = e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{n} + \frac{y - y^2}{n}$$

olup böylece  $(U_n)$  dizisi 2.2.3.5. Teorem'in tüm koşullarını sağlar. Böylece her

$g \in C_b(I^2)$  için

$$\lim \|U_n(G_{x,y}) - g\|_{B(I^2)} = 0$$

elde edilir.

$a = (a_n)$  reel terimli dizisi bazı sınırsız  $f$  modülüs fonksiyonları için sıfıra  $f$  –istatistiksel yakınsak ancak sıfıra alışılmış anlamda yakınsak olmayan bir dizi olsun.

Ayrıca  $C_b(I^2)$  üzerinde  $(D_n)$  pozitif lineer operatörler dizisini

$$D_n(g; x, y) = \begin{cases} 1, & g(u, v) = 1, \\ (1 + a_n) \cdot U_n(g; x, y), & g(u, v) \neq 1, \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece  $(a_n)$  sıfıra  $f$  –istatistiksel yakınsak olduğundan  $(D_n)$  4.3.4. Teorem’in tüm koşullarını sağlar. Böylece her  $g \in C_b(I^2)$  için

$$f_{st} - \lim \|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(I^2)} = 0$$

elde edilir. Ancak  $(a_n)$  sıfıra alışılmış anlamda yakınsak olmadığından  $(D_n)$  operatörler dizisi 2.2.3.5. Teorem’in şartlarını gerçekleştirmez.

#### 4.3.1. $f$ –istatistiksel yakınsaklık oranı

Bu bölümde  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranı tanıtılacak, ayrıca bu kavram ve  $B$  –süreklilik modülü yardımı ile 4.3.4. Teorem’in  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranı hesaplanacaktır.

**4.3.1.1. Tanım:**  $X$  bir normlu uzay ve  $x = (x_k)$   $X$  de bir dizi olsun.  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olmak üzere eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{f(\{|k \leq n: \|x_k - \ell\| \geq \varepsilon\}|)}{f(n^{1-\beta})} = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi  $\ell \in X$  sayısına  $0 < \beta < 1$  oranı ile  $f$  –istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$x_k - \ell = f_{st} - o(k^{-\beta}), \quad k \rightarrow \infty$$

ile gösterilir (Bhardwaj ve Dhawan, 2018).

**4.3.1.2. Teorem:**  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu,  $x = (x_n)$  ve  $y = (y_n)$   $X$  normlu uzayında iki dizi olsun. Eğer  $x_n - L_1 = f_{st} - o(n^{-\beta_1})$ ,  $y_n - L_2 = f_{st} - o(n^{-\beta_2})$  ve  $\beta = \min \{\beta_1, \beta_2\}$  olmak üzere

- i)  $(x_n - L_1) \pm (y_n - L_2) = f_{st} - o(n^{-\beta}) \quad (n \rightarrow \infty)$ ,
- ii) her  $a \in \square$  için  $a(x_n - L_1) = f_{st} - o(n^{-\beta_1}) \quad (n \rightarrow \infty)$

olur (Bhardwaj ve Dhawan, 2018).

**4.3.1.3. Teorem:** Herhangi  $f$  sınırsız modülüs fonksiyonu için  $0 < \beta < 1$  oranı ile  $f$  –istatistiksel yakınsak olan her dizi  $f$  –istatistiksel yakınsaktır (Bhardwaj ve Dhawan, 2018).

**İspat:**  $x_n - L = f_{st} - o(n^{-\beta})$  olsun.  $0 < \beta < 1$  olduğundan  $0 > -\beta > -1$  olup böylece  $f$  artan olduğundan

$$1 > 1 - \beta \Rightarrow n > n^{1-\beta} \Rightarrow f(n) > f(n^{1-\beta}) \Rightarrow \frac{1}{f(n)} < \frac{1}{f(n^{1-\beta})}$$

elde edilir. Böylece

$$0 \leq \lim_n \frac{f(\{|k \leq n: \|x_k - L\| \geq \varepsilon\})}{f(n)} < \lim_n \frac{f(\{|k \leq n: \|x_k - L\| \geq \varepsilon\})}{f(n^{1-\beta})} = 0$$

olup

$$\lim_n \frac{f(\{|k \leq n: \|x_k - L\| \geq \varepsilon\})}{f(n)} = 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Maddox (1987) herhangi bir  $f$  modülüs fonksiyonu için  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}$  mevcut olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuçtan yararlanarak 4.3.1. Teorem'in  $f$  -istatistiksel yakınsaklık oranı aşağıdaki gibidir.

**4.3.1.4. Teorem:**  $D_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatörler dizisi ve  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu öyleki  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > 0$  olsun. Bu durumda

- i)  $\|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} = f_{st} - o(n^{-\beta_1})$ ,
- ii)  $\|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} = f_{st} - o(n^{-\beta_2})$ ,
- iii)  $\|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} = f_{st} - o(n^{-\beta_3})$

koşulları sağlansın. Bu durumda herhangi  $g \in C[a, b]$  fonksiyonu için  $n \rightarrow \infty$  iken  $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  olmak üzere

$$\|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = f_{st} - o(n^{-\beta})$$

olur (Bhardwaj ve Dhawan, 2018).

**İspat:** (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlansın ve  $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  olsun. 4.3.1. Teorem'in ispatından görülebileceği gibi bir  $\varepsilon' > 0$  için  $\varepsilon' > \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  seçersek

$$\begin{aligned}
|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}| &\leq \left| \left\{ n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \\
&+ \left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \\
&+ \left| \left\{ n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{f(|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}|)}{f(N^{1-\beta})} &\leq \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta})} \\
&+ \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta})} \\
&+ \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta})}
\end{aligned}$$

olur.  $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{f(|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}|)}{f(N^{1-\beta})} &\leq \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|D_n(1) - 1\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta_1})} \frac{f(N^{1-\beta_1})}{N^{1-\beta_1}} \frac{N^{1-\beta}}{f(N^{1-\beta})} \left(\frac{N^{1-\beta_1}}{N^{1-\beta}}\right) \\
&+ \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|D_n(u) - x\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta_2})} \frac{f(N^{1-\beta_2})}{N^{1-\beta_2}} \frac{N^{1-\beta}}{f(N^{1-\beta})} \left(\frac{N^{1-\beta_2}}{N^{1-\beta}}\right) \\
&+ \frac{f\left(\left|\left\{n \leq N: \|D_n(u^2) - x^2\|_{C[a,b]} \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K}\right\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta_3})} \frac{f(N^{1-\beta_3})}{N^{1-\beta_3}} \frac{N^{1-\beta}}{f(N^{1-\beta})} \left(\frac{N^{1-\beta_3}}{N^{1-\beta}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. (i), (ii), (iii) ve  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > 0$  olduğunu kullanırsak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(|\{n \leq N: \|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} \geq \varepsilon'\}|)}{f(N^{1-\beta})} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\|D_n(g) - g\|_{C[a,b]} = f_{st} - o(n^{-\beta})$$

olup ispat tamamlanır.

Şimdi de 4.3.4. Teorem'in aşağıda tanımlanan karışık  $B$  –süreklilik modülü yardımıyla  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplayalım.

Her  $g \in C_b(K)$  için karışık  $B$  –süreklilik modülü  $\delta_1, \delta_2 > 0$  için

$$\omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2) = \sup\{|\Delta_{x,y}[g(u, v)]|: |u - x| \leq \delta_1, |v - y| \leq \delta_2\}$$

şeklinde tanımlanır. Karışık süreklilik modülü  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  için

$$\omega_{mixed}(g; \lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leq (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)\omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2) \quad (4.3.1.1)$$

eşitsizliğini sağlar.

**4.3.1.5. Teorem:**  $f$  sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun.  $D_n: C_b(K) \rightarrow B(K)$  pozitif lineer operatör dizisi ve  $0 < \beta < 1$  olmak üzere

i) her  $(x, y) \in K$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $D_n(e_0; x, y) = e_0(x, y)$ ,

ii)  $\varphi(u, v) = (u - x)^2$ ,  $\psi(u, v) = (v - y)^2$  olduğunda  $\gamma_n := \sqrt{\|D_n(\varphi)\|_{B(K)}}$  ve

$\alpha_n := \sqrt{\|D_n(\psi)\|_{B(K)}}$  olmak üzere  $\omega_{mixed}(g; \gamma_n, \alpha_n) = f_{st} - o(n^{-\beta})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) olsun.

Bu durumda her  $g \in C_b(K)$  için

$$\|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = f_{st} - o(n^{-\beta}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur.

**İspat:**  $g \in C_b(K)$  ve  $(x, y) \in K$  sabit olsun.  $G_{x,y}(u, v) = g(u, y) + g(x, y) - g(u, v)$  olmak üzere  $G_{x,y}(u, v)$  fonksiyonunun  $B$  –sürekliliğinden ve 2.2.3.3. Lemma'dan her  $\varepsilon > 0$  için  $\lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon, g)$  ve  $\beta(\varepsilon) = \beta(\varepsilon, g)$  pozitif sayıları mevcuttur öyle ki her  $(u, v) \in K$  için

$$|\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \lambda(\varepsilon)(u - x)^2 + \beta(\varepsilon)(v - y)^2$$

sağlanır . Böylece  $n \in \square$  için

$$D_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y) = D_n(\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]; x, y)$$

olduğundan ve (4.3.1.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)] &\leq \omega_{mixed}(g; |u - x|, |v - y|) \\
&= \omega_{mixed}\left(g; \frac{|u-x|}{\delta_1} \delta_1, \frac{|v-y|}{\delta_2} \delta_2\right) \\
&\leq \left(1 + \frac{|u-x|}{\delta_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{|v-y|}{\delta_2}\right) \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2) \tag{4.3.1.2}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $D_n$  operetörünün lineerliği ve monotonluğunu kullanır, ayrıca (i) hipotezinin sağlandığını ve (4.3.1.2) eğsitsizliğini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
|D_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &\leq |D_n(\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]; x, y)| \\
&\leq D_n(|\Delta_{x,y}[G_{x,y}(u, v)]|; x, y) \\
&\leq D_n\left(\left(1 + \frac{|u-x|}{\delta_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{|v-y|}{\delta_2}\right); x, y\right) \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2) \\
&= D_n\left(1 + \frac{|v-y|}{\delta_2} + \frac{|u-x|}{\delta_1} + \frac{|u-x||v-y|}{\delta_1\delta_2}; x, y\right) \\
&\quad \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2) \\
&\leq \left[D_n(e_0; x, y) + \frac{1}{\delta_2} D_n(|v-y|; x, y) + \frac{1}{\delta_1} D_n(|u-x|; x, y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1\delta_2} D_n(|v-y||u-x|; x, y)\right] \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

eğsitsizliği elde edilir. Böylece Cauchy-Schwartz eğsitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|D_n(G_{x,y}; x, y) - g(x, y)| &\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{D_n((u-x)^2; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{D_n((v-y)^2; x, y)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1\delta_2} \sqrt{D_n((u-x)^2; x, y)} \sqrt{D_n((v-y)^2; x, y)} \right\} \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2) \\
&\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{D_n(\varphi; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{D_n(\psi; x, y)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1\delta_2} \sqrt{D_n(\varphi; x, y)} \sqrt{D_n(\psi; x, y)} \right\} \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

olur. Bu son eğsitsizlikte her iki tarafın  $(x, y) \in K$  üzerinden supremumunu alınırsak

$$\|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{\|D_n(\varphi)\|_{B(K)}} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{\|D_n(\psi)\|_{B(K)}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{\|D_n(\varphi)\|_{B(K)}} \sqrt{\|D_n(\psi)\|_{B(K)}} \right\} \omega_{mixed}(g; \delta_1, \delta_2)$$

olup buradan  $\delta_1 := \gamma_n := \sqrt{\|D_n(\varphi)\|_{B(K)}}$  ve  $\delta_2 := \alpha_n := \sqrt{\|D_n(\psi)\|_{B(K)}}$  olmak üzere

$$\|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \leq 4\omega_{mixed}(g; \gamma_n, \alpha_n)$$

elde edilir. Buradan verilmiş bir  $\varepsilon > 0$  için

$$K = \{n \leq N: \|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon\},$$

$$K_1 = \{n \leq N: \omega_{mixed}(g; \gamma_n, \alpha_n) \geq \frac{\varepsilon}{4}\},$$

olarak tanımlanmak üzere,  $K \subset K_1$  olduğu görülür. Böylece

$$\left| \{n \leq N: \|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon\} \right| \leq \left| \{n \leq N: \omega_{mixed}(g; \gamma_n, \alpha_n) \geq \frac{\varepsilon}{4}\} \right|$$

olur ki buradan  $0 < \beta < 1$  için

$$\frac{f\left(\left|\{n \leq N: \|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta})} \leq \frac{f\left(\left|\{n \leq N: \omega_{mixed}(g; \gamma_n, \alpha_n) \geq \frac{\varepsilon}{4}\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta})}$$

elde edilir. Böylece  $N \rightarrow \infty$  için limit alınırsa yukarıdaki eşitsizlikten ve (ii) den

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f\left(\left|\{n \leq N: \|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} \geq \varepsilon\}\right|\right)}{f(N^{1-\beta})} = 0$$

yani her  $g \in C_b(K)$  fonksiyonu için

$$\|D_n(G_{x,y}) - g\|_{B(K)} = f_{st} - o(n^{-\beta}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tezinde alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetli olan  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak ilk olarak  $C[a, b]$  Banach uzayı üzerinde Korovkin tipi teoremler verilmiştir. Daha sonra ise Bögel sürekli fonksiyonlar için  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile Korovkin tipi teorem verilmiştir. Ayrıca verilen örnekler ile  $f$  –istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak elde edilen sonuçların klasik durumlarından daha kuvvetli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranı tanımı verilmiş ve Korovkin tipi teoremlerin  $f$  –istatistiksel yakınsaklık oranları hesaplanmıştır.

$f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile elde edilen bu sonuçlar  $B$ -sürekli ve  $B-2\pi$  periyodik fonksiyonlar için de incelenebilir. Ayrıca ağırlıklı uzaylar üzerinde hatta modüler uzaylarda  $f$  –istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Aizpuru, A., Listán-García, M. C., & Rambla-Barreno, F. (2014). Density by moduli and statistical convergence. *Quaest. Math.*, 37, 525-530.
- Akdağ, S. (2021).  $f$  –Statistical approximation to Bögel-type continuous functions. *Tbilisi Mathematical Journal*, 14(2), 93-103.
- Atlıhan, Ö., & Orhan, C. (2008). Summation process of positive linear operators. *Computers and Math. With Appl.*, 56(5), 1188-1195.
- Badea, C., Badea, I., & Gonska, H.H. (1986). A test function theorem and approximation by pseudopolynomials. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 34, 53-64.
- Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 13, 1-2.
- Bhardwaj, V.K., & Dhawan, S. (2018). Korovkin type approximation theorem via  $f$  –statistical convergence. *J. Math. Anal*, 9(2), 99-117.
- Bögel, K. (1934). Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. *J. Reine Angew. Math.* 170, 197-217.
- Bögel, K. (1935). Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation. *J. Reine Angew. Math.* 173, 5-29
- Bögel, K. (1962). Über die mehrdimensionale Differentiation, Jahresber. Deutsch. Mat.- Verein. 65, 45-71.
- Connor, J.S. (1988). The statistical and strong  $p$ -Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, 8, 47-63.
- Connor, J. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.*, 32(2), 194-198.
- Connor, J., Ganchev, M., & Kadets, V. (2000). A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 244, 251-261.
- Demirci, K., & Orhan, C. (1999). Bounded multipliers of bounded  $A$ -statistically convergent sequences. *J. Math. Anal. Appl.*, 235(1), 122-129.
- Demirci, K., & Dirik, F. (2013). A Korovkin-type approximation theorem in statistical sense to  $B$ -Continuous Functions. *General Mathematics*, 21(2), 93-111.
- Duman, O. (2003). Statistical approximation for periodic functions, *Demonstratio Math.*, 36(4), 873-878.
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2, 241-44.
- Freedman, A.R., & Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2), 293-305

- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5, 301-313.
- Gadjiev, A. D., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.* 32, 129-138.
- Kline, J. (1995). The T-statistically convergent sequences are not an FK-space. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 18(4), 825-827.
- Korovkin, P. P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Lorentz, G.G. (1986). *Bernstein polynomials*. Chelsea Publishing Company, New York, U.S.A., 133 pp
- Maddox, I.J. (1987). Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem. *Math. Proc. Comb. Philos. Soc.*, 101, 523-527.
- Miller, H.I. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347, 1811-1819.
- Miller, H.I., & Orhan, C. (2001). On almost convergent and statistically convergent subsequences. *Acta Math. Hungar.*, 93, 135-151.
- Nakano, H. (1953). Concave modulars, *J. Math. Soc. Japan*, 5, 29-49.
- Niven, I., & Zuckerman, H. S. (1980). An introduction on the theory of numbers. *John Waley & Sons*, 4 th ed. New York.
- Pop, O.T. & Farcaş, M. (2006). Approximation of  $B$ -continuous and  $B$ -differentiable functions by Gbs operators of Bernstein bivariate polynomials, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 7(3) art.92.
- Ruckle, W.H. (1973). FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is Bounded. *Can. J. Math.* 25, 973-978.
- Šălât, T. (1980). On Statistically Convergent Sequences of Real numbers. *Math. Slovaca*, 30, 139-150.
- Schoenberg, I.J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, 66, 361-375.
- Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 2, 73-74.
- Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to infinite interval, *J. Research Nat. Bur. Standarts*. 45, 239-245

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kübra BELİN KÜNTECİ

Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Samsun 19 Mayıs Ç.P.L., 2010

Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik  
Bölümü, 2014

### Mesleki Deneyim

İş Yeri : T.C. Ulaştırma ve Altyapı Bakanlığı Sinop Liman Başkanlığı  
Memur, 2014-2016

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Sinop Sağlık Meslek Lisesi  
Matematik Öğretmeni, 2017-2018

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Sinop Atatürk Anadolu Lisesi  
Matematik Öğretmeni, 2018-...

Yayın Listesi :