T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-YUTAN İDEALLER İÇİN AMALGAMATED CEBRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gonca ÜNYE TELLİ

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar teorisi Bilim Dalı

OCAK 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-YUTAN İDEALLER İÇİN AMALGAMATED CEBRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gonca ÜNYE TELLİ

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Abuzer GÜNDÜZ

OCAK 2024

Gonca ÜNYE TELLİ tarafından hazırlanan “2-Yutan İdealler İçin Amalgamated Cebri” adlı tez çalışması 25.01.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Cebir ve Sayılar teorisi** Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	**Dr. Öğr. Üyesi Abuzer GÜNDÜZ**(Danışman) Sakarya Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Mehmet ÖZEN** Sakarya Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Suat KOÇ** İstanbul Medeniyet Üniversitesi	....

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "2-YUTAN İDEALLER İÇİN AMALGAMATED CEBRİ" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(22/12/2023)

Gonca ÜNYE TELLİ

Sevgili aileme…

TEŞEKKÜR

Tez dönemim boyunca kendi bilgi ve birikimlerini bana aktaran, ilgi ve yardımını eksik etmeyen, tezimi yöneten danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Abuzer GÜNDÜZ'e çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimine başladığım ilk dönemlerde bana danışmanlık yapan ve bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren Prof. Dr. Mehmet ÖZEN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Maddi ve manevi desteklerini her gün hissettiğim babam Necdet ÜNYE, annem Şengül ÜNYE, ablam Ayşegül ÜNYE ve eşim Fırat TELLİ'ye bana inandıkları ve beni motive ettikleri için teşekkür ederim.

Son olarak tez yazım sürecinde bana yardımcı olan yüksek lisans arkadaşlarıma ve iş arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Gonca ÜNYE TELLİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

$\subseteq$	: Alt küme
$\exists$	: Bazı
$\cup$	: Birleşim
$\in$	: Elemanı
$\notin$	: Elemanı değil
$\forall$	: Her
$\cong$	: İzomorftur
$\cap$	: Kesişim
$\boldsymbol{Nil(A)}$	: A'nın nilpotent elemanları
$\boldsymbol{T(A)}$	: A'nın bölüm halkalarının kümesi
Çek$\boldsymbol{f}$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$\bowtie^{\boldsymbol{f}}$	: f homomorfizması altındaki amalgamation
$\sqrt{\boldsymbol{I}}$	: I idealinin radikali
$\boldsymbol{f(I)}$	: I idealinin f altındaki görüntüsü
$\boldsymbol{f^{-1}(I)}$	: I idealinin f altındaki ters görüntüsü
$\boldsymbol{B[X]}$	: Katsayıları B'den alınan polinomlar halkası
$\boldsymbol{B[[X]]}$	: Katsayıları B'den alınan kuvvet serileri halkası
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	: Tam sayıların mod n kalan sınıflarının kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\boldsymbol{(S)}$	: S'nin ürettiği ideal
$\boldsymbol{x \mid y}$	: x böler y

2-YUTAN İDEALLER İÇİN AMALGAMATED CEBRİ

ÖZET

A birimli ve değişmeli bir halka ve $1 \neq 0$ olmak üzere, I, A halkasının sıfırdan farlı bir ideali olsun. Öyle ki; her $x, y, z \in A$ için $xyz \in I$ iken $xy \in I$ veya $yz \in I$ veya $xz \in I$ oluyorsa I idealine 2-yutan ideal denir. 2-yutan idealler ilk olarak Badawi (2007) tarafından tanıtılmış ve çalışmıştır. Daha sonra Badawi farklı yazarlarla birlikte bu çalışmaları geliştirmişler ve bazı özel tanımlamalar da yapmıştırlardır (D. F. Anderson & Badawi, 2011; Badawi vd., 2014; Badawi & Darani, 2013). A ve B iki halka, J, B halkasının bir ideali ve $f: A \to B$ bir halka homomorfizması olmak üzere $A \bowtie^f J = \{(x, f(x) + j): x \in A, j \in J\}$ kümesine A halkası ve B halkasının J ideali boyunca f fonksiyonu altında amalgamationu denir. Amalgamation yapısı D'Anna ve ark. (2009) tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır (D'Anna vd., 2009). D'Anna ve ark. (2009) bize amalgamation yapılarının cebirsellik özelliklerini vermişlerdir. Bu yapının farklı ideal sınıfları için incelenmesi yapılmıştır. Bu çalışmanın teorik ve uygulama kısımları mevcut olup ilk olarak konu ile ilgili daha önceleri yapılmış olan tüm çalışmalar incelenecektir. Daha sonra bu çalışmada A ve B halkasının J ideali boyunca f fonksiyonu altındaki amalgamationunda 2-yutan idealleri tanımlanacaktır. Bu idealleri tanımlayabilmemiz için önce bazı kümeler oluşturduk. I, A halkasının bir ideali ve K, $f(A) + J$'nin bir ideali olmak üzere $I \bowtie^f J := \{ (i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\}$, $\overline{K}^f := \{ (x, f(x) + j) : x \in A, j \in J, f(x) + j \in K\}$, $\overline{I \times K}^f := \{ (x, f(x) + j) : x \in I, j \in J, f(x) + j \in K\}$ kümelerini oluşturduk ve bu kümelerimiz $A \bowtie^f J$ halkasında birer ideal olma özelliklerini sağlamaktadırlar. Bizim amacımız ise ilk olarak bu $I \bowtie^f J$, $\overline{K}^f$, $\overline{I \times K}^f$ ideallerinin $A \bowtie^f J$ halkasında birer 2-yutan idealler olduğunu göstermektir. Bu incelemeleri yaparken D'anna ve ark. (2009)'nın proposition 5.1.(2)'de oluşturmuş oldukları izomorfizmalardan yararlandık (D'Anna vd., 2009). Daha sonra oluşturduğumuz bu ideal yapılarının $A \bowtie^f J$ halkasında 2-yutan ideal olabilmeleri için gerekli olan teoremleri ve önermeleri verip, bu teoremlerin ve önermelerin ispatlarını yaptık. Son olarak bazı özel I ideallerinin örneğin $\sqrt{I} \neq I$ olmak üzere $\sqrt{I}$, A halkasının bir asal ideali veya P_1 ve P_2, I ideali üzerinde farklı birer minimal asal ideal veya I, A halkasında bir P-asalımsı ideal olduğu durumlarda hangi şartlar altında 2-yutan ideal olduğunu açıkladık. Ayrıca özel halka yapıları için; örneğin bir A halkasının, tamlık bölgesi, prüfer domain, valuation domain olması durumlarında ideallerin hangi koşullar altında 2-yutan idealler olduklarını bulduk.

2-ABSORBING IDEALS OF AMALGAMATIONS

SUMMARY

Throughout this paper all rings are commutative with identity $1 \neq 0$ and all modules are assumed to be unitial. Let A be a commutative ring. An ideal I is called a proper ideal of A if $I \neq A$. $\sqrt{I}$ is called the radical of I and is defined by $\sqrt{I} = \{r \in A\colon\ r^n \in I\ for\ some\ positive\ integer\ n \geq 1\}$. If I is a primary ideal, then the radical of I is a prime ideal $\sqrt{I} = P$, and moreover I is called $P - primary,$ where P is a prime ideal. $Nil(A)$ is the set of all nilpotent elements of A and is called the nil radical of A.

Suppose that A is a ring. Then a prime idael I of a ring A is said to be a divided prime ideal if $I \subset (s)$ for every $s \in A/_I$; thus a divided prime ideal is comparable to every ideal of A (Badawi, 2007). An integral domain A is said to be a divided domain if every prime ideal of A is a divided prime ideal. If $m|k$ (in A) or $k|m$ (in A) for every nonzero $m, k \in A$ then an integral domain is said to be a valuation domain (Badawi, 2007). It is known that a valuation domain is a divided domain. Suppose that $T(A)$ denotes the total quotient ring of A. If I is a nonzero ideal of a ring A, then $I^{-1} = \{x \in T(A)\colon xI \subset A\}$. An integral domain A is called a Prüfer domain if $II^{-1} = A$ for every nonzero finitely generated ideal I of A (Badawi, 2007). An integral domain A is said to be a Dedekind domain if $II^{-1} = A$ for every nonzero ideal I of A (Badawi, 2007). An integral domain A is called an almost Dedekind domain if A_M is a Dedekind domain for each maximal ideal M of A.

In the theory of commutative rings, the prime ideals have an important role. Because of this, there are several ways to generalize the concept of prime ideals. For instance, a nonzero proper ideal I is called 2-absorbing ideal if whenever $x, y, z \in A$ such that $xyz \in I$, then either $xy \in I$ or $xz \in I$ or $yz \in I$. 2-absorbing ideals were first introduced by Badawi (2007) (Badawi, 2007). Later, Anderson and Badawi (2011) expanded the 2-absorbing ideals and gave the definition of n-absorbing ideals (D. F. Anderson & Badawi, 2011). A proper ideal I of A is called n-absorbing ideal if whenever $x_1 \dots x_{n+1} \in I$ for $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$, then there are n of the x_i's whose product is in I. In Badawi and others (2014), defined the 2-absorbing primary ideal such that a proper ideal I is called 2-absorbing primary ideal if whenever $x, y, z \in A$ such that $xyz \in I$, then either $xy \in I$ or $xz \in \sqrt{I}$ or $yz \in \sqrt{I}$ (Badawi vd., 2014).

By the definition, we known that every prime ideal is 2-absorbing ideal. But, the converse is not true always. Bennis and Fahid (2017) introduced and studied a ring satisfying the following condition: every 2-absorbing ideal of A is prime. They showed that a ring A is a 2-AB ring if and only if (1) every prime ideals of A are comparable; in particular, A is quasi-local with maximal ideal M and (2) if P is minimal prime over a 2-absorbing ideal I, then $IM = P$. They also characterize under valuation domain that a ring A is a 2-AB ring if and only if $P = P^2$ for every prime ideal P of A (Bennis & Fahid, 2017).

Issoual and Mahdou (2020) studied on 2-AB rings and obtained some results (Issoual & Mahdou, 2020).

Payrovi and Babaei (2012) studied over 2-absorbing ideals and present some results such as the localization of and the ring of polynomials of 2-absorbing ideals (Payrovi & Babaei, 2012).

Badawi and Darani (2013) have studied on weakly 2-absorbing ideals (Badawi & Darani, 2013). They gave the sufficient and necessary condition for proper ideal of a commutative ring when it is a weakly 2-absorbing ideals under the condition of quasi-local ring and field.

Let A, B be two rings, J be an ideal of B and let $f : A \to B$ be a ring homomorphism. In this setting, we consider the following subring of A x B

$$A \bowtie^{f} J := \{ (x, f(x) + j) : x \in A, j \in J\}$$

is called the amalgamation of A and B along J with respect to f. This construction is a generalization of the amalgamated duplication of a ring along an ideal introduced and studied by D'Anna and others (2009)(D'Anna vd., 2009). Moreover, other classical constructions (such as the $A + XB[X]$, $A + XB[[X]]$, and the $D + M$ constructions) can be studied as particular cases of the amalgamation by D'Anna and others (2009) (D'Anna vd., 2009). Other classical construction, such as Nagatas idealization by Nagata (1962) and the CPI extensions in the sence of Boisen and Sheldon (1977) are strictly related to it (Boisen & Sheldon, 1977; Nagata, 1962). A particular case of this construction is the amalgamated duplication of a ring along an ideal I. The set of $A \bowtie I := \{ (a, a + i) : a \in A, i \in I\}$ is called the amalgamated duplication of A along the ideal I where A be a ring, and let I be an ideal of A.

On the other hand, the amalgamation $A \bowtie^{f} J$ is related to a construction propesed by Anderson (2006) and motivated by a classical construction due to Dorroh (1932), concerning the embedding of a ring without identity in a ring with identity (D. D. Anderson, 2006; Dorroh, 1932).

Khalfi and others (2023) and Gündüz (2023), they studied over $1 -$ absorbing prime and $1 -$ absorbing primary ideals of amalgamations (Gündüz, 2023; Khalfi vd., 2023). In Khalfi and others (2023), they obtained some results by the definition of $1 -$ absorbing prime and $1 -$ absorbing primary ideals under some special conditions. Despite that, Gündüz (2023) obtained many results by using isomorphism in D'Anna and others (2009), Proposition 5.1.(2)) and these results don't depend any conditions.

Amalgameted algebras are a subring of $A \times B$, where A and B are commutative rings with unity. It is constructed through a suitable ring homomorphism from A to B. This construction has been examined for different ideal classes. These structures are closely related to many important theories.

For this purpose, we will first give the basic algebraic properties of rings and ideal construction by making use of the sources of Çallıalp (2018) and Gündüz (2021). In the second part, we will define prime ideal and 2-absorbing ideal and describe their properties.

In the third part we define amalgamation algebra and we show 2-absorbing ideals in the amalgamation ring. Hence we define several sets. Let A and B be two rings, J be an ideal of B and $f : A \to B$ be a ring homomorphism. $A \bowtie^f J$ denotes the amalgamation of A with B along J with respect to f. Let I be an ideal of A and K be an ideal of $f(A) + J$. The sets we define are $I \bowtie^f J := \{ (i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\}$, $\overline{K}^f := \{ (x, f(x) + j) : x \in A, j \in J, f(x) + j \in K\}$, $\overline{I \times K}^f := \{ (x, f(x) + j) : x \in I, j \in J, f(x) + j \in K\}$. It is clear that $I \bowtie^f J$, $\overline{K}^f$, $\overline{I \times K}^f$ are ideals of $A \bowtie^f J$. Later, we will show (theorem 3.2.1.) that $I \bowtie^f J$, $\overline{K}^f$ and $\overline{I \times K}^f$ are 2- absorbing ideals of $A \bowtie^f J$. We follow the method of the Gündüz (2023). We give an example (example 3.2.1) of a $I \bowtie^f J$ that is not a 2-absorbing ideal of $A \bowtie^f J$. Then, we will give the condition of being a 2-absorbing ideal for special cases of the I ideal for example $\sqrt{I} \neq I$ and $\sqrt{I}$ is a prime ideal of A or $I \neq \sqrt{I} = P_1 \cap P_2$ where P_1 and P_2 are distinct prime ideals of A that are minimal over I or I is a $P -$ primary ideal of A and $P^2 \subseteq I$. Becides we find 2-absorbing ideal of amalgamations and give some results such as when A is a valuation domain, a Prüfer domain, a integral domain, $Nil(A)$ and P are divided prime of ideal of A, respectively.

1. GİRİŞ

1.1. Literatür Taraması ve Tezin Amacı

Bu sayfadaki bütün halkalar değişmeli ve birim elemanı sıfırdan farklı ve bütün modüller birimli olsun. A değişmeli bir halka ve I, A halkasının A'den farklı uygun bir ideali olsun.

$\sqrt{I} = \{r \in A\colon\ r^n\ \in I,\ n \geq 1\ ve\ n\ pozitif\ tamsayı\ \}$ olmak üzere, $\sqrt{I}$'ya I idealinin radikali denir. Eğer I asalımsı ideal ise o zaman I idealinin radikali asal idealdir ve $\sqrt{I}$=P olur. Dahası I ideali $P-asalımsı$ olarak adlandırılır. Burada P bir asal idealdir. A halkasının bütün nilpotent elemanlarının kümesi $Nil(A)$ olmak üzere bu kümeye A'nin nil radikali denir.

Değişmeli halkalar teorisinde asal idealler önemli bir rol oynar. Bu yüzden asal ideal kavramını genelleştirmenin birkaç yolu vardır. Mesela I, A halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun eğer $x, y, z \in A$ elemanları için $xyz \in I$ olduğunda $xy \in I$ veya $yz \in I$ veya $xz \in I$ oluyorsa o zaman I idealine A halkasının bir 2-yutan ideali denir. 2-yutan ideallerden ilk olarak Badawi (2007)'nin çalışmasında bahsedilmiştir (Badawi, 2007). Daha sonra Anderson ve Badawi (2011) 2-yutan idealler kavramını açıklanmışlar ve n-yutan ideallerin tanımını yapmışlardır (D. F. Anderson & Badawi, 2011). I, A halkasının uygun bir ideali olsun. $x_1, \dots, x_{n+1} \in R$ için $x_1 \dots x_{n+1} \in I$ olduğunda x_i elemanlarından herhangi n tanesinin çarpımı I idealinde yer alıyorsa o zaman I idealine n-yutan ideal denir. Badawi ve ark. (2014) çalışmalarında 2-yutan asalımsı ideallerin tanımını yapılmışlardır (Badawi vd., 2014). I, A halkasının uygun bir ideali olsun. $x, y, z \in A$ için $xyz \in I$ olduğunda $xy \in I$ veya $xz \in \sqrt{I}$ veya $yz \in \sqrt{I}$ oluyorsa o zaman I idealine A halkasının bir 2-yutan asalımsı ideali denir.

Bu tanımlar altında biliyoruz ki her asal ideal bir 2-yutan idealdir ancak tersi her zaman doğru değildir. Bennis ve Fahid (2007) çalışmalarında 2-yutan ideallerinin asal olması koşulunu sağlayan bir A halkası tanıtıp incelediler (Bennis & Fahid, 2017). Bu tanıttıkları yapılara 2-AB yapılar dediler ve bu yapılarla ilgili daha sonra Issoual ve Mahdou (2020) da çalışmıştır (Issoual & Mahdou, 2020).

Payrovi ve Babaei (2012) 2-yutan idealler üzerine çalıştılar ve bunların lokalizasyonlarını ve polinom halkalarının bazı sonuçlarını verdiler (Payrovi & Babaei, 2012).

Badawi ve Darani (2013) zayıf 2-yutan idealleri çalıştılar (Badawi & Darani, 2013). Cisimler ve yarı lokal halkalarda uygun ideallerin, zayıf 2-yutan idealleri olmasının gerekliliğini ve şartını verdiler.

A, B iki halka ve J, B'nin bir ideali olsun $f: A \to B$ halka homomorfizması olmak üzere $A \times B$'nin bir alt halkasını tanımlayalım. $A \bowtie^f J = \{(x, f(x) + j): x \in A, j \in J\}$ kümesine A'nın ve B'nin J ideali boyunca f altındaki amalgamationu denir. Halkadaki ideallerin amalgamation çarpımının genelleştirilmesi D'Anna ve ark. (2009) tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır (D'Anna vd., 2009). Dahası diğer klasik yapılarda ($A + XB[X]$, $A + XB[[X]]$ ve $D + M$ yapıları gibi) çalışılmıştır. Diğer klasik bir yapı Nagatas idealizasyonu Nagata (1962) tarafından (Nagata, 1962), CPI genişlemesi Boisen ve Sheldon (1977) tarafından tanıtılmıştır (Boisen & Sheldon, 1977). Bu yapıların özel durumu I idealinin bir amalgamation çarpımı olmasıdır. A bir halka ve I'da A'nın bir ideali olsun o zaman $A \bowtie I \coloneqq \{(x, x + i): x \in A, i \in I\}$ kümesine A'nın I ideali boyunca amalgamation çoğalması denir.

Diğer bir yandan bu $A \bowtie^f J$ amalgamation yapısı Anderson (2006) tarafından önerilen ve Dorroh (1962)'un belirttiği klasik yapılarla alakalıdır ve bu amalgamation yapısı birimli olmayan bir yapının birimli olan bir yapıya gömülmesini ifade eder (D. D. Anderson, 2006; Dorroh, 1932).

Gündüz (2023) ve Khalfi ve ark. (2023) da amalgamation cebrinde 1-yutan asal ideal ve 1-yutan asalımsı idealleri çalıştılar (Gündüz, 2023; Khalfi vd., 2023). Bazı tanımlamaları ve sonuçları açıkladılar. Bu idealler altındaki özel yapıları verdiler. Gündüz (2023) çalışmasında D'Anna ve ark. (2009)'nın, proposition 5.1.(2)'de açıkladıkları izomorfizma yapısını kullanarak 1-yutan asal idealler ve 1-yutan asalımsı idellerin amalgamated cebri için bir çok sonuç açıkladı (Gündüz, 2023).

Bu tez çalışmasında ise amacımız amalgamation yapılarında 2-yutan ideal olma koşulunu bulmak ve bunlarla ilgili teorem, örnek ve bazı sonuçlar vermektir.

1.2. Tezin İçeriği

Bu tez çalışmasında da Gündüz (2023)'ün kullandığı metodla 2-yutan ideallerin amalgamationlarını ve bazı sonuçlarını vereceğiz (Gündüz, 2023). Bunun için öncelikle Çallıalp (2018) ve Gündüz (2021)'ün kaynaklarından yararlanarak halka ve ideal yapılarının temel cebirsel özelliklerini vereceğiz (Çallıalp, 2018; Gündüz, 2021). İkinci bölümde ise asal ideal ve 2-yutan ideal tanımını yapıp bunların özelliklerini tanımlayacağız. Son bölümde ise amalgamated cebrini tanımlayıp, 2-yutan idealler için amalgamated cebriyle ilgili tanım, teorem, örnek ve A nın bazı özel durumları (Örneğin A valuation domain, Prüfer domain olduğunda veya I, A nın bir P-asalımsı ideali olmasını $Nil(A)$'yı ve A nın bir bölünmüş asalı olan P) için sonuçlarını açıklayacağız.

1.3. Cebirsel Tanımlar, Önermeler ve Teoremler

Bu bölümdeki tanım, teorem ve örnekler için Çallıalp (2018) ve Gündüz (2021)'ün çalışmalarından faydalanacağız.

Tanım 1.3.1. $A \times A$ dan A'ya tanımlanan fonksiyona A'da bir ikili işlem denir. $x, y \in A$ ve $*$, A'da bir ikili işlem olsun. (x, y)'nin $*$ işlemi altındaki görüntüsü $x * y$ olmak üzere; $\forall x, y \in A$ için A da bir $x * y$ elemanı var ve bu eleman tek türlü belirlidir ve bu fonksiyon olma özellikleriyle sağlanır. $x * y$ nin varlığı işlemin kapalılığını, tek türlü belirlenmesi ise iyi tanımlılığını gösterir.

Tanım 1.3.2. Boş olmayan bir kümenin üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı ise bu kümeye cebirsel yapı denir. $(A,*)$ yapısı, A kümesi üzerinde bir $*$ ikili işlemin gösterimidir.

Tanım 1.3.3. G boştan farklı bir küme ve $*$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olmak üzere; $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa G'ye bir grup denir.

1) $*$, G'de bir ikili işlemdir.
2) $\forall a, b, c \in G$ için, $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir. Yani birleşme özelliği vardır.
3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır ve bu elemana birim eleman denir.
4) $a \in G$ için, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir ve bu elemana a elemanının tersi denir.

Tanım 1.3.4. $(G,*)$ bir grup ve $\forall a,b \in G$ için $a*b=b*a$ özelliğini sağlıyorsa değişme özelliği vardır denir. Değişme özelliği olan gruba değişmeli grup veya Abel grup denir.

Tanım 1.3.5. Boştan farklı bir R kümesi ve R üzerinde iki tane ikili işlem olarak "+" ve "." tanımlansın. Eğer $(R,+,.)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa R'ye bir halka denir.

1) $(R,+)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur.
2) İkinci işleme göre birleşmelidir. Yani $\forall a,b,c \in R$ için $(a.b).c=a.(b.c)$ dir.
3) İkinci işlemin birinci işlem üzerinde dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in R$ için $a.(b+c)=a.b+a.c$ ve $(a+b).c=a.c+b.c$ dir.

Halka yapısının birinci işleme göre etkisiz elemanına o halkanın sıfırı denir ve 0_R ile gösterilir. Ancak ikinci işleme göre etkisiz elemanı olmayabilir ancak var ise bu elemana halkanın birimi denir ve 1_R ile gösterilir. İkinci işlem, değişme özelliğini sağlıyorsa o zaman bu halkaya değişmeli halka denir. Ayrıca tezin kalan kısmında kolaylık olması açısından $a.b$ yerine ab kullanacağız.

Örnek 1.3.1. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ cebirsel yapıları birimli ve değişmeli halkadır.

Tanım 1.3.6. R halkasında, sıfır elemanından farklı bir $a \in R$ elemanı için; $ab=0_R$ veya $ba=0_R$ olacak şekilde öyle bir sıfırdan farklı $b \in R$ bulunabilirse a ya, halkanın bir sıfır böleni, böyle bir b yoksa sıfır böleni değildir denir.

Tanımdan dolayı 0_R elemanı; sıfır bölen de değildir, sıfır bölen olmayan da değildir.

Tanım 1.3.7. Eğer bir halka sıfır bölensiz ve değişmeli isen bu halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.3.2. $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]=\{m+n\sqrt{5}: m,n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi '+' ve '·' işlemlerine göre bir tamlık bölgesidir.

Tanım 1.3.8. R bir tamlık bölgesi olmak üzere R'nin sıfırından farklı her $x \in R$ için $xy=1_R$ olacak şekilde öyle bir $y \in R$ varsa R halkasına cisim denir.

Tanım 1.3.9. Bir R halkasında her $a \in R$ için $na=0_R$ olacak şekilde öyle bir n pozitif tam sayısı varsa bu tam sayıların en küçüğüne halkanın karakteristiği denir.

Eğer bu özelliği sağlayan hiçbir pozitif tam sayı yoksa R halkasının karakteristiği sıfırdır.

Örnek 1.3.3. $\mathbb{Z}_4$ halkasının karakteristiği 4'tür.

Tanım1.3.10. Bir R halkasında $a \in R$ için $a^n = 0_R$ olacak şekilde öyle bir $n \geq 1$ tam sayısı varsa o zaman a ya bir nilpotent eleman denir.

Örnek 1.3.4. $\mathbb{Z}_8$ halkasında $\overline{2}$ ve $\overline{4}$ birer nilpotent elemandır.

Tanım 1.3.11. R bir halka ve bu halkanın boştan farklı bir H alt kümesini alalım. Eğer H alt kümesi, halkada ki işlemlere göre kendi başına bir halka oluşturuyorsa o zaman H, R'nin bir alt halkasıdır denir.

Teorem 1.3.1. R bir halka ve $H \neq \emptyset$ olacak şekilde bir alt küme alalım. H'nin bir alt halka olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için

i. $a - b \in H$
ii. $ab \in H$ olmasıdır (Gündüz, 2021).

Tanım 1.3.12. R bir halka ve I, R'nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $\forall a, b \in I$ ve $\forall r \in R$ için

i. $a - b \in I$ ve
ii. $ra \in I \ (veya\ ar \in I)$

oluyorsa I'ya R'nin bir sol (veya sağ) ideali denir.

I alt kümesi hem sol, hem de sağ ideal oluyorsa o zaman I'ya iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir. Ayrıca tanımdan dolayı ideal yapısı bir alt halkadır. Eğer halka değişmeli ise her sol ideal veya sağ ideal bir ideal olur.

Tanım 1.3.13. R bir halka; ve alt kümelerinden $\{0_R\}$ ve R, R halkasının her zaman birer idealleridir. Bu ideallere halkanın aşikar(trivial) idealleri denir.

Tanım 1.3.14. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. R'nin S'yi kapsayan tüm ideallerinin arakesitine S'nin ürettiği ideal denir ve $(S) = \cap_{S \subseteq I_i} I_i$, ile gösterilir. Birimli ve değişmeli bir halka R halkası için

$$(S) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{k} r_i s_i : \ r_i \in R, s_i \in S\} \tag{1.1}$$

olur.

Tanım 1.3.15. Eğer $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ bir sonlu küme ise S'nin ürettiği ideale sonlu üretilmiş ideal denir ve $(S) = (\{s_1, \dots, s_n\})$ ile gösterilir. Eğer özel olarak $(S) = (\{s\})$ yani tek eleman tarafından üretilirse (S) ye s ile üretilmiş temel ideal denir ve (s) ile gösterilir.

Sonuç 1.3.1. R bir halka ve $a \in R$ olsun. O halde $(a) = \{ra : r \in R\} = Ra$ olur.

Örnek 1.3.5. $\mathbb{Z}[x]$ polinom halkasında x ile 3'ün ürettiği ideal $(3, x) = \{3f(x) + xg(x): f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$ dir ve bu kümenin ideal olabilmesi için sabit teriminin 3'ün katı olması gerekir. Dolayısıyla $(3, x) = \{3a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_kx^k \in \mathbb{Z}[x]: k \geq 0\}$ olur.

Tanım 1.3.16. Bir R halkasını ve R'nin bir I idealini alalım. Her $a, b \in R$ için,

$$a \equiv b(mod\, I) \Leftrightarrow a - b \in I \tag{1.2}$$

ile tanımlayalım.

Önerme 1.3.1. R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan $\equiv$ bağıntısı, R'de bir denklik bağıntısıdır. $r \in R$'nin denklik sınıfı

$$\bar{r} = r + I = \{r + a : a \in I\} \tag{1.3}$$

dır. Bütün denklik sınıfları kümesi R/I ile gösterilir (Çallıalp, 2018).

İspat: Çallıalp (2018), önerme 4.2.9'da yapılmıştır.

Not 1.3.1. R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıflarının, R'nin toplamsal grubunu, I alt grubuna göre tanımlanan denklik sınıfıdır.

Önerme 1.3.2. A halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I \tag{1.4}$$

$$(x + I) \odot (y + I) = (xy) + I \tag{1.5}$$

ile tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre A/I bir halkadır. Bu halkaya A nın I idealine göre bölüm halkası denir (Çallıalp, 2018).

İspat: Çallıalp (2018)**,** önerme 4.2.10'da yapılmıştır.

Tanım 1.3.17. $(A, +, .)$ ve $(B, \circ, \star)$ iki halka ve $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere, $\forall x, y \in A$ için,

$$f(x + y) = f(x) \circ f(y) \tag{1.6}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa f'ye A'dan B'ye bir halka homomorfizması denir.

Eğer özel olarak f birebir ise f'ye monomorfizma, örten ise f'ye epimorfizma, hem birebir hem de örten ise f'ye izomorfizma denir. İki halka arasında bir izomorfizma kurulabilirse bunlara izomorf halkalar denir. İzomorf halkaların bütün özellikleri aynıdır ve $A \cong B$ ile gösterilir. Ayrıca f monomorfizma ise bu fonksiyona bir gömme(embedding) denir.

Tanım 1.3.18. $f: A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması olsun. Bu taktirde bu homomorfizmanın çekirdeği; $Çek(f) = \{x \in A : f(x) = 0_B\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 1.3.2. $f: A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması olmak üzere f in birebir olması için gerek ve yeter koşul $Çek(f) = \{0_A\}$ olmasıdır (Gündüz, 2021).

Teorem 1.3.3. $f : A \rightarrow B$ bir halka homomorfizma olmak üzere $Çek(f)$, A nin bir idealidir (Gündüz, 2021).

Teorem 1.3.4. [Homomorfizma Teoremi] $f : R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $R/Çek(f) \cong f(R)$ dir (Gündüz, 2021).

Sonuç 1.3.2. $f : A \rightarrow B$ bir örten halka homomorfizması olmak üzere $A/Çek(f) \cong B$ dir.

2. ASAL İDEALLER

2.1. Asal İdealler

Tanım 2.1. A değişmeli bir halka ve P'de A'nın kendisinden farklı bir ideali olsun. $x, y \in A$ için $xy \in P$ olduğunda $x \in P$ veya $y \in P$ oluyorsa o zaman bu P idealine A halkasının bir asal ideali denir.

Tanım 2.2. A değişmeli bir halka ve M, A'nın bir ideali ve $M \neq A$ olsun. Eğer A halkasının M idealini kapsayan M'den başka hiçbir ideali yoksa bu M idealine A halkasının bir maksimal ideali denir.

Tanım 2.3. A bir halka ve S, A'nın bir alt kümesi olsun. S birim elemanına sahip ve her $s_1, s_2 \in S$ elemanları için $s_1 s_2 \in S$ oluyorsa bu S kümesine A halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi denir.

Örnek 2.1. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası için $S = \{7^n : n \geq 0\}$ kümesi bir çarpımsal kapalı alt kümedir. Dahası A'nın bir P asal ideali için A/P kümesi bir çarpımsal kapalı alt kümedir.

Tanım 2.4. A bir halka ve I, A'nın bir asal ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \{x \in A : x^n \in I, \exists n \in \mathbb{Z}^+\} \tag{2.1}$$

kümesine I'nın radikali denir.

Tanım 2.5. I, A halkasının kendisisinden farklı bir ideali olsun. Birim elemanından farklı her $a, b \in A$ için $ab \in I$ iken $a \in I$ veya $\exists n \in \mathbb{Z}^+ \; iken \; b^n \in I$ oluyorsa o zaman I idealine bir asalımsı ideal denir.

Teorem 2.1. I, A halkasının bir asalımsı ideali ise o halde $P = \sqrt{I}$ ideali de bir asal idealdir ve I idealine bir P-asalımsı ideal denir (Gündüz, 2021).

Örnek 2.2. $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasında $(x^3, 125)$ ideali $(x, 5)$-asalımsı idealdir. Çünkü $(x, 5) \subseteq \sqrt{(x^3, 125)}$ kapsamı açıktır ve $\mathbb{Z}[x]\big/(x, 5) \cong \mathbb{Z}_5$ ve $\mathbb{Z}_5$ cisim olduğu

için $(x, 5)$, $\mathbb{Z}_5$ halkasında maksimaldir. O halde $(x, 5) = \sqrt{(x^3, 125)}$ olur ve bu $(x^3, 125)$ nin, $\mathbb{Z}[x]$ halkasında $(x, 5)$-asalımsı olduğunu gösterir.

2.2. 2-Yutan İdealler

Tanım 2.2.1. A birimli ve değişmeli bir halka ve $1 \neq 0$ olmak üzere, I, A'nın sıfırdan farklı uygun bir ideali olsun. Öyle ki; $x, y, z \in A$ için $xyz \in I$ iken $xy \in I$ veya $yz \in I$ veya $xz \in I$ oluyorsa I idealine 2-yutan ideal denir.

Tanım 2.2.2. I, A halkasının uygun bir ideali olsun. $x, y, z \in A$ için $xyz \in I$ olduğunda $xy \in I$ veya $xz \in \sqrt{I}$ veya $yz \in \sqrt{I}$ oluyorsa o zaman I idealine A halkasının bir 2- yutan asalımsı ideali denir.

Tanım 2.2.3. I, A halkasının uygun bir ideali olsun. Her $x \in A/I$ için $I \subset (x)$ oluyorsa I idealine bölünmüş asal ideal denir. Bölünmüş asal idealler A halkasında ki bütün idealler için geçerlidir.

Tanım 2.2.4. A bir tamlık bölgesi ve sıfırdan farklı her $m, k \in A$ için $m|k$ veya $k|m$ oluyorsa o zaman A'ya bir valuation domain denir (Badawi, 2007).

Tanım 2.2.5. $T(A)$, A halkasının bütün bölüm halkalarının kümesi ve I, A'nın sıfır olmayan bir ideali olsun. O zaman $I^{-1} = \{x \in T(A) : xI \subset A\}$ dır (Badawi, 2007).

Tanım 2.2.6. A bir tamlık bölgesi ve I, A'nın sıfırdan farklı sonlu üretilmiş ideali olsun. Eğer $II^{-1} = A$ oluyorsa o zaman A halkasına bir Prüfer domain denir (Badawi, 2007).

Tanım 2.2.7. A bir tamlık bölgesi I, A nın sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $II^{-1} = A$ oluyorsa o zaman A halkasına bir Dedekind domain denir (Badawi, 2007).

3. AMALGAMATION

3.1. Amalgamation Cebri

Bu bölümdeki temel tanım ve teoremler için D'Anna ve ark. (2009)'nın çalışmasından faydalanacağız.

Tanım 3.1.1. A ve B iki halka, J, B'nin bir ideali ve $f: A \to B$ bir halka homomorfizması olmak üzere;

$$A \bowtie^f J = \{(x, f(x) + j): x \in A, j \in J\} \tag{3.1}$$

kümesine A halkası ve B halkasının J ideali boyunca f fonksiyonu altında amalgamationu denir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $j_1, j_2 \in J$ olmak üzere

$$(x_1, j_1).(x_2, j_2) := (x_1x_2,\ x_1j_2 + x_2j_1 + j_1j_2) \tag{3.2}$$

olarak tanımlanıyor ve bu işlem altında $A \bowtie^f J$ amalgamation yapısı bir halka belirtir.

Önerme 3.1.1. I, A halkasının bir ideali olsun. Bu durumda;

$$I \bowtie^f J := \{\, (i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\} \tag{3.3}$$

kümesi $A \bowtie^f J$ halkasının bir idealdir ve $\tau: A \bowtie^f J \to {A \bowtie^f J}\big/{I \bowtie^f J}$ surjektif bir homomorfizmadır. Üstelik $\frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J} \cong \frac{A}{I}$ olur (D'Anna vd., 2009).

Bu son izomorfizma bizim çalışmamızın çekirdeğini oluşturacaktır. Yani ana teoremimizin ispatı için buraya odaklanacağız.

Tanım 3.1.2. A bir halka ve I da A nın bir ideali olsun. O zaman;

$$A \bowtie I := \{(x, x + i): x \in A, i \in I\} \tag{3.4}$$

Kümesine A'nın I ideali boyunca amalgamation çoğalması denir.

3.2. 2-Yutan İdealler İçin Amalgamated Cebri

A ve B iki halka olsun ve $f : A \to B$ halka homomorfizması ve J, B halkasının bir ideali olmak üzere tüm sayfa boyunca $A \bowtie^f J$, f altında A ile B'nin J ideali boyunca bir amalgamationını belirtir.

I, A halkasının bir ideali ve K, $f(A) + J$'nin bir ideali olsun.

Aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$I \bowtie^f J := \{ (i, f(i) + j) : i \in I, j \in J\} \tag{3.5}$$

$$\overline{K}^f := \{ (x, f(x) + j) : x \in A, j \in J, f(x) + j \in K\} \tag{3.6}$$

$$\overline{I \times K}^f := \{ (x, f(x) + j) : x \in I, j \in J, f(x) + j \in K\} \tag{3.7}$$

Açıktır ki $I \bowtie^f J$, $\overline{K}^f$, $\overline{I \times K}^f$, $A \bowtie^f J$'de birer idealdir. İlk olarak $A \bowtie^f J$ amalgamationında $I \bowtie^f J$, $\overline{K}^f$, $\overline{I \times K}^f$'nin birer 2-yutan ideal olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.2.1. Yukarıdaki tanımları verilen notasyonlar altında aşağıdaki adımlar geçerlidir.

1-) $I \bowtie^f J$'nin $A \bowtie^f J$ halkasının bir 2-yutan ideali olması için gerek ve yeter koşul I'nın, A halkasının bir 2-yutan ideali olmasıdır.

2-) I'nın, A halkasında bir 2-yutan ideal ve K'nin de, $f(A) + J$'de bir 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul $\overline{I \times K}^f$'nin, $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan ideal olmasıdır.

3-) $\overline{K}^f$'nın, $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul K'nin, $f(A) + J$ de bir 2-yutan ideal olmasıdır.

Bu teoremin ispatını verebilmek için bir kısım lemmaya ihtiyacımız var. Şimdi bunları verelim.

Lemma 3.2.1. B değişmeli bir halka ve $f : A \to B$ bir halka homomorfizması olsun (Payrovi & Babaei, 2012).

1) Eğer J ideali B halkasında bir 2-yutan ideal ise o zaman $f^{-1}(J)$ de A halkasında bir 2-yutan idealdir.
2) Dahası f bir epimorfizma ve I ideali de $Çek(f)$'i içersin. I ideali A halkasında bir 2-yutan ideal ise o zaman $f(I)$ da B halkasının bir 2-yutan idealdir.

İspat Lemma 3.2.1. **1)** Farz edelim ki J, B halkasının bir 2-yutan ideali ve $x, y, z \in A$ için $xyz \in f^{-1}(J)$ olsun. O zaman f homomorfizma olduğundan $f(xyz) = f(x)f(y)f(z) \in J$ olur. Ayrıca J 2-yutan ideal olduğu için $f(x)f(y) \in J$ veya $f(x)f(z) \in J$ veya $f(y)f(z) \in J$ olur. Dolayısıyla $xy \in f^{-1}(J)$ veya $xz \in f^{-1}(J)$ veya $yz \in f^{-1}(J)$ olur bu da $f^{-1}(J)$'nin A halkasında 2-yutan ideal olduğunu gösterir.

2) Lemmanın bu kısmı Payrovi ve Babaei (2012)'nin çalışmasında Theorem 1.1'de verildi.

Lemma 3.2.2. A ve B iki halka ve I, A halkasının uygun bir ideali, J de B halkasının uygun bir ideali ve $I \subseteq J$ olsun. O zaman J'nin A halkasının bir 2–yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul J/I'nin A/I halkasının bir 2–yutan ideal olmasıdır (Issoual & Mahdou, 2020).

Özel olarak I idealinin, A halkasında bir 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul $\{0\}$ idealinin de A/I halkasında bir 2-yutan ideal olmasıdır.

İspat: İspatın ilk kısmı ilgili referansta vardır. İkinci kısım için özel olarak $I = J$ almak yeterlidir.

İspat Teorem 3.2.1. D'Anna ve ark. (2009), Proposition 5.1.(2)'den $\frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J} \cong \frac{A}{I}$ olduğunu hatırlayalım.

1) Lemma 3.2.2.(2) den I idealinin, A halkasının bir 2-yutan ideali olması için gerek ve yeter koşul $\{0\}$ idealinin A/I halkasının bir 2-yutan ideali olmasıdır. Yukarıdaki izomorfizmadan $\{0\}$ idealinin A/I halkasında bir 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul $\{0\}$ idealinin $\frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J}$ halkasının bir 2-yutan ideali olmasıdır. Öte yandan tekrar Lemma 3.2.2 den $\{0\}$ idealinin $\frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J}$ nın bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $I \bowtie^f J$ idealinin $A \bowtie^f J$ halkasının bir 2-yutan ideal olması demektir. Gerektirme zinciriden ispat biter.

2) $i = 1,2,3, \ldots$ olmak üzere x_i, A halkasının elemanları, $j_i \in J$ ve $f(x_i) + j \in K$ olsun.

$(x_1, f(x_1) + j_1).(x_2, f(x_2) + j_2).(x_3, f(x_3) + j_3) \in \overline{IxK^f}$ ve iddia ediyoruz ki;

$$(x_1.x_2,\ f(x_1).j_2 + f(x_1).f(x_2) + j_1 f(x_2) + j_1.j_2).(x_3, f(x_3) + j_3) \in \overline{IxK^f} \quad (3.8)$$

veya

$$(x_1.x_3,\ \mathrm{f}(x_1).j_3+\mathrm{f}(x_1).\mathrm{f}(x_3)+j_1\,\mathrm{f}(x_3)+j_1.j_3).(x_2,\mathrm{f}(x_2)+j_2)\in\overline{IxK}^f \tag{3.9}$$

veya

$$(x_2.x_3,\ \mathrm{f}(x_2).j_3+\mathrm{f}(x_2).\mathrm{f}(x_3)+j_2\,\mathrm{f}(x_3)+j_2.j_3).(x_1,\mathrm{f}(x_1)+j_1)\in\overline{IxK}^f \tag{3.10}$$

olur. Diğer taraftan I, A halkasının 2-yutan idealidir ve dolayısıyla $x_1.x_2.x_3\in I$ olduğunda $x_1.x_2\in I$ veya $x_2.x_3\in \mathrm{I}$ veya $x_1.x_3\in I$ olur. Buradan; $x_1.x_2\in I$, $j_2.x_1+j_1.x_2+x_1.x_2\in A$, $j_1.j_2\in J$ olduğuna göre o zaman

$$(x_1.x_2,f(j_2.x_1+j_1.x_2+x_1.x_2)+j_1.j_2)\in\overline{IxK}^f \tag{3.11}$$

veya $x_1.x_3\in I$, $j_3.x_1$+$j_1.x_3$+$x_1.x_3\in A$, $j_1.j_3\in J$'dır. Buradan;

$$(x_1.x_3,\ \mathrm{f}(j_3.x_1+j_1.x_3+x_1.x_3)+j_1.j_3)\in\overline{IxK}^f \tag{3.12}$$

olur veya $x_2.x_3\in I$, $j_3.x_2$+$j_2.x_3$+$x_2.x_3\in A$, $j_2.j_3\in J$ dolayısıyla

$$(x_2.x_3,\ \mathrm{f}(j_3.x_2+j_2.x_3+x_2.x_3)+j_2.j_3)\in\overline{IxK}^f \tag{3.13}$$

olur.

3) K, $f(A)+J$'de 2-yutan ideal olsun. Bir tane τ fonksiyonu tanımlayalım.

$\tau:\ A\bowtie^{\mathrm{f}} J\ \to f(A)+J,\ (x,f(x)+j)\longmapsto f(x)+j.$ Açıktır ki τ örtendir ve $Çek(\tau)=A\times\{0\}\subseteq\overline{K}^f$ ve $\tau(\overline{K}^f)=K$ olur ve Lemma 3.2.1.(2)'den sonuca ulaşmış oluruz.

Örnek 3.2.1. $A=\mathbb{Z}+7x\mathbb{Z}[X]$ ve $B=\mathbb{Z}[X]$ halkalarını ve A halkasının $I=7x\mathbb{Z}[X]$ idealini alalım. $f\colon A\to B$ halka homomorfizması olmak üzere biz görüyoruz ki I^2 ideali A halkasında bir 2-yutan ideal değildir. Çünkü $(7)(7)(x^2)\in I^2$ olmasına rağmen $49\notin I^2$ ve $7x^2\notin I^2$ dir. Dolayısıyla teorem 3.2.1.(1) den $I\bowtie^{\mathrm{f}} J$, $A\bowtie^{\mathrm{f}} J$ halkasının bir 2-yutan ideali değildir.

Sonuç 3.2.1. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) I, A halkasının bir ideali ve $\sqrt{I}\neq I$ olmak üzere $\sqrt{I}$'da A'nın bir asal ideali olsun. Eğer her $x\in\sqrt{I}\setminus I$ için $B_x=\{y\in A\colon yx\in I\}$ ideali A da bir asal ideal ise o zaman $I\bowtie^{\mathrm{f}} J$ ideali de $A\bowtie^{\mathrm{f}} J$ de bir 2-yutan idealdir.
2) I, A'nın bir ideali ve P_1 ve P_2, I ideali üzerinde farklı birer minimal asal ideal olsun. $I\neq\sqrt{I}=P_1\cap P_2$ olmak üzere eğer $P_1P_2\subseteq I$ ve her $x\in\sqrt{I}\setminus I$ için

$B_x = \{y \in A : yx \in I\}$, A halkasının bir asal ideal ise o zaman $I \bowtie^f J$ ideali de $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan idealdir.

3) I, A halkasının bir ideali ve P_1 ve P_2, I ideali üzerinde farklı birer minimal asal idealler olsun. $I \neq \sqrt{I} = P_1 \cap P_2$ olmak üzere eğer $P_1 P_2 \subseteq I$ ve ayrıca her $x \in P_1 \cup P_2 \setminus I$ için $B_x = \{y \in A : yx \in I\}$, A halkasının bir asal ideal ise o zaman $I \bowtie^f J$ ideali de $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan idealdir.
4) Varsayalım ki I, A halkasında bir P-asalımsı ideal ve $P^2 \subseteq I$ olsun. O zaman $I \bowtie^f J$ ideali $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan ideal olur.
5) I, A halkasının ideali, P de A halkasının sıfır olmayan bölünmüş asal ideali olsun. Eğer I, A da bir P- asalımsı ideal ve $P^2 \subseteq I$ ise o zaman $I \bowtie^f J$ ideali $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan idealdir.
6) Varsayalım ki $Nil(A)$ ve P, A halkasının bölünmüş iki asal ideali olsun. Eğer $P \neq Nil(A)$ ise o zaman $P^2 \bowtie^f J$ ideali $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan idealdir.
7) A bir tamlık bölgesi ve P, A tamlık bölgesinin sıfırdan farklı bölünmüş asal ideali olsun o zaman $P^2 \bowtie^f J$ ideali de $A \bowtie^f J$ halkasının bir 2-yutan idealidir.
8) A halkası bir valuation domain olmak üzere; I , A halkasının sıfır olmayan bir ideali ve $P = \sqrt{I}$ de A halkasının bir asal ideali olsun. Eğer $I = P$ veya $I = P^2$ oluyorsa, $I \bowtie^f J$ ideali de $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan ideal olur.
9) A halkası bir Prüfer domain, I , A halkasının sıfır olmayan bir ideali ve P_1 ve P_2, A'nın sıfır olmayan birer asal idealleri olsun. Eğer I ideali A'nın bir asal ideali veya $I = P_1 \cap P_2$ veya $I = P^2$, A halkasında bir P-asalımsı ideal ise o zaman $I \bowtie^f J$ ideali $A \bowtie^f J$ halkasında bir 2-yutan idealdir.
10) I, A halkasının bir ideali ve S, A halkasında çarpımsal kapalı bir alt küme ayrıca $S^{-1}A$ kesir halkası ve $\tilde{f} : S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer I, A halkasının bir 2-yutan ideali ve $S \cap I = \emptyset$ ise $S^{-1}I \bowtie^{\tilde{f}} J$'de, $S^{-1}A \bowtie^{\tilde{f}} J$ halkasının bir 2-yutan idealdir.

İspat 1-10 Her bir sonuç Teorem 3.2.1.(1) den ve sırasıyla ((Badawi, 2007) theorem 2.8), ((Badawi, 2007) theorem 2.9), ((Badawi, 2007) theorem 3.1), ((Badawi, 2007) theorem 3.6), ((Badawi, 2007) theorem 3.7), ((Badawi, 2007) theorem 3.8), ((Badawi, 2007) proposition 3.10), ((Badawi, 2007) theorem 3.14), ((Payrovi & Babaei, 2012) Theorem 1.3) ifadelerinden açıktır.

5. SONUÇ

Tezimiz üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde birimli ve değişmeli halka ve ideal kavramları için genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde asal ideallerden bahsedilerek 2-yutan ideal yapılarının tanımı ilgili referanslar çerçevesinde verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bazı özel halka yapılarına da yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise amalgamation yapısından bahsedilmiş ve ikinci bölümde bahsedilen 2-yutan idealler bu amalgamation yapıları içerisinde incelenmiştir. Daha önce Gündüz (2023) tarafından 1-yutan asal idealler ve 1-yutan asalımsı idealler için amalgamated cebri çalışılmış ve yazar bu çalışmasında D'Anna ve ark. (2009) tarafından Proposition 5.1.(2)'de tanımlanan izomorfizmadan yararlanmıştır. Bu tez çalışmasında da aynı izomorfizma yapıları kullanılarak 2-yutan idealler için amalgamated cebri çalışılmış ve bu cebir yapısıyla alakalı tanımlar, teoremler, örnekler ve bazı sonuçlar açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

Anderson, D. D. (2006). Commutative rings. İçinde *“Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra: A tribute to the work of Robert Gilmer” (Jim Brewer, Sarah Glaz, William Heinzer and Bruce Olberding Editors)* (ss. 1-20). Springer.

Anderson, D. F., & Badawi, A. (2011). On n-Absorbing Ideals of Commutative Rings. *Communications in Algebra*, *39*, 1646-1672. https://doi.org/10.1080/00927871003738998

Badawi, A. (2007). On 2-Absorbing Ideals Of Commutative Rings. *Bull. Austral. Math. Soc.*, *75*, 417-429.

Badawi, A., & Darani, A. Y. (2013). On Weakly 2-Absorbing Ideals of Commutative Rings. *Houston Journal of Mathematics*, *39*(2).

Badawi, A., Tekir, Ü., & Yetkin, E. (2014). On 2-absorbing primary ideals in commutative rings. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *51*(4), 1163-1173.

Bennis, C., & Fahid, B. (2017). Rings in which every 2-absorbing ideal is prime. *Beitr. Algebra Geom.*, 1-6.

Boisen, M. B., & Sheldon, P. B. (1977). CPI-extention: Over rings of integral domains with special prime spectrum. *Can. J. Math*, *29*, 722-737.

Çallıalp, Prof. Dr. F. (2018). *Örneklerle Soyut Cebir*.

D’Anna, M., Finocchiaro, C. A., & Fontana, M. (2009). Amalgamated algebras along an ideal. *Commutative Algebra and Applications*, 155-172.

Dorroh, J. L. (1932). Concerning adjunctions to algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society, 38*, 85-88.

Gündüz, A. (2021). *Halka Teorisi*.

Gündüz, A. (2023). On 1-absorbing Prime and 1-absorbing Primary Ideals of Amalgamations. *In Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, *76*(9), 1317-1325.

Issoual, M., & Mahdou, N. (2020). Rings in Which Every 2-Absorbing Ideal Is Prime. *Differential Geometry, Algebra, and Analysis*, 147-155. https://doi.org/10.1007/978-981-15-5455-1_11

Khalfi, A. E., Kolotoğlu, T., Mahdou, N., Tekir, Ü., & Ersoy, B. A. (2023). Amalgamated algebras along an ideal defined by 1-absorbing-like conditions. *Journal of Algebra and Its Applications, 2450090*.

Nagata, M. (1962). Local Rings. *Wiley- Interscience, New York*.

Payrovi, Sh., & Babaei, S. (2012). On the 2-Absorbing Ideals. *International Mathematical Forum*, *7*(6), 265-271.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad **:** Gonca ÜNYE TELLİ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lise** **:** 2009, İzmir Kız Lisesi
- **Lisans** **:** 2013, Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** **:** Devam ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2015 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak çalışmakta.
- 17/01/2022 tarihinde Milli Eğitim Bakanlığı'ndan Başarı Belgesi aldı.
- 01/06/2022 tarihinde Milli Eğitim Bakanlığı'ndan Başarı Belgesi aldı.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Gündüz, A & Ünye Telli, G. (2023, 19-20 Aralık). 2-Yutucu Asal İdeallerin Amalgamated Cebri. 12th International Congress of Academic Research, Türkiye.