

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BISHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGELER
ÜZERİNE

Serhat GÜLNAROĞLU

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

ŞUBAT 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

BISHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGELER ÜZERİNE

Tez Yazarı
Serhat GÜLNAROĞLU

Danışman
Prof. Dr. Vedat ASİL

ŞUBAT 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Bishop Çatısına Göre Küresel Göstergeler Üzerine
Yazarı: Serhat GÜLNAROĞLU
İlk Teslim Tarihi: 18.01.2024
Savunma Tarihi: 02.02.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Vedat ASİL Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Bishop Çatısına Göre Küresel Göstergeler Üzerine ” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

02.02.2024

Serhat GÜLNAROĞLU



ÖNSÖZ

Bishop çatısına göre küresel göstergeler geometri ve çeşitli bilim dallarında geniş bir çalışma imkanı sunmaktadır. Özellikle farklı çatılara göre bu eğrileri oluşturup bunlarla ilgili karakterizasyonlar yapmak mümkündür. Bu çatılarda en bilineni Bishop çatısıdır. Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU'na ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme ve eşime saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Serhat GÜLNAROĞLU
ELAZIĞ, 2024



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER	x
1. Giriş	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Tanım (Öklid İç Çarpım).....	2
2.2. Tanım (Vektörel çarpım).....	2
2.3. Tanım (Norm).....	2
2.4. Tanım (Eğri).....	2
2.5. Tanım (Hız vektörü).....	2
2.6. Tanım (Regüler eğri).....	3
2.7. Tanım (Birim hızlı eğri).....	3
2.8. Tanım (Frenet vektörleri).....	3
2.9. Tanım (Serre-Frenet çatısı).....	3
2.10. Teorem (Eğrilik fonksiyonu).....	3
2.11. Tanım (Burulma fonksiyonu).....	4
2.12. Tanım (Birim teğet vektörü).....	4
2.13. Tanım (Asli normal vektörü).....	4
2.14. Tanım (Binormal vektör).....	4
2.15. Tanım (Birim teğet vektör alanı).....	4
2.16. Tanım (Serre-Frenet türev formülleri).....	4
2.17. Tanım (Ortogonal küme ve Ortonormal küme).....	5
2.18. Tanım (Bishop çatı).....	5
2.19. Tanım (İntegral eğrisi).....	6
2.20. Teorem.....	6
2.21. Tanım (Helis).....	7
2.22. Tanım (Slant Helis).....	7
3. 3-BOYUTLU UZAYDA BISHOP ÇATIYA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGELER.....	8
3.1. Regüler bir eğrinin Tip-2 Bishop Çatısı	8
3.1.1. Önerme.....	9
3.1.2. Önerme.....	9
3.2. Tip-2 Bishop Çatıya Göre Küresel Gösterge	10
3.2.1. ζ_1 'e Göre Küresel Göstergeler	10
3.2.2. ζ_2 'e Göre Küresel Göstergeler	12
3.2.3. Binormal Bishop Küresel Göstergeler.....	13
4. ÖRNEKLER	15
4.1. Örnek	15
4.2. Örnek	17

5. SONUÇLAR.....	20
KAYNAKLAR.....	21
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

Bishop Çatısına Göre Küresel Göstergeler Üzerine

Serhat GÜLNAROĞLU

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2024, Sayfa: x + 21

3 boyutlu Öklid uzayında regüler eğriler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Birçok araştırmacı bu teoride Frenet çatı ve Bishop çatı gibi çatıları çalışmıştır. Bu çatılar eğriler ile ilgili karakterizasyonlarda bize yardımcı olur.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında bishop çatıya göre küresel göstergeler incelenmiştir. Bunun için önce Öklid uzayında tip 2 bishop çatı verilmiş ve bunlar için yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bishop çatı, Frenet eğrileri, Frenet çatısı, küresel gösterge

ABSTRACT

On spherical Indicatrix According to Bishop Frame

Serhat GÜLNAROĞLU

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

February 2024, Pages: x + 21

Many studies have been done according to different frames of the theory of curves in Euclidean Space. Many researchers have studied frames such as the Frenet frame, Bishop frame in this theory. These frames help us in the characterization of curves.

This study analyzes spherical indicatrix according to the bishop frame in Euclidean space. For this, firstly, the Type-2 Bishop frame is given in euclidean. Then new characterizations are obtained.

Keywords: Bishop frame, Frenet curves, Frenet frame, spherical indicatrix

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1.	n-boyutlu uzayda eğri 2
Şekil 2.2.	Frenet vektörleri..... 3
Şekil 2.3.	3-boyutlu uzayda bishop vektörleri..... 6
Şekil 4.1.	$\xi=\xi(s)$, Dairesel helis 16
Şekil 4.2.	Frenet-Serret çatısına göre $\xi=\xi(s)$ 'in küresel görüntüsü 16
Şekil 4.3.	$\xi=\xi(s)$ 'in $\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2$ ve binormal bishop küresel görüntüsü..... 17
Şekil 4.4.	$\omega = \omega(s)$ eğrisi 17
Şekil 4.5.	Frenet-Serret çatısına göre $\omega = \omega(s)$ 'in küresel görüntüsü 18
Şekil 4.6.	$\omega = \omega(s)$ 'in $\vec{\zeta}_1$ Bishop Küresel Görüntüsü 18
Şekil 4.7.	$\omega = \omega(s)$ 'in $\vec{\zeta}_2$ Bishop Küresel Görüntüsü..... 19
Şekil 4.8.	$\omega = \omega(s)$ 'in Binormal Bishop Küresel Görüntüsü 19

SİMGELER

R	: Reel sayılar cümlesi
E^3	: 3-boyutlu öklid uzayı
$\{T, N, B\}$: 3-boyutlu öklid uzayında Serre-Frenet çatısı
$\{T, M_1, M_2, \}$: 3-boyutlu öklid uzayında Bishop çatısı
κ	: 3-boyutlu öklid uzayında eğrilik fonksiyonu
τ	: 3-boyutlu öklid uzayında burulma fonksiyonu
K_1, K_2	: 3-boyutlu öklid uzayında Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları
$\{\zeta_1, \zeta_2, B\}$: 3-boyutlu öklid uzayında Tip-2 Bishop çatısı
$\{\zeta_1, \zeta_2, B, \epsilon_1, \epsilon_2\}$: 3-boyutlu öklid uzayında Tip-2 Bishop değişmezleri

1. GİRİŞ

Eğriler diferansiyel geometride çeşitli uzaylarda değişik çatılara göre çalışılan önemli bir alandır. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı bu eğrinin diferansiyel geometrisinin çalışılabilmesi için en iyi bilinen bir ortonormal bazdır. Bununla birlikte bir uzay eğrisinin uzaydaki yerel davranışı bu eğrinin eğrilik ve burulması ile tamamen belirlidir. Böylece bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilmesi gereklidir. Birçok araştırmacı eğrilerin özelliklerini karakterize etmek ve hesap yapmak için Frenet çatısını kullanmaktadırlar. Ancak Frenet çatısı yalnızca diferensiyellenebilen eğriler özelinde tanımlıdır ve bazı noktalarda eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Böyle durumlarda eğri için alternatif bir çatıya gerek duyulur. Bu sebeple 1975 yılında L.R. Bishop, paralel vektör alanları yardımıyla 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler için bir alternatif çatı ya da paralel öteleme çatısı tanımlamıştır [1].

Bishop, bu çatı sayesinde hareketli bir çatıyı tanımlamak için alternatif bir yol bulmuştur [1]. Bu çatı Frenet çatısında bulunan teğet vektör sabit tutularak normal vektörlerin belli bir açıyla döndürülmesiyle oluşur [1]. Bu alternatif çatının bulunuşuyla birlikte araştırmacılar bazı temel konuları bu yeni çatıya göre incelemeyi amaçlamışlardır ve Bishop çatısı üzerine pek çok çalışma yapmışlardır [2,3,4].

Körpınar, 3-boyutlu Öklid uzayda Bishop çatıya göre ilişkili eğrileri incelemiştir [4,13]. Ali Öklid uzayında slant helisleri inceledi [7]. Bukcu ve Karacan bazı özel eğleri Bishop çatısına göre incelemişlerdir [5]. Yılmaz, Özyılmaz ve Turgut söz konusu Bishop çatısının bileşenlerinin küresel görüntüleri üzerine çalışmıştır [6]. Babadağ ise bazı eğrileri Bishop çatısına göre karakterize etmiştir [8].

Bu çalışmada ise 3-boyutlu Öklid uzayında bishop çatıya göre bazı eğriler vererek 3-boyutlu Öklid uzayındaki bishop çatıya göre doğrultman eğrilerinin birinci ve ikinci eğrilikleriyle birlikte asli normal vektörü ile binormal vektörünü ele alıp; bu eğrilerin küresel göstergelerini elde etmeye çalışacağız.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tez çalışmasında kullanılan temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Tanım (Öklid İç Çarpım)

$\langle \cdot, \cdot \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R$, her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için $\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} x_m y_m$ şeklinde tanımlanan fonksiyona R^n vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpım denir [1].

2.2. Tanım (Vektörel çarpım)

$a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ şeklinde iki vektör olsunlar. Bu iki vektörün vektörel

çarpımı $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ ile verilir [13].

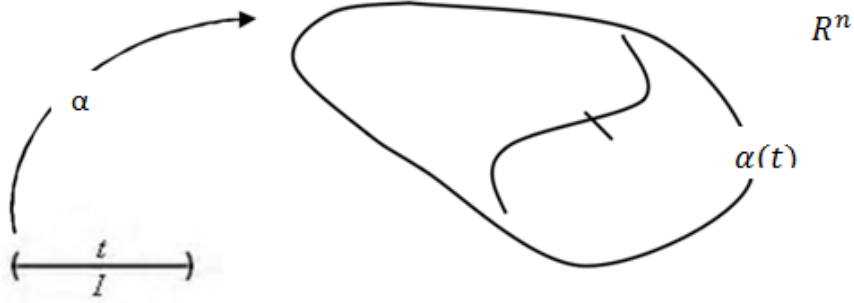
2.3. Tanım (Norm)

Bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün normu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanır [13].

2.4. Tanım (Eğri)

I, R nin açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow R^n$ biçiminde (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, R^n uzayı içinde bir eğri denir [13].

n -boyutlu uzayda eğri Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1. n-boyutlu uzayda eğri

2.5. Tanım (Hız vektörü)

$\alpha : I \rightarrow R^n$, $\alpha = \alpha_n(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ bir eğri olsun.

$\alpha' = \alpha_n'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t))$ eğrisine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir [13].

2.6. Tanım (Regüler eğri)

$\alpha: I \rightarrow R^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri (düzenli eğri) denir [13].

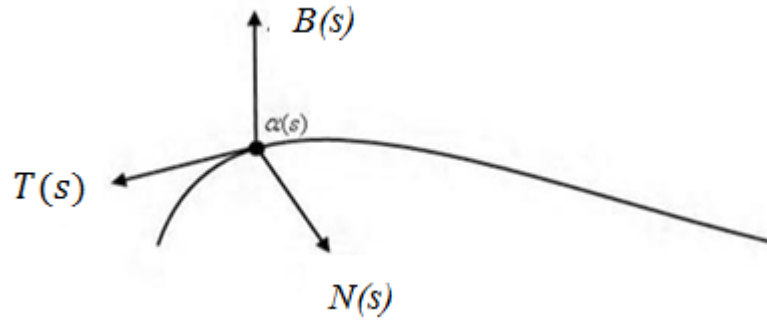
2.7. Tanım (Birim hızlı eğri)

$\alpha: I \rightarrow R^n$, $\alpha = \alpha(t)$ olmak üzere $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir [13].

2.8. Tanım (Frenet vektörleri)

$\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)$ vektörleri, $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleridir. $\{\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)\}$ ifadesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [13].

Frenet vektörleri Şekil 2.2 de verilmiştir.



Şekil 2.2. Frenet vektörleri

2.9. Tanım (Serre-Frenet çatısı)

$\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)$ vektörlerine Serre-Frenet vektör alanları denir. $\{\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)\}$ ortonormal kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serre-Frenet çatısı denir [13].

2.10. Teorem (Eğrilik fonksiyonu)

R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\kappa: I \rightarrow R$, $\kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [13].

2.11. Tanım (Burulma fonksiyonu)

Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere $\tau: I \rightarrow R$ $\tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$ fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [13].

2.12. Tanım (Birim teğet vektörü)

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [13].

2.13. Tanım (Asli normal vektörü)

R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\vec{N}(s) = \frac{1}{(\kappa(s))} \vec{T}'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci asli normali denir. \vec{N} vektör alanına, α eğrisinin asli normal vektör alanı denir [13].

2.14. Tanım (Binormal vektör)

R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ eşitliğiyle tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir. \vec{B} vektör alanına, α eğrisinin binormal vektör alanı denir [13].

2.15. Tanım (Birim teğet vektör alanı)

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [13].

2.16. Tanım (Serre-Frenet türev formülleri)

$\alpha: I \rightarrow R^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Serre-Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ise,

$$\vec{T}' = \kappa \vec{N}$$

$$\vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\vec{B}' = -\tau \vec{N}$$

dir. Matris formu da $\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$ dir. Bu formüllere Serre-Frenet türev formülleri

denir [13].

2.17. Tanım (Ortogonal küme ve Ortonormal küme)

S, sıfırdan farklı vektörlerin kümesi olsun. Eğer S kümesinde herhangi iki vektör birbirine dik ise S kümesine ortogonaldır denir. S ortogonal iken S deki her bir vektör birim vektör ise S ye ortonormladır denir [14].

2.18. Tanım (Bishop çatı)

Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır. Bir eğrinin bazı noktalarında eğrilik sıfırlanabilir yani eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda alternatif bir çatı olan Bishop çatısı oluşturulabilir.

Bir eğrinin Frenet çatısında bulunan \vec{T} teğet vektörünü değiştirmeden diğer asli normal ve binormal vektörleri belli bir açı ile döndürülerek Bishop çatı veya paralel öteleme çatısı adı verilen alternatif bir çatı oluşturulur. Buna göre Bishop çatısında \vec{T} vektörü aynen alınır ve bu vektöre dik bir düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{\vec{M}_1, \vec{M}_2\}$ bazı seçilir. $\{\vec{M}_1, \vec{M}_2\}$ vektörlerinin türevleri sadece \vec{T} vektörüne bağlıdır. Böylece oluşturulan $\{\vec{T}, \vec{M}_1, \vec{M}_2\}$ çatısı dik bir çatı olur [10].

Buna göre Bishop veya paralel öteleme çatısı şu şekilde tanımlanabilir.

α , sıfırdan farklı κ eğrilikleriyle birlikte verilmiş birim hızlı bir uzay eğrisi ve \vec{M}_1, \vec{T} teğet vektörüne dik bir herhangi birim vektör olsun. Eğer $\vec{M}_2 = \vec{T} \times \vec{M}_1$ olacak şekilde alınırsa, $\{\vec{T}, \vec{M}_1, \vec{M}_2\}$ pozitif yönlendirilmiş ortonormal çatı olur ve bu çatıya Bishop çatı denir. Frenet ve Bishop çatıları arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{M}_1 \\ \vec{M}_2 \end{bmatrix}$$

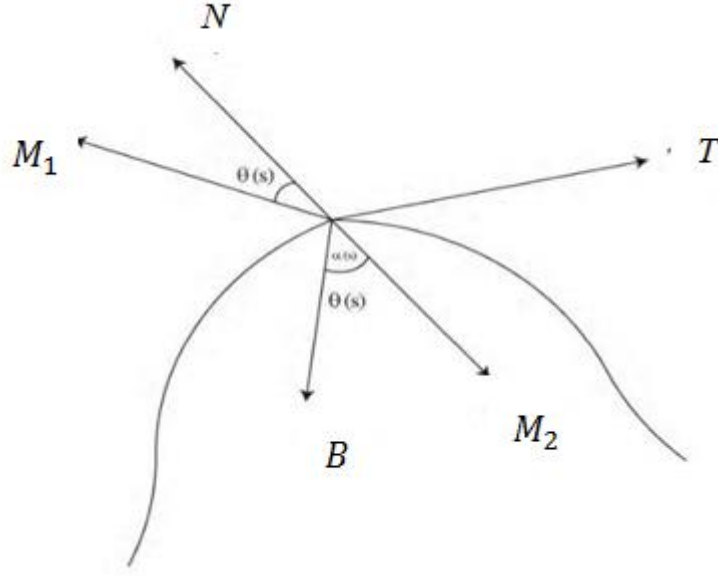
$$\vec{T} = \vec{T}$$

$$\vec{N} = \cos \theta \vec{M}_1 + \sin \theta \vec{M}_2$$

$$\vec{B} = -\sin \theta \vec{M}_1 + \cos \theta \vec{M}_2$$

Burada θ, \vec{N} ile \vec{M}_1 arasındaki açıdır [1].

3-boyutlu uzayda bishop vektörleri Şekil 2.3 de verilmiştir.



Şekil 2.3. 3-boyutlu uzayda bishop vektörleri

2.19. Tanım (İntegral eğrisi)

X, M de diferansiyellenebilir vektör alanı olsun. Herhangi bir $t \in I$ için $\alpha: I \rightarrow M$ diferansiyellenbilir eğrisi X in bir integral eğrisidir [12].

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$$

2.20. Teorem

α , sıfırdan farklı κ eğriliği ile verilmiş birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda κ ve τ Frenet eğrilikleri, K_1 ve K_2 Bishop eğrilikleri olmak üzere, Bishop çatısı için türev formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\vec{T}'(s) = K_1 \vec{M}_1(s) + K_2(s) \vec{M}_2(s)$$

$$\vec{M}_1'(s) = -K_1(s) \vec{T}(s)$$

$$\vec{M}_2'(s) = -K_2(s) \vec{T}(s)$$

Frenet ve Bishop çatıları arasındaki dönüşüm matrisi ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{M}_1' \\ \vec{M}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & K_2 \\ -K_1 & 0 & 0 \\ -K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{M}_1 \\ \vec{M}_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup bu matris anti-simetrik matristir. Frenet ve Bishop çatı arasındaki eğrilikler de

$$\kappa(s) = \sqrt{K_1^2(s) + K_2^2(s)}$$

$$\tau(s) = \frac{d\theta(s)}{d(s)}, \theta(s) = \arctan\left(\frac{K_2(s)}{K_1(s)}\right)$$

$$K_1(s) = \kappa(s) \cos \theta$$

$$K_2(s) = \kappa(s) \sin \theta$$

şeklinde olur [1].

2.21. Tanım (Helis)

R^3 uzayında bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı \vec{T} olsun. \vec{T} vektör alanı, belirli bir \vec{u} vektörü ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir helis adı verilir [9].

2.22. Tanım (Slant Helis)

$\alpha: I \rightarrow R^3$ birim vektörü $\vec{N}_1(s)$ olan düzenli eğrisinin belirli \vec{u} sabit vektörüyle yaptığı açı θ olsun. Her $s \in I$ $\langle \vec{N}_1(s), \vec{u} \rangle = \cos \theta$ ise α eğrisi bir slant helis adını alır [9].

3. 3-BOYUTLU UZAYDA BISHOP ÇATIYA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGELER

3.1. Regüler bir eğrinin Tip-2 Bishop Çatısı

$\alpha = \alpha(s)$; E^3 'de birim hızlı bir eğri olsun ve $\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$ onun Frenet – Serret

çatısı olsun. Yay uzunluğuna göre türevleri gösteren, nispeten paralel uyarlanmış bir çatı ifade edilirse,

$$\begin{bmatrix} \vec{\zeta}'_1 \\ \vec{\zeta}'_2 \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\epsilon_1 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\zeta}_1 \\ \vec{\zeta}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Bu çatıya “Tip-2 Bishop Çatısı” diyeceğiz. Bu yeni çatının Frenet – Serret çatısı ile ilişkisini araştırmak için önce;

$$\vec{B}' = -\tau \vec{N} = \epsilon_1 \vec{\zeta}_1 + \epsilon_2 \vec{\zeta}_2.$$

Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\tau = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}. \quad (3.2)$$

$\{\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{B}\}$ çatısına göre teğet vektörü aşağıdaki gibi yazılırsa;

$$\vec{T} = \sin \theta(s) \vec{\zeta}_1 - \cos \theta(s) \vec{\zeta}_2,$$

ve s 'ye göre düzenlenirse,

$$\vec{T}' = \kappa \vec{N} = \theta'(s) (\cos \theta(s) \vec{\zeta}_1 + \sin \theta(s) \vec{\zeta}_2) + \sin \theta(s) \vec{\zeta}'_1 - \cos \theta(s) \vec{\zeta}'_2. \quad (3.3)$$

$\vec{\zeta}'_1 = -\epsilon_1 \vec{B}$ ve $\vec{\zeta}'_2 = -\epsilon_2 \vec{B}$ ifadesi (3.3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\kappa \vec{N} = \theta'(s) (\cos \theta(s) \vec{\zeta}_1 + \sin \theta(s) \vec{\zeta}_2).$$

Yukarıdaki denkleminde $\theta'(s) = \kappa(s)$ alınırsa,

$$\vec{N} = \cos \theta(s) \vec{\zeta}_1 + \sin \theta(s) \vec{\zeta}_2.$$

Elde edilen denklemler dikkate alınarak, Frenet – Serret ve Tip-2 Bishop çatı arasındaki ilişki matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta(s) & -\cos \theta(s) & 0 \\ \cos \theta(s) & \sin \theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\zeta}_1 \\ \vec{\zeta}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Ayrıca (3.2) denkleminde uyarlanırsa;

$$1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{\tau^2} + \frac{\epsilon_2^2}{\tau^2}}, \quad (3.5)$$

ve böylece (3.5) denkleminde ifade edilirse,

$$\begin{cases} \epsilon_1(s) = -\tau \cos \theta(s), \\ \epsilon_2(s) = -\tau \sin \theta(s). \end{cases}$$

Aşağıdaki sonuca ulaşılır,

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right).$$

$\{\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{B}\}$ çatısı doğrultusunda ve τ ve $\theta(s) = \int_0^s \kappa(s) ds$, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi için kutupsal koordinatlarıdır. $\{\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{B}, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ kümesi, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin tip-2 Bishop değişmezleri olarak adlandırılır [11].

3.1.1. Önerme

$\varphi = \varphi(s)$, κ ve τ eğriliklerine sahip regüler bir eğri olsun. φ bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa} = c$ (*sabit*) olmasıdır [11].

İspat $\varphi = \varphi(s)$, bir frenet eğrisi olsun. $\frac{\tau}{\kappa} = c$ sabit ve $\vec{a} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \vec{T} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \vec{B}$ olsun.

$\vec{a}' = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \kappa \vec{N} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-c\kappa) \vec{N} = 0$ olduğundan \vec{a} sabit bir birim vektördür. $(0, \pi)$ açık aralığında $\cot \theta = c$ olacak şekilde bir θ sayısı vardır.

$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta = 1 + c^2$, $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + c^2$ olduğundan $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ ve $\cos \theta = \sin \theta \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} c$ olduğundan $\cos \theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ dir. $\langle \vec{T}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{T}, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \vec{T} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \vec{B} \rangle = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \cos \theta$ olduğundan θ sayısı $\vec{T}(t)$ vektörleri ile \vec{a} vektörü arasındaki sabit açıdır. Tersine \vec{a} sabit birim vektör ve $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere $\langle \vec{T}, \vec{a} \rangle = \cos \theta$ olsun. Frenet tabanına göre \vec{a} vektörü $\vec{a} = \langle \vec{T}, \vec{a} \rangle \vec{T} + \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle \vec{N} + \langle \vec{B}, \vec{a} \rangle \vec{B}$ dir. $\kappa \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \langle \kappa \vec{N}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{T}', \vec{a} \rangle = \langle \vec{T} \vec{a}' \rangle = 0$ ve $\kappa \neq 0$ olduğundan $\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = 0$ dir. $\vec{a} = \cos \theta \vec{T} + \langle \vec{B}, \vec{a} \rangle \vec{B}$ \vec{a} bir birim vektör olduğundan $\|\vec{a}\| = 1$ dir. $1 = \|\vec{a}\|^2 = \cos^2 \theta + \langle \vec{B}, \vec{a} \rangle^2$ dir. $\langle \vec{B}, \vec{a} \rangle = \mp \sin \theta$ dir. $\vec{a} = \cos \theta \vec{T} \mp \sin \theta \vec{B}$ dir. $0 = \vec{a}' = \cos \theta \kappa \vec{N} \mp \sin \theta (-\tau) \vec{N} = (\cos \theta \kappa \mp \sin \theta \tau) \vec{N}$ dir. $\vec{N} \neq 0$ olduğundan $\cos \theta \kappa \mp \sin \theta \tau = 0$ dir. $\frac{\tau}{\kappa} = \mp \cot \theta$ sabittir.

3.1.2. Önerme

$\varphi = \varphi(s)$, κ ve τ eğriliklerine sahip regüler bir eğri olsun. φ bir slant helistir ancak ve ancak

$$\sigma(s) = \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right] = c \text{ (sabit) [11].}$$

İspat $\varphi = \varphi(s)$, bir Frenet eğrisi olsun. $\vec{D} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \vec{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \vec{B}$ olsun.

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' = \frac{\tau'(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) - \tau(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2})'}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\tau' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} - \tau \frac{\kappa \kappa' + \tau \tau'}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\tau'(\kappa^2 + \tau^2) - \tau(\kappa \kappa' + \tau \tau')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\tau' \kappa^2 + \tau^2 \tau' - \tau \kappa \kappa' - \tau^2 \tau'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\tau' \kappa^2 - \tau \kappa \kappa'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\kappa(\tau' \kappa - \tau \kappa')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\kappa \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \kappa \sigma \text{ dir.}$$

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)' = \frac{\kappa'(\sqrt{\kappa^2+\tau^2})-\kappa(\sqrt{\kappa^2+\tau^2})'}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{\kappa'\sqrt{\kappa^2+\tau^2}-\kappa\frac{\kappa\kappa'+\tau\tau'}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{\kappa'(\kappa^2+\tau^2)-\kappa(\kappa\kappa'+\tau\tau')}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\kappa^2\kappa'+\kappa'\tau^2-\kappa^2\kappa'-\kappa\tau\tau'}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\kappa'\tau^2-\kappa\tau\tau'}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\tau(\kappa'\tau-\kappa\tau')}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\tau\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} = -\tau\sigma \text{ dir.}$$

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)' = \kappa\sigma \text{ ve } \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)' = -\tau\sigma \text{ olduğundan } \vec{D}' = \kappa\sigma\vec{T} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\kappa\vec{N} - \tau\sigma\vec{B} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(-\tau)\vec{N}$$

$$= -\sigma(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) = -\sigma\vec{N}' \text{ dir. } \sigma = c \text{ sabit olsun. } \vec{D}' = -c\vec{N}' \text{ dir.}$$

$\vec{a} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\vec{N} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\vec{D}$ olsun. $\vec{a}' = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\vec{N}' + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(-c)\vec{N}' = 0$ olduğundan \vec{a} bir birim vektördür. $(0, \pi)$ açık aralığında $\cot \theta = c$ olacak şekilde bir θ sayısı vardır.

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{ve} \quad \cos \theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{dır.} \quad \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{N}, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\vec{N} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\vec{D} \rangle = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} =$$

$\cos \theta$ olduğundan θ sayısı $\vec{N}(t)$ vektörleri ile \vec{a} vektörü arasındaki sabit açıdır. Tersine a sabit birim vektör ve $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere $\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \cos \theta$ olsun. $\vec{D} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{N}' = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} +$

$\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$ olsun. Her $t \in I$ için $(\vec{N}(t), \vec{D}(t), \vec{D}'(t))$ E^3 te pozitif ortonormal bir bazdır. $\vec{a} = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle \vec{N} + \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle \vec{D} + \langle \vec{D}', \vec{a} \rangle \vec{D}'$ dir. $\langle \vec{D}, \vec{a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\langle \vec{N}', \vec{a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle' = 0$ olduğundan $\vec{a} = \cos \theta \vec{N} + \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle \vec{D}$, $1 = \|\vec{a}\|^2 = \cos^2 \theta + \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle^2$ dir. $\langle \vec{D}, \vec{a} \rangle^2 = 1 - \cos^2 \theta$, $\langle \vec{D}, \vec{a} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, $\langle \vec{D}, \vec{a} \rangle = \mp \sin \theta$ dir. $\vec{a} = \cos \theta \vec{N} \mp \sin \theta \vec{D}$, $0 = \vec{a}' = \cos \theta \vec{N}' \mp \sin \theta (-\sigma)\vec{N}' =$

$(\cos \theta \mp \sin \theta \sigma)\vec{N}', \vec{N}' \neq 0$ olduğundan $\cos \theta \mp \sin \theta \sigma = 0$ dir. $\sigma = \mp \cot \theta$ sabittir.

3.2. Tip-2 Bishop Çatıya Göre Küresel Gösterge

3.2.1. ζ_1 'e Göre Küresel Göstergeler

Tanım 3.2.1.1 $\alpha = \alpha(s)$, E^3 'te regüler bir eğri olsun. Tip-2 Bishop çatısının ilk vektör alanını S^2 birim küresinin O merkezine çevirirsek, küresel bir görüntü $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ elde ederiz. Bu eğriye $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü veya $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin göstergesi denir.

$\varphi = \varphi(s_\varphi)$ olmak üzere; bir regüler $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Bishop küresel göstergesi $\vec{\zeta}_1$ 'dir.

Tip-2 Bishop ve Frenet- Serret sabitleri arasındaki durumu araştıralım. Öncelikle;

$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds_\varphi} \frac{ds_\varphi}{ds} = -\epsilon_1 \vec{B}$. s 'ye göre türevlenebilmeyi kısa bir çizgi ile, s_φ ' ye göre türevlenebilmeyi nokta ile gösterilsin. Eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa;

$$\vec{T}_\varphi = \vec{B}, \tag{3.6}$$

ve

$$\frac{ds_\varphi}{ds} = \epsilon_1. \tag{3.7}$$

(3.6) denkleminin türevi, $\vec{T}'_\varphi = \vec{T}_\varphi \frac{ds_\varphi}{ds} = \epsilon_1 \vec{\zeta}_1 + \epsilon_2 \vec{\zeta}_2$. Böylece, $\vec{T}_\varphi = -\vec{\zeta}_1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \vec{\zeta}_2$.

Buradan, φ' in birinci eğriliğini ve asli normali elde edilir.

$$\kappa_\varphi = \|\vec{T}'_\varphi\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2} \quad (3.8)$$

ve $\vec{N}_\varphi = -\frac{\vec{\zeta}_1}{\kappa_\varphi} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 \kappa_\varphi} \vec{\zeta}_2$. $\vec{T}_\varphi \times \vec{N}_\varphi$ ifadesi $\alpha = \alpha(s)$ 'nin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsünün binormal vektör alanını verir. $\vec{B}_\varphi = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 \kappa_\varphi} \vec{\zeta}_1 - \frac{1}{\kappa_\varphi} \vec{\zeta}_2$. Burulma formülü yardımı ile (3.8) denklemi dikkate alındığında;

$$\tau_\varphi = -\frac{\epsilon_1 (\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})'}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \quad (3.9)$$

elde edilir [11].

Sonuç 3.2.1.2 $\varphi = \varphi(S_\varphi)$, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. $\alpha = \alpha(s)$ 'nın tip-2 Bishop eğriliği oranı sabit ise ($\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \text{sabit}$) o zaman $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel göstergesi $\varphi(S_\varphi)$, oskülütör düzleminde bir dairedir [11].

İspat $\varphi = \varphi(s_\varphi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. (3.8) ve (3.9) denkleminde $\alpha = \alpha(s)$ 'nin tip-2 Bishop eğriliği oranı sabitse sırasıyla $\kappa_\varphi = \text{sabit}$ ve $\tau_\varphi = 0$ elde edilir. Öyleyse φ oskülütör düzleminde bir dairedir [11].

Teorem 3.2.1.3 $\varphi = \varphi(s_\varphi)$, bir $\alpha = \alpha(s)$ regüler eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. $\varphi(s_\varphi)$ Frenet-Serret değişmezleri arasında bir ilişki vardır ve $\alpha = \alpha(s)$ 'nin tip-2 Bishop eğriliği;

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \int_0^{s_\varphi} \kappa_\varphi^2 \tau_\varphi ds_\varphi. \quad (3.10)$$

İspat $\varphi = \varphi(s_\varphi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. Daha sonra denklem (3.7) ve (3.9) 'u kullanarak zincir kuralına göre,

$$\tau_\varphi = -\frac{\epsilon_1 \frac{d}{ds_\varphi} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \frac{ds_\varphi}{ds}}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}. \quad (3.11)$$

elde edilir [11].

(3.8)'dan (3.11)'e kadar yerine koyarsak ve her iki tarafın da integralini alırsak istediğimiz (3.10) denklemi elde edilir. Önerme 3.1.1 ve Önerme 3.1.2 önermeleri ışığında aşağıdaki teoremleri ispatız olarak ifade edilir.

Teorem 3.2.1.4 $\varphi = \varphi(s_\varphi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. Eğer φ bir genel helis ise α eğrisinin tip-2 Bishop eğriliğini sağlar [11].

$$\frac{\epsilon_1^2 (\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit}.$$

Teorem 3.2.1.5 $\varphi = \varphi(s_\varphi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. Eğer φ bir slant helis ise α eğrisinin tip-2 Bishop eğriliğini sağlar [11].

$$\left[\frac{\epsilon_1^2 (\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' - \frac{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^4}{\epsilon_1^3 \left[(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})'^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^3 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0(\text{sabit}).$$

Teorem 3.2.1.6 $\varphi = \varphi(s_\varphi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsü olsun. $\alpha = \alpha(s)$ regüler eğrisinin Tip 2 Bishop eğrilikleri aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar [11].

$$\frac{\epsilon_1^2 (\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \left[\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \right]' = \text{sabit}.$$

Sonuç 3.2.1.7 $\theta_\varphi = \int_0^{s_\varphi} \kappa_\varphi ds_\varphi$ dikkate alınarak ve matris dönüşümü kullanılarak $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ eğrisinin tip 2 Bishop üçyüzlü $\{\vec{\zeta}_{1\varphi}, \vec{\zeta}_{2\varphi}, \vec{B}_\varphi\}$ elde edilebilir [11].

3.2.2. ζ_2 'e Göre Küresel Göstergeler

Tanım 3.2.2.1 $\alpha = \alpha(s)$, \mathbb{E}^3 , de regüler bir eğri olsun. Tip 2 Bishop çatısının 2. Vektör alanını S^2 birim kürenin O merkezine dönüştürürsek; $\beta = \beta(s_\beta)$ küresel bir görüntüsünü elde ederiz. Bu eğriye $\vec{\zeta}_2$ Bishop küresel görüntüsü veya $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin göstergesi denir [11].

$\beta = \beta(s_\beta)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_2$ küresel görüntüsü olsun.

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds_\beta} = -\epsilon_2 \vec{B}.$$

$\vec{\zeta}_1$ Bishop küresel görüntüsüne benzer olarak

$$\vec{T}_\beta = \vec{B}, \quad (3.12)$$

ve

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \epsilon_2. \quad (3.13)$$

Yani, (3.12) denkleminin türevi alınır, $\vec{T}'_\beta = \vec{T}'_\beta \frac{ds_\beta}{ds} = \epsilon_1 \vec{\zeta}_1 + \epsilon_2 \vec{\zeta}_2$ elde edilir. Başka bir deyişle,

$$\vec{T}'_\beta = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2.$$

Buradan;

$$\kappa_\beta = \|\vec{T}'_\beta\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2}, \quad (3.14)$$

$$\text{ve } \vec{N}_\beta = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 \kappa_\beta} \vec{\zeta}_1 - \frac{\vec{\zeta}_2}{\kappa_\beta}, \vec{T}_\beta \times \vec{N}_\beta \text{ çarpımı, } \vec{B}_\beta = \frac{1}{\kappa_\beta} \vec{\zeta}_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 \kappa_\beta} \vec{\zeta}_2.$$

Burulma formülü yardımı ile;

$$\tau_\beta = \frac{\epsilon_2 (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})'}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}. \quad (3.15)$$

(3.14) ve (3.15) denklemleri açısından şu sonucu verilebilir:

Sonuç 3.2.2.2 $\beta = \beta(s_\beta)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_2$ küresel görüntüsü olsun. $\alpha = \alpha(s)$ tip 2 Bishop eğriliklerinin oranı sabitse $(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \text{sabit})$ o zaman ζ_2 Bishop küresel göstergesi $\beta(s_\beta)$, oskülatör düzleminde bir dairedir [11].

Teorem 3.2.2.3 $\beta = \beta(s_\beta)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_2$ küresel görüntüsü olsun. O halde $\beta(s_\beta)$ 'nin Frenet-Serret sabitleri ile $\alpha = \alpha(s)$ 'nın tip 2 Bishop eğrilikleri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır [11].

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \int_0^{s_\beta} \kappa_\beta^2 \tau_\beta ds_\beta = 0.$$

İspat: Teorem 3.2.1.3'ün kanıtına benzer bir şekilde yukarıdaki (3.13),(3.14) ve (3.15) denklemleri ile elde edilebilir. 3.1.1 ve 3.1.2 önermelerinin ışığında $\beta = \beta(s_\beta)$ eğrisi için aşağıdaki teoremler de verilebilir.

Teorem 3.2.2.4 $\beta = \beta(s_\beta)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_2$ küresel görüntüsü olsun. Eğer β bir genel helis ise α eğrisinin tip-2 Bishop eğriliklerini sağlar [11].

$$\frac{\epsilon_2^2 (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit}.$$

Teorem 3.2.2.5 $\beta = \beta(s_\beta)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_2$ küresel görüntüsü olsun. Eğer β bir slant helis ise α eğrisinin tip-2 Bishop eğriliklerini sağlar [11].

$$\left[\frac{\epsilon_2^2 (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' \frac{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^4}{\epsilon_2^3 \left[(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})'^2 + (\epsilon_1^2 \epsilon_2^2)^3 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0 \text{ (sabit.)}$$

Teorem 3.2.2.6 $\beta = \beta(s_\beta)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\vec{\zeta}_2$ küresel görüntüsü olsun. Regüler $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin tip-2 Bishop eğrilikleri aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar [11].

$$\frac{\epsilon_2^2 (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \left[\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \right]' = \text{sabit}.$$

Sonuç 3.2.2.7 $\theta_\beta = \int_0^{s_\beta} \kappa_\beta ds_\beta$ göz önünde bulundurularak ve matris dönüşümü kullanılarak $\beta = \beta(s_\beta)$ eğrisinin tip 2 Bishop üçyüzlü $\{\vec{\zeta}_{1\beta}, \vec{\zeta}_{2\beta}, \vec{B}_\beta\}$ 'sü elde edilebilir [11].

3.2.3. Binormal Bishop Küresel Göstergeler

Tanım 3.2.3.1 $\alpha = \alpha(s)$, \mathbb{E}^3 'de regüler bir eğri olsun. Tip 2 Bishop çatısının 3. Vektör alanını S^2 birim kürenin O merkezine dönüştürürsek; $\phi = \phi(S_\phi)$ küresel bir görüntüsünü elde edilir. Bu eğriye Binormal Bishop küresel görüntüsü veya $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin göstergesi denir [11]. Burada binormal küresel gösterge hakkında akıllara bir soru gelebilir, çünkü Frenet Serret ve tip 2 bishop çatısı ortak bir vektör alanına sahiptir. $\phi = \phi(S_\phi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Binormal

Bishop küresel görüntüsü olsun. ϕ 'nin s 'ye göre türevi alınabilir ve; $\phi' = \frac{d\phi}{ds} = \epsilon_1 \vec{\zeta}_1 + \epsilon_2 \vec{\zeta}_2$.

(3.1) de verilen tip 2 bishop çatısı vektör alanı açısından, küresel göstergenin teğet vektörünü aşağıdaki gibi elde edilir, $\vec{T}_\phi = \frac{\epsilon_1 \vec{\zeta}_1 + \epsilon_2 \vec{\zeta}_2}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}$. olmak üzere; $\frac{ds_\phi}{ds} = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} = \kappa(s)$. ϕ 'nin birinci eğriliğini belirlemek için, $\vec{T}_\phi = \frac{\epsilon_2^3}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)' \vec{\zeta}_1 + \frac{\epsilon_1^3}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)' \vec{\zeta}_2 - \vec{B}$.

Aşağıdaki sonuca varılır;

$$\kappa_\phi = \|\vec{T}_\phi\| = \sqrt{\left[\frac{\epsilon_2^3}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)'\right]^2 + \left[\frac{\epsilon_1^3}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)'\right]^2 + 1}. \quad (3.16)$$

Buradan asli normali, $\vec{N}_\phi = \frac{1}{\kappa_\phi} \left\{ \frac{\epsilon_2^3}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)' \vec{\zeta}_1 + \frac{\epsilon_1^3}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)' \vec{\zeta}_2 - \vec{B} \right\} \cdot \vec{T}_\phi \times \vec{N}_\phi$ çarpımı ile binormal vektör alanını elde edilir.

$$\vec{B}_\phi = \frac{1}{\kappa_\phi} \left\{ \left[\frac{\epsilon_1^4}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)' - \frac{\epsilon_2^4}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)' \right] \vec{B} - \left[\frac{\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \right] \vec{\zeta}_1 + \left[\frac{\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \right] \vec{\zeta}_2 \right\}.$$

Elde edilen denklemler vasıtasıyla Binormal Bishop küresel göstergenin burulmasını;

$$\tau_\phi = \frac{\left(-\epsilon_1 \{ 3\epsilon_2'(\epsilon_1\epsilon_1' + \epsilon_2\epsilon_2') - (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)[\epsilon_2'' - \epsilon_2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)] \} \right)}{\left[\frac{\epsilon_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)'}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^2} \right]^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^3}, \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak, (3.16) ve (3.17) tarafından tip 2 Bishop çatısı sabitlerine göre Binormal bishop küresel göstergelerin frenet serret sabitleri elde edilir [11].

Sonuç 3.2.3.2 $\phi = \phi(S_\phi)$, regüler bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Binormal Bishop küresel görüntüsü olsun. $\alpha = \alpha(s)$ 'nin tip 2 Bishop eğriliğinin oranı sabitse $\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \text{sabit}\right)$, $\beta = \beta(S_\beta)$ binormal bishop küresel göstergesi oskülatör düzleminde bir daire belirtir [11].

Sonuç 3.2.3.3 $\theta_\phi = \int_0^{S_\phi} \kappa_\phi ds_\phi$ göz önüne alıp, dönüşüm matrisi kullanılarak $\phi = \phi(S_\phi)$ eğrisinin tip 2 Bishop üçyüzlüsü $\left\{ \vec{\zeta}_{1\phi}, \vec{\zeta}_{2\phi}, \vec{B}_\phi \right\}$ elde edilebilir [11].

4. ÖRNEKLER

Bu kısımda yukarıda verilen tanım ve teoremlere göre uygulamalara yer verilecektir.

4.1. Örnek

İlk olarak E^3 de birim hızlı dairesel helisi ele alalım;

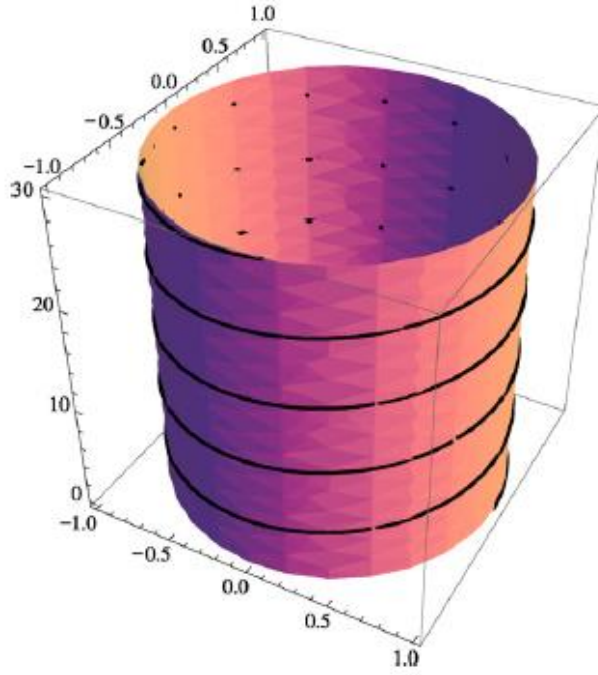
$$\xi = \xi(s) = \left(24 \cos \frac{s}{25}, 24 \sin \frac{s}{25}, \frac{7s}{25}\right).$$

Frenet-serret aparatları şöyle hesaplanabilir:

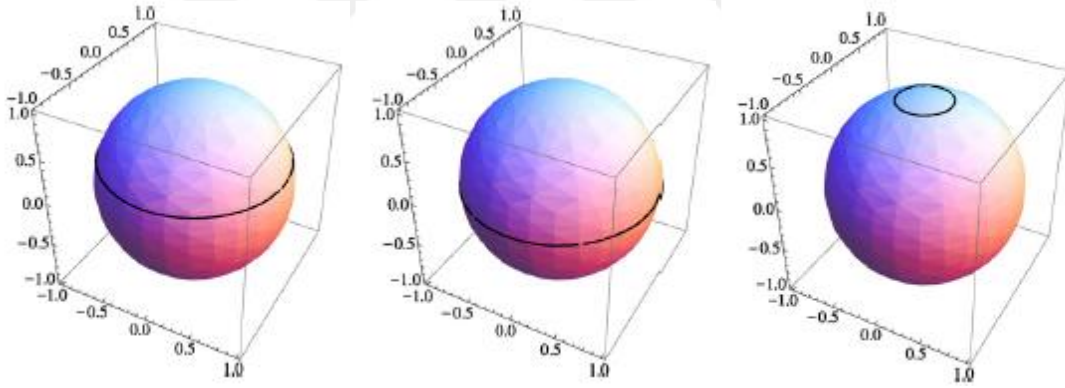
$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{24}{625}, \\ \tau = \frac{7}{625}, \\ \vec{T} = \frac{1}{25} \left(-24 \sin \frac{s}{25}, 24 \cos \frac{s}{25}, 7\right), \\ \vec{N} = \left(-\cos \frac{s}{25}, -\sin \frac{s}{25}, 0\right), \\ \vec{B} = \frac{1}{25} \left(7 \sin \frac{s}{25}, -7 \cos \frac{s}{25}, 24\right). \end{array} \right.$$

Sonuçlarımızı Frenet-Serret çatısına göre küresel göstergelerle karşılaştırmak için ξ nin küresel görüntülerini Şekil 4.1 deki gibi gösteriyoruz.

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{24}{625} ds = \frac{24s}{625}.$$



Şekil 4.1. $\xi=\xi(s)$, Dairesel helis



Şekil 4.2. Frenet-Serret çatısına göre $\xi=\xi(s)$ 'in küresel görüntüsü

Dönüşüm matrisini aşağıdaki gibi verebiliriz;

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \frac{24s}{625} & -\cos \frac{24s}{625} & 0 \\ \cos \frac{24s}{625} & \sin \frac{24s}{625} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\zeta}_1 \\ \vec{\zeta}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

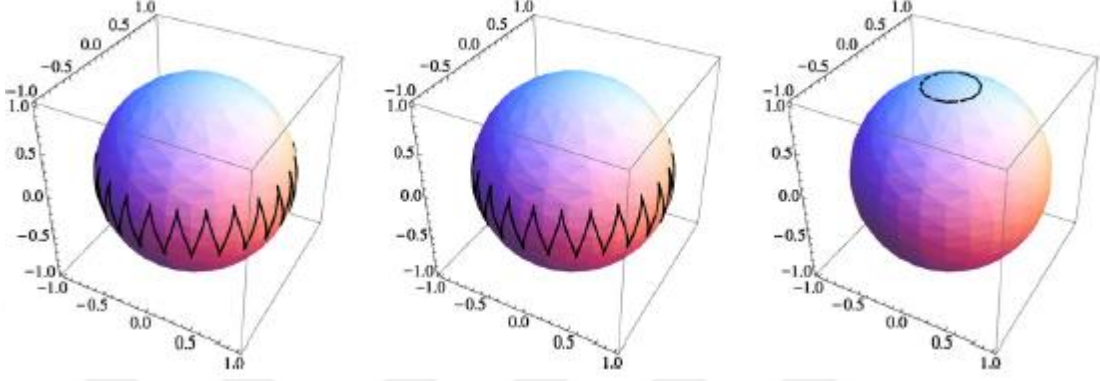
Cramer metodu yardımıyla ξ nin tip-2 bishop üç yüzlüğü;

$$\vec{\zeta}_1 = \left(-\cos \frac{24s}{625} \cos \frac{s}{25} - \frac{24}{25} \sin \frac{24s}{625} \sin \frac{s}{25}, \frac{24}{25} \cos \frac{s}{25} \sin \frac{24s}{625} - \cos \frac{24s}{625} \sin \frac{s}{25}, \frac{7}{25} \sin \frac{24s}{625} \right)$$

$$\vec{\zeta}_2 = \left(-\cos \frac{s}{25} \sin \frac{24s}{625} + \frac{24}{25} \cos \frac{24s}{625} \sin \frac{s}{25}, -\frac{24}{25} \cos \frac{24s}{625} \cos \frac{s}{25} - \sin \frac{24s}{625} \sin \frac{s}{25}, -\frac{7}{25} \cos \frac{24s}{625} \right).$$

$$\vec{B} = \frac{1}{25} \left(7 \sin \frac{s}{25}, -7 \cos \frac{s}{25}, 24 \right).$$

Böylece yeni küresel görüntüyü Şekil 4.3 deki gibi görebiliriz [11].



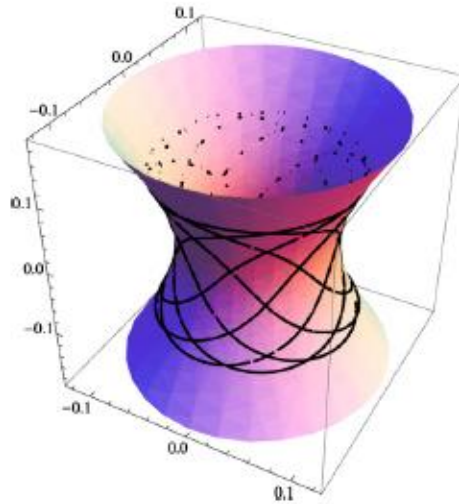
Şekil 4.3. $\xi=\xi(s)$ 'in ζ_1, ζ_2 ve binormal bishop küresel görüntüsü

4.2. Örnek

Bu kısımda tez çalışmasında ikinci olarak kullanılan uygulamaya yer verilecektir.

E^3 de birim hızlı $\omega(s) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ eğrisi için;

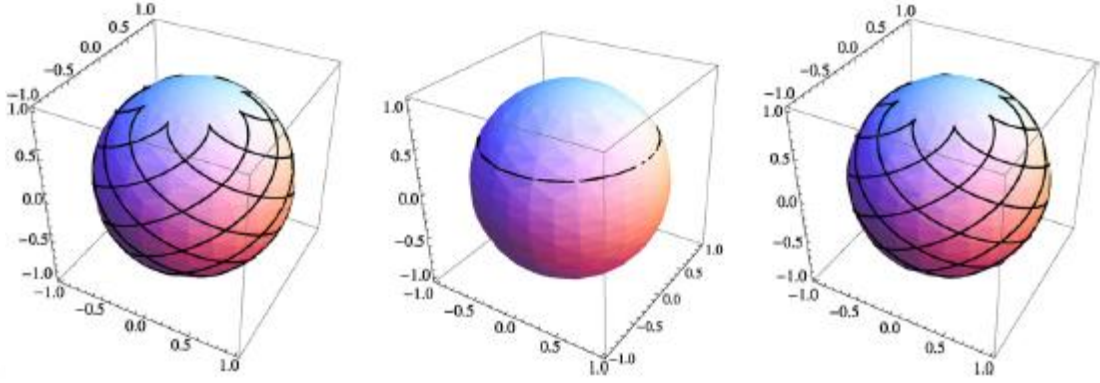
$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{25}{306} \sin 9s - \frac{9}{850} \sin 25s, \\ \omega_2 = -\frac{25}{306} \cos 9s + \frac{9}{850} \cos 25s, \\ \omega_3 = \frac{15}{136} \sin 8s \end{cases}$$



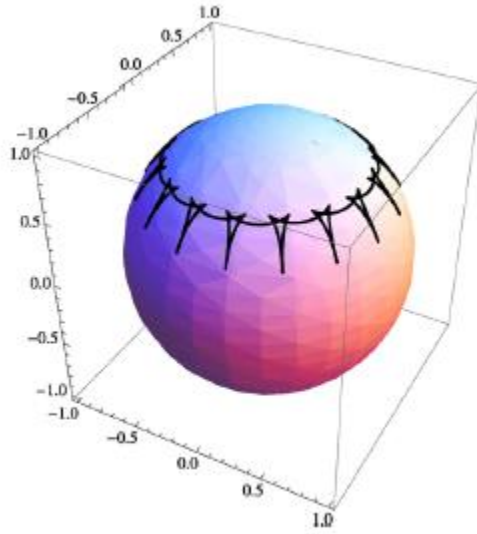
Şekil 4.4. $\omega = \omega(s)$ eğrisi

Bu eğrinin eğrilik fonksiyonları;

$$\begin{cases} \kappa(s) = -15 \sin 8s \\ \tau(s) = 15 \cos 8s \end{cases}$$



Şekil 4.5.Frenet-Serret çatısına göre $\omega = \omega(s)$ 'in küresel görüntüsü



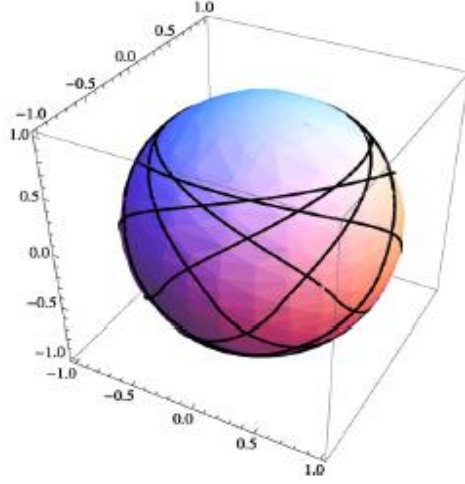
Şekil 4.6. $\omega = \omega(s)$ 'in ζ_1 Bishop Küresel Görüntüsü

Şekil 4.6 da verilen Bishop küresel görüntü için $\omega = \omega(s)$ in Frenet-Serret çatısını;

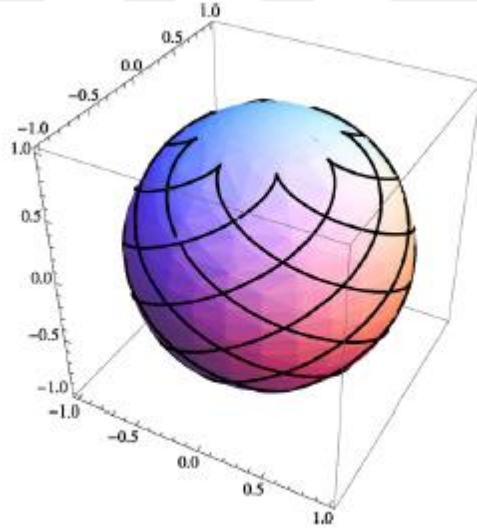
$$\begin{cases} \vec{T} = \left(\frac{25}{34} \cos 9s - \frac{9}{34} \cos 25s, \frac{25}{34} \sin 9s - \frac{9}{34} \sin 25s, \frac{15}{17} \cos 8s \right), \\ \vec{N} = \left(\frac{15}{34} \csc 8s (\sin 9s - \sin 25s), -\frac{15}{34} \csc 8s (\cos 9s - \cos 25s), \frac{8}{17} \right), \\ \vec{B} = \left(\frac{1}{34} (25 \sin 9s + 9 \sin 25s), \frac{1}{34} (-25 \cos 9s - 9 \cos 25s), -\frac{15}{17} \sin 8s \right). \end{cases}$$

İfade edebiliriz. Şekil 4.2 deki benzer durumda verilen $\omega = \omega(s)$ in Frenet-Serret çatısının küresel görüntülerini çizebiliriz.

$$\theta(s) = - \int_0^s 15 \sin(8s) ds = \frac{15}{8} \cos(8s).$$



Şekil 4.7. $\omega = \omega(s)$ 'in $\vec{\zeta}_2$ Bishop Küresel Görüntüsü



Şekil 4.8. $\omega = \omega(s)$ 'in Binormal Bishop Küresel Görüntüsü

Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 de elde ettiğimiz küresel görüntüler için $\omega = \omega(s)$ in dönüşüm matrisini

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{15}{8} \cos 8s\right) & -\cos\left(\frac{15}{8} \cos 8s\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{15}{8} \cos 8s\right) & \sin\left(\frac{15}{8} \cos 8s\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\zeta}_1 \\ \vec{\zeta}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}.$$

Yukarıdaki sistemin çözümü ile $\omega = \omega(s)$ birim hızlı eğrisinin tip-2 bishop küresel görüntüsünü Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5 deki gibi elde ederiz [11].

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, 3 Öklid uzayında bazı yeni ilişkili eğriler Bishop çatıya göre tanımlanmıştır. Bir Frenet eğrisinin Bishop çatısı yardımıyla yeni tip çatısı oluşturulmuş ve bu çatıya Tip-2 bishop çatısı denilmiştir. Bu yeni çatıya göre regüler bir eğrinin; teğet vektörü, asli normal ve binormali incelenerek; eğrilik ve burulma fonksiyonları bulunmuştur. Daha sonra matris dönüşümü yardımıyla bu eğrinin bishop üç yüzlüleri bulunarak küresel göstergeleri elde edilmiştir. Elde edilen bu küresel göstergelerin tip-2 bishop eğriliklerinin oranı sabit olduğu durumlarda oskülatör düzleminde bir daire belirttiği sonucuna varılmıştır.

Benzer düşünceyle; n -boyutlu Öklid uzayında bir Bishop çatıya göre küresel göstergeler araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Bishop L.R., “There is no more than one way to frame a curve”, *Mathematical Monthly*, vol. 82, no.3, 246-251, 1975.
- [2] Hanson, A. J., Ma, H., “Parallel Transport Approach to Curve Framing”, *Techreports*, TR425, January 1995.
- [3] Güven, İ. A, Nurkan, S. K., “The Relation Among Spherical Indicatrix Curves”, *International Mathematical Forum*, vol. 6, no. 25, 1209-1215, 2011.
- [4] Körpınar, T., Asil, V., Baş, S., “On characterization inextensible flows of curves according to Bishop frame in E^3 ”, *Revista Notas de Matematica*, vol. 7, no. 1, 37-45. 2011.
- [5] Bukcu, B., Karacan, M. K., “The Slant Helices According to Bishop Frame”, *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*, vol. 3, no. 11, 1010-1013. 2009.
- [6] Yılmaz, S., Özyılmaz, E., Turgut, M., “New Spherical Indicatrices and Their Characterizations”, *An. gt. Univ. Ovidius Constanta*, vol. 18, no. 2, 337-354, 2010.
- [7] A.T. Ali, “Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space”, *preprint, arXiv:0810.1464v1 [math.DG]*, 2008.
- [8] Macit, N., Düldül, M., “Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4 ”, *Turkish J. Math.*, 38, 1023-1037, 2014.
- [9] Gürhan, N., “Frenet eğrisi ile bağlantılı eğriler ve uygulamaları” *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi*, 2013.
- [10] Ayyıldız, N., Cöken, A. C., ve Yücesan, A., “A characterization of dual Lorentzian spherical curves in the dual Lorentzian space”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 11, no. 4, 999-1018, 2007.
- [11] Yılmaz, S., Turgut, M., “A new version of Bishop frame and an application to spherical images”, *Journal of Mathematics Analysis and applications*, 371, 764-776, 2010.
- [12] Körpınar, T., Sarıaydın, M. T., & Turhan, E., “Associated Curves According To Bishop Frame In Euclidean 3-Space”, *Advanced Modeling and Optimization*, 2013.
- [13] Sabuncuoğlu A., “Diferensiyel geometri”, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara, 2001.
- [14] Hacısalihoğlu H.H..1977. Lineer cebir. Fen Fakültesi Yayınları, Diyarbakır.

