



**HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN BAZI ALT
SINIFLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

Abdullah DURMUŞ



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN BAZI ALT SINIFLARININ
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

Abdullah DURMUŞ
0000-0002-3919-096X
JME-8671-2023
58690130100

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2024
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN BAZI ALT SINIFLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Abdullah DURMUŞ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez çalışmasında harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfının geometrik özellikleri incelenmiştir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümde, tezin amacı, kapsamı ve çalışmada kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ele alınan konu ile ilgili bazı çalışmalar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci mertebeden diferensiyel eşitsizlik içeren harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfları tanıtılmıştır. Bu sınıfların katsayı sınırları, büyüme tahminleri gibi bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu sınıfların konveks birleşim ve konvolüsyon özellikleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik dönüşüm, ünivalent fonksiyon, analitik fonksiyon, katsayı eşitsizlikleri, yarıçap problemi

2024, vi + 46 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

GEOMETRIC PROPERTIES OF SOME SUBCLASSES OF HARMONIC TRANSFORMATIONS

Abdullah DURMUŞ

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

In this thesis, the geometrical properties of the new subclass of harmonic functions are investigated. The study consists of five chapters.

In the first and second chapters, the aim and scope of the thesis and the basic definitions and theorems that will be used in the study are given.

In the third chapter, some studies related to the subject discussed are examined.

In the fourth chapter, new subclasses of harmonic functions containing second order differential inequality are introduced. Some properties of these classes such as coefficient bounds and growth estimates are obtained. In addition, convex combination and convolution properties of these classes are obtained.

In the fifth chapter, the results obtained in the study are evaluated.

Key words: harmonic transformation, univalent function, analytic function, coefficient inequalities, radius problem

2024, vi + 46 pages.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın gerekleőtirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaőan, kendisine ne zaman danıősam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım ęrencisi olmaktan gurur duyduğum kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e

lisansüstü çalıőmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, beraber çalıőmaktan mutluluk duyduğum kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Elif YAŞAR'a

yaőamım boyunca beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek Şekilde yetiőtirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük Őansım olan aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Bu alıőma sürecinde Tübitak 2210-A Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programına destekleri için teőekkürlerimi sunarım.

Abdullah DURMUŞ
12/01/2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	2
2.1. Analitik Fonksiyonlar.....	2
2.2. Harmonik Fonksiyonlar.....	6
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	9
3.1. $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ Sınıfı.....	9
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	24
4.1. $WH^0(\alpha, \gamma)$ Sınıfı.....	24
5. SONUÇ.....	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
\mathbb{C}	Kompleks düzlem
\mathbb{R}	Reel sayılar
\mathcal{U}	$\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$, Açık birim disk
\mathcal{B}	\mathcal{U} açık birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
\mathcal{S}	\mathcal{U} açık birim diskinde normalize edilmiş analitik ünivalent fonksiyonların sınıfı
\mathcal{P}	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathfrak{f} \prec \mathcal{F}$	\mathfrak{f} fonksiyonunun \mathcal{F} fonksiyonuna sabordine olması
\mathcal{S}^*	\mathcal{U} açık birim diskinde analitik, ünivalent ve yıldızlı fonksiyonların sınıfı
\mathcal{K}	\mathcal{U} açık birim diskinde analitik, ünivalent ve konveks fonksiyonların sınıfı
$J_f(z_0)$	\mathfrak{f} fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiye
\mathcal{H}	\mathcal{U} açık birim diskinde harmonik, ünivalent, yön koruyan, $h(0) = g(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ şeklinde normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı
\mathcal{H}^0	$g'(0) = b_1 = 0$ ile normalize edilmiş $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}$ fonksiyonlarının sınıfı
$\mathfrak{f}_1 * \mathfrak{f}_2$	\mathfrak{f}_1 ve \mathfrak{f}_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu (Hadamard Çarpımı)
$\mathfrak{f} \star \varphi$	\mathfrak{f} harmonik fonksiyonunun φ analitik fonksiyonu ile konvolüsyonu
\mathcal{H}^*	\mathcal{U} açık birim diskinde harmonik yıldızlı fonksiyonların sınıfı
\mathcal{KH}	\mathcal{U} açık birim diskinde harmonik konveks fonksiyonların sınıfı
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
$PH^0(\lambda)$	$Re\{h'(z) - \lambda\} > g'(z) $ şartını sağlayan $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ fonksiyonların sınıfı
$G(\alpha)$	$Re\left\{(1 - \alpha)\frac{h(z)}{z} + \alpha h'(z)\right\} > 0$ şartını sağlayan $h \in \mathcal{B}$ fonksiyonlarının sınıfı
$GH^0(\alpha; r)$	$Re\left\{(1 - \alpha)\frac{h(z)}{z} + \alpha h'(z)\right\} > \left (1 - \alpha)\frac{g(z)}{z} + \alpha g'(z)\right $ şartını sağlayan $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$G(\gamma, \delta, \lambda)$	$Re\left\{\gamma\frac{h(z)}{z} + \delta h'(z)\right\} > \lambda$ şartını sağlayan $h \in \mathcal{B}$ fonksiyonlarının sınıfı
$GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$	$Re\left\{\gamma\frac{h(z)}{z} + \delta h'(z) - \lambda\right\} > \left \gamma\frac{g(z)}{z} + \delta g'(z)\right $ şartını sağlayan $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$W_\beta(\alpha, \gamma)$	$Re\left\{(1 + 2\gamma - \alpha)\frac{h(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)h'(z) + \gamma zh''(z)\right\} > \beta$ eşitsizliğini sağlayan $h \in \mathcal{B}$ fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$	$Re\left\{(1 + 2\gamma - \alpha)\frac{h(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)h'(z) + \gamma zh''(z)\right\} > 0$ şartını sağlayan $h \in \mathcal{B}$ fonksiyonlarının sınıfı

$$\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma) \quad \text{Re} \left\{ (1 + 2\gamma - \alpha) \frac{h(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) h'(z) + \gamma z h''(z) \right\} > \left| (1 + 2\gamma - \alpha) \frac{g(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) g'(z) + \gamma z g''(z) \right|$$

şartını sağlayan $f \in \mathcal{H}^0$ fonksiyonlarının sınıfı



1. GİRİŞ

Kompleks analizin ilk çalışmaları 16. yüzyıla kadar uzanıyor. Euler kompleks sayıların ikinci ve üçüncü derece denklemlerin çözümünde kullanılmaya başlamasından yaklaşık 200 yıl sonra, kompleks sayıları içeren fonksiyonları ortaya koydu. Ancak 19. yüzyılın ortalarına kadar kompleks sayılar anlaşılması zor problemlerdi. Gauss'un geometrik temsili ve kompleks sayıları geliştirmesiyle popülerlik kazanan bu teori, Cauchy, Weierstrass ve Riemann'ın katkılarıyla matematiğin birçok alanını ilgilendiren bir dal haline geldi. Kompleks sayıların ilk ve eksiksiz matematiksel ifadesi Hamilton tarafından verildi. Daha sonra kompleks fonksiyonlar teorisi birçok bilim insanı tarafından incelenmiş ve uygulama alanı oldukça gelişmiş çok geniş bir konu haline gelmiştir. Tabii ki bu durumun sürdürülmesinin temel nedeni ve popülaritesi disiplinler arası bir uygulama alanına sahip olmasıdır. Bu konu sadece matematikte çalışanlar için değil, aynı zamanda mühendisler, fizikçiler ve yazılım geliştiricilerini de ilgilendirir.

Bu çalışmada harmonik fonksiyonların ikinci mertebeden diferensiyellenebilir yeni bir alt sınıfı tanımlandı. Bu sınıfa ait fonksiyonların genişleme tahminleri ve katsayı eşitsizlikleri, yarıçaplar, konvolüsyon ve konveks birleşim özellikleri incelendi.

Birinci bölümde; çalışılan alanın tarihi gelişimi, kullanım alanları ve tezin diğer bölümünde yapılacaklardan bahsedildi.

İkinci bölümde; sonraki bölümlerde kullanılacak olan harmonik ve analitik fonksiyonlar için temel teoremler ve tanımlar verildi.

Üçüncü bölümde; Çakmak ve diğerleri (2022) tarafından tanımlanan sınıf için elde edilen sonuçlar verildi.

Dördüncü bölümde; kompleks harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanıtıldı. Bu sınıfın, katsayı sınırları, genişleme tahminleri, yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları gibi özellikleri elde edildi. Ayrıca, tanımlanan sınıfın konvolüsyon ve konveks birleşim özellikleri de incelendi

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerin temelini oluşturacak teorem ve tanımlar verildi. Bu bölüm Ahlfors (1979), Goodman (1983), Clunie ve Sheil-Small (1984), Palka (1991), Joseph ve Donald (1997), Duren (2004), Başkan (2005), Zill ve Shanahan (2013) kaynaklarından hazırlandı.

2.1. Analitik Fonksiyonlar

2.1.1. Tanım. $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ biçiminde gösterilen küme, \mathbb{C} kompleks düzleminde açık birim disk olarak isimlendirilir.

2.1.2. Tanım. \mathcal{D} , \mathbb{C} kompleks düzleminde bir bölge olmak üzere, bu bölgeden alınan herhangi iki farklı noktanın f fonksiyonu altındaki resimleri de farklı ise f ye \mathcal{D} bölgesinde ünivalent fonksiyon denir. Eğer \mathcal{D} bölgesinin tamamında değil de bölgeden alınan bir z_0 noktasının komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında yerel ünivalent denir.

2.1.3. Teorem. f fonksiyonunun, \mathcal{D} bölgesinden alınan bir z_0 noktasının komşuluğunda yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli şart $f'(z_0) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2.1.4. Tanım. \mathcal{D} bölgesinden \mathbb{C} kompleks düzlemine tanımlı f fonksiyonu $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında sürekli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde z_0 noktasında kesişen yönlendirilmiş C_1 ve C_2 düzgün eğrilerinin z_0 noktasında oluşturduğu açı, C'_1 ve C'_2 görüntü eğrilerinin $f(z_0)$ noktasında oluşturduğu açıya resmedilirken hem yön olarak hem de büyüklük olarak korunursa f fonksiyonuna z_0 noktasında konform dönüşüm denir. Eğer f fonksiyonu \mathcal{D} bölgesindeki bütün noktalarda konform ise f fonksiyonuna \mathcal{D} bölgesinde konformdur denir.

2.1.5. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). \mathcal{D} , \mathbb{C} kompleks düzlemin tamamını kapsamayan ($z_0 \in \mathcal{D}$ koşulunu sağlayan) basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in \mathcal{D}$ olsun.

Böylece \mathcal{D} bölgesini \mathcal{U} üzerine birebir olarak resmeden ve $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ özelliğini sağlayan sadece bir f fonksiyonu vardır (Riemann, 1851).

2.1.6. Tanım. \mathcal{U} açık birim diskinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalizasyona sahip analitik fonksiyonların sınıfı \mathcal{B} olarak gösterilsin. Bu takdirde \mathcal{B} sınıfına ait her f fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m + \dots = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m \quad (2.1)$$

(2.1) ile verilen seri açılıma sahiptir. Ayrıca, \mathcal{B} sınıfındaki ünivalent fonksiyonlarının sınıfı \mathcal{S} ile ifade edilir.

2.1.7. Tanım. $z \in \mathcal{U}$ için $Re\{f(z)\} > 0$ olacak şekilde, \mathcal{U} açık birim diskinde tek değerli, analitik ve

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_m z^m + \dots = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m \quad (2.2)$$

(2.2) ile verilen seri açılıma sahip reel kısmı pozitif f fonksiyonlarının sınıfı \mathcal{P} ile gösterilir.

2.1.8. Teorem. $m \geq 1$ şartını sağlayan m tam sayısı için (2.2) ile verilen açılıma sahip f fonksiyonu \mathcal{P} sınıfına ait ise $|p_m| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizlik kesindir (Carathéodory, 1907).

2.1.9. Tanım. $m \rightarrow \infty$ için $u_m \rightarrow 0$ ve $0 \leq \dots \leq u_{m-1} - u_m \leq \dots \leq u_1 - u_2 \leq u_0 - u_1$ şartını sağlayan sifıra eşit veya sıfırdan büyük gerçel $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$ dizisine konveks sıfır dizisi denir.

2.1.10. Lemma. $\{v_m\}_{m=0}^{\infty}$ şeklinde verilen dizi konveks sıfır dizisi olsun.

$$\vartheta(z) = \frac{v_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} v_m z^m$$

şeklinde verilen $\vartheta(z)$ fonksiyonu \mathcal{U} da analitiktir ve $Re\{\vartheta(z)\} > 0$ eşitsizliğini sağlar (Fejer, 1925).

2.1.11. Lemma. \mathcal{P} , \mathcal{U} açık birim diskinde $\mathcal{P}(0) = 1$ şeklinde, analitik ve $Re\{\mathcal{P}(z)\} > \frac{1}{2}$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, \mathcal{U} da analitik her f fonksiyonu için $\mathcal{P} * f$ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ nun konveks örtüsünde değer alır (Singh ve Singh, 1989).

2.1.12. Teorem (Schwarz Lemma). ω , $\omega: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ biçiminde tanımlı, $z \in \mathcal{U}$ için $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| \leq 1$ şartlarını sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Böylece, $z \in \mathcal{U}$ noktaları için $|\omega'(0)| \leq 1$ ve $|\omega(z)| \leq |z|$ dir. Üstelik $z_0 \in \mathcal{U}$ ($z_0 \neq 0$) için $|\omega(z_0)| \leq |z_0|$ eşitsizliği sağlanır ise k , $|k| = 1$ sabit olmak üzere ω fonksiyonu $\omega(z) = kz$ şeklinde yazılır.

2.1.13. Teorem. f ve \mathcal{F} fonksiyonları \mathcal{U} açık birim diskinde tek değerli analitik ve ünivalent olsun. Bu durumda \mathcal{U} açık birim diskinde $f(z) < \mathcal{F}(z)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f(z) = \mathcal{F}(\omega(z))$ şeklinde Schwarz Lemma koşulunu sağlayan bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

2.1.14. Tanım. Kompleks düzlemde bir \mathcal{D} kümesinin w_0 noktasından çıkan her bir ışının, \mathcal{D} kümesinin içi ile kesişimi ya bir ışın ya da bir doğru parçası ise \mathcal{D} kümesine, w_0 noktasına göre yıldızlı küme denir.

2.1.15. Tanım. \mathcal{U} açık birim diskini yıldızlı bir bölgeye dönüştüren ünivalent ve analitik fonksiyonların sınıfı \mathcal{S}^* ile gösterilir.

2.1.16. Teorem. f fonksiyonu, $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}: |z| \leq \mathcal{R}$, $\mathcal{R} > 0$ kapalı bölgesinde tek değerli, analitik, ünivalent ve $f(0) = 0$ özelliğinde olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun, $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ kapalı

bölgesini yıldızlı bir bölgeye dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul $C_{\mathcal{R}}: |z| = \mathcal{R}$ üzerindeki her z için

$$Re \left\{ \frac{z\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} \right\} > 0 \quad (2.3)$$

olmasıdır (Nevanlinna, 1921).

2.1.17. Tanım. \mathbb{C} kompleks düzleminde bulunan bir \mathcal{D} kümesine ait her bir l_1, l_2 nokta çifti için l_1 ve l_2 noktalarını birleştiren doğru parçası yine \mathcal{D} kümesine ait oluyorsa \mathcal{D} ye konveks küme denir.

2.1.18. Tanım. \mathcal{U} açık birim diskini konveks bir bölgeye resmeden ünivalent ve analitik fonksiyonların sınıfı \mathcal{K} ile gösterilir.

2.1.19. Teorem. \tilde{f} fonksiyonu, $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}: |z| \leq \mathcal{R}, \mathcal{R} > 0$ kapalı bölgesinde tek değerli, analitik ve ünivalent olsun. Bu takdirde \tilde{f} fonksiyonunun $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ kapalı bölgesini konveks bir bölgeye dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul $C_{\mathcal{R}}: |z| = \mathcal{R}$ üzerindeki her z için

$$Re \left\{ 1 + \frac{z\tilde{f}''(z)}{\tilde{f}'(z)} \right\} > 0 \quad (2.4)$$

olmasıdır (Study, 1913).

\mathcal{U} da normalizasyonu sağlayan ünivalent fonksiyonların sınıfı \mathcal{S} ile tanımlandı. Daha sonra, yıldızlılık ve konvekslik şartını sağlayan ünivalent fonksiyonların sınıfı sırasıyla \mathcal{S}^* ve \mathcal{K} olarak tanımlandı. Tanımlanan bu üç sınıf arasında $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ bağıntısı vardır.

2.2. Harmonik Fonksiyonlar

2.2.1. Tanım. $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $c: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı c fonksiyonunun \mathcal{D} bölgesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri mevcut olsun. Bu takdirde, her $z \in \mathcal{D}$ için

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa c fonksiyonu \mathcal{D} de reel harmoniktir denir. Ayrıca $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = c + id$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu için c ve d fonksiyonları da \mathcal{D} bölgesinde reel harmonik fonksiyonlarsa f , \mathcal{D} bölgesinde kompleks harmoniktir denir.

2.2.2. Teorem (Kanonik Gösterim). \mathcal{D} bölgesinde f kompleks harmonik fonksiyonu, analitik kısmı h ve eş analitik kısmı g analitik fonksiyonları olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m + \sum_{m=2}^{\infty} \overline{b_m z^m} = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir.

2.2.3. Tanım. $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f = c + id$ fonksiyonu \mathcal{D} bölgesinde diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde

$$J_f = \begin{vmatrix} c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{vmatrix} = c_x d_y - c_y d_x$$

şeklinde ifade edilen J_f değerine f fonksiyonunun Jakobiyeni denir. Eğer f fonksiyonu analitik ise $J_f = |f'|^2$ dir.

Basit bağlantılı bir \mathcal{D} bölgesinde harmonik olan $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun Jakobiyeni $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = |h'|^2 - |g'|^2$ dir.

2.2.4. Tanım. f fonksiyonuna, $J_f > 0$ ise yön koruyan, $J_f < 0$ ise yönü ters çeviren denir.

2.2.5. Teorem. $f = k + \bar{g}$ kompleks harmonik fonksiyonunun \mathcal{U} açık birim diskinde yön koruyan ve yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul \mathcal{U} da $|g'(z)| < |k'(z)|$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

2.2.6. Tanım. \mathcal{U} açık birim diskinde tanımlı harmonik, ünivalent, yön koruyan ve $k(0) = g(0) = 0$ ile $k'(0) = 1$ şeklinde normalize edilmiş, kompleks harmonik fonksiyonların sınıfı \mathcal{H} ile gösterilir.

2.2.7. Tanım. \mathcal{H} sınıfından alınan ve $g'(0) = b_1 = 0$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı \mathcal{H}^0 ile gösterilir. \mathcal{H}^0 sınıfına ait bir f fonksiyonu, k ve g fonksiyonları \mathcal{U} açık birim diskinde analitik ve

$$k(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m, g(z) = \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m \quad (2.5)$$

olmak üzere $f = k + \bar{g}$ şeklinde yazılır.

\mathcal{S}, \mathcal{H} ve \mathcal{H}^0 olarak tanımlanan fonksiyon sınıfları için $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}$ ilişkisi vardır.

2.2.8. Tanım (Hadamard Çarpımı). $t = 1, 2$ için

$$f_t(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m,t} z^m + \sum_{m=2}^{\infty} \overline{b_{m,t} z^m} \quad (2.6)$$

(2.6) ile verilen seri açılımına sahip f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m,1} a_{m,2} z^m + \sum_{m=2}^{\infty} \overline{b_{m,1} b_{m,2} z^m}$$

ile tanımlanır. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonlarının eş analitik kısımları sıfır alındığı takdirde analitik fonksiyonların konvolüsyonu elde edilir.

2.2.9. Tanım. \mathcal{U} da tanımlı φ analitik fonksiyonu ile $f = h + \overline{g}$ kompleks harmonik fonksiyonunun konvolüsyonu

$$f * \varphi = h * \varphi + \overline{g * \varphi}$$

biçiminde tanımlanır (Goodloe, 2002).

2.2.10. Tanım. \mathcal{H} (veya \mathcal{H}^0) sınıfındaki f fonksiyonlarının görüntü kümesi orijine göre yıldızlı ise f fonksiyonuna harmonik yıldızlı fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf \mathcal{H}^* (veya $\mathcal{H}^{*,0}$) ile gösterilir.

2.2.11. Tanım. \mathcal{H} (ya da \mathcal{H}^0) sınıfındaki f fonksiyonlarının görüntü kümeleri konveks bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf \mathcal{KH} (ya da \mathcal{KH}^0) ile gösterilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Ponnusamy ve diğerleri (2013), $z \in \mathcal{U}$ için $Re\{k'(z)\} > |g'(z)|$ eşitsizliğini sağlayan kompleks harmonik fonksiyonların sınıfını PH^0 olarak tanımladı ve PH^0 sınıfına ait fonksiyonların ünivalent oldukları sonucuna vardı. Li ve Ponnusamy (2013a, 2013b), $z \in \mathcal{U}$ ve $\lambda < 1$ için $Re\{k'(z) - \lambda\} > |g'(z)|$ koşulunu sağlayan kompleks harmonik fonksiyonların sınıfını $PH^0(\lambda)$ olarak tanımladı. Chichra (1977), $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \alpha$ için $Re\left[(1 - \alpha)\frac{k(z)}{z} + \alpha k'(z)\right] > 0$ şartını sağlayan analitik fonksiyonların sınıfını tanıttı ve $G(\alpha)$ olarak gösterdi.

Yakın zamanlarda, Liu and Yang (2019), $\alpha \geq 0$ ve $0 < r \leq 1$ olmak üzere $GH^0(\alpha; r) = \left\{f \in \mathcal{H}^0: Re\left[(1 - \alpha)\frac{k(z)}{z} + \alpha k'(z)\right] > \left|(1 - \alpha)\frac{g(z)}{z} + \alpha g'(z)\right|, |z| < r\right\}$ sınıfını tanımladı ve $GH^0(\alpha; r)$ sınıfının katsayı tahminleri, büyüme tahminleri ve geometrik özelliklerini araştırdı. Özel olarak $GH^0(\alpha; 1)$ sınıfı, bazı $\alpha \geq 0$ değerleri için $G(\alpha)$ sınıfı ile yakından ilişkilidir. Daha sonralarda, Wang ve diğerleri (2006), $G(\alpha)$ sınıfının daha genel hali ile $\gamma, \delta > 0$, $0 \leq \lambda < \gamma + \delta \leq 1$ ve $z \in \mathcal{U}$ olacak şekilde $Re\left[\gamma\frac{k(z)}{z} + \delta k'(z)\right] > \lambda$ şartını sağlayan $k(z)$ analitik fonksiyonlarının sınıfını $G(\gamma, \delta, \lambda)$ olarak tanıttı. Çakmak ve diğerleri (2022), harmonik fonksiyonlar için $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfını tanıttı ve bazı geometrik özelliklerini inceledi.

Bu bölümde, $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfında elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların elde edilmesinde kullanılan yöntemler verildi.

3.1. $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ Sınıfı

Çakmak ve diğerleri (2022), $\alpha > 0$ için $GH^0(\alpha; 1)$ sınıfının genel hali olarak $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfını tanıttı ve bu sınıfa ait fonksiyonların büyüme teoremi, katsayı sınırları, konvolüsyon altında kapalılık ve konveks konvolüsyon gibi temel özelliklerini inceledi. Bu bölümde Çakmak ve diğerleri (2022) tarafından yapılan bu çalışmada tespit edilen sonuçlar verildi.

3.1.1. Tanım. $z \in \mathcal{U}$, $\alpha \geq 0$, $\delta > 0$ ve $0 \leq \lambda < \gamma + \delta \leq 1$ için

$$\operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(z)}{z} + \delta k'(z) - \lambda \right] > \left| \gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right|$$

eşitsizliğini sağlayan $f = k + \bar{g} \in \mathcal{H}^0$ fonksiyonlarının sınıfı $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olarak gösterildi (Çakmak ve diğerleri, 2022).

3.1.2. Teorem. $f = k + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul her μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olmasıdır.

İspat. $f = k + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. $z \in \mathcal{U}$ ve her μ ($|\mu| = 1$) için

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + \delta (\mathcal{F}_\mu(z))' \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(z) + \mu g(z)}{z} + \delta (k(z) + \mu g(z))' \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(z)}{z} + \delta k'(z) + \mu \left(\gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right) \right] \\ &> \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(z)}{z} + \delta k'(z) \right] - \left| \gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right| \\ &> \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her bir μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu \in G(\gamma, \delta, \lambda)$.

Tersine $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde \mathcal{F}_μ analitik fonksiyonu $G(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfa ait olduğundan $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(z)}{z} + \delta k'(z) \right] > \operatorname{Re} \left[-\mu \left(\gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right) \right] + \lambda$$

yazılır. Buradan uygun her bir μ ($|\mu| = 1$) seçimi ile

$$\operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(z)}{z} + \delta k'(z) - \lambda \right] > \left| \gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right|$$

sonucu elde edilir. Bu takdirde $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ dir.

3.1.3. Teorem. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde, $m \geq 2$ için

$$|b_m| \leq \frac{\delta - \lambda + \gamma}{\delta m + \gamma} \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanır ve bu sonuç $f(z) = z + \frac{\delta - \lambda + \gamma}{\delta m + \gamma} z^m$ fonksiyonu için kesindir.

İspat. $f = k + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu durumda $0 \leq \rho < 1$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için $g(\rho e^{i\theta})$ fonksiyonunun seri açılımı kullanılarak

$$\rho^{m-1} [\delta m + \gamma] |b_m|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \gamma \frac{g(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} + \delta g'(\rho e^{i\theta}) \right| d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{k(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} + \delta k'(\rho e^{i\theta}) - \lambda \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\delta - \lambda + \gamma + \sum_{m=2}^{\infty} [\delta m + \gamma] a_m \rho^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \right] d\theta \\ &= \delta - \lambda + \gamma \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece $\rho \rightarrow 1^-$ için (3.1) eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $f(z) = z + \frac{\delta - \lambda + \gamma}{\delta m + \gamma} z^m$ fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

3.1.4. Teorem. $f = h + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde $m \geq 2$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\text{i. } |a_m| + |b_m| \leq \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma}$$

$$\text{ii. } \left| |a_m| - |b_m| \right| \leq \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma}$$

$$\text{iii. } |a_m| \leq \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma}.$$

Tüm bu sonuçlar kesindir ve eşitlik $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma} z^m$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. i. $f = h + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Böylece Teorem 3.1.2 gereği her bir μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu = h + \mu g \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ dir. Buradan, her μ ($|\mu| = 1$) ve $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left[\gamma \left(\frac{h(z) + \mu g(z)}{z} \right) + \delta (h(z) + \mu g(z))' \right] > \lambda$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\gamma \left(\frac{h(z) + \mu g(z)}{z} \right) + \delta (h(z) + \mu g(z))' = \lambda + (\delta - \lambda + \gamma)p(z) \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanacak şekilde \mathcal{U} açık birim diskinde reel kısmı pozitif olan $p(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m$ şeklinde açılıma sahip analitik bir p fonksiyonu vardır. (3.2) de elde edilen eşitlikte her iki tarafın katsayıları karşılaştırıldığında $m \geq 2$ için

$$(\delta m + \gamma)(a_m + \mu b_m) = (\delta - \lambda + \gamma)p_{m-1}$$

olarak bulunur. Böylece $m \geq 1$ için $|p_m| \leq 2$ olduğundan ve μ ($|\mu| = 1$) uygun bir seçimiyle **i** nin ispatı tamamlanır.

i deki adımlar uygulanarak **ii** ve **iii** ün ispatı yapılır. Bu sonuçlar

$f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma} z^m$ fonksiyonu için kesindir.

3.1.5. Teorem. $f \in \mathcal{H}^0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{m=2}^{\infty} (\delta m + \gamma)(|a_m| + |b_m|) \leq \delta - \lambda + \gamma \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ dir.

İspat. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}^0$ olsun. Verilen (3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{h(z)}{z} + \delta h'(z) - \lambda \right] &= \operatorname{Re} \left[\delta - \lambda + \gamma + \sum_{m=2}^{\infty} (\delta m + \gamma) a_m z^{m-1} \right] \\ &> \delta - \lambda + \gamma - \sum_{m=2}^{\infty} (\delta m + \gamma) |a_m| \\ &\geq \sum_{m=2}^{\infty} (\delta m + \gamma) |b_m| \\ &> \left| \sum_{m=2}^{\infty} (\delta m + \gamma) b_m z^{m-1} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right|$$

sonucu elde edilir. Böylece $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ dir.

3.1.6. Teorem. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde,

$$|z| + 2(\delta - \lambda + \gamma) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} |z|^m}{\delta m + \gamma} \leq |f(z)|,$$

$$|z| + 2(\delta - \lambda + \gamma) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{\delta m + \gamma} \geq |f(z)|$$

dir ve verilen eşitsizlikler $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2(-\lambda + \delta + \gamma)}{\delta m + \gamma} z^m$ fonksiyonu için kesindir.

İspat. $f = k + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Teorem 3.1.2 gereği her μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ dir. Bu takdirde,

$$\gamma \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + \delta \mathcal{F}_\mu'(z) = \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\omega(z)}{1 - \omega(z)} \quad (3.4)$$

olacak şekilde \mathcal{U} da $|\omega(z)| < 1$ ve $\omega(0) = 0$ olan analitik bir $\omega(z)$ fonksiyonu vardır. O halde verilen (3.4) eşitliğinden,

$$z^{\frac{\gamma}{\delta}} \mathcal{F}_\mu(z) = \frac{1}{\delta} \int_0^z \sigma^{\frac{\gamma}{\delta}} \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\omega(\sigma)}{1 - \omega(\sigma)} d\sigma \quad (3.5)$$

bulunur. (3.5) eşitliğinin sağ tarafında, $0 \leq \rho < 1$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için $\sigma = \rho e^{i\theta}$ yazılarak

$$z^{\frac{\gamma}{\delta}} \mathcal{F}_{\mu}(z) = \frac{1}{\delta} \int_0^{|z|} (\rho e^{i\theta})^{\frac{\gamma}{\delta}} \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\omega(\rho e^{i\theta})}{1 - \omega(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} d\rho$$

elde edilir. Buradan Schwarz Lemma kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left| z^{\frac{\gamma}{\delta}} \mathcal{F}_{\mu}(z) \right| &= \left| \frac{1}{\delta} \int_0^{|z|} (\rho e^{i\theta})^{\frac{\gamma}{\delta}} \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\omega(\rho e^{i\theta})}{1 - \omega(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} d\rho \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_0^{|z|} \rho^{\frac{\gamma}{\delta}} \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\rho}{1 - \rho} d\rho \end{aligned}$$

ve

$$|\mathcal{F}_{\mu}(z)| \leq |z| + 2(\delta - \lambda + \gamma) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{\delta m + \gamma}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left| z^{\frac{\gamma}{\delta}} \mathcal{F}_{\mu}(z) \right| &= \left| \frac{1}{\delta} \int_0^{|z|} (\rho e^{i\theta})^{\frac{\gamma}{\delta}} \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\omega(\rho e^{i\theta})}{1 - \omega(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} d\rho \right| \\ &\geq \frac{1}{\delta} \int_0^{|z|} \rho^{\frac{\gamma}{\delta}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma + \delta + (-2\lambda + \delta + \gamma)\omega(\rho e^{i\theta})}{1 - \omega(\rho e^{i\theta})} \right\} d\rho \\ &\geq \frac{1}{\delta} \int_0^{|z|} \rho^{\frac{\gamma}{\delta}} \frac{\gamma + \delta - (-2\lambda + \delta + \gamma)\rho}{1 + \rho} d\rho \end{aligned}$$

ve

$$|\mathcal{F}_\mu(z)| \geq |z| + 2(\delta - \lambda + \gamma) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m |z|^m}{\delta m + \gamma}$$

elde edilir. μ ($|\mu| = 1$), $z \in \mathcal{U}$ için

$$|z| + 2(\delta - \lambda + \gamma) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} |z|^m}{\delta m + \gamma} \leq |f(z)|$$

$$|z| + 2(\delta - \lambda + \gamma) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{\delta m + \gamma} \geq |f(z)|$$

sonucu elde edilir.

3.1.7. Lemma. $f = k + \bar{g}$, \mathcal{U} da yön koruyan harmonik bir dönüşüm olsun. Her bir μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g$ şeklindeki analitik fonksiyonlar açık birim diskte ünivalent ise f , \mathcal{U} da ünivalenttir (Hernández ve Martin, 2013).

3.1.8. Lemma. $\mathcal{F} \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olarak alınsın. Bu takdirde

$$\rho = \inf \left\{ \frac{\delta m + \gamma}{2m(\delta - \lambda + \gamma)} \right\}^{\frac{1}{m-1}}; m \geq 2$$

olmak üzere $\mathcal{F}(z)$ fonksiyonu $|z| \leq \rho$ diskinde ünivalenttir (Wang ve diğerleri, 2006).

3.1.9. Teorem. $f = k + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$, \mathcal{U} da yön koruyan harmonik bir dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\rho(\gamma, \delta, \lambda) = \inf \left\{ \frac{\delta m + \gamma}{2m(\delta - \lambda + \gamma)} \right\}^{\frac{1}{m-1}}; m \geq 2$$

olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonu $|z| \leq \rho(\gamma, \delta, \lambda)$ diskinde ünivalenttir.

İspat. $f = k + \bar{g} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde her bir μ ($|\mu| = 1$) için Teorem 3.1.2 gereği $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ dır. Böylece, Lemma 3.1.8 gereği her bir μ ($|\mu| = 1$) için $|z| \leq \rho(\gamma, \delta, \lambda)$ diskinde $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ fonksiyonu ünivalenttir. Böylece Lemma 3.1.7 gereği $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfındaki yön koruyan fonksiyonlar ünivalenttir.

3.1.10. Lemma. $f \in \mathcal{H}^0$ olsun. Eğer

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(|a_m| + |b_m|) \leq 1 \quad \text{ise } f, \mathcal{U} \text{ da yıldızlıdır,}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^2(|a_m| + |b_m|) \leq 1 \quad \text{ise } f, \mathcal{U} \text{ da konvektir}$$

(Silverman ve Silvia, 1999).

3.1.11. Teorem. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$, \mathcal{U} da yön koruyan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\frac{\rho}{1-\rho} - \rho \frac{\gamma}{\delta} \int_0^1 \frac{u^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1-\rho u} du = \frac{\delta}{2(\delta - \lambda + \gamma)}$$

denkleminin $(0,1)$ açık aralığındaki en küçük kökü ρ_1 olmak üzere $|z| < \rho_1$ diskinde f fonksiyonu yıldızlıdır.

İspat. $0 < \rho < 1$ iken

$$\check{f}_\rho(z) = \rho^{-1} \check{f}(\rho z) = \rho^{-1} k(\rho z) + \rho^{-1} \overline{g(\rho z)}$$

olmak üzere $z \in \mathcal{U}$ için $\check{f}_\rho(z)$ fonksiyonu

$$f_\rho(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m \rho^{m-1} z^m + \overline{\sum_{m=2}^{\infty} b_m \rho^{m-1} z^m}$$

şeklinde yazılır. Kolaylık sağlanması açısından

$$\zeta = \sum_{m=2}^{\infty} m(|a_m| + |b_m|) \rho^{m-1}$$

eşitliği alınır. Böylece Lemma 3.1.10 a göre $\rho < \rho_1$ iken $\zeta \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda, Teorem 3.1.4 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} \zeta &\leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma} \rho^{m-1} = \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\rho^m}{m + \frac{\gamma}{\delta}} \right]' \\ &= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\rho^{-\frac{\gamma}{\delta}} \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^\rho \tau^{m-1+\frac{\gamma}{\delta}} d\tau \right)' \\ &= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\rho^{-\frac{\gamma}{\delta}} \int_0^\rho \frac{\tau^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1-\tau} d\tau \right)' \\ &= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\gamma}{\delta} \rho^{-\frac{\gamma}{\delta}-1} \int_0^\rho \frac{\tau^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1-\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \rho \frac{\gamma}{\delta} \int_0^1 \frac{u^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1-\rho u} du \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\rho < \rho_1$ için $\zeta \leq 1$ bulunur.

3.1.12. Teorem. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{(2 - \frac{\gamma}{\delta})\rho - (1 - \frac{\gamma}{\delta})\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \rho \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 \int_0^1 \frac{u^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1 - \rho u} du = \frac{\delta}{2(\delta - \lambda + \gamma)}$$

denkleminin (0,1) açık aralığındaki en küçük kökü ρ_2 olmak üzere f , $|z| < \rho_2$ diskinde konvektir.

İspat. $0 < \rho < 1$ iken

$$\tilde{f}_\rho(z) = \rho^{-1}f(\rho z) = \rho^{-1}k(\rho z) + \rho^{-1}\overline{g(\rho z)}$$

olmak üzere $z \in \mathcal{U}$ için $\tilde{f}_\rho(z)$ fonksiyonu

$$\tilde{f}_\rho(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m \rho^{m-1} z^m + \overline{\sum_{m=2}^{\infty} b_m \rho^{m-1} z^m}$$

şeklinde yazılır. Kolaylık sağlanması açısından

$$\psi = \sum_{m=2}^{\infty} m^2 (|a_m| + |b_m|) \rho^{m-1}$$

eşitliği alınır. Böylece Lemma 3.1.10 a göre $\rho < \rho_2$ iken $\psi \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda, Teorem 3.1.4 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi &\leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^2 (\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma} \rho^{m-1} = \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m \rho^m}{m + \frac{\gamma}{\delta}} \right]' \\ &= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\frac{\rho^2}{1 - \rho} - \frac{\gamma}{\delta} \rho^{-\frac{\gamma}{\delta}} \int_0^\rho \frac{\tau^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1 - \tau} d\tau \right)' \\ &= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\frac{2\rho - \rho^2}{(1 - \rho)^2} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\rho}{1 - \rho} + \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^2 \rho^{-\frac{\gamma}{\delta}-1} \int_0^\rho \frac{\tau^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1 - \tau} d\tau \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta} \left(\frac{\left(2 - \frac{\gamma}{\delta}\right) \rho - \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right) \rho^2}{(1 - \rho)^2} + \rho \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 \int_0^1 \frac{u^{1+\frac{\gamma}{\delta}}}{1 - \rho u} d\tau \right)$$

elde edilir. Böylece, $\rho < \rho_2$ için $\psi \leq 1$ bulunur.

3.1.13. Teorem. $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

İspat. $i = 1, 2, \dots, k$ için $f_i = h_i + \overline{g_i} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ ve $\sum_{i=1}^k c_i = 1$ ($0 \leq c_i \leq 1$) olsun. $i = 1, 2, \dots, k$ için f_i fonksiyonlarının konveks birleşimi,

$$h(z) = z + \sum_{i=1}^k c_i h_i(z) \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{i=1}^k c_i \overline{g_i(z)}$$

için

$$f(z) = \sum_{i=1}^k c_i f_i(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklindedir. h ve g fonksiyonları \mathcal{U} açık birim diskinde analitik ve $h(0) = g(0) = h'(0) - 1 = g'(0) = 0$ normalizasyonuna sahiptir.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\gamma \frac{h(z)}{z} + \delta h'(z) - \lambda \right] &= \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^k c_i \left(\gamma \frac{h_i(z)}{z} + \delta h_i'(z) - \lambda \right) \right] \\ &> \sum_{i=1}^k c_i \left| \gamma \frac{g_i(z)}{z} + \delta g_i'(z) \right| \\ &\geq \left| \gamma \frac{g(z)}{z} + \delta g'(z) \right| \end{aligned}$$

olduğundan $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ elde edilir.

3.1.14. Lemma. $\mathcal{M} \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ ise $Re \left\{ \frac{\mathcal{M}(z)}{z} \right\} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\mathcal{M} \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olmak üzere $\mathcal{M}(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} A_m z^m$ olarak ele alınsın. Bu takdirde

$$Re \left[\delta + \gamma + \sum_{m=2}^{\infty} [\delta m + \gamma] A_m z^{m-1} \right] > \lambda \quad (z \in \mathcal{U})$$

dir veya açık birim diskte

$$\mathcal{N}(z) = 1 + \frac{1}{2(\delta - \lambda + \gamma)} \sum_{m=2}^{\infty} [\delta m + \gamma] A_m z^{m-1}$$

şeklinde ve $Re\{\mathcal{N}(z)\} > \frac{1}{2}$ şartını sağlayan bir $\mathcal{N}(z)$ fonksiyonu vardır. Diğer yandan, $m \geq 2$ için

$$v_0 = 1 \text{ ve } v_{m-1} = \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma}$$

olarak tanımlı gerçel $\{v_m\}_{m=0}^{\infty}$ dizisi konveks sıfır dizisidir. Bu takdirde, Lemma 2.1.10 gereği

$$\vartheta(z) = \frac{1}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma} z^{m-1}$$

şeklindeki fonksiyon \mathcal{U} da analitik ve $Re\{\vartheta(z)\} > 0$ dır. Bu takdirde,

$$\frac{\mathcal{M}(z)}{z} = \mathcal{N}(z) * \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2(\delta - \lambda + \gamma)}{\delta m + \gamma} z^{m-1} \right)$$

olduğundan, Lemma 2.1.11 kullanılarak $Re \left\{ \frac{\mathcal{M}(z)}{z} \right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir.

3.1.15. Lemma. $i = 1, 2$ için $\mathcal{M}_i \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde, $\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2 \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ dır.

İspat. $\mathcal{M}_1(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} A_m z^m$ ve $\mathcal{M}_2(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} B_m z^m$ olsun. Bu durumda, \mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$\mathcal{M}(z) = (\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2)(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} A_m B_m z^m$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $\mathcal{M}'(z) = \mathcal{M}_1'(z) * \frac{\mathcal{M}_2(z)}{z}$ olduğundan

$$\frac{1}{\delta - \lambda + \gamma} \left(\gamma \frac{\mathcal{M}(z)}{z} + \delta \mathcal{M}'(z) - \lambda \right) = \frac{1}{\delta - \lambda + \gamma} \left(\gamma \frac{\mathcal{M}_1(z)}{z} + \delta \mathcal{M}_1'(z) - \lambda \right) * \frac{\mathcal{M}_2(z)}{z}$$

yazılabilir. $\mathcal{M}_1 \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olduğundan

$$Re \left\{ \gamma \frac{\mathcal{M}_1(z)}{z} + \delta \mathcal{M}_1'(z) - \lambda \right\} > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

ve Lemma 3.1.14 gereği \mathcal{U} da $Re \left\{ \frac{\mathcal{M}_2(z)}{z} \right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir. Böylece Lemma 2.1.11 in

kullanılmasıyla \mathcal{U} da $Re \left\{ \gamma \frac{\mathcal{M}(z)}{z} + \delta \mathcal{M}'(z) - \lambda \right\} > 0$ bulunur. Dolayısıyla

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$ fonksiyonu $G(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfına aittir.

3.1.16. Teorem. $i = 1, 2$ için $f_i \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. Bu takdirde $f_1 * f_2, GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfına aittir.

İspat. $i = 1, 2$ için $f_i = k_i + \overline{g_i} \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu $f_1 * f_2 = k_1 * k_2 + \overline{g_1 * g_2}$ olarak tanımlıdır. $f_1 * f_2 \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olduğunu ispatlamak için her μ ($|\mu| = 1$) olmak üzere $F_\mu = k_1 * k_2 + \mu(g_1 * g_2) \in$

$G(\gamma, \delta, \lambda)$ olduğunu ispatlamak gerekir. Lemma 3.1.15 gereği $G(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfı konvolüsyon altında kapalı olduğundan

$$\mathcal{F}_1 = (\mathcal{k}_1 - \mathcal{g}_1) * (\mathcal{k}_2 - \mu \mathcal{g}_2) \text{ ve } \mathcal{F}_2 = (\mathcal{k}_1 + \mathcal{g}_1) * (\mathcal{k}_2 + \mu \mathcal{g}_2)$$

olmak üzere \mathcal{F}_1 ve \mathcal{F}_2 fonksiyonları $G(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfının elemanıdır. $G(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalı olduğundan

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) = \mathcal{k}_1 * \mathcal{k}_2 + \mu(\mathcal{g}_1 * \mathcal{g}_2)$$

$G(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfının elemanıdır. Dolayısıyla, $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

3.1.17. Teorem. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ ve φ analitik fonksiyonu $z \in \mathcal{U}$ için $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ özelliğinde ise $f \tilde{*} \varphi \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ dir.

İspat. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ ise her $\mu (|\mu| = 1)$ için $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{k} + \mu \mathcal{g} \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ dir. $f \tilde{*} \varphi \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ olduğunu ispatlamak için her $\mu (|\mu| = 1)$ olmak üzere $\mathcal{M} = \mathcal{k} * \varphi + \mu(\mathcal{g} * \varphi) \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ olduğunu ispatlamak gerekir. $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\mu * \varphi$ den

$$\frac{1}{\delta - \lambda + \gamma} \left(\gamma \frac{\mathcal{M}(z)}{z} + \delta \mathcal{M}'(z) - \lambda \right) = \frac{1}{\delta - \lambda + \gamma} \left(\gamma \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + \delta \mathcal{F}_\mu'(z) - \lambda \right) * \frac{\varphi(z)}{z}$$

yazılır. \mathcal{U} açık birim diskinde $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ve $Re\left[\gamma \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + \delta \mathcal{F}_\mu'(z) - \lambda\right] > 0$ olduğundan Lemma 2.1.11 gereği $\mathcal{M} \in G(\gamma, \delta, \lambda)$ elde edilir.

3.1.18. Sonuç. $f \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ ve $\varphi \in K$ ise $f \tilde{*} \varphi \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ dir.

İspat. $z \in \mathcal{U}$ için $\varphi \in K$ ise $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ dir. Böylece Teorem 3.1.17 gereği $f \tilde{*} \varphi \in GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Breaz ve diğerleri (2023) tarafından tanımlanan sınıfa ait fonksiyonların büyüme tahmini, katsayı sınırları, konveks birleşim ve konvolüsyon gibi bazı özellikleri araştırıldı. Tanımlanan sınıf ile Nagpal ve Ravichandran (2014), Ghosh ve Vasudevarao (2019), Rajbala ve Prajapat (2021) tarafından tanımlanan sınıflar arasındaki ilişkiler de verildi.

4.1. $WH^0(\alpha, \gamma)$ Sınıfı

Nagpal ve Ravichandran (2014), $z \in \mathcal{U}$ için $Re\{k'(z) + zk''(z)\} > |g'(z) + zg''(z)|$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların sınıfını WH^0 olarak tanımladı. Ghosh ve Vasudevarao (2019), $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \gamma < 1$ için $Re\{k'(z) + \gamma zk''(z)\} > |g'(z) + \gamma zg''(z)|$ koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $WH^0(\gamma)$ olarak tanımladı. Son zamanlarda, Rajbala ve Prajapat (2021), $z \in \mathcal{U}$ ve $\delta \geq 0$, $0 \leq \lambda < 1$ için $Re\{k'(z) + \delta zk''(z) - \lambda\} > |g'(z) + \delta zg''(z)|$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların sınıfı olan $WH^0(\delta, \lambda)$ sınıfını tanıttı. Tüm bu geçmiş çalışmaların dışında günümüzde devam eden birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan biri olan Yaşar ve Yalçın (2021), $z \in \mathcal{U}$ ve $\lambda \geq \delta \geq 0$ için $Re\{h'(z) + \lambda zh''(z) + \delta z^2 h'''(z)\} > |g'(z) + \lambda zg''(z) + \delta z^2 g'''(z)|$ şeklindeki eşitsizliği sağlayan fonksiyonların sınıfını $RH^0(\lambda, \delta)$ olarak tanımladı.

Rosihan ve diğerleri (2018), $\alpha \geq \gamma \geq 0$ ve $\beta < 1$ için

$$Re\left\{(1 - \alpha + 2\gamma)\frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma zk''(z)\right\} > \beta \quad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlayan k analitik fonksiyonlarının sınıfını $W_\beta(\alpha, \gamma)$ ile gösterdi. Bu sınıfın özel halini ilk çalışan Brickman ve diğerleri (1971) dir. $W_\beta(\alpha, \gamma)$ sınıfına ait parametrelerin özel seçimiyle elde edilen $W_\beta(1,0)$ sınıfı Hallenbeck (1974) tarafından, $W_\beta(3,1)$ sınıfı Chicra (1977) tarafından çalışıldı. Ayrıca, (4.1) eşitsizliğinde $\beta = 0$ seçilerek

$$Re \left\{ (1 - \alpha + 2\gamma) \frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma zk''(z) \right\} > 0$$

elde edilir. Bu koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı da $\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ ile ifade edilir.

4.1.1. Tanım. $\alpha \geq \gamma \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & Re \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma zk''(z) \right\} \\ & > \left| (2\gamma - \alpha + 1) \frac{g(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)g'(z) + \gamma zg''(z) \right| \end{aligned}$$

şartını sağlayan $f = k + \bar{g}$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olarak gösterilir (Breaz ve diğerleri, 2023).

$\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfında parametrelerin özel seçilmesiyle Liu ve Yang (2019) tarafından tanımlanan $GH^0(\alpha; r)$ sınıfı için $\alpha \geq 0$ ve $r = 1$, Çakmak ve diğerleri (2022) tarafından tanımlanan $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfı için $\gamma = 1 - \alpha$, $\delta = \alpha$ ve $\lambda = 0$ şeklinde seçilmesiyle $\mathcal{WH}^0(\alpha, 0)$ sınıfı elde edilir. Bu şekilde elde edilecek harmonik fonksiyon sınıfları ile daha önce tanımlanmış sınıflar arasındaki bazı ilişkiler de aşağıda verilmiştir.

- i. $\mathcal{WH}^0(0,0) = WH^0$ (Nagpal ve Ravichandran, 2014)
- ii. $\mathcal{WH}^0(2\gamma + 1, \gamma) = WH^0(\gamma)$ (Ghosh ve Vasudevarao, 2019)
- iii. $\mathcal{WH}^0(2\gamma + 1, \gamma) = WH^0(\delta, 0)$ (Rajbala ve Prajapat, 2021)
- iv. $\mathcal{WH}^0(2\gamma + 1, 0) = PH$ (Li ve Ponnusamy, 2013a)

4.1.2. Teorem. $f = k + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olması için gerek ve yeter şart her bir $\mu (|\mu|) = 1$ için $\mathcal{F}_\mu = k + \mu g \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olmasıdır.

İspat. $f = k + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Her bir $\mu (|\mu|) = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{F}_\mu'(z) + \gamma z \mathcal{F}_\mu''(z) \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{(\mathcal{h}(z) + \mu \mathcal{g}(z))}{z} \right. \\
&\quad \left. + (\alpha - 2\gamma) (\mathcal{h}(z) + \mu \mathcal{g}(z))' + \gamma z (\mathcal{h}(z) + \mu \mathcal{g}(z))'' \right\} \\
&> \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{h}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{h}'(z) + \gamma z \mathcal{h}''(z) \right\} \\
&\quad - \left| \mu \left((2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{g}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{g}'(z) + \gamma z \mathcal{g}''(z) \right) \right| > 0 \quad (z \in \mathcal{U})
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece her bir μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$.

Tersine $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{h} + \mu \mathcal{g} \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde, $z \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{h}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{h}'(z) + \gamma z \mathcal{h}''(z) \right\} \\
&+ \operatorname{Re} \left\{ \mu \left((2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{g}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{g}'(z) + \gamma z \mathcal{g}''(z) \right) \right\} > 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{h}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{h}'(z) + \gamma z \mathcal{h}''(z) \right\} \\
&> \operatorname{Re} \left\{ -\mu \left((2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{g}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{g}'(z) + \gamma z \mathcal{g}''(z) \right) \right\}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece, μ ($|\mu| = 1$) nün uygun bir seçimiyle

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma z k''(z) \right\} \\ & > \left| (2\gamma - \alpha + 1) \frac{g(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)g'(z) + \gamma z g''(z) \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu durumda $f = k + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ dır.

4.1.3. Teorem. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde, $m \geq 2$ için

$$|b_m| \leq \frac{1}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanır ve bu sonuç $f(z) = z + \frac{1}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \bar{z}^m$ fonksiyonu için kesindir.

İspat. $f = k + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. $0 \leq \rho < 1$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için $g(\rho e^{i\theta})$ fonksiyonunun seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} & \rho^{m-1} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) |b_m| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| (2\gamma - \alpha + 1) \frac{g(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} + (\alpha - 2\gamma)g'(\rho e^{i\theta}) + \gamma \rho e^{i\theta} g''(\rho e^{i\theta}) \right| d\theta \\ & < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{k(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} + (\alpha - 2\gamma)k'(\rho e^{i\theta}) + \gamma \rho e^{i\theta} k''(\rho e^{i\theta}) \right\} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) a_m \rho^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \right\} d\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece $\rho \rightarrow 1^-$ için (4.2) eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$f(z) = z + \frac{1}{1+(-1+m)[\alpha+\gamma(-2+m)]} \bar{z}^m \text{ fonksiyonu için eşitlik sağlanır.}$$

4.1.4. Teorem. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde $m \geq 2$ için

$$\text{i. } |a_m| + |b_m| \leq \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]}$$

$$\text{ii. } \left| |a_m| - |b_m| \right| \leq \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]}$$

$$\text{iii. } |a_m| \leq \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Tüm bu sonuçlar kesindir ve eşitlik

$$f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{1+(-1+m)[\alpha+\gamma(-2+m)]} z^m \text{ fonksiyonu için sağlanır.}$$

İspat. i. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde Teorem 4.1.2 gereği her bir $\mu (|\mu| = 1)$ için $\mathcal{F}_\mu = h + \mu g \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ elde edilir. Buradan, $z \in \mathcal{U}$ ve her bir $\mu (|\mu| = 1)$ için

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \{ (2\gamma - \alpha + 1)(h(z) + \mu g(z)) / z \\
&+ (\alpha - 2\gamma)(h(z) + \mu g(z))' + \gamma z(h(z) + \mu g(z))'' \} > 0
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$(2\gamma - \alpha + 1)\frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma zk''(z) + \mu \left((2\gamma - \alpha + 1)\frac{g(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)g'(z) + \gamma zg''(z) \right) = p(z) \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanacak şekilde \mathcal{U} açık birim diskinde reel kısmı pozitif olan $p(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m$ şeklinde açılıma sahip bir p analitik fonksiyonu vardır. (4.3) ile verilen eşitlikte $m \geq 2$ için fonksiyonların seri açılımlarından yararlanılarak

$$(1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)])(a_m + \mu b_m) = p_{m-1}$$

bulunur. Dolayısıyla, $m \geq 1$ için $|p_m| \leq 2$ olduğundan ve $\mu (|\mu|) = 1$ uygun seçilmesiyle i nin ispatı tamamlanır. i deki adımlar uygulanarak ii ve iii nin ispatı yapılır.

Bu sonuçlar $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{1+(-1+m)[\alpha+\gamma(-2+m)]} z^m$ fonksiyonu için kesindir.

Bir sonraki teorem, bir kompleks harmonik fonksiyonun $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşulu vermektedir.

4.1.5. Teorem. $f = k + \bar{g} \in \mathcal{H}^0$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)])(|a_m| + |b_m|) \leq 1 \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ dır.

İspat. $f = k + \bar{g} \in \mathcal{H}^0$ olsun. Verilen (4.4) eşitsizliği kullanılarak

$$Re \left\{ (2\gamma - \alpha + 1)\frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma zk''(z) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) a_m z^{m-1} \right\} \\
&> 1 - \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) |a_m| \\
&\geq \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) |b_m| \\
&> \left| \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) b_m z^{m-1} \right| \\
&= \left| (2\gamma - \alpha + 1) \frac{g(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) g'(z) + \gamma z g''(z) \right|
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ dir.

4.1.6. Teorem. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ ve $\alpha \geq \gamma \geq 0$ için

$$|z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} |z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \leq |f(z)|$$

$$|z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \geq |f(z)|$$

eşitsizlikleri sağlanır ve eşitsizlikler $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} z^m$ fonksiyonu için kesindir.

İspat. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Teorem 4.1.2 kullanılarak her bir μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu = h + \mu g \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ ve dolayısıyla

$$\Phi(z) = (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma) \mathcal{F}_\mu'(z) + \gamma z \mathcal{F}_\mu''(z)$$

için $Re\{\Phi(z)\} > 0$ elde edilir. Rosihan ve diğerlerinin (2018, s. 119) kullandığı metot ile $u + v = \alpha - \gamma$ ve $uv = \gamma$ eşitliklerini sağlayan u, v negatif olmayan sabit sayıları için

$$\Phi(z) = uvz^{1-\frac{1}{u}} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z^{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}+1}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{\frac{1}{v}-1}} \mathcal{F}_\mu(z) \right) \right]$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan,

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}+1}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{\frac{1}{v}-1}} \mathcal{F}_\mu(z) \right) = \frac{1}{uv} \int_0^z \rho^{\frac{1}{u}-1} \Phi(\rho) d\rho \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) eşitliğinde $\rho = zl^u$ değişken değişimi yapılır ve integral tekrar hesaplanırsa

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}+1}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{\frac{1}{v}-1}} \mathcal{F}_\mu(z) \right) = \frac{1}{v} \int_0^1 z^{\frac{1}{u}} \Phi(zl^u) dl$$

ve

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{\frac{1}{v}-1}} \mathcal{F}_\mu(z) \right) = \frac{1}{v} \int_0^1 z^{\frac{1}{v}-1} \Phi(zl^u) dl$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} = \int_0^1 \int_0^1 \Phi(zl^v l^u) dl dt \quad (4.6)$$

bulunur. Diğer yandan, $Re\{\Phi(z)\} > 0$ olduğundan $\Phi(z) < \frac{1+z}{1-z}$ sabordinasyonu yazılabilir (Duren, 2004). Böylece, $\Psi(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{(1+um)(1+vm)}$ ve $k(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2z^m$ denirse, (4.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_{\mu}(z)}{z} &< (\Psi * k)(z) \\ &= \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{(1+um)(1+vm)}\right) * \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2z^m\right) \\ &= \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{dt dl}{1-zt^v l^u}\right) * \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2z^m\right) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{1+(-1+m)[\alpha+\gamma(-2+m)]} z^m \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathcal{F}_{\mu}(z)}{z}\right| &= \left|\frac{k(z) + \mu g(z)}{z}\right| \\ &\leq 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{1+m[\alpha+\gamma(-1+m)]} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathcal{F}_{\mu}(z)}{z}\right| &= \left|\frac{k(z) + \mu g(z)}{z}\right| \\ &\geq 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m |z|^m}{1+m[\alpha+\gamma(-1+m)]} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\left| \frac{h(z)}{z} \right| + \left| \frac{g(z)}{z} \right| \leq 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{1 + m[\alpha + \gamma(-1 + m)]}$$

ve

$$\left| \frac{h(z)}{z} \right| - \left| \frac{g(z)}{z} \right| \geq 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m |z|^m}{1 + m[\alpha + \gamma(-1 + m)]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |h(z)| + |g(z)| \\ &\leq |z| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^{m+1}}{1 + m[\alpha + \gamma(-1 + m)]} \\ &= |z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |h(z)| - |g(z)| \\ &\geq |z| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m |z|^{m+1}}{1 + m[\alpha + \gamma(-1 + m)]} \\ &= |z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} |z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan her bir μ ($|\mu| = 1$) için

$$|z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} |z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \leq |f(z)|$$

$$|z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \geq |f(z)|$$

sonucu elde edilir.

4.1.7. Lemma. $\mathcal{F} \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ ve $\alpha \geq \gamma \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\varpi(r) = \begin{cases} \frac{1}{uv} \int_0^1 \int_0^1 t^{\frac{1}{v}-1} s^{\frac{1}{u}-1} \left(\frac{2}{(1+str)^2} - 1 \right) ds dt, & \alpha > 0, \gamma > 0 \\ \int_0^1 \left(\frac{2}{(1+t^\alpha r)^2} - 1 \right) dt, & \alpha \geq 0, \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

olmak üzere, $\varpi(r) = 0$ denkleminin en küçük pozitif r_0 kökü için $|z| < r_0$ iken \mathcal{F} ünivalenttir (Rosihan ve diğerleri, 2018).

4.1.8. Teorem. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$, \mathcal{U} da yön koruyan harmonik bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, (4.7) eşitliğinde verilen $\varpi(r)$ için $\varpi(r) = 0$ denkleminin en küçük pozitif kökü r_0 olmak üzere, $|z| < r_0$ iken $f(z)$ ünivalenttir.

İspat. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde, her bir μ ($|\mu| = 1$) için Teorem 4.1.2 gereği $\mathcal{F}_\mu = h + \mu g \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ dir. Böylece Lemma 4.1.7 gereği her bir μ ($|\mu| = 1$) için $|z| < r_0$ diskinde $\mathcal{F}_\mu = h + \mu g \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ fonksiyonu ünivalenttir. \mathcal{F}_μ fonksiyonu r_0 yarıçaplı diskte ünivalent olduğundan Lemma 3.1.7 gereği $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfındaki yön koruyan fonksiyonlar ünivalenttir.

4.1.9. Teorem. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$, $3\gamma \leq \alpha \leq 1 + 2\gamma$ ve $0 \leq \gamma \leq 1$ için \mathcal{U} da yön koruyan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde $u + v = \alpha - \gamma$, $uv = \gamma$ ve $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv$ olmak koşuluyla

$$r \int_0^1 \frac{v(-1+u)\omega^{\frac{1}{u}} - u(-1+v)\omega^{\frac{1}{v}}}{1-r\omega} d\omega = \frac{-v+u}{2}$$

denkleminin $(0,1)$ açık aralığındaki en küçük kökü r_1 olmak üzere $|z| < r_1$ diskinde f yıldızlıdır.

İspat. $0 < r < 1$ ve

$$f_r(z) = r^{-1}f(rz) = r^{-1}k(rz) + r^{-1}\overline{g(rz)}$$

olmak üzere

$$f_r(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m r^{m-1} z^m + \overline{\sum_{m=2}^{\infty} b_m r^{m-1} z^m}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

şeklinde yazılır. Kolaylık sağlanması açısından

$$\eta = \sum_{m=2}^{\infty} m(|a_m| + |b_m|)r^{m-1}$$

eşitliği alınır. Buradan Lemma 3.1.10 a göre $r < r_1$ için $\eta \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.1.4 (i) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \eta &\leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} r^{m-1} \\ &= 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{\left(m + \frac{1}{u} - 1\right)\left(m + \frac{1}{v} - 1\right)} r^{m-1} \\ &= \frac{2v(-1 + u)}{-v + u} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^{m-1}}{m - 1 + \frac{1}{u}} - \frac{2u(-1 + v)}{-v + u} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^{m-1}}{m - 1 + \frac{1}{v}} \\ &= \frac{2v(-1 + u)}{-v + u} r^{-\frac{1}{u}} \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^r \zeta^{m-2+\frac{1}{u}} d\zeta - \frac{2u(-1 + v)}{-v + u} r^{-\frac{1}{v}} \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^r \zeta^{m-2+\frac{1}{v}} d\zeta \\ &= \frac{2v(-1 + u)}{-v + u} r^{-\frac{1}{u}} \int_0^r \frac{\zeta^{\frac{1}{u}}}{1 - \zeta} d\zeta - \frac{2u(-1 + v)}{-v + u} r^{-\frac{1}{v}} \int_0^r \frac{\zeta^{\frac{1}{v}}}{1 - \zeta} d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2v(-1+u)}{-v+u} r \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{u}}}{1-r\omega} d\omega - \frac{2u(-1+v)}{-v+u} r \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{v}}}{1-r\omega} d\omega \\
&= \frac{2r}{-v+u} \int_0^1 \frac{v(-1+u)\omega^{\frac{1}{u}} - u(-1+v)\omega^{\frac{1}{v}}}{1-r\omega} d\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $r < r_1$ için $\eta \leq 1$ bulunur.

4.1.10. Teorem. $\tilde{f} = k + \bar{g} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$, $3\gamma \leq \alpha \leq 1 + 2\gamma$ ve $0 \leq \gamma \leq 1$ olsun. Bu takdirde $u + v = \alpha - \gamma$, $uv = \gamma$ ve $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv$ olmak koşuluyla

$$\frac{2r}{1-r} + \frac{2r}{uv(-v+u)} \int_0^1 \frac{(uv-v)^2 \omega^{\frac{1}{u}} - (uv-u)^2 \omega^{\frac{1}{v}}}{1-r\omega} d\omega = 1$$

denkleminin $(0,1)$ açık aralığındaki en küçük kökü r_2 olmak üzere \tilde{f} , $|z| < r_2$ diskinde konvektir.

İspat. $0 < r < 1$ ve

$$\tilde{f}_r(z) = r^{-1}\tilde{f}(rz) = r^{-1}k(rz) + r^{-1}\overline{g(rz)}$$

olmak üzere

$$\tilde{f}_r(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m r^{m-1} z^m + \overline{\sum_{m=2}^{\infty} b_m r^{m-1} z^m}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

yazılır. Kolaylık sağlanması açısından

$$\kappa = \sum_{m=2}^{\infty} m^2 (|a_m| + |b_m|) r^{m-1}$$

eşitliği alınır. Buradan Lemma 3.1.10 a göre $r < r_2$ için $\kappa \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.1.4 (i) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\kappa &\leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} r^{m-1} \\
&= \frac{2\nu(-1 + u)}{-\nu + u} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{mr^{m-1}}{m + \frac{1}{u} - 1} - \frac{2u(-1 + \nu)}{-\nu + u} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{mr^{m-1}}{m + \frac{1}{\nu} - 1} \\
&= \left(\frac{2\nu(-1 + u)}{-\nu + u} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^m}{m + \frac{1}{u} - 1} - \frac{2u(-1 + \nu)}{-\nu + u} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^m}{m + \frac{1}{\nu} - 1} \right)' \\
&= \left(\frac{2\nu(-1 + u)}{-\nu + u} r^{1-\frac{1}{u}} \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^r \zeta^{m-2+\frac{1}{u}} d\zeta - \frac{2u(-1 + \nu)}{-\nu + u} r^{1-\frac{1}{\nu}} \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^r \zeta^{m-2+\frac{1}{\nu}} d\zeta \right)' \\
&= \left(\frac{2\nu(-1 + u)}{-\nu + u} r^{1-\frac{1}{u}} \int_0^r \frac{\zeta^{\frac{1}{u}}}{1-\zeta} d\zeta - \frac{2u(-1 + \nu)}{-\nu + u} r^{1-\frac{1}{\nu}} \int_0^r \frac{\zeta^{\frac{1}{\nu}}}{1-\zeta} d\zeta \right)' \\
&= \frac{2r}{1-r} + \frac{2\nu(-1 + u)^2}{u(-\nu + u)} r^{-\frac{1}{u}} \int_0^r \frac{\zeta^{\frac{1}{u}}}{1-\zeta} d\zeta - \frac{2u(-1 + \nu)^2}{\nu(-\nu + u)} r^{-\frac{1}{\nu}} \int_0^r \frac{\zeta^{\frac{1}{\nu}}}{1-\zeta} d\zeta \\
&= \frac{2r}{1-r} + \frac{2\nu(-1 + u)^2}{u(-\nu + u)} r \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{u}}}{1-r\omega} d\omega - \frac{2u(-1 + \nu)^2}{\nu(-\nu + u)} r \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{\nu}}}{1-r\omega} d\omega \\
&= \frac{2r}{1-r} + \frac{2r}{u\nu(-\nu + u)} \int_0^1 \frac{(u\nu - \nu)^2 \omega^{\frac{1}{u}} - (u\nu - u)^2 \omega^{\frac{1}{\nu}}}{1-r\omega} d\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $r < r_2$ ise $\kappa \leq 1$ bulunur.

4.1.11. Teorem. $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

İspat. $i = 1, 2, \dots, k$ için $f_i = h_i + \bar{g}_i \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ ve $\sum_{i=1}^k c_i = 1$ ($0 \leq c_i \leq 1$) olsun. $i = 1, 2, \dots, k$ için f_i fonksiyonlarının konveks birleşimi,

$$k(z) = z + \sum_{i=1}^k c_i k_i(z) \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{i=1}^k c_i \overline{g_i(z)}$$

olmak üzere

$$f(z) = \sum_{i=1}^k c_i f_i(z) = k(z) + \overline{g(z)}$$

şeklindedir. Ayrıca k ve g fonksiyonları \mathcal{U} da analitik ve $k(0) = g(0) = k'(0) - 1 = g'(0) = 0$ normalizasyonuna sahiptir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{k(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k'(z) + \gamma z k''(z) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \left((2\gamma - \alpha + 1) \frac{k_i(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)k_i'(z) + \gamma z k_i''(z) \right) \right\} \\ &> \sum_{i=1}^k c_i \left| (2\gamma - \alpha + 1) \frac{g_i(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)g_i'(z) + \gamma z g_i''(z) \right| \\ &\geq \left| (2\gamma - \alpha + 1) \frac{g(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)g'(z) + \gamma z g''(z) \right| \end{aligned}$$

olduğundan $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ elde edilir.

4.1.12. Lemma. $\mathcal{F} \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ ise $\operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathcal{F}(z)}{z} \right\} > \frac{1}{2}$ dir.

İspat. $\mathcal{F} = z + \sum_{m=2}^{\infty} A_m z^m$ olmak üzere $\mathcal{F} \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu durumda,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) A_m z^{m-1} \right\} > 0$$

dır denk olarak açık birim diskte

$$\mathcal{N}(z) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]) A_m z^{m-1}$$

şeklinde $Re\{\mathcal{N}(z)\} > \frac{1}{2}$ şartını sağlayan $\mathcal{N}(z)$ fonksiyonu vardır. Diğer yandan, $m \geq 2$ için

$$v_0 = 2 \text{ ve } v_{m-1} = \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]}$$

olarak tanımlı $\{v_m\}_{m=0}^{\infty}$ dizisi konveks sıfır dizisidir. Bu takdirde, Lemma 2.1.10 gereği

$$\vartheta(z) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} z^{m-1}$$

fonksiyonu \mathcal{U} da analitik ve $Re\{\vartheta(z)\} > 0$ dır. Bu takdirde,

$$\frac{\mathcal{F}(z)}{z} = \mathcal{N}(z) * \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} z^{m-1} \right)$$

olduğundan, Lemma 2.1.11 kullanılarak $Re\left\{\frac{\mathcal{F}(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir.

4.1.13. Lemma. $i = 1, 2$ için $\mathcal{F}_i \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ dir.

İspat. $\mathcal{F}_1(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} A_m z^m$ ve $\mathcal{F}_2(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} B_m z^m$ olsun. Böylece \mathcal{F}_1 ve \mathcal{F}_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$\mathcal{F}(z) = (\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2)(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} A_m B_m z^m$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\mathcal{F}'(z) = \mathcal{F}'_1(z) * \frac{\mathcal{F}_2(z)}{z}$ olduğundan

$$\begin{aligned} & (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)\mathcal{F}'(z) + \gamma z\mathcal{F}''(z) \\ &= \left((2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}_1(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)\mathcal{F}'_1(z) + \gamma z\mathcal{F}_1''(z) \right) * \frac{\mathcal{F}_2(z)}{z} \end{aligned} \quad (4.8)$$

yazılabilir. Böylece, $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}_1(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)\mathcal{F}'_1(z) + \gamma z\mathcal{F}_1''(z) \right\} > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

eşitsizliği sağlanır ve Lemma 4.1.12 gereği açık birim diskte $\operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathcal{F}_2(z)}{z} \right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu takdirde Lemma 2.1.11 in kullanılmasıyla \mathcal{U} da $\operatorname{Re} \left\{ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)\mathcal{F}'(z) + \gamma z\mathcal{F}''(z) \right\} > 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ fonksiyonu $\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ sınıfına aittir.

4.1.14. Teorem. $i = 1, 2$ için $\mathfrak{f}_i \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. Bu takdirde $\mathfrak{f}_1 * \mathfrak{f}_2, \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfına aittir.

İspat. $i = 1, 2$ için $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{k}_i + \overline{\mathfrak{g}_i} \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olsun. \mathfrak{f}_1 ve \mathfrak{f}_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu $\mathfrak{f}_1 * \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{k}_1 * \mathfrak{k}_2 + \overline{\mathfrak{g}_1 * \mathfrak{g}_2}$ olarak tanımlıdır. $\mathfrak{f}_1 * \mathfrak{f}_2 \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfına ait olduğunu ispatlamak için her μ ($|\mu| = 1$) olmak üzere $\mathcal{F}_\mu = \mathfrak{k}_1 * \mathfrak{k}_2 + \mu(\mathfrak{g}_1 * \mathfrak{g}_2) \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Lemma 4.1.13 gereği $\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ sınıfı konvolüsyon altında kapalı olduğundan

$$\mathcal{F}_1 = (\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{g}_1) * (\mathfrak{k}_2 - \mu\mathfrak{g}_2) \text{ ve } \mathcal{F}_2 = (\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{g}_1) * (\mathfrak{k}_2 + \mu\mathfrak{g}_2)$$

olmak üzere \mathcal{F}_1 ve \mathcal{F}_2 fonksiyonları $\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ sınıfının elemanıdır. $\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalı olduğundan

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) = \mathcal{k}_1 * \mathcal{k}_2 + \mu(\mathcal{g}_1 * \mathcal{g}_2)$$

$\mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ sınıfına aittir. Bu durumda, $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ konvolüsyon altında kapalıdır.

4.1.15. Teorem. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$, ϕ analitik fonksiyonu ve $z \in \mathcal{U}$ için $Re\left(\frac{\phi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ise $f \tilde{*} \phi \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ dir.

İspat. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ ise her μ ($|\mu| = 1$) için $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{k} + \mu\mathcal{g} \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ dir. $f \tilde{*} \phi \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ olduğunu göstermek için her μ ($|\mu| = 1$) için $T = \mathcal{k} * \phi + \mu(\mathcal{g} * \phi) \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $T = \mathcal{F}_\mu * \phi$ olduğundan

$$\begin{aligned} & (2\gamma - \alpha + 1) \frac{T(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)T'(z) + \gamma zT''(z) \\ &= \left((2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)\mathcal{F}_\mu'(z) + \gamma z\mathcal{F}_\mu''(z) \right) * \frac{\phi(z)}{z} \end{aligned}$$

yazılır. \mathcal{U} da $Re\left(\frac{\phi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ve $Re\left\{(2\gamma - \alpha + 1) \frac{\mathcal{F}_\mu(z)}{z} + (\alpha - 2\gamma)\mathcal{F}_\mu'(z) + \gamma z\mathcal{F}_\mu''(z)\right\} > 0$ olduğundan Lemma 2.1.11 gereği $T \in \mathcal{W}_0(\alpha, \gamma)$ elde edilir.

4.1.16. Sonuç. $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ ve $\phi \in K$ ise $f \tilde{*} \phi \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ dir.

İspat. $z \in \mathcal{U}$ için $\phi \in K$ olduğundan $Re\left(\frac{\phi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ dir. Bu takdirde Teorem 4.1.15 gereği $f \tilde{*} \phi \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ dir.

5. SONUÇ

Hazırlanan çalışmada, kompleks harmonik fonksiyonların birinci ve ikinci dereceden diferensiyel eşitsizliklerini içeren alt sınıflar çalışıldı ve bu sınıflara ait büyüme tahminleri, katsayı sınırları gibi bazı özelliklere yer verildi. Ayrıca, bu sınıfların yıldızlılık ve konvekslik yarıçapları ile birlikte konveks birleşim ve konvolüsyon özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde, Çakmak ve diğerleri (2022) tarafından çalışılan $GH^0(\gamma, \delta, \lambda)$ sınıfı tanıtıldı ve sınıfa ait bazı özellikler verildi.

Dördüncü bölümde, Breaz ve diğerleri (2023) tarafından çalışılan $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfı incelendi ve $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}^0$ biçimindeki fonksiyonların sınıfa ait olması için,

$$\sum_{m=2}^{\infty} (1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)])(|a_m| + |b_m|) \leq 1$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği gösterildi. Daha sonra, $f \in \mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ ve $\alpha \geq \gamma \geq 0$ olmak üzere

$$|z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} |z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \leq |f(z)|$$

$$|z| + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{1 + (-1 + m)[\alpha + \gamma(-2 + m)]} \geq |f(z)|$$

sonucu elde edildi. Ayrıca, tanımlanan yeni sınıfın konveks birleşim ve konvolüsyon altında kapalı oldukları elde edildi. Bunun yanında, $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfının konvekslik ve yıldızlılık yarıçapları verildi. Son olarak $\mathcal{WH}^0(\alpha, \gamma)$ sınıfında parametrelerin özel seçilmesiyle elde edilen harmonik fonksiyon sınıfları ile daha önce tanımlanmış bazı sınıflar arasındaki ilişkiden bahsedildi.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill.

Başkan, T. (2005). *Kompleks fonksiyonlar teorisi*. Nobel Basımevi.

Breaz D, Durmuş A, Yalçın S, Cotirla L-I, Bayram H. Certain Properties of Harmonic Functions Defined by a Second-Order Differential Inequality. *Mathematics*. 2023; 11(19):4039. <https://doi.org/10.3390/math11194039>.

Brickman, L., MacGregor, T.H., Wilken, D.R. (1971): Convex hulls of some classical families of univalent functions. *Trans. Am. Math. Soc.* 156, 91–107.

Carathéodory, C. (1907). Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Mathematische Annalen*, 64(1), 95-115. <https://doi.org/10.1007/BF01449883>

Chichra, P. N. (1977). New Subclasses of the Class of Close-to-Convex Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 62(1), 37–43. <https://doi.org/10.2307/2041942>

Clunie, J., & Sheil-Small, T. (1984). Harmonic univalent functions. *Annales Academie Scientiarum Fennice*, 9, 3-25. <https://doi.org/10.5186/aasfm.1984.0905>

Çakmak, S., Yaşar, E. & Yalçın, (2022). S. Some basic geometric properties of a subclass of harmonic mappings. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 28, 54. <https://doi.org/10.1007/s40590-022-00448-1>

Duren, P. (2004). *Harmonic Mappings in the Plane (Vol 156)*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546600>

Fejér, L. (1925). Über die positivität von summen, die nach trigonometrischen order Legendreschen funktionen fortschreiten, *Acta Litt. Ac Sei. Szeged*, 2: 2-2, 75-86.

Ghosh, N., & Vasudevarao, A. (2019). On a subclass of harmonic close-to-convex mappings. *Monatshefte für Mathematik*, 188(2), 247-267. <https://doi.org/10.1007/s00605-017-1138-7>

Goodloe, M. R. (2002). Hadamard products of convex harmonic mappings. *Complex Variables*, 47(2), 81-92. <https://doi.org/10.1080/02781070290010841>

Goodman, A. W. (1983). *Univalent Functions, Vol. 2*, Polygonal Publishing House.

Hallenbeck, D.J. (1974). Convex hulls and extreme points of some families of univalent functions. *Trans. Am. Math. Soc.* 192, 285–292

Hernández, R., & Martín, M. (2013). Stable geometric properties of analytic and harmonic functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 155(2), 343-359. <https://doi.org/10.1017/S0305004113000340>

Joseph, B., Donald J. N. (1997). *Complex Analysis*, Springer.

Li, L., & Ponnusamy, S. (2013a). Disk of convexity of sections of univalent harmonic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 408(2), 589-596. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.021>

Li, L., & Ponnusamy, S. (2013b). Injectivity of sections of univalent harmonic mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 89, 276-283. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.05.016>

Liu, M. S., Yang, L. M. (2019). Geometric properties and sections for certain subclasses of harmonic mappings. *Monatshefte für Mathematik*, 190(2), 353-387

Nagpal, S., & Ravichandran. V. (2014). Construction of subclasses of univalent harmonic mappings, *Journal of the Korean Mathematic Society*, 51(3), 567-592. <https://doi.org/10.4134/JKMS.2014.51.3.567>

Nevanlinna, R. (1921). Über die konforme Abbildungen Sterngebiete. *Finska Vetenskaps-Societeten Förhandlingar*, 63(6), 18.

Palka, B. P. (1991). *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag. New York, USA.

Ponnusamy, S., Yamamoto, H., & Yanagihara, H. (2013). Variability regions for certain families of harmonic univalent mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58(1), 23-34. <https://doi.org/10.1080/17476933.2010.551200>

Rajbala, & Prajapat, J. K. (2021). On a subclass of close-to-convex harmonic mappings. *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(06), 2150102. <https://doi.org/10.1142/S1793557121501023>

Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis*, University of Göttingen, Germany. <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/Grund.pdf>

Rosihan, M. A., Devi, S., & Swaminathan, A. (2018). Inclusion properties for a class of analytic functions defined by a second-order differential inequality. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 112(1), 117-133. <https://doi.org/10.1007/s13398-016-0368-1>

Silverman, H., Silvia, E. M. (1999). Subclasses of harmonic univalent functions, *New Zealand J. Math.*, 28, 275-284

Singh, R., & Singh, S. (1989). Convolution properties of a class of starlike functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 106(1), 145-152. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0994388-6>

Study, E. (1913). Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Zweites Heft; Konforme Abbildung Einfach-Zusammenhängender Bereiche.

Wang, Z. G., Gao, C. Y., & Yuan, S. M. (2006). On the univalence of certain analytic functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(1), 4. https://www.emis.de/journals/JIPAM/images/125_05_JIPAM/125_05.pdf

Yaşar, E., & Yalçın, S. (2021). Close-to-convexity of a class of harmonic mappings defined by a third-order differential inequality. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(2), 678-694. <https://doi.org/10.3906/mat-2004-50>

Zill, D. G., & Shanahan, P. D. (2013). *Complex analysis: A first course with applications*. Jones & Bartlett Publishers.