

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DENKLEMLERİN MITTAG-LEFFLER FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ

Duygu İŞLEYEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Bilinen Tanımlar	1
1.2. Laplace Transformasyonu	4
1.3. Caputo Türev ve Laplace Dönüşümü	5
1.4. Mittag-Leffler Özel Fonksiyonu	6
1.5. İki Değişkenli Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü	6
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	8
3. MATERYAL ve YÖNTEM	9
3.1. Materyal	9
3.2. Yöntem	9
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	10
4.1. Kesirli Eksponansiyel Nüfus Modelinin Analizi	10
4.2. Kesirli Lojistik Nüfus Modelinin Analizi	12
4.3. Kesirli Lotka-Volterra Popülasyon Modeli	18
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	26
5.1. Sonuçlar	26
5.2. Öneriler	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ	30

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI DENKLEMLERİN MITTAG-LEFFLER FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ

Duygu İŞLEYEN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
YIL: 2024, Sayfa: 30

Birinci bölümde temel kavramlar ve Mittag-Leffler fonksiyonu ve ilgili özellikler verilmiştir. İkinci bölümde önceki çalışmalar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan metot sunulmuştur. Dördüncü bölümde, bir türün popülasyonunu veya enfeksiyonun yayılımını modelleyen problemlerin kesirli modellerinin çözümleri Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Son olarak, bulunan sonuçlar değerlendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Diferansiyel denklemler, denge noktaları, Mittag-Leffler fonksiyonu, Caputo türev, yaklaşık çözüm

ABSTRACT

MSc Thesis

CERTAIN EQUATIONS SOLVED BY MITTAG-LEFFLER FUNCTION

Duygu İŞLEYEN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2024, Page: 30

Firstly, the basic concepts and the Mittag-Leffler function and related properties are given. In the second section, previous studies are stated. In the third section, the method discussed is explained. In the fourth chapter, solutions of fractional models of problems modelling the population of a species or the spread of infection are expressed with Mittag-Leffler functions. Finally, the obtained results were evaluated.

KEY WORDS: Differential equations, equilibrium points, Mittag-Leffler function, Caputo derivative, approximating solution

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, tez jürimde görev alan ve katkıda bulunan Sayın hocalarıma ve ayrıca bana her zaman desteklerini esirgemeyen ailemdeki herkese ayrı ayrı teşekkür ederim.

Özellikle, iki yıl önce kaybettiğim ve eksikliğini hayat boyu hisedeceğim kardeşim Onur İŞLEYEN'e hayatıma kattığı her şey için çok teşekkür ederim.



ŞEKİLLER DİZİNİ

4.1	(4.5) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0, 90$.	11
4.2	(4.5) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0, 98$.	11
4.3	(4.5) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 2$ ve $0 \leq \alpha \leq 0, 90$.	11
4.4	(4.8) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 6$ ve $\alpha = 0, 90$.	13
4.5	(4.8) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 3$ ve $\alpha = 0, 98$.	13
4.6	$25E_\alpha(-t^\alpha) - u = 0$ çözümünün grafiği $0 \leq t \leq 3$, $\alpha = 0, 98$ ve $0 \leq u \leq 25$.	13
4.7	(4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 10$ ve $\alpha = 0, 90$.	14
4.8	(4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 10$ ve $\alpha = 0, 98$.	15
4.9	(4.11) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 2$ ve $0 \leq \alpha \leq 0, 98$.	15
4.10	(4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 5$ ve $\alpha = 0, 90$.	16
4.11	(4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 5$ ve $\alpha = 0, 98$.	16
4.12	(4.11) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 2$ ve $0 \leq \alpha \leq 0, 98$.	17
4.13	(4.28) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 500$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$.	22
4.14	(4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1000$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$, $\alpha = 0, 9$.	22
4.15	(4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$, $\alpha = 0, 98$.	23
4.16	(4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$, $\alpha = 1$.	23
4.17	(4.28) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$.	24
4.18	(4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$, $\alpha = 0, 9$.	24
4.19	(4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$, $\alpha = 0, 98$.	25
4.20	(4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0, 04$, $a = 0, 04$, $b = 0, 01$, $d = 0, 01$, $f = 0, 04$, $h = 0, 01$, $\alpha = 1$.	25

1. GİRİŞ

Doğada çeşitli alanlarda problemlerin çoğu diferansiyel denklemlerle temsil edilebilir. Dolayısıyla, medellenen problemlerin matematisel bir çözüme sahip olup olmadığını bilmek büyük önem arz eder.

1.1. Bilinen Tanımlar

Tanım 1 (Biz, 2019; Güneş, 2021) “Bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme bayağı diferansiyel denklemdir deriz. Eğer bağımsız değişken birden fazla ise denkleme kısmi diferansiyel denklemdir deriz. Daha formal bir deyişle, $i = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere x_i olsun ve $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ise

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0$$

denklemi n . meriteden kapalı formda bir kısmi diferansiyel denklem belirtir. $u = u(x, t)$ ise $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$, $u_{tt} = cu_x$ veya $xu_t + t^2 = \sin(x)$ denklemleri birer kısmi diferansiyel denklemdir.

İkinci mertebeden iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemleri sınıflandırmak mümkündür. Bu sınıflandırma için aşağıdaki strateji izlenir.

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

diferansiyel denkleminde

$$B^2 - 4AC < 0 \text{ ise denklem eliptik,}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \text{ ise denklem parabolik,}$$

$$B^2 - 4AC > 0 \text{ ise denklem hiperbolik}$$

olarak bilinir”.

Tanım 2 (Güneş, 2021) “Tek değişkenli bir fonksiyonun $x = x_0$ civarındaki Taylor

açılımı

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Eğer $x_0 = 0$ ise seri Maclaurin açılımı olarak adlandırılır ”.

Tanım 3 (Biz, 2019; Güneş, 2021) “İki değişkenli bir fonksiyonun $(x, y) = (x_0, y_0)$ civarındaki Taylor açılımı

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ + \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2}{2!} \\ + \dots$$

şeklindedir ”.

Tanım 4 (Biz, 2019; Güneş, 2021) “Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \infty$$

ile tanımlanır. Eğer $x - x_0 = h$ ise yukarıdaki tanım

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde yazılır. x_0 keyfi olduğundan yukarıdaki x_0 yerine x yazalım. Bu halde,

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (1.1)$$

olarak ifade edilir”.

“Bizleri kesirli türevin tanımına veya amacımıza götüren formülü çıkarsamaya çalışalım. m reel olmak üzere x^n fonksiyonunun m kez türevi için bir formül elde

edelim.

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1}, \\(x^n)'' &= n(n-1)x^{n-2}, \\(x^n)''' &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\&\vdots \\(x^n)^{(m)} &= n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)x^{n-m} \\&= \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}.\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, aşağıdaki tanımları yapmak mümkündür (Güneş, 2021)”.

Tanım 5 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “ m reel olmak üzere x^n ifadesinin m kez türevi:

$$(x^n)^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}$$

biçimindedir.

Bu tanımın Gamma fonksiyonu cinsindeki ifadesi

$$\frac{d^m}{dx^m}x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}x^{n-m} \quad (1.2)$$

şeklindedir. n ve m nin farklı değerleri için aşağıdaki çıkarsamaları yapmak mümkündür.

Eğer $n = 1$ ve $m = \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1 - \frac{1}{2} + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}$$

olur (Güneş, 2021)”.

“Burada, klasik türevden farklı olarak x fonksiyonunun kesirli türevinin ne kadar sapma olabileceğini gördük.

Eğer $n = 0$ ve $m = \frac{1}{3}$ ise

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}(1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{3} + 1)}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Burada, klasik türevden farklı olarak 1 fonksiyonunun kesirli türevinin sıfırdan farklı olduğunu görebiliriz. Bu açıklamalardan hareketle, farklı n ve m değerlerini kullanarak (1.2) denkleminde farklı $\frac{d^m}{dx^m}x^n$ ifadesinin farklı çıkarsamalarını yapmak mümkündür (Güneş, 2021)”.

“Bir fonksiyonunun α reel ve eğer $(n - 1) < \alpha \leq n$ olmak üzere $D^{-\alpha}$ işleci aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 6

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.3)$$

tanımlanır (Podlubny, 1998; Güneş, 2021)”.

“Buradan, şimdi de (1.3) ifadesinden D^α işleci

Tanım 7

$$\begin{aligned} D^\alpha &= D^n (D^{-(n-\alpha)}), \\ &= D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right), \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \right) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1998; Güneş, 2021).

1.2. Laplace Transformasyonu

Tanım 8 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “Eksponansiyel mertebeli bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace transformasyonu

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır”.

Tanım 9 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “ $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

(convulation)

$$\begin{aligned} F * G &= \int f(x-t)g(t)dt \\ &= \int f(t)g(x-t)dt \\ &= G * F \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Konvulasyon aynı zamanda değişmelidir”.

Tanım 10 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “Konvulasyonunun Laplace transformasyonu

$$\mathcal{L}[F * G] = F(s)G(s)$$

biçimindedir”.

Tanım 11 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “Kompleks düzlemde $\Re(z) > 0$ olmak üzere $\Gamma(z)$ integrali

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.4)$$

olarak tanımlanır”.

1.3. Caputo Türev ve Laplace Dönüşümü

Tanım 12 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “Caputo anlamında türev $\alpha > 0$ ve $t > 0$ olmak üzere

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

ile verilir”.

(1.5) denkleminde Laplace uygulanırsa aşağıdaki formül bulunur.

Tanım 13 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “Eğer $(n-1) < \alpha \leq n$ ise

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \left({}_0^C D_t^\alpha f(t) \right) dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.6)$$

ile tarif edilir”.

1.4. Mittag-Leffler Özel Fonksiyonu

Tanım 14 (Podlubny, 1998; Güneş, 2021) “Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.7)$$

ile verilir”.

Tanım 15 (Podlubny, 1998; Agarwal, 1953; Güneş, 2021) “Eğer $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ ise iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.8)$$

ile verilir”.

1.5. İki Değişkenli Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

“Eğer $|z| < 1$ ise iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace transformasyonu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha}) dt = \frac{1}{1-z} \quad (1.9)$$

ile verilir. Şimdi de aşağıdaki ifadenin Laplace dönüşümüne bakalım.

$$t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z t^{\alpha}).$$

Burada,

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y).$$

$\Re(p) > |a|^{1/\alpha}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a t^{\alpha}) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^{\alpha} \mp a)^{k+1}} \quad (1.10)$$

elde edilir. (1.10) denkleminde $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ve $\Re(p) > a^2$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \mp a)^{k+1}} \quad (1.11)$$

elde edilir (Podlubny, 1998; Güneş, 2021)'".



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Doğada çeşitli alanlarda ortaya çıkan olayların veya problemlerin çoğu diferansiyel denklemlerle temsil edildiğini söylemek abartı sayılmaz. Medellenen problemlerin matematisel bir çözüme sahip olup olmadığını bilmek büyük önem arz eder (Davis, 1962; Debnath, 2005; Logan, 1994; Whitham, 1974). Kesirli analiz için temel teşkil eden önemli bir kaynak veya detaylı bir analiz için (Podlubny, 1998) bakılabilir. Diferansiyel denklemlerin stabilite analizi ve özellikle denklemlerin denge noktası civarındaki davranışları için (Teschl, 2024) ve popülasyon ve hayatta kalma modelleri ile ilgili olarak (Waltman, 1983; Malthus, 1978; Burghes, 1975; De Roos, 2019) kaynaklarına bakmakta yarar vardır. Kesirli mertebeden medellenmiş klasik nüfus modelleri ve farklı bir kaç problem Caputo ve Laplace dönüşümü kullanılarak çözümlerin davranışları Mittag-Leffler özel fonksiyonları yardımıyla incelenecektir. Kesirli denklemlerin Laplace metodu ile analizi (Tanriverd ve ark., 2021; Güneş, 2021); Daha değişik metotlar için; contour integral metodu (Tanriverdi, 2001; Tanriverdi ve McLeod, 2007; Tanriverdi ve McLeod, 2008; Tanriverdi, 2009; Tanriverdi, 2019; Tanriverdi, 2019a), klasik analiz (Tanriverdi, 2012; Tanriverdi, 2012a; Tanriverdi, 2017; Tanriverdi, 2019), Laplace dönüşüm metodu (Tanriverdi, 2018), Laplace integrali (Tanriverdi, 2018), asimtotik analiz (Merca ve Tanriverdi, 2013), atış metodu (Hastings ve McLeod, 2011; Tanriverdi ve McLeod, 2010), dönüşüm metodu (Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018; Biz, 2019), iteratif metodu (Alıcı ve Tanriverdi, 2020; Alıcı ve Tanriverdi, 2021), asimtotik analiz metodu (Tanriverdi, 2021), Riemann zeta hiptotezi üzerine özgün bir bakış için (Tanriverdi, 2021), Modifiye olmuş eksponansiyel fonksiyon metodu (Muhamad ve ark., 2023), Bernoulli alt-denklemler metodu (Başkonuş ve ark., 2022; Başkonuş ve ark., 2022a; Mahmud ve ark., 2023), genişletilmiş rasyonel sinh-cosh ve değiştirilmiş ve genişletilmiş tanh-function metodu (Mahmud ve ark., 2023; Mahmud ve ark., 2023a).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Burada, materyal ve yönteme değinilecektir. Tezdeki metot ayrıntılarıyla ifade edilmiştir.

3.1. Materyal

Önceki çalışmalarda ifade ediliği gibi daha önce yayımlanmış bilimsel yayınlardan istifade edilmiştir.

3.2. Yöntem

“Lineer olmayan diferansiyel denklemleri veya kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli metotlar mevcuttur. Bu metotlardan bir tanesi de otonom olmayan sistemlerin yaklaşık çözümünü Mittag-Leffler fonksiyonları türünden yazmaktır. Mittag-Leffler fonksiyonları içeren yaklaşık çözümleri elde etmek için Caputo kesirli türevlerin Laplace transformasyonu alınır. Ele alınan diferansiyel denklem sistem formatında değilse denkleme uygun dönüşümler yaparak sistemleştirilir. Yöntem özet olarak aşağıda ifade edilmiştir.

- 1. Adım: Ele alınan sistemin denge noktası(ları) bulunur.
- 2. Adım: Ele alınan sistemin sağ tarafı denge noktası(ları) civarında lineerize edilir.
- 3. Adım: Sistem denge noktası(ları) civarında lineerize edildikten sonra Caputo türevin Laplace dönüşümü yeni sisteme uygulanır.
- 4. Adım: Sistemde bilinmeyenler çözülür ve bilinmeyenler Mittag-Laffler formunda yazılır.
- 5. Adım: Ters Laplace dönüşümü uygulayarak ele alınan sistemin yaklaşık çözümü Mittag-Laffler fonksiyonları cinsinden yazılır (Güneş 2021)”.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

$x'(t)$ nüfusun zamana göre değişim oranı olmak üzere bir türün en basit anlamda ekspanansiyel nüfus modeli

$$x'(t) = kx(t) \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada, k reel sabittir.

4.1. Kesirli Ekspanansiyel Nüfus Modelinin Analizi

(4.1) denkleminin kesirli formu

$$x^\alpha(t) = kx(t) \quad (4.2)$$

şeklindedir. Bu denklemin denge noktası $x(t) = 0$ noktasıdır. Bu denkleme Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = X(s) \quad (4.3)$$

elde edilir. $X(s)$ çözümlerse

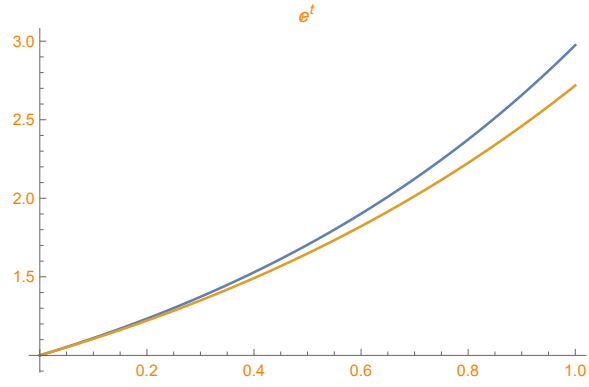
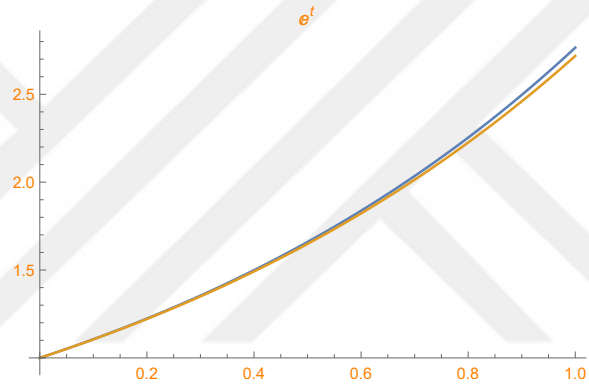
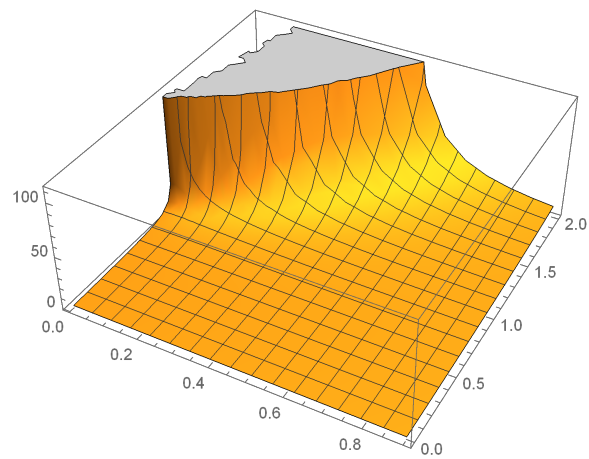
$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}x(0)}{s^\alpha - k} \quad (4.4)$$

bulunur. Ters Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$x(t) = E_\alpha(kt^\alpha)x(0) \quad (4.5)$$

çözümü bulunur.

Aşağıdaki grafik çizimlerinde ise $x(0) = 1$ olarak alınmıştır. Grafiklerde gerçek çözüm ile Mittag-Leffler cinsinden ifade edilen çözüm karşılaştırılmıştır.

Şekil 4.1: (4.5) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0, 90$.Şekil 4.2: (4.5) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0, 98$.Şekil 4.3: (4.5) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 2$ ve $0 \leq \alpha \leq 90$.

Ekponansiyel nüfus modeli oldukça etkili bir model değildir. Çünkü, belirli bir türün çevresel desteği muhtemelen sonsuz olmadığından, ekponansiyel büyüme tam olarak doğru değildir. Ekponansiyel model yerine daha etkili olan bir popülasyon modelini ele alalım. Bu denklem k ve m reel sabitler olmak üzere

$$x'(t) = kx(t)(m - x(t)) \quad (4.6)$$

biçimindedir. (4.6) denklemi değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir. Bu denklemin çözümü kolaylıkla

$$x(t) = \frac{mx(0)}{x(0) + (m - x(0))e^{-kmt}}$$

olarak bulunur.

4.2. Kesirli Lojistik Nüfus Modelinin Analizi

Kesirli lojistik nüfus modeli

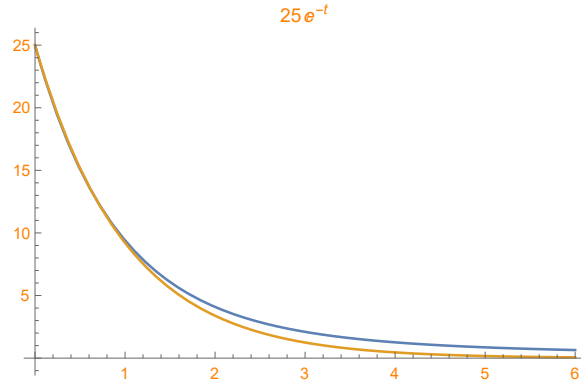
$$x^\alpha(t) = kx(t)(m - x(t)) \quad (4.7)$$

biçimindedir. Burada, m maksimum popülasyon veya bir çeşit çevresel destek olan taşıma kapasitesidir. Bu modele karşılık gelen denge noktaları $x(t) = 0$ ve $x(t) = m$. (4.7) denkleminin $x(t) = 0$ civarındaki lineer hali (4.2) denklemi ile aynıdır. Yani, çözüm

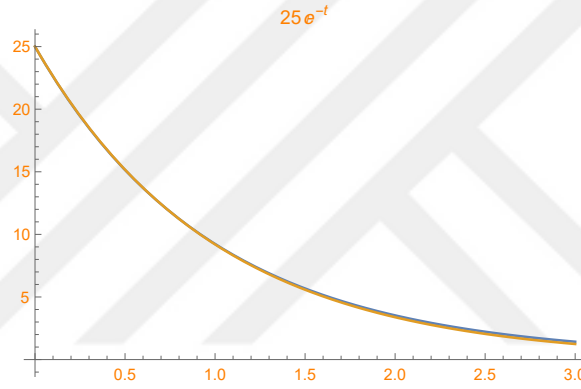
$$x(t) = x(0)E_\alpha(-kmt^\alpha) \quad (4.8)$$

olarak bulunur.

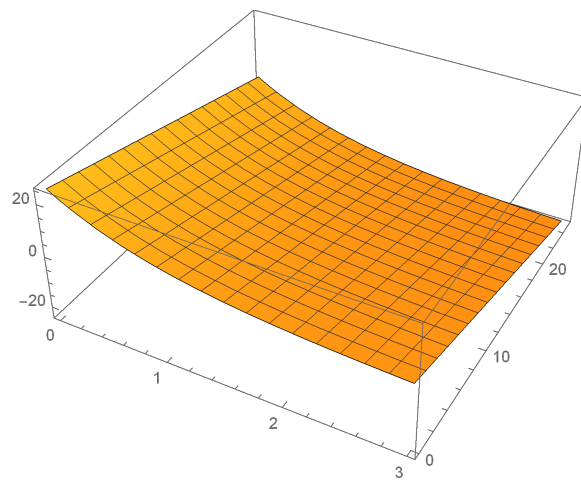
Aşağıdaki grafik çizimlerinde ise $x(0) = 25$, $k = 0,01$ ve $m = 100$ olarak alınmıştır. Grafiklerde gerçek çözüm ile Mittag-Leffler cinsinden ifade edilen çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.4: (4.8) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 6$ ve $\alpha = 0,90$.



Şekil 4.5: (4.8) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 3$ ve $\alpha = 0,98$.



Şekil 4.6: $25E_{\alpha}(-t^{\alpha}) - u = 0$ çözümünün grafiği $0 \leq t \leq 3$, $\alpha = 0,98$ ve $0 \leq u \leq 25$.

Burada, yalnız $x(t) = m$ civarında (4.7) denkleminin lineer hali ele alınacaktır. $x(t) - m = u$ ise $x(0) - m = u(0)$ bulunur. $u(t) = 0$ civarındaki lineer denklem

$$u^\alpha(t) = -kmu(t) \quad (4.9)$$

biçimindedir. Burada, (4.9) denkleminin çözümü (4.3)-(4.5) adımlardaki çözüm ile aynıdır. Bu çözüm

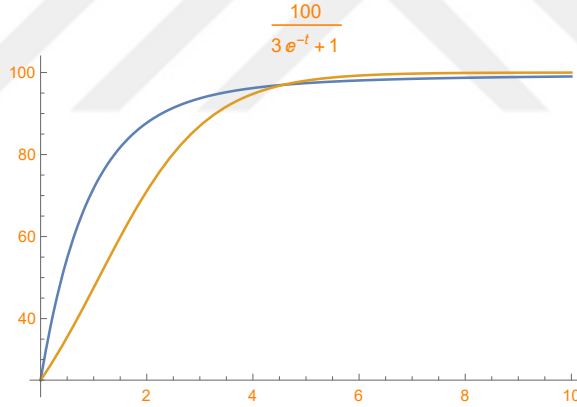
$$u(t) = E_\alpha(-kmt^\alpha)u(0) \quad (4.10)$$

biçimindedir. (4.10) denkleminde baştaki değişkenlere dönülürse

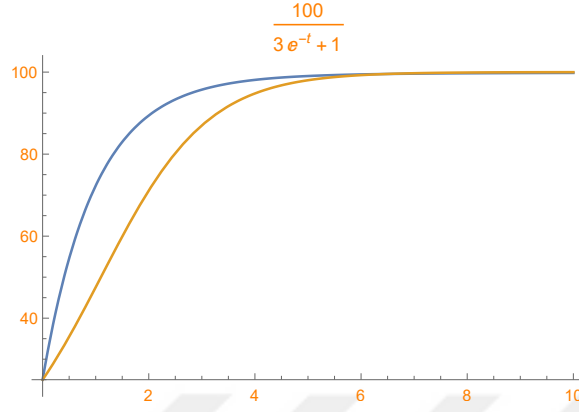
$$x(t) = m + (x(0) - m)(E_\alpha(-kmt^\alpha)) \quad (4.11)$$

bulunur.

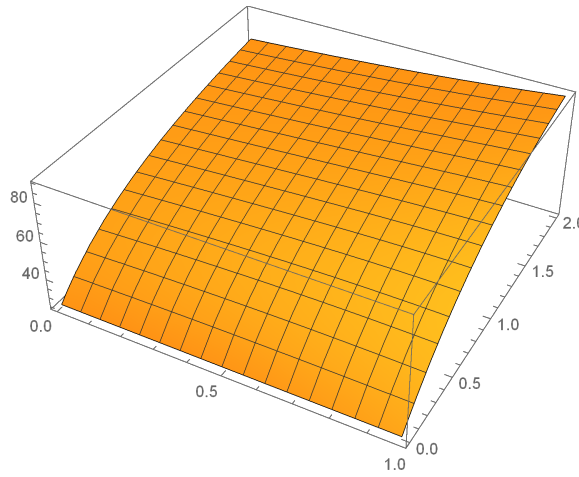
Aşağıdaki grafik çizimlerinde $x(0) = 25$, $k = 0,01$ ve $m = 100$ olarak alınmıştır. Grafiklerde gerçek çözüm ile Mittag-Leffler cinsinden ifade edilen çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.7: (4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 10$ ve $\alpha = 0,90$.

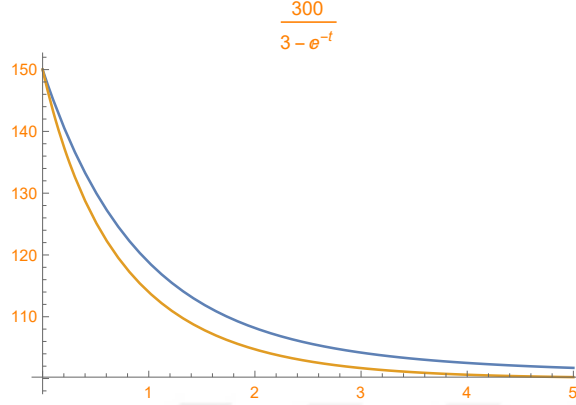


Şekil 4.8: (4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 10$ ve $\alpha = 0,98$.

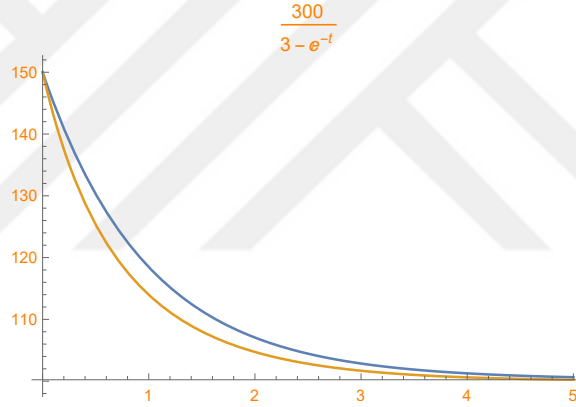


Şekil 4.9: (4.11) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 2$ ve $0 \leq \alpha \leq 0,98$.

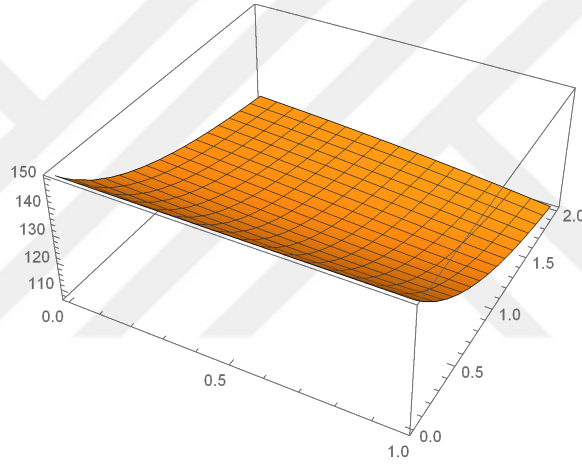
Aşağıdaki grafik çizimlerinde ise $x(0) = 150$, $k = 0,01$ ve $m = 100$ olarak alınmıştır. Grafiklerde gerçek çözüm ile Mittag-Leffler cinsinden ifade edilen çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.10: (4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 5$ ve $\alpha = 0,90$.



Şekil 4.11: (4.11) denkleminin grafiği $0 \leq t \leq 5$ ve $\alpha = 0,98$.



Şekil 4.12: (4.11) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 2$ ve $0 \leq \alpha \leq 0,98$.

4.3. Kesirli Lotka-Volterra Popülasyon Modeli

Bu kısımda literatürde önemli bir yere sahip olan Lotka-Volterra (LV) denklemi ve kesirli hali ele alınacaktır.

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\y' &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{4.12}$$

denklemini ele alalım.

Denklem (4.12) değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir. Burada, x bir avın popülasyon yoğunluğunu, y bazı yırtıcı türlerin popülasyon yoğunluğunu, a bir avın büyüme oranını, b yırtıcı türlerin veya bulaşın varlığının avın (hastalığın) büyüme hızına etkisi, c yırtıcı türlerin ölüm oranı veya bulaşın yok olma oranını ve d ise avın varlığının yırtıcı türlerin veya bulaşın büyüme hızı üzerindeki etkisini gösterir.

Bu (4.12) denkleminin çözümü c cabit olmak üzere

$$dx - c \ln x + by - a \ln y = C\tag{4.13}$$

biçimindedir. Burada, C integral sabitidir.

(4.12) denkleminin matris formu

$$\begin{bmatrix}x' \\y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax - bxy \\-cy + dxy\end{bmatrix}\tag{4.14}$$

biçimindedir. Bu sistem $(0, 0)$ ve $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ kararlı denge noktalarına sahiptir. Sistem (4.14) karşılık gelen kesirli sistem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix}x^\alpha \\y^\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax - bxy \\-cy + dxy\end{bmatrix}.\tag{4.15}$$

Bu (4.15) sisteminin $(0, 0)$ ve $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ civarlarındaki yaklaşık çözümleri iki durum halinde ele alınacaktır.

Durum 1 (4.15) sisteminin $(0, 0)$ noktası civarındaki lineer hali

$$\begin{bmatrix}x^\alpha \\y^\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 0 \\0 & -c\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x \\y\end{bmatrix}\tag{4.16}$$

biçimindedir. Bu son sisteme Caputo türevle birlikte Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^{\alpha-1}x(0)}{s^{\alpha} - a} \\ Y(s) &= \frac{s^{\alpha-1}y(0)}{s^{\alpha} + c} \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Bu son sisteme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)E_{\alpha}(at^{\alpha}) \\ y(t) &= y(0)E_{\alpha}(-ct^{\alpha}) \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir.

Durum 2

(4.15) sisteminin $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ noktası civarındaki lineer hali

$$\begin{bmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{c}{d} \\ y - \frac{a}{b} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

biçimindedir. Bu halde, $u = x - \frac{c}{d}$ ve $v = y - \frac{a}{b}$ olsun. Caputo anlamında türev kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} u^\alpha \\ v^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

olur. Bu son denkleme Laplace dönüşümü tatbik edilirse

$$\begin{aligned} s^\alpha U(s) - s^{\alpha-1}u(0) &= -\frac{bc}{d}V(s) \\ s^\alpha V(s) - s^{\alpha-1}v(0) &= \frac{ad}{b}U(s) \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Denklem (4.20), $U(s)$ ve $V(s)$ göre çözümlerse

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{s^{2\alpha-1}u(0) - fs^{\alpha-1}v(0)}{s^{2\alpha} + fh}, \\ V(s) &= \frac{s^{2\alpha-1}v(0) + hs^{\alpha-1}u(0)}{s^{2\alpha} + fh} \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada, $f = \frac{bc}{d}$ ve $h = \frac{ad}{b}$ olarak alınmıştır. Denklem (4.21) kesirlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned} U(s) &= -\frac{u(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + i\sqrt{fh}} + \frac{u(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{2\alpha-1}}{s^\alpha - i\sqrt{fh}} \\ &+ \frac{fv(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + i\sqrt{fh}} - \frac{fv(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - i\sqrt{fh}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

ve

$$\begin{aligned} V(s) &= -\frac{v(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + i\sqrt{fh}} + \frac{v(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{2\alpha-1}}{s^\alpha - i\sqrt{fh}} \\ &- \frac{hu(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + i\sqrt{fh}} + \frac{hu(0)}{2i\sqrt{fh}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - i\sqrt{fh}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Burada, $i = \sqrt{-1}$. (4.22) ve (4.23) denklemlerine ters Laplace tatbik

edilirse

$$u(t) = -\frac{u(0)}{2i\sqrt{fh}} \overbrace{\left(t^{\beta+1} E_{\alpha,\beta}(-i\sqrt{fht}^\alpha) - t^{\beta+1} E_{\alpha,\beta}(i\sqrt{fht}^\alpha) \right)}^{\alpha+\beta=1} + \frac{fv(0)}{2i\sqrt{fh}} \left(E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) \quad (4.24)$$

ve

$$v(t) = -\frac{v(0)}{2i\sqrt{fh}} \overbrace{\left(t^{\beta+1} E_{\alpha,\beta}(-i\sqrt{fht}^\alpha) - t^{\beta+1} E_{\alpha,\beta}(i\sqrt{fht}^\alpha) \right)}^{\alpha+\beta=1} - \frac{hu(0)}{2i\sqrt{fh}} \left(E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) \quad (4.25)$$

çözümleri elde edilir. Bu (4.24) ve (4.25) çözümlerinin yalnız α ($\alpha + \beta = 1$) cinsindeki ifadesi

$$u(t) = -\frac{u(0)}{2i\sqrt{fh}} \left(t^{2-\alpha} E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - t^{2-\alpha} E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) + \frac{fv(0)}{2i\sqrt{fh}} \left(E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) \quad (4.26)$$

ve

$$v(t) = -\frac{v(0)}{2i\sqrt{fh}} \left(t^{2-\alpha} E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - t^{2-\alpha} E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) - \frac{hu(0)}{2i\sqrt{fh}} \left(E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) \quad (4.27)$$

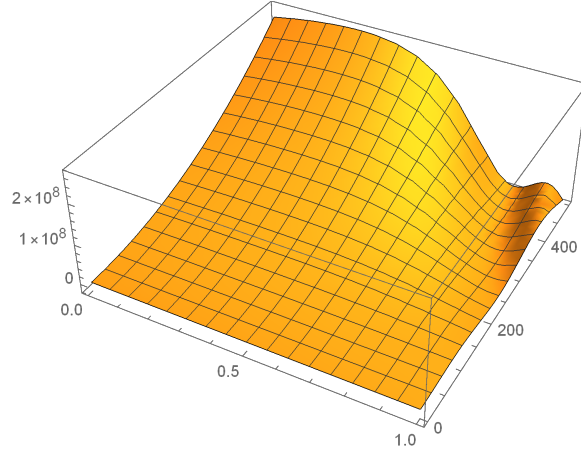
olarak elde edilir. (4.26) ve (4.27) çözümleri için baştaki orijinal değişkenlere dönülürse

$$x(t) = \frac{c}{d} - \frac{x(0) - \frac{c}{d}}{2i\sqrt{fh}} \left(t^{2-\alpha} E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - t^{2-\alpha} E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) + \frac{f(y(0) - \frac{a}{b})}{2i\sqrt{fh}} \left(E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) \quad (4.28)$$

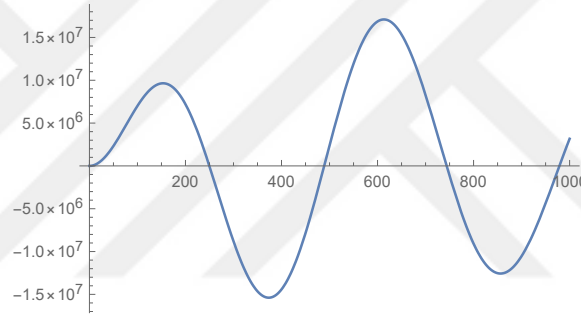
ve

$$y(t) = \frac{a}{b} - \frac{y(0) - \frac{a}{b}}{2i\sqrt{fh}} \left(t^{2-\alpha} E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - t^{2-\alpha} E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) - \frac{h(x(0) - \frac{c}{d})}{2i\sqrt{fh}} \left(E_\alpha(-i\sqrt{fht}^\alpha) - E_\alpha(i\sqrt{fht}^\alpha) \right) \quad (4.29)$$

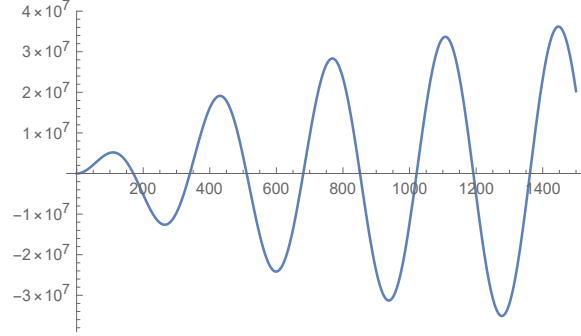
beklenen çözümler elde edilir.



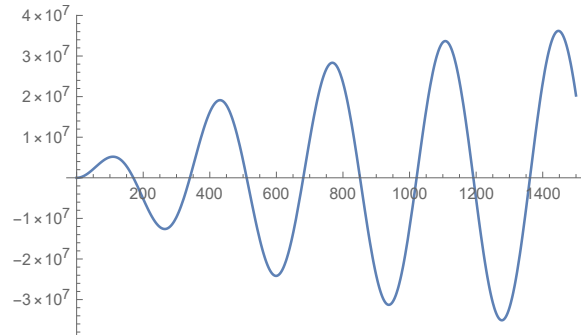
Şekil 4.13: (4.28) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 500$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$.



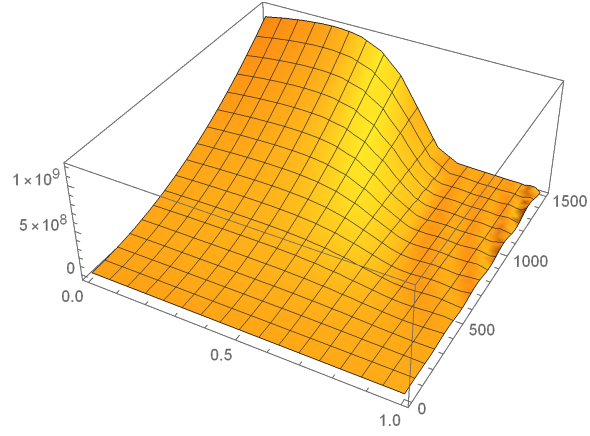
Şekil 4.14: (4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1000$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$, $\alpha = 0,9$.



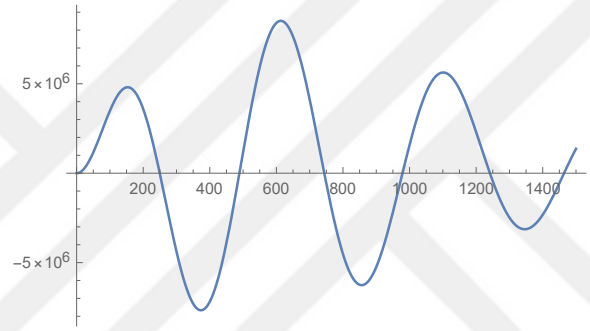
Şekil 4.15: (4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$, $\alpha = 0,98$.



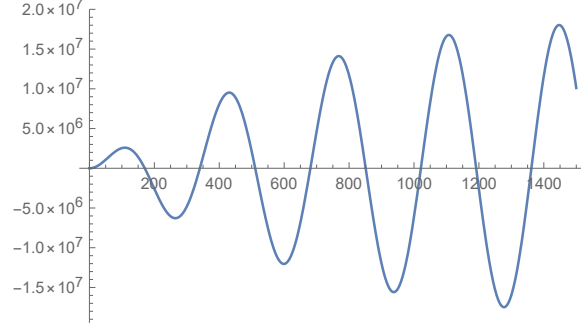
Şekil 4.16: (4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$, $\alpha = 1$.



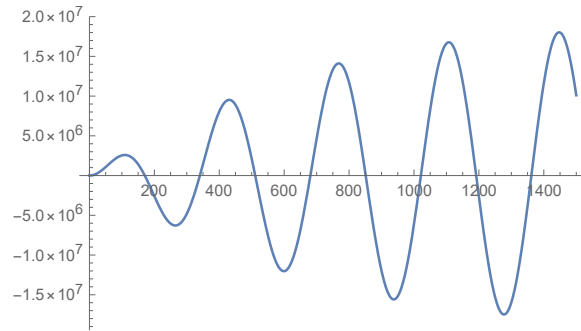
Şekil 4.17: (4.28) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$.



Şekil 4.18: (4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$, $\alpha = 0,9$.



Şekil 4.19: (4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$, $\alpha = 0,98$.



Şekil 4.20: (4.28) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 1500$, $x(0) = 1000$, $y(0) = 500$, $c = 0,04$, $a = 0,04$, $b = 0,01$, $d = 0,01$, $f = 0,04$, $h = 0,01$, $\alpha = 1$.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Burada, Caputo türevle Laplace dönüşümü kullanılarak literatürde bilinen bazı popülasyon modellerinin çözümleri Mittag-Leffler fonksiyonları ile elde edilmiştir.

5.1. Sonuçlar

Caputo türevle Laplace uygulanarak literatürde bilinen bazı modellerin Mittag-Leffler özel fonksiyonu ile çözümleri bulunmuştur.

5.2. Öneriler

Caputo türev Laplace dönüşümü lineer olmayan kesirli bazı problemlere uygulanmıştır. Buradaki muhakeme, klasik metotlara oranla entellektüel bir bakış açısı gerektirebilir. Bu yöntemin doğru uygulanması halinde oldukça başarılı sonuçlar elde edilebilir. Yani, bu metod oldukça etkili ve güvenilirdir.

Aslında, Caputo türevle Laplace dönüşüm metodu yaklaşık veya tam çözüm veren yarı analitik metodlar olarak bilinen Adomian, homotopi perturbasyon metodlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir.

Bu metotla, çözümleri Mittag-Leffler fonksiyonlarını ifade etmek bazen sıkıntılı olabilir. Yani, çözümleri Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden yazmak entellektüel bilgi veya tecrübe gerektirebilir.

KAYNAKLAR

- ALICI, H., and TANRIVERDİ, T., 2020. General solution of the Schrödinger equation for some trigonometric potentials. *Journal of Mathematical Chemistry*, 58 (5):1041–1057.
- ALICI, H., and TANRIVERDİ, T., 2020. General Solution of the Schrödinger Equation for Some Hyperbolic Potentials. *Few-Body Systems*, 61 (4): 41.
- BASKONUS, H. M., MAHMUD, A. A., MUHAMAD, K. A., TANRIVERDİ, T., and GAO, W., 2022. Studying on Kudryashov-Sinelshchikov dynamical equation arising in mixtures liquid and gas bubbles. *Thermal Science*, 26(2 Part B), 1229-1244.
- BASKONUS, H. M., MAHMUD, A. A., MUHAMAD, K. A., and TANRIVERDİ, T., 2022. A study on Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera partial differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(14), 8737-8753.
- BİZ, A., 2019. Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodu. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 62s.
- BURGHES, D. N., 1975. Population dynamics An introduction to differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 6(3), 265-276.
- DAVIS, H. T., 1962. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover, New York, USA, 566p.
- DEBNATH, L., 2005. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhauser, Boston, MA, USA, 737p.
- DE ROOS, A., 2019. *Modeling population dynamics*. University of Amsterdam, The Netherlands, 208p.
- GÜNEŞ, M. H., 2021. Rabinovich-Fabrikant sisteminin Mittag-Leffler fonksiyonlarıyla çözümü. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 61s.
- HASTINGS, S. P., and MCLEOD, J. B., 2011. *Classical Methods in Ordinary Differential Equations: With Applications to Boundary Value Problems (Vol. 129)*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 373p.
- LOGAN, J. D., 1994. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. Wiley-Interscience, New York, USA, 397p.
- MAHMUD, A. A., TANRIVERDİ, T., MUHAMAD, K. A., and BASKONUS, H. M., 2023. Structure of the analytic solutions for the complex non-linear $(2 + 1)$ -dimensional conformable time-fractional Schrödinger equation by. *Thermal Science*, 27 (Spec. issue 1), 211-225.
- MAHMUD, A. A., TANRIVERDİ, T., and MUHAMAD, K. A., 2023. Exact traveling wave solutions for $(2+ 1)$ -dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation by using the hyperbolic trigonometric functions methods. *International Journal of Mathematics and Computer in Engineering*, 1(1) (2023) 11–24.
- MAHMUD, A. A., BASKONUS, H. M., TANRIVERDİ, T., and MUHAMAD, K. A., 2023. Optical solitary waves and soliton solutions of the $(3+ 1)$ -dimensional generalized Kadomtsev–Petviashvili–Benjamin–Bona–Mahony equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63(6), 1085-1102
- MERCA, M., and TANRIVERDİ, T., 2013. An asymptotic formula of cosine power sums. *Le Matematiche*, 68(1): 131-136.

- MAHMUD, A. A., TANRIVERDİ, T., MUHAMAD, K. A., and BASKONUS, H. M., 2023. Characteristic of ion-acoustic waves described in the solutions of the $(3+1)$ -dimensional generalized Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov equation. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 22(2), 36-48.
- MALTHUS, T. R., 1959. *Population: The first essay* (Vol. 31). University of Michigan Press.
- MUHAMAD, K. A., TANRIVERDİ, T., MAHMUD, A. A., and BASKONUS, H. M., 2023. Interaction Characteristics of the Riemann Wave Propagation in the $(2+1)$ -Dimensional Generalized Breaking Soliton System. *International Journal of Computer Mathematics*, 100(6), 1340-1355.
- PODLUBNY, I., 1998. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, New York, USA, 341p
- TANRIVERDİ, T., 2001. *Boundary value problems in ODE*. University of Pittsburgh, Ph.D. Thesis, Pittsburgh, 100p.
- TANRIVERDİ, T., 2009. Differential equations with contour integrals. *Integral Transforms and Special Functions*, 20 (2): 119-125.
- TANRIVERDİ, T., 2009. Contour integrals associated differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 49 (3-4): 453-462.
- TANRIVERDİ, T., 2012. Reformulation of Shapiro's inequality. *International Mathematical Forum*, 7 (43): 2125-2130.
- TANRIVERDİ, T., 2012. Reverse Shapiro Type Inequality. *Int. Journal of Math. Analysis*, 6(38): 1871-1875.
- TANRIVERDİ, T., 2017. Oscillating Solutions of the Lane-Emden Equation for Polytropic Indices $m = 0$ and 1. *British J. Math. & Compute. Sci.*, 20(3): 1-5.
- TANRIVERDİ, T., 2018. An unnoticed way of obtaining the Binet form for Fibonacci numbers. *New Trends in Mathematical Sciences*, 6 (2): 97-101.
- TANRIVERDİ, T., 2018. Evaluating Sine and Cosine Type Integrals. *IJASM*, 5(2): 11-13.
- TANRIVERDİ, T., 2019. Classical way of looking at the Lane-Emden equation. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 68 (1): 271-276.
- TANRIVERDİ, T., 2019. A Specific Sturm-Liouville Differential Equation. *Thermal Science*, 23(1): S47-S56.
- TANRIVERDİ, T., 2019. Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. *Journal of Taibah University for Science*, 13 (1): 639-643.
- TANRIVERDİ, T., 2021. The limit of the Riemann zeta function and its nontrivial zeros. arXiv preprint, arXiv:1902.06695 [math.GM].
- TANRIVERDİ, T., 2021. Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation with product kernel. *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (5): 1660-1672.
- TESCHL, G., 2024. *Ordinary differential equations and dynamical systems* (Vol. 140). American Mathematical Society, Rhode Island, USA, 275p.
- TANRIVERDİ, T. and AĞIRAGAÇ, N., 2018. Differential Transform Applied to Certain ODE. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 19 (3): 213-235.
- TANRIVERDİ, T., BASKONUS, H. M., MAHMUD, A. A., and MUHAMAD, K. A., 2021. Explicit solution of fractional order atmosphere-soil-land plant carbon cycle system. *Ecological Complexity*, 48, 100966.
- TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2007. Generalization of the eigenvalues by contour integrals. *Appl. Math. Comput.*, 189(2): 1765-1773.
- TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2008. The analysis of contour integrals. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 765920, 12 pages.

- TANRIVERDÌ, T. and MCLEOD, J. B., 2010. The Fanno model for turbulent compressible flow. *Journal of Differential Equations*, 249(12): 2955-2963.
- WALTMAN, P., 1983. *Competition models in population biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, USA, 88p.
- WHITHAM, G. B., 1974. *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, USA, 636p.

