T. C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ FARK VE LAMDA İŞLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMRE AKBULUT

OCAK

EMRE AKBULUT	**MATEMATİK ANABİLİM DALI**	**OCAK 2024**

YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ FARK VE LAMDA İŞLEMİ

Emre AKBULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Emre AKBULUT tarafından hazırlanan “Yeni Tip Genişletilmiş Esnek Küme İşlemleri: Tümleyenli Genişletilmiş Fark ve Lamda İşlemi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……………………….

Başkan: Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Yozgat Bozok Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……………………….

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……………………….

Tez Savunma Tarihi: 17/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………….

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)
Emre AKBULUT
(Tarih)

YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ FARK VE LAMDA İŞLEMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Emre AKBULUT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisine katkıda bulunmak için, bazı yeni esnek küme işlemleri tanımlanmıştır. Bu kapsamda, tümleyenli genişletilmiş fark ve tümleyenli genişletilmiş lamda işlemi tanımlanmış, örnekleri verilmiş, işlemlerin tüm özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş, her bir işlemin diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisini elde etmek bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri üzerine dağılma kurallarına bakılmış, sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapılar oluşturduğu incelenmiştir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, esnek kümeler ile ilgili literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, esnek küme ve BCK-cebiri ilgili tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümde sırasıyla tümleyenli genişletilmiş fark ve tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin tüm özelliklerine bu işlemlerin diğer işlemlere olan dağılmasıyla birlikte bakılmıştır. İşlemlerin özelliklerine bakılırken, kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme, idempotentlik gibi tüm özellikler incelenmiş olup, özellikle fark işlemi klasik küme teorisinde de var olan bir işlem olduğu için, klasik kümelerdeki fark işleminin tümleyenli genişletilmiş fark işlemi ile ne gibi benzer özellikler oluşturduğu dikkatli şekilde ele alınmış ve çok çarpıcı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde BCK-cebiri oluşturduğu gösterilmiştir. Sonuç ve öneriler bölümünde, elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Sayfa Adedi : 80
Anahtar Kelimeler : Esnek küme, Tümleyenli genişletilmiş işlemler, BCK-cebiri
Danışman : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

NEW TYPE OF EXTENDED OPERATIONS OF SOFT SETS: COMPLEMENTARY EXTENDED DIFFERENCE AND LAMDA OPERATION

(M. Sc. Thesis)

Emre AKBULUT

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

In this thesis study, some new soft set operations have been defined in order to make a contribution to the soft set theory. In this regard, complementary extended difference and complementary extended lambda operations are defined and their examples are given, the whole properties of these operations are examined in detail, the distribution rules of these operations over other soft set operations are investigated, and the algebraic structures that these operations form on the set of soft sets with a fixed parameter set are examined to obtain the relationship of each operation with other soft set operations.

The thesis consists of five chapters. In the first section, a literature review is conducted on soft set theory. In the second chapter, related definitions and basic concepts of soft sets and BCK-algebra are included. In the third and fourth sections, all the properties of the complementary extended difference operation and complementary extended lambda operation together with the distributions of these operations over other operations are examined, respectively. While investigating the properties of the operations, all the properties such as closure, union, unit element, inverse element, commutative and idempotent property are examined, and especially since the difference operation is also an operation in classical set theory, it is of importance to pay attention to what kind of analogies the difference operation in classical sets have with the complementary extended difference operation in soft sets is handled and very striking results are obtained. It has been observed that the complementary extended difference operation forms BCK-algebra on the set of soft sets with a fixed parameter set. The results and obtained are included in the results and recommendations section.

Number of pages	: 80
KeyWords	: Soft set, Complementary extended operations, BCK- algebra
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Araştırmamdaki her aşamada bana yardımcı olan , çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olup desteklerini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN hocama sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca her zaman benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, sadece bu çalışma sürecinde değil tüm hayatım boyunca bana moral veren eşim Zişan AKBULUT'a, babam Çetin AKBULUT'a ve annem Sabriye AKBULUT'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
P(U)	U nun kuvvet kümesi
(F,A)	(F,A) esnek kümesi
$(F, A)^r$	(F,A) esnek kümenin tümleyeni
$\emptyset_A$	A ya göre boş esnek küme
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme
U_A	A ya göre evrensel esnek küme
U_E	Mutlak esnek küme
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$S_E(U)$	U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$S_A(U)$	A üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\forall$	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
+	Artı işlemi
λ	Lamda işlemi
θ	Teta işlemi
$*$	Yıldız işlemi
ɣ	Gamma işlemi
Δ	Simetrik fark işlemi

1. GİRİŞ

Hayatımızda karşımıza çıkan bazı olayları açıklamak ve onlar hakkında yorum yapmak oldukça zordur. Bu durum veya olaylar çoğunlukla, kişilere, zamana ve ortama göre değişiklik gösteren, objektif olmayan durum ve olaylardır. İnsanların hayatlarında kullandığı belirsizlik içeren birtakım ifadeler vardır. Büyük bisiklet, kaliteli çanta, kısa boy gibi kişiden kişiye göre değişen belirsiz ifadeler mevcuttur. Belirsizlikler birçok bilim dalını olduğu gibi matematiği de etkileyebilmektedir. Araştırmacılar birçok bilim dalında karmaşık problemleri çözmeye çalışırken aynı zamanda belirsizliklerin modellenmesiyle de uğraşmışlardır. Farklı türlerde ortaya çıkan belirsizliklerden dolayı, bu belirsizlikleri gidermek için klasik yöntemlerin dışında belirsizliği de inceleyen metotlara ihtiyaç duyulmuştur. Bu nedenle bilim adamları belirsizliği anlamak ve bunlara çözüm sağlamak için birçok teori ortaya atmıştır.

Olasılık teorisi, aralık matematiği, istatistik, sezgisel bulanık kümeler teorisi, bulanık kümeler teorisi en çok bilinen ve belirsizliği modellemek için sık kullanılan matematiksel teorilerden birkaçıdır. Bu teoriler içerisinde en çok dikkat çekenlerden biri Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık kümeler teorisidir. Bu teori bazı yapısal zorlukları içinde barındırdığı için farklı teorilere ihtiyaç duyulmuştur. Bilindiği üzere bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Her bir durum için üyelik fonksiyonu oluşturma zorluğu söz konusu olduğundan, üyelik fonksiyonun doğası fazlasıyla bireyseldir. Bundan dolayı üyelik fonksiyonu oluşumundan bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç duyulmuştur. Molodstov tarafından 1999 yılında ortaya atılan Esnek Küme Teorisi üyelik fonksiyonundan kaynaklanan sorunları ortadan kaldırmıştır (Molodstov, 1999). Molodstov esnek küme teorisini matematiğin birçok alanına transfer etmiştir. İşlem araştırmaları, oyun teorisi, olasılık, ölçüm teorisi, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann'ın integrasyonu, Perron'un integrasyonu esnek küme teorisini başarıyla kullandığı alanlardır.

Esnek kümeler teorisi ortaya atıldığından bu yana, en yoğun uygulama bulduğu alan karar verme probleridir. Maji, Ray ve Biswas (2002) çok aralık değerli bulanık esnek küme kavramını, tümleyen, birleşim, kesişim gibi temel işlemleri inceleyip bunları karar verme probleminde uygulamışlardır. Ayrıca esnek küme ve bulanık kümeyi birleştirip bulanık esnek küme ve daha sonrasında sezgisel bulanık esnek küme kavramını ortaya atmışlardır.

Chen, Tsang ve Yeung (2003), Maji ve diğerlerinin (2002) esnek küme indirgenmesi sonucunun yanlış olduğunu ve indirgeme esnek kümenin tanımının uygun olmadığını ifade etmiş ve daha sonra esnek kümelerin parametrelere indirgemesinin uygun olduğunu belirtmişlerdir. Xiao (2003) esnek kümelerde kullanmak amacıyla yapay bir hesaplama metodu geliştirmiştir. Chen, Tsang, Young ve Wang (2005) esnek kümelerde parametreleştirme azaltılmasının yeni bir tanımı kullanmış ve karar verme probleminde esnek küme uygulamasını geliştirmişlerdir. Murif, Şengupta ve Ray (2006) sınıflandırma için yeni bir algoritma sunmuşlardır. Herewan ve Deriş (2010) esnek küme teorisi altında parametrelendirme indirgemesini tıbbi karar verme için bir teknik olarak düşünmüş ve olası uygulamalardan birini grip şüphesi olan hastaların karar vermesi için uygulanabildiğini sunmuşlardır. Bununla birlikte Herewan (2010) influenza şüphesi olan hastalardan oluşan bir veri kümesinden Boolean değerli bir bilgi sistemi aracılığıyla esnek küme temelli karar verme tekniğinin genişletilmiş bir uygulamasını sunmuştur. Çağman ve Enginoğlu (2010a) esnek matrisleri ve bu matrislerin işlemlerini daha işlevsel hale getirmek için tanımlayıp, esnek maksimum-minimum karar verme yöntemini belirsizlik içeren problemlere uygulanabilecek şekilde oluşturmuşlardır. Çağman ve Enginoğlu (2010b) Molodstov'un esnek kümelerin karar fonksiyonunun çarpımlarını göstermişler ve esnek küme işlemlerini daha kullanışlı hale getirmek için yeniden tanımlama yapmışlardır. Gong, Xiao ve Zhang (2010) bijektif esnek küme kavramını ve karar verme problemlerinde bijektik esnek kümenin uygulanmasını araştırmışlardır. Xia, Gong, Xiao ve Zou (2010) bijektif ayırıcı esnek karar sistemlerinin azaltılması kavramları incelemişlerdir. Kharal (2014) bir esnek kümenin üyelik yapısını incelemiş ve özelliklerini sunmuştur. Atagün, Kamacı ve Oktay (2018) daha önce tanımlananları farklı türlerdeki esnek matrisleri de çarpacak şekilde genellemişlerdir ve böylece çözüm sürecini daha hızlı ve anlaşılır hale getirmişlerdir. Saltık, Akız ve Atagün (2018) ters esnek matris teorisini, işlemlerini, çarpımlarını ve cebirsel yapılarını ayrıntılı olarak tanıtmışlardır. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020) iki bulanık esnek matrisin çarpımlarını genelleştirerek, bu genellemeler sayesinde farklı türlerdeki üç veya daha fazla bulanık esnek matrisi çarpılabilir hale getirmişlerdir. Ayrıca esnek matrislerin ortalama operatörleri ve bulanık esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımlarını kullanarak iki algoritma ortaya atmışlardır. Zorlutuna (2021) esnek sınıflar üzerinde küme değerli dönüşüm kavramını tanıtmışlar ve karşı örneklerle destekleyip görüntülerin çeşitli özelliklerini ve esnek kümelerin ters görüntülerini incelemişler, bu kavramı karar verme problemlerine uygulamışlardır.

Esnek kümeler yardımıyla, esnek cebirsel yapılar birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Aktaş ve Çağman (2007) esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırmıştır. Bu çalışmada ayrıca, diğer çalışmalara yol gösteren grup teorisini literatüre kazandırmıştır. Esnek grup yapısı üzerinde normal esnek, esnek alt grup gibi cebirsel yapıları da tanımlamıştır. Jun (2008) esnek BCK-BCI cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını özellikleriyle birlikte incelemişlerdir. Jun ve Park (2008) esnek kümeleri BCK-BCI cebirlerini uygulayarak esnek cebirsel özelliklerini incelemiş ve örneklendirmişlerdir. Feng, Jun ve Zhao (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkaları, esnek yarı halkalardaki esnek idealleri ve idealistik yarı halkaları tanımlamışlardır. Sun, Zhang ve Liu (2008) esnek modül kavramını tanıtıp bu teoriden yararlanarak esnek modüllerin özelliklerini incelemişlerdir. Jun, Lee ve Zhan (2009) esnek p-idealleri ve p-idealistik esnek BCI-cebirleri kavramını tanıtmış ve özelliklerini araştırmışlardır. Bu kümeleri kullanarak, BCI cebirlerindeki bulanık p-ideallerinin farklıklarını ortaya koymuşlardır. Zhan ve Jun (2010) esnek BL-cebirleri üzerine çalışmışlardır. Jun, Lee ve Khan (2010) esnek küme kavramını sıralı yarı gruplara uygulamışlardır. Esnek sıralı yarı grup, esnek sıralı alt yarı grup, esnek sol (sağ) ideal esnek sıralı yarı grup kavramına tanıtmışlar ve çeşitli özelliklerini incelemişlerdir. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) esnek gruplar ve normalistik esnek grupları incelemişlerdir. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) idealistik esnek yakın halkaların özelliklerini araştırmışlar ve yakın halka epimorfizmleri altında yapıların korunduğunu göstermiş ve ilgili çalışmaları teorik açıdan genişletmişlerdir. Sezer, Çağman ve Atagün (2014) yarı grupların esnek kesişimli iç ideallerini, yarı-ideallerini ve genişletilmiş iki ideallerini tanımlamış ve aralarındaki ilişkileri vermişlerdir. Ayrıca, düzenli tam düzenli zayıf düzenli ve yarı düzenli yarı grupları bu idealleri açısından karakterize etmişlerdir. Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015) esnek kesişimsels yarı grupları, esnek kesişimsel sol (sağ) idealleri ve yarı grupların iki ideallerini tanımlayıp özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri vermişlerdir. Ullah, Karaaslan, Hayat ve Rashad (2018) esnek kesişimli AG-grubunu tanımlamış ve incelemişlerdir. Esnek küme teorisi ve AG-grupları arasında bir bağlantı kurmuşlardır. Karaaslan (2019) AG grupoid, AG*grupoid ve AG--bant üzerindeki esnek küme ailesinin bazı özelliklerini incelemiş, farklı olarak esnek idempotent eleman, sol (sağ) bağlantılı esnek küme, esnek kesişimsel AG-bandı, esnek kesişimsel ideali ve esnek kesişimsel AG-grupoidinin esnek asal ideali gibi yeni kavramları literatüre kazandırmışlardır. Karaaslan, Ullah ve Ahmed (2021), normal bipolar esnek alt grup kavramını tanıtıp; bipolar esnek alt grupların bazı özelliklerini incelemişlerdir. Farklı olarak bir bipolar esnek grubun bipolar esnek sol ve sağ kosetleri kavramlarını tanımlayıp bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

Esnek küme teorisi, Molodstov (1999) tarafından ortaya atılmasına rağmen bilinen esnek küme işlemleri ve özellikleri Pawlak'ın (1982) yaklaşımlı küme teorisinden yararlanarak, Maji, Biswas ve Roy (2003) tarafından tanımlamıştır. Maji ve diğerleri (2003), bir esnek kümenin alt kümesi, bir esnek kümenin tümleyenini, iki esnek kümenin eşitliği, iki esnek kümenin birleşimi, iki esnek kümenin kesişimini, boş esnek küme gibi kavramları literatüre kazandırıp tanımlayan ilk kişiler olmuştur. Pei ve Miao (2005) esnek kümeler ve bilgi sistemleri arasındaki ilişkiyi tartışmışlar, esnek kümeler için daha işlevsel esnek alt küme ve esnek kesişim işlemlerini tanımlamışlardır. Yang (2008), Maji ve diğerleri (2003) çalışmasındaki esnek birleşim ve boş esnek küme gibi kavramlarla ilgili önermelerde bazı yanlışlar olduğunu aksine örneklerle göstermiştir. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009) ,Maji ve diğerlerinin (2002) tanımladığı esnek küme işlemleri ve özelliklerindeki hatalı yerleri düzelterek, esnek kümelerin kısıtlanmış birleşim, kısıtlanmış fark, kısıtlanmış kesişim ve esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi gibi bazı yeni çok önemli işlemlerini literatüre kazandırıp temel özelliklerini incelemiş, esnek kümelerin tümleyenli kısmını geliştirmiş ve bu yeni tanımlara göre De Morgan kurallarının esnek küme teorisinde geçerli olduğunu ispat etmişlerdir. Ali, Shabir ve Naz (2011) esnek kümelerin cebirsel kısımlarını detaylı olarak araştırmışlar; bazı esnek küme işlemlerinin esnek kümeler kümesi üzerinde, monoid, hemihalka ve kafes gibi yapılar oluşturduklarını ortaya koymuşlardır. Sezgin ve Atagün (2011) esnek kümelerle ilgili araştırmasında esnek kümelerin daha önce ele alınmamış olan temel özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca esnek kümelerin kısıtlanmış simetrik farkını tanımlayıp ve özelliklerini incelemişlerdir. Zhu ve Wen (2013) esnek kümelerin kesişim, tümleyen ve farkını yeniden tanımlayıp bu işlemlerin cebirsel özelliklerini bilinen bir birleşme işlemi ile birlikte araştırmışlardır. Sen (2014) sabit bir parametre kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesinin özelliklerini incelemiştir. Husain ve Shiyani (2018) iki esnek kümenin eşitliği, bir esnek kümenin alt kümesi ve üst kümesi, boş esnek küme, VE/VEYA birleşim, kesişim gibi esnek küme işlemlerini örneklendirmişlerdir. Sezgin, Ahmed ve Mehmood (2019) esnek kümeler üzerinde genişletilmiş fark adı verilen bir işlem tanımlayıp ve bu işlemin genişletilmiş fark, kısıtlanmış fark ve esnek kümelerin diğer bazı işlemleri ile ilişkisini incelemişlerdir.

Stojonavic (2021) esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkını tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır.

Bu zamana kadar ortaya koyulan çalışmalar incelendiğinde, genel anlamda esnek küme işlemlerinin kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere iki ana kategoride ilerlediği görülmektedir. Bu bağlamda esnek kümelerdeki kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark, kısıtlanmış ve genişletilmiş simetrik fark işlemlerinin detaylı şekilde çalışıldığı ve U üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi ve sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde hangi birli ve ikili cebirsel yapılar ile kafes yapılar oluşturduğu çeşitli yazarlar (Maji ve diğerleri; 2003; Pei ve Miao; 2005; Ali ve diğerleri, 2009; Qin ve Hong, 2010; Sezgin ve Atagün, 2011; Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012; Sen, 2014) tarafından çalışılmıştır. Esnek küme teori için çok temel kavram olan işlemler günümüzde de cok çeşitli yazarlar tarafından çalışılmaktadır. İlk defa Eren (2019), kısıtlanmış ve genişletilmiş işlem formundan farklı bir işlem formu olan, esnek ikili parçalı fark işlemini tanımlamış ve özelliklerini çalışmış, Sezgin ve Çalışıcı (2024) esnek ikili parçalı fark işleminin özellikleri üzerine detaylı çalışmasını sunmuşlardır. Çağman (2021), kümelerin koşullu tümleyenlerini ve bunların grup teorisine uygulanmasını vermesiyle, bu çalışmadan esinlenerek, Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c) yeni ikili küme işlemleri çalışmış ve Aybek (2024), bu yeni ikili küme işlemlerini esnek kümeye aktararak, yeni pek çok kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemleri tanımlamış, özelliklerini incelemiş ve diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakmıştır. Eren (2019) çalışmasındaki esnek ikili parçalı fark işlemi formunda, Yavuz (2024) yeni pek çok esnek ikili parçalı işlem tanımlamış ve özelliklerini detaylı şekilde incelemiştir. Esnek ikili parçalı işlem formunun ilk satırının tümleyeni alınarak, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler tanımlanmış çeşitli yazarlar (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Sarıalioğlu 2024; Sezgin ve Akbulut 2023; Sezgin ve Yavuz 2023b; Sezgin ve Aybek 2023; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin, Aybek ve Ayagün 2023a; Sezgin, Aybek ve Güngör, 2023b; Sezgin ve Çağman, 2024; Sezgin ve Sarıalioğlu) tarafından çalışılmıştır.

Genişletilmiş esnek küme işlemleri bazı yazarlar (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanavic, 2021; Aybek, 2024) tarafından çalışılmıştır Genişletilmiş işlemlerin ilk iki satırının tümleyeni alınarak yeni bir işlem formu olan ve tümleyenli genişletilmiş işlem adı verilen işlem formu Demirci (2024) ve Sarıalioğlu (2024) tarafından çalışılmıştır. Sarıalioğlu (2024) tümleyenli genişletilmiş gama, kesişim ve yıldız işlemini ve özelliklerini; Demirci (2024) ise tümleyenli genişletilmiş artı, birleşim ve teta işlemini ve özelliklerini çalışmıştır.

Matematikte yapılan en önemli işlerden biri bir küme üzerinde tanımlana bağıntının ve işlemin özeliklerini incelemektir (Hacısalihoğlu, 2007: 163). Bu tez çalışmasında, tümleyenli genişletilmiş fark ve tümleyenli genişletilmiş lamda adı verilen esnek küme işlemleri tanımlanmış, örnekleri verilmiş, işlemlerin tüm özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş, her bir işlemin diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisini elde etmek bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri üzerine dağılma kurallarına bakılmış, sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapılar oluşturduğu incelenmiştir. Beş bölümden oluşan tezin ilk bölümünde, esnek kümeler ile ilgili literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, esnek küme ve BCK-cebiri ilgili tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Tezin özgün kısmını oluşturan üçüncü ve dördüncü bölümde sırasıyla tümleyenli genişletilmiş fark ve tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin tüm özelliklerine, bu işlemlerin diğer işlemlere olan dağılmasıyla birlikte bakılmıştır. İşlemlerin kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme, idempotentlik gibi tüm özellikler incelenmiştir. Bu bağlamda, fark işlemi klasik küme teorisinde de var olan bir işlem olduğu için, klasik kümelerdeki fark işleminin tüm özelliklerinin esnek kümelerdeki tümleyenli genişletilmiş fark işleminde yansıması nasıl olur, bu kapsamda ne gibi benzer özellikler olur sorusu göz önünde bulundurularak, karşılaştırmalı olarak özellikler ele alınıp incelenmiş ve çok çarpıcı benzerlikler elde edilmiştir. Ayrıca, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde BCK-cebiri oluşturduğu gösterilmiştir. Sonuç ve öneriler bölümünde, elde edilen sonuçlara ve önemine yer verilmiştir.

Matematiğin önemli dallarından olan soyut cebirin amacının, cebirsel yapıları sınıflandırarak, aynı sınıf içinde olan cebirsel yapıları, onları oluşturan küme ve ikili işlemlerden bağımsız olarak, ortak özeliklerini bulmak, sergilemek ve bu özelliklerden bazı sonuçlar çıkarmak olduğundan, bu açıdan çalışmanın hem esnek küme teoriye hem klasik cebire katkı sağlayacağını düşünüyoruz.

2. GENEL BİLGİLER

Tezimizde, tümleyenli genişletilmiş fark ve tümleyenli genişletilmiş lamda adı verilen iki yeni esnek küme işlemi tanımlanacak olup, bu işlemlerden tümleyenli genişletilmiş fark işleminin, klasik kümelerde yer alan fark işlemi ile taşıdığı özellikler bakımından benzer olup olmadığı da inceleneceği için, bu bölümde öncelikle, klasik kümelerdeki temel ikili işlemlerden olan fark ve birli işlemden olan tümleyen işleminin tanımı ve özellikleri sonrasında ise esnek kümelerdeki temel kavramlar ve BCK-cebirinin tanımları hatırlatma amaçlı olarak verilecektir.

2.1. Kümeler, Fark ve Tümleyen İşlemi

Alman matematikçi Georg Cantor (1874) öncülüğünde gelişen küme teorisi, iyi tanımlanmış nesneler topluluğu olarak adlandırılan kümeleri inceleyen matematiksel mantığın dalıdır. Kümeler, H, J, K…gibi büyük harflerle; elemanları ise h,j,k,…gibi küçük harflerle gösterilir. H ve J iki küme olmak üzere; H ın her elemanı aynı zamanda J nin de bir elemanı ise H a, J nin bir alt kümesi denir ve $H \subseteq J$ şeklinde yazılır. $H \subseteq J$ ve $J \subseteq H$ ise o zaman H ile J kümelerine eşittir denir ve H=J şeklinde gösterilir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile; üzerinde çalışılan en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2013: 3; Özer, Çoker, Taş, 1999:36-37).

H ve J iki küme olsun. H da olup J de olmayan elemanların kümesine H ile J nin farkı denir ve H\J veya $H-J$ ile gösterilir.

$$H-J = \{x: x \in H, x \notin J\} = \{x \in H: x \notin J\}$$

Bu tezimiz boyunca, H ile J işlemlerinin farkı için H-J gösterimini tercih ediyoruz. Aşağıda fark işleminin özellikleri verilmiştir.

- $H-J \neq J-H$
- $(H-J)-K \neq H-(J-K)$
- $H-\emptyset=H$, $H-E=\emptyset$
- $\emptyset-H=\emptyset$ ve $H-H=\emptyset$
- $(H-J)\cap(H\cap J)=\emptyset$ ve $(J-H)\cap(H\cap J)=\emptyset$

- $H-(H-J)=H\cap J$ ve $J-(J-H)= H\cap J$
- $H\cap J=\emptyset$ ise $H-J=H$. Buradan, $H\cap(J-H)=\emptyset$ olup $H-(J-H)=H$; $J\cap(H-J)=\emptyset$ olup $J-(H-J)=J$; $(H-J)\cap(J-H)=\emptyset$ olup $(H-J)-(J-H)=H-J$; $(J-H)\cap(H-J)=\emptyset$ olup $(J-H)-(H-J)=J-H$; $(H-J) \cap J=\emptyset$ olup $(H-J)-J=H-J$
- $(H-J)\subseteq H$ ve $(J-H)\subseteq J$
- $H=(H-J)\cup(H\cap J)$ ve $J=(J-H)\cup(H\cap J)$
- $HUJ=(H-J)\cup(J-H)\cup(H\cap J)=(H-J) \cup J=(J-H)\cup H$
- $H\subseteq J\Leftrightarrow H-J=\emptyset$
- $(H\cap J)-K=(H-K)\cap(J-K)$ (Farkın kesişime sağdan dağılması)
- $(H\cup J)-K=(H-K)\cup(J-K)$ (Farkın birleşime sağdan dağılması)
- $(H-J)-K=(H-K)-(J-K)$ (Farkın farka sağdan dağılması)
- $H-(J\cap K)=(H-J)\cup(H-K)$
- $H-(J\cup K)=(H-J)\cap(H-K)$

(Aydın ve Kandamar, 2013: 5-7; Nesin, 2019: 7-59).

H bir küme olmak üzere, evrensel kümede olup, H de olmayan elemanların kümesine H nin tümleyeni denir ve H' ile gösterilir. O halde:

$$H'= \{x: x \notin H\}=\{x\in E: x\notin H\}=E-H$$

Tümleyen işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $H\cup H'=E$ ve $H\cap H'=\emptyset$
- $E'=\emptyset$ ve $\emptyset'=E$
- $(H')'=H$
- $H\Delta E=E\Delta H=H'$
- $(HUJ)'=H'\cap J'$ (De Morgan Kuralı)
- $(H\cap J)'=H'\cup J'$ (De Morgan Kuralı)

(Hacısalioğlu, 2007: 43-62; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.2. Bazı Cebirsel Yapılar

2.2.1. Tanım H boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\odot: X \text{ x } X\rightarrow X$$

fonksiyonuna, X kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Aydın ve Kandamar, 2013:71). Bu tanıma göre (ikili) işlem, iki değişkenli bir fonksiyondur (Hacısalioğlu, 2007: 163-164). $\odot$ ikili işlemi, bir fonksiyon olduğundan $\forall$ a,b∈X için, a$\odot$b∈X ve $\forall$ a,b,c,d∈X için (a,b)=(c,d) iken a$\odot$b=c$\odot$d koşullarının sağlandığı açıktır. Bu koşullardan ilki, A kümesinin $\odot$ işlemine göre kapalı olması; ikincisi ise $\odot$ işleminin A üzerinde iyi tanımlı olması olarak da isimlendirilir (Aydın ve Kandamar, 2013:71). Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı (matematiksel yapı/matematiksel sistem) oluşturur (Hacısalioğlu, 2007:181; (Bayraktar, 2006:87).

2.2.2. Tanım G boş olmayan bir küme ve $\odot$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan (G, $\odot$) cebirsel yapısına grup denir.

- Her x,y,z ∈G için; (x$\odot$y)$\odot$z= x$\odot$(y$\odot$ z) (Birleşme özelliği)
- Öyle bir e∈G vardır ki, her x∈G için x$\odot$e=e$\odot$x=x (Birim eleman özelliği)
- e, birim eleman olmak üzere, her x∈G için öyle bir y∈G vardır ki x$\odot$y=y$\odot$x=e (Ters eleman özelliği)

∀x, y∈G için x$\odot$y=y$\odot$x şartını sağlayan (G, $\odot$) grubuna ise değişmeli (abelyen) grup denir (Bayraktar, 2006:87-88).

(M, $\odot$) bir cebirsel yapı olduğunda, $\odot$ M de bir ikili işlem olduğundan, her x, y∈M için, x$\odot$y∈M yani kapalılık özelliği sağlanır ve bu durumda (M, $\odot$) cebirsel yapısı grupoid adını alır. (M, $\odot$) bir grupoid olsun. ∀m∈ M için e$\odot$m =m olacak şekilde e∈M var ise, e elemanına M nin sol birim elemanı; m$\odot$e=m olacak şekilde e∈M varsa, e elemanına M nin sağ birim elemanı denir. Birim eleman hem sağ birim hem de sol birimdir ve tektir. (M,$\odot$), birim elemanı e olan bir cebirsel yapı olsun. m ∈K için m'$\odot$m=e olacak şekilde m'∈K var ise, m' elemanına m elemanının sol ters elemanı; m$\odot$m'=e olacak şekilde m'∈M varsa, m' elemanına m elemanının sağ tersi denir. m elemanının tersi, hem sağ ters, hem de sol terstir ve tektir. ∀ m ∈M için, y$\odot$m=y olacak şekilde y∈M varsa, y elemanına M nin sol yutan elemanı; ∀ m ∈M için m$\odot$y=y olacak şekilde y∈M varsa, y elemanına M nin sağ yutan elemanı denir. Yutan eleman hem sağ yutan hem de sol yutan elemandır ve tektir (Kilp, Knauer and Mikhalev, 2001)

2.2.3. Tanım (G,⊙) cebirsel yapısı, birleşme özelliğini sağlıyorsa yarı grup; birleşme ve birim eleman özelliklerini sağlıyorsa monoid denir. Değişme özelliğini sağlayan, yani $\forall$ m,n $\in$M için m⊙n=n⊙m şartını sağlayan monoide komutatif monoid denir. (Clifford, 1954).

2.2.4. Tanım (M, ⊙) bir cebirsel yapı olsun. m $\in$S için, m^2=m (yani m⊙m=m) ise m elemanına idempotent eleman denir. $\forall$m$\in$M için, m^2=m ise, (M,⊙) cebirsel yapısına idempotentir denir (Clifford, 1954).

2.2.5. Tanım İdempotent yarı gruba bant; idempotent ve değişmeli yarıgruba yarı kafes; idempotent ve değişmeli monoide sınırlı yarı kafes denir (Clifford, 1954).

Bir monoidin birim elemanı tek olmasına rağmen bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sol birime sahip olabilir; fakat birden çok sol birime sahip ise, sağ birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur. Benzer şekilde, bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sağ birime sahip olabilir; fakat birden çok sağ birime sahip ise, sol birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur (Clifford, 1954).

Benzer şekilde, bir grupta her elemanın tersi tek olmasına rağmen, bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sol tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sol terse sahip ise, sağ terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir. Benzer şekilde bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sağ tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sağ terse sahip ise, sol terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir (Clifford, 1954).

2.2.6. Teorem G boştan farklı bir küme ve ∘ , G de birleşme özelliğini sağlayan bir küme olsun. $\forall x \in G$ için $e \circ x = x$ olacak şekilde $e \in G$ var (sol birim) ve $\forall x \in G$ için $x' \circ x = e$ olacak şekilde $\exists x' \in G$ var (x elemanının sol tersi) ise bu durumda (G, ∘) bir gruptur (Çallıalp, 2011: 72-73). Burada, benzer teorem sağ birim ve sağ ters için de yazılabilir.

2.2.7. Tanım X bir küme, " ∗ ", X üzerinde bir ikili işlem ve 0, X kümesinin bir elemanı olsun. (X; ∗, 0) üçlüsü için aşağıdaki koşullar sağlanırsa X e bir BCK-cebiri denir. Her x, y, z $\in X$ için;

BCI-1 $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

BCI-2 $(x * (x * y)) * y = 0$

BCI-3 $x * x = 0$

BCI-4 $x * y = 0$ ve $y * x = 0$, $x = y$ anlamına gelir.

Bir BCI cebiri ek olarak aşağıdakileri sağlıyorsa BCK cebiri olarak adlandırılır:

BCK-5 $0 * x = 0$.

Eğer her $x \in X$ için $x*1 = 0$ olacak şekilde bir $1 \in X$ elemanı varsa, X'e sınırlı bir BCK cebiri denir. Bir $x \in X$ elemanı BCK cebiri için, $1*(1* x) = x$ koşulunu sağlıyorsa, x'e involusyon denir. BCK ve BCI cebirleri, Imai ve Iseki (1966) tarafından klasik olmayan önermeler mantığını incelemek için ortaya atılmıştır.

2.3. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$ U nun kuvvet kümesi ve $M \subseteq E$ olarak verilsin. Bir (F, M) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F,

$$F: M \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur (Molodtsov, 1999).

(F,M) esnek kümesi gösterimi, bazı kaynaklarda F_M şeklinde gösterilse de, tez boyunca Molodtsov (1999) ve Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında da kullanılan esnek kümenin (F,M) gösterimi tercih edilecektir. E parametreler kümesinin bir M alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bu esnek kümeler (F,M), (G,M), (H,M) vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin M,N,K vb. farklı alt kümeleri ile de birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler (F,M), (F,N), (F,K) vb. şeklinde olur (Maji ve diğerleri, 2003)

U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi (parametre kümesi ne olursa olsun) $S_E(U)$ ile gösterilecek olup; M, E kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, sabit M parametre kümesi ile U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi, $S_M(U)$ ile gösterilecektir. Yani, $S_M(U)$ kümesinde, parametre kümesi sadece M olan esnek kümeler yer alırken; $S_E(U)$ kümesinde, parametre kümesi herhangi bir küme olan U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alabilir.

Boş fonksiyonun tanımı ve esnek kümenin de bir fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulursa, tanım kümesi $\emptyset$ alınırak, F:$\emptyset$ ⟶P(U) olacak şekilde bir esnek küme tanımlanabileceği aşikardır. Böyle esnek kümeye, boş esnek küme denilir ve $\emptyset_{\emptyset}$ ile gösterilir. $\emptyset_{\emptyset}$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek kümedir (Ali ve diğerleri, 2011). Bu tez boyunca (F,A)= $\emptyset_{\emptyset}$ diye belirtilmediği sürece A=$\emptyset$ alınmayacaktır.

2.3.2. Örnek U satın almak için üzerinde düşünülen ceketlerin bir kümesi, E'nin de parametrelerin kümesi olduğunu kabul edelim. Her bir parametre bir kelime veya bir cümledir.

E={uzun, zarif, ince, parlak, kaliteli, kullanışlı, dayanıklı, tarz}

olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, "zarif ceket, tarz ceket vb." oluşturmak demektir. (F,M); esnek kümesi Ömer Bey'in almayı düşündüğü "ceketlerin çekiciliği" olarak tanımlanır. U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen on tane ceketin olduğunu düşünelim.

$$\mathrm{U}=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4,\mathrm{u}_5,\mathrm{u}_6,\mathrm{u}_7,\mathrm{u}_8,\mathrm{u}_9,\mathrm{u}_{10}\} \text{ ve } \mathrm{E}=\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_5,\mathrm{e}_6,\mathrm{e}_7,\mathrm{e}_8\},$$
$$\mathrm{M}=\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_5,\mathrm{e}_6,\mathrm{e}_7,\mathrm{e}_8\}$$

olsun. Burada, e_1 "uzun" parametresini; e_2 "zarif" parametresini; e_3 "ince" parametresini; e_4 "parlak" parametresini; e_5 "kaliteli" parametresini; e_6 "kullanışlı" parametresini; e_7 "dayanıklı" parametresini; e_8 "tarz" parametresini temsil etsin. Buna göre ceket almaya gelen Ömer Bey için (F,M) esnek kümesini oluşturalım. Bunun için Ömer Bey'in bakış açısına göre verilen parametrelere göre ceketleri sınıflandıralım:

$$\mathrm{F}(\mathrm{e}_1)=\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4,\mathrm{u}_{10}\},\ \mathrm{F}(\mathrm{e}_2)=\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_6,\mathrm{u}_9\}, \mathrm{F}(\mathrm{e}_4)=\emptyset,\ \mathrm{F}(\mathrm{e}_5)=\mathrm{U},\ \mathrm{F}(\mathrm{e}_6)=\{\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_4,\mathrm{u}_6,\mathrm{u}_8\},$$
$$\mathrm{F}(\mathrm{e}_7)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_7\},\ \mathrm{F}(\mathrm{e}_8)=\{\mathrm{u}_{6,}\mathrm{u}_7,\mathrm{u}_8\}$$

Bu durumda esnek kümemiz,

$$(\mathrm{F},\mathrm{M})=\{(\mathrm{e}_1,\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4,\mathrm{u}_{10}\}),(\mathrm{e}_2,\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_6,\mathrm{u}_9\}),(\mathrm{e}_4,\emptyset),\ (\mathrm{e}_5,\ \mathrm{U}),\ (\mathrm{e}_6,\{\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_4,\mathrm{u}_6,\mathrm{u}_8\}),$$
$$((\mathrm{e}_7,\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_7\}),\ (\mathrm{e}_8,\{u_{6,}u_7,u_8\})$$

şeklinde olur.

2.3.3. Tanım (F,M)$\in S_E(U)$ olsun. Her x $\in$M için; F(x)=$\emptyset$ ise (F,M) esnek kümesine M ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_T$ ile gösterilir. (F,E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Her x $\in$E için; F(x)=$\emptyset$ ise (F,E) esnek kümesine E ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.4. Tanım (F,M)$\in S_E(U)$ olsun. Her x $\in$M için; F(x)=U ise (F,M) esnek kümesine M ye göre evrensel esnek küme denir ve U_M ile gösterilir. (F,E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Her x $\in$E için; F(x)=U ise (F,E) esnek kümesine tam esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.5. Tanım (F,M), (G,Y) $\in S_E(U)$ olsun. Eğer, M$\subseteq$Y ve her x$\in$M için F(x)=G(x) ise (F,M) ye (G,Y) nin esnek alt kümesidir denir (F,M)$\tilde{\subseteq}$(G,Y) gösterilir. Eğer (G,Y), (F,M) nin esnek alt kümesi ise (F,M) ye (G,Y) nin esnek üst kümesidir denir ve (F,M)$\tilde{\supseteq}$(G,Y) ile gösterilir. Eğer (F,M)$\tilde{\subseteq}$(G,Y) ve (G,Y)$\tilde{\subseteq}$(F,M) ise (F,M) ve (G,Y) esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir (Pei ve Maio, 2005).

2.3.6. Tanım (F,M) $\in S_E(U)$ olsun. (F,M) esnek kümesinin esnek tümleyeni $(F,M)^r=(F^r,M)$ ve her x$\in$M için; $F^r(x)$=U-F(x) şeklinde tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009).

Buradan, $(\emptyset_A)^r=U_A$, $(U_A)^r=\emptyset_A$, $(\emptyset_E)^r=U_E$, $(U_E)^r=\emptyset_E$, $(\emptyset_\emptyset)^r=\emptyset_\emptyset$, $((F,A)^r)^r=(F,A)$. Ayrıca, $\emptyset_A \tilde{\subseteq}(F,A) \tilde{\subseteq} U_A \tilde{\subseteq} U_E$ olduğu açıktır. (Ali ve diğerleri, 2010).

2.3.7. Tanım $(F,M),(G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,M) \cap_R (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış kesişimi $Z = M \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olmak üzere $(F,M) \cap_R (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır (Pei ve Miao, 2005). Burada, $Z = M \cap Y = \emptyset$ ise $(F,M) \cap_R (G,Y)=\emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.8. Tanım $(F,M),(G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,M) \cup_\Re (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış birleşimi $Z = M \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ olmak üzere $(F,M) \cup_\Re (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $Z = M \cap Y = \emptyset$ ise $(F,M) \cup_R (G,Y)=\emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.9. Tanım (F, M), $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, M)\backslash_{\mathfrak{R}}(G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış farkı $Z = M \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x)\backslash G(x)$ olmak üzere $(F, M)\backslash_{\mathfrak{R}}(G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $Z = M \cap Y = \emptyset$ ise $(F, M)\backslash_{R}(G, Y)=\emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.10. Tanım (F, M), $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, M)\Delta_{\mathfrak{R}}(G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış simetrik farkı $Z = M \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x)\Delta G(x)$ olmak üzere $(F, M)\Delta_{\mathfrak{R}}(G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır (Sezgin ve Atagün, 2011). Burada, $Z = M \cap Y = \emptyset$ ise $(F, M)\Delta_{R}(G, Y)=\emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.11. Tanım (F, M), $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi (H, Z)'dir. Burada $Z = M \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M - Y \\ G(x), & x \in Y - M \\ F(x) \cup G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M) \cup_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.3.12. Tanım (F, M), $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi (H, Z)'dir. Burada $Z = M \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M - Y \\ G(x), & x \in Y - M \\ F(x) \cap G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.13. Tanım (F, M), $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş farkı (H, Z)'dir. Burada, $Z = M \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M - Y \\ G(x), & x \in Y - M \\ F(x) - G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M)\setminus_{\varepsilon}(G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Sezgin ve diğerleri, 2019).

2.3.14. Tanım $(F, M), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkı (H, Z)'dir. Burada, $Z = M \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M - Y \\ G(x), & x \in Y - M \\ F(x)\Delta G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M)\Delta_{\varepsilon}(G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Stojanavic, 2021).

2.3.15. *Örnek* E=$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametreler kümesi M=$\{e_2, e_3\}$ ve N=$\{e_1, e_3, e_4\}$, E nin iki alt kümesi olsun. (F,M) ve (G,N), U=$\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı iki esnek küme olsun:

(F,M)=$\{(e_2,\{h_4, h_5),(e_3,\{h_2,h_3,h_5\})\}$,(G,N)=$\{(e_1,\{h_2,h_3,h_5\}),\{(e_3,\{h_3,h_5\}),(e_4, h_3,h_5\}\}$

Bu durumda,

- (F,M) $\cup_{\varepsilon}$ (G,N) = $\{(e_1,\{h_2,h_3,h_5\}), (e_2,\{h_4,h_5\}),(e_3,\{h_2,h_3,h_5\}),(e_4,\{h_3,h_5\})\}$
- (F,M) $\cap_{\varepsilon}$ (G,N) = $\{(e_1,\{h_2,h_3,h_5\}), (e_2,\{h_4,h_5\}),(e_3,\{h_3,h_5\}),(e_4,\{h_3,h_5\})\}$
- (F,M) $\setminus_{\varepsilon}$(G,N) = $\{(e_1,\{h_2,h_3,h_5\}), (e_2,\{h_4,h_5\}),(e_3,\{h_2,h_4\}),(e_4,\{h_3,h_5\})\}$
- (F,M) Δ_{ε} (G,N)= $\{(e_1,\{h_2,h_3,h_5\}), (e_2,\{h_4,h_5\}),(e_3,\{h_2\}),(e_4,\{h_3,h_5\})\}$
- (F,M) $\cup_R$ (G,N) = $\{(e_3,\{h_2, h_3, h_5\})\}$
- (F,M) $\cap_R$ (G,N) = $\{(e_3,\{h_3, h_5\})\}$
- (F,M) $\setminus_R$ (G,N)= $\{(e_3,\{h_2,h_4\})\}$
- (F,M) Δ_R (G,N) = $\{(e_3,\{h_2\})\}$

Çağman (2021) kümeler için iki yeni tümleyen tanımlamıştır. + ve θ sırasıyla, kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek ve M ve N iki küme olmak üzere, M+N=M'∪N, MθN=M'∩N' olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023c), bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. M ve N iki küme olmak üzere M*N=M'∪N', MγN= M'∩N, M λ,N=M∪N' (Sezgin ve diğerleri , 2023c),

$\circledast$ kümelerdek ikili işlemleri göstermek üzere (Yani $\circledast$, $\cap$, $\cup, -, \Delta, \lambda, \gamma, \theta, +, *$ gibi küme işlemlerini göstermek üzere) esnek kümelerdeki kısıtlanmış işlemler, genişletilmiş işlemler, tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler aşağıdaki şekilde genel formda verilebilir:

2.3.16. Tanım (F, M) ve (G, Y), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, M) \circledast_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış $\circledast$ işlemi, $Z = M \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \circledast G(x)$ olmak üzere $(F, M) \circledast_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır. Burada, $Z = M \cap Y = \emptyset$ ise $(F, M) \circledast_{R} (G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Aybek, 2024).

2.3.17. Tanım (F, M) ve (G, Y), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş $\circledast$ işlemi (H, Z)'dir. Burada, $Z = M \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M - Y \\ G(x), & x \in Y - M \\ F(x) \circledast G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M) \circledast_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanavic, 2021; Aybek, 2024).

2.3.18. Tanım (F, M) ve (G, Y), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli genişletilmiş $\circledast$ işlemi (H, Z)'dir. Burada $Z = M \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in M - Y \\ G'(x), & x \in Y - M \\ F(x) \circledast G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M) \overset{*}{\circledast}_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Sarıalioğlu, 2024; Demirci, 2024).

2.3.19. Tanım (F, M) ve (G, Y), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin esnek ikili parçalı $\circledast$ işlemi (H, M)'dir ve $\forall x \in M$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in M - Y \\ F(x) \circledast G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M) \underset{\circledast}{\sim} (G, Y) = (H, M)$ şeklinde gösterilir (Eren, 2019; Sezgin ve Çalışıcı, 2024, Yavuz, 2024, Sezgin ve Yavuz, 2023a).

2.3.20. Tanım (F, M) ve (G, Y), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli esnek ikili parçalı $\circledast$ işlemi (H, M)'dir ve $\forall x \in M$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in M - Y \\ F(x) \circledast G(x), & x \in M \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, M) \overset{*}{\underset{\circledast}{\sim}} (G, Y) = (H, T)$ şeklinde gösterilir (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve diğerleri, 2023a; Sezgin ve diğerleri, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023b; Sezgin ve Çağman, 2024; Sezgin ve Sarıalioğlu, 2024)

3. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ FARK İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş fark adı verilen esnek küme işleminin cebirsel özellikleri klasik kümelerdeki fark işleminin özellikleri ile karşılaştırmalı olarak incelenmiş; sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıyı oluşturduğuna bakılmış, bu işlemin diğer işlemler ile ilişkilerini görmek için dağılma kurallarına bakılmış ve klasik kümelerdeki dağılmalara benzer sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Tanım (F,T) ve (G,Z), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ (G,Z) ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş fark işlemi $C=T\cup Z$ ve $\forall \omega \in C$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

olmak üzere (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,Z)=(H,C) ile tanımlanır.

3.2. Örnek $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametre kümesi, $T=\{e_1,e_3\}$, $Z=\{e_2,e_3,e_4\}$ E'nin iki alt kümesi, $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ evrensel küme, (F,T) ve (G,Z), U üzerinde

$(F,T)=\{(e_1,\{h_2,h_5),(e_3,\{h_1,h_2,h_5\})\},(G,Z)=\{(e_2,\{h_1,h_4,h_5\}),(e_3,\{h_2,h_3,h_4\}),(e_4,\{h_3,h_5\})\}$

olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,Z)=(H,T∪Z) olmak üzere, $\forall \omega \in T\cup Z$;

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Burada $T\cup Z=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ve $T\setminus Z=\{e_1\}$, $Z\setminus T=\{e_2,e_4\}$, $T\cap Z=\{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1)=F'(e_1)=\{h_1,h_3,h_4\}$,$H(e_2)=G'(e_2)=\{h_2,h_3\}$,$H(e_4)=G'(e_4)=\{h_1,h_2,h_4\}$,$H(e_3)=F(e_3)\setminus G(e_3)=\{\{h_1,h_5\}$.

Böylece, $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=\{(e_1,\{h_1,h_3,h_4\}),(e_2,\{h_2,h_3\}),(e_3,\{h_1,h_5\}),(e_4,\{h_1,h_2,h_4\})\}$.

3.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}: S_E(U) \text{x } S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T),(G,Z)) \rightarrow (F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=(H,T\cup Z)$$

olup, (F,T) ve (G,Z), U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}: S_T(U) \text{x } S_T(U) \rightarrow S_T(U)$$

$$((F,T),(G,T)) \rightarrow (F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T\cup T)=(K,T)$$

olup, T, E kümesinin sabit bir alt kümesi ve (F,T) ve (G,T), $S_T(U)$ kümesinin elemanı olmak üzere, $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$ de $S_T(U)$ kümesinin elemanıdır. Yani $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işlemi, $S_T(U)$ kümesi üzerinde de kapalıdır.

2) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)]\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M) \neq (F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=(S,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z$ için,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(S,T\cup Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(R,(T\cup Z)\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup M$ için,

$$R(\omega)=\begin{cases} S' & \omega\in(T\cup Z)\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash(T\cup M) \\ S(\omega)\backslash H(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap M \end{cases}$$

$$M(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\backslash M=T\cap Z'\cap M' \\ G(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\backslash M=T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup G(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash M=T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash(T\cup Z)=T'\cap Z'\cap M \\ F'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\cap M=T'\cap Z\cap M \\ [F'(\omega)\cup G(\omega)]\cap H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G,Z)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)=(R,Z\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$R(\omega)\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash Z \\ G(\omega)\backslash H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(F,T)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(R,Z\cup M)=(N,(T\cup(Z\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z\cup M$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(Z\cup M) \\ R'(\omega) & \omega\in(Z\cup M)\backslash T \\ F(\omega)\backslash R(\omega) & \omega\in T\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\ G(\omega) & \omega\in(Z\backslash M)\backslash T=T'\cap Z\cap M' \\ H(\omega) & \omega\in(M\backslash Z)\backslash T=T'\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\backslash T=T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in T\cap(Z\backslash M)=T\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\cap H(\omega) & \omega\in T\cap(M\backslash Z)=T\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\backslash[G(\omega)\backslash H(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Buradan (N,(T∪Z)∪M)≠(L,T∪(Z∪M)) olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

3) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)]\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,T) \neq (F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,T)]$.

İspat: $[F(\omega)\setminus G(\omega)]\setminus H(\omega)\neq F(\omega)\setminus[G(\omega)\setminus H(\omega)]$ olduğundan, $S_T(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

4) $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)\neq(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$.

İspat:$(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=(H,T\cup Z)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup Z$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=(S,Z\cup T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in Z\cup T$ için,

$$S(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G(\omega)\setminus F(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)\neq(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$. Eğer, $Z\cap T=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$. Buradan, $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)\neq(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işleminin değişme özelliği yoktur.

5) $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=\emptyset_T$

İspat: $(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (F,T)=(H,T)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cap F'(\omega)=\emptyset$ olur ve böylece $(H,T)=\emptyset_T$ elde edilir. Y ani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\setminus_\varepsilon}$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

6) $(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} \emptyset_T=(F,T)$

İspat: $\emptyset_T=(S,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $S(\omega)=\emptyset$. $(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (S,T)=(H,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cap S'(\omega)=F(\omega)\cap U=F(\omega)$. Böylece, $(H,T)=(F,T)$.
Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\setminus_\varepsilon}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

7) $\emptyset_T \overset{*}{\setminus_\varepsilon} ((F,T)= \emptyset_T$.

İspat: $\emptyset_T=(S,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $S(\omega)=\emptyset$. $(S,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (F,T)=(H,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=S(\omega)\cap F'(\omega)=\emptyset \cap F'(\omega)=\emptyset$. Böylece, $(H,T)= \emptyset_T$. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\setminus_\varepsilon}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

8) $(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} \emptyset_\emptyset=(F,T)^r$

İspat: $\emptyset_\emptyset=(S,\emptyset)$ ve $(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (S, \emptyset)=(H,T\cup\emptyset)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup\emptyset=T$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus\emptyset=T \\ S'(\omega) & \omega\in\emptyset \setminus T=\emptyset \\ F(\omega)\cap S'(\omega) & \omega\in T\cap\emptyset=\emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)$ olup, $(H,T)=(F,T)^r$.

9) $\emptyset_\emptyset \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (F,T)=(F,T)^r$

İspat: $\emptyset_\emptyset =(S,\emptyset)$ ve $(S,\emptyset) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (F,T)=(H, \emptyset\cup T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in\emptyset\cup T=T$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} S'(\omega) & \omega\in\emptyset\backslash T=\emptyset \\ F'(\omega) & \omega\in T\backslash\emptyset=T \\ S(\omega)\cap F(\omega) & \omega\in \emptyset\cap T=\emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)$ olup, $(H,T)=(F,T)^r$.

10) $(F,T)\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}U_E=\emptyset_E$

İspat: $U_E=(T,E)$ olsun. Böylece, $\forall\omega\in E$ için, $T(\omega)=U$. $(F,T)\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}(T,E)=(H,T\cup E)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup E=E$ için

$$H(\omega)\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash E=\emptyset \\ T'(\omega) & \omega\in E\backslash T=T' \\ F(\omega)\cap T'(\omega) & \omega\in T\cap E=T \end{cases}$$

Buradan,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash E=\emptyset \\ \emptyset & \omega\in E\backslash T=T' \\ \emptyset & \omega\in T\cap E=T \end{cases}$$

$\forall\omega\in E$ için, $H(\omega)=\emptyset$, böylece $(H,E)=\emptyset_E$.

11) $(F,T)\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}U_T=\emptyset_T$

İspat: $U_T=(K,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=U$. $(F,T)\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}(K,T)=(H,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cap T'(\omega)=F(\omega)\cap\emptyset=\emptyset$. Böylece, $(H,T)=\emptyset_T$.

12) $U_T\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}(F,T)=(F,T)^r$

İspat: $U_T=(K,T)$ olsun. Burada, $\forall \omega\in T$ için, $K(\omega)=U$. $(K,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=(H,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=T(\omega)\cap F'(\omega)=U\cap F'(\omega)=F'(\omega)$. Böylece, $(H,T)=(F,T)^r$

13) $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)^r=(F,T)$.

İspat: $(F,T)^r=(H,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F'(\omega)$. $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,T)=(L,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $L(\omega)=F(\omega)\cap H'(\omega)=F(\omega)\cap F(\omega)=F(\omega)$. Böylece, $(L,T)\,)=(F,T)$.

Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işlemi için her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sağ birim elemanıdır.

14) $(F,T)^r\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=(F,T)^r$.

İspat: $(F,T)^r=(H,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F'(\omega)$. $(H,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=(L,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $T(\omega)=H(\omega)\cap F'(\omega)=F'(\omega)\cap F'(\omega)=F'(\omega)$. Buradan $(L,T)=(F,T)^r$.

Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sol yutan elemanıdır.

15) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)]^r=(F,T)+_{\varepsilon}(G,Z)$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=(H,T\cup Z)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup Z$ için;

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(H,T\cup Z)^r=(K,T\cup Z)$ olup, $\forall\omega\in T\cup Z$ için;

$$K(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F'(\omega)\cup G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan, $(K,T\cup Z)=(F,T)+_{\varepsilon}(G,Z)$.

16) $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=U_T \Leftrightarrow (F,T)=U_T$ ve $(G,T)=\emptyset_T$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=F(\omega)\cap G'(\omega)$. $(K,T)=U_T$ olduğundan, $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=U$. Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=F(\omega)\cap G'(\omega)=U \Leftrightarrow \forall\omega\in T$ için, $F(\omega)=U$ ve $G'(\omega)=U \Leftrightarrow \forall\omega\in T$ için, $F(\omega)=U$ ve $G(\omega)=\emptyset \Leftrightarrow (F,T)=U_T$ ve $(G,T)=\emptyset_T$

17) $\emptyset_T \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)$, $\emptyset_Z \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)$, $\emptyset_Z \,\tilde{\subseteq}\, (G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$, $\emptyset_T \,\tilde{\subseteq}\, (G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$. Ayrıca, $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)\,\tilde{\subseteq}\, U_{T\cup Z}$ ve $(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)\,\tilde{\subseteq}\, U_{Z\cup T}$.

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

18) $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)\,\tilde{\subseteq}\,(G,T)^r$ ve $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)\,\tilde{\subseteq}\,(F,T)$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(H,Z)$ olsun. $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cap G'(\omega)$ olur. Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cap G'(\omega)\subseteq F(\omega)$ ve $H(\omega)=F(\omega)\cap G'(\omega)\subseteq G'(\omega)$. Böylece, $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)\,\tilde{\subseteq}\,(F,T)$ ve $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)\,\tilde{\subseteq}\,(G,Z)^r$.

19) $(F,T)\,\tilde{\subseteq}\,(G,T)$ ise $(H,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)\,\tilde{\subseteq}\,(H,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)$.

İspat: $(F,T)\,\tilde{\subseteq}\,(G,T)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in T$ için, $F(\omega)\subseteq G(\omega)$ ve $G'(\omega)\subseteq F'(\omega)$. $(H,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(Y,Z\cup T)$ olsun. $\forall\omega\in Z\cup T$ için;

$$Y(\omega)=\begin{cases} H'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ G'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ H(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

$(H,Z)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}\ (F,T)=(W,Z\cup T)$ olsun. $\forall\omega\in Z\cup T$ için;

$$W(\omega)=\begin{cases} H'(\omega) & \omega\in Z\backslash T \\ F'(\omega) & \omega\in T\backslash Z \\ H(\omega)\cap F'(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

$\omega\in T\backslash Z$ ise, $Y(\omega)=H'(\omega)$ ve $W(\omega)=H'(\omega)$ olup, $Y(\omega)=H'(\omega)\subseteq H'(\omega)=W(\omega)$; $\omega\in Z\backslash T$ ise, $Y(\omega)=G'(\omega)$ ve $W(\omega)=F'(\omega)$ olup, $Y(\omega)=G'(\omega)\subseteq F'(\omega)=W(\omega)$; $\omega\in T\cap Z$ ise, $Y(\omega)=H(\omega)\cap G'(\omega)$ ve $W(\omega)=F(\omega)\cap H'(\omega)$ olup, $Y(\omega)=H(\omega)\cap G'(\omega)\subseteq H(\omega)\cap F'(\omega)=W(\omega)$ olup, $\forall\omega\in Z\cup T$ için $Y(\omega)\subseteq W(\omega)$. Böylece, $(H,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,T)\ \widetilde{\subseteq}(H,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(F,T)$.

20) $(H,Z)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,T)\ \widetilde{\subseteq}(H,Z)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(F,T)$ ise $(F,T)\ \widetilde{\subseteq}\ (G,T)$ olmak zorunda değildir.

İspat: $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ parametre kümesi, $T=\{e_1,e_3\}$, $Z=\{e_1,e_3,e_5\}$ E'nin alt kümeleri, $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ evrensel küme, (F,T), (G,T) ve (H,Z),U üzerinde
$(F,T)=\{(e_1,U),(e_3,U)\},(G,T)=\{(e_1,U)\},(e_3,U)\},(H,Z)=\{(e_1,\{h_2\}),(e_3,U),(e_5,\{h_2\})\}$
olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(H,Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,T)=(L,Z\cup T)$ olmak üzere $\forall\omega\in Z\cup T=\{e_1,e_3,e_5\}$ için,

$L(e_1)=H(e_1)\cap G'(e_1)=\emptyset$, $L(e_3)=H(e_3)\cap G'(e_3)=\emptyset$, $L(e_5)=H'(e_5)=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$.

Buradan, $(H,Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,T)=\{(e_1,\emptyset),(e_3,\emptyset),(e_5,\{h_1,h_2,h_3,h_4\})\}$.

$(H,Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(F,T)=(W,Z\cup T)$ olmak üzere $\forall\omega\in Z\cup T=\{e_1,e_3,e_5\}$ için,

$W(e_1)=H(e_1)\cap F'(e_1)=\emptyset$, $W(e_3)=H(e_3)\cap F'(e_3)=\emptyset$, $W(e_5)=H'(e_5)=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}\}$.

Böylece $(H,Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(F,T)=\{(e_1,\emptyset),(e_3,\emptyset),(e_5,\{h_1,h_2,h_3,h_4\})\}$. Buradan, $(H,Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,T)\ \widetilde{\subseteq}(H,Z)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(F,T)$ fakat $(F,T)\ \widetilde{\subseteq}\ (G,T)$ olmadığı açıktır.

21) (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,T) ve (K,T) $\tilde{\subseteq}$ (L,T) ise (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(L,T) $\tilde{\subseteq}$(G,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(K,T) ve (K,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(G,T) $\tilde{\subseteq}$(L,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(F,T).

İspat: (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,T) ve (K,T) $\tilde{\subseteq}$ (L,T) olsun. Buradan, $\forall\omega \in T$; $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $K(\omega) \subseteq L(\omega)$. Buradan, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ ve $L'(\omega) \subseteq K'(\omega)$. Böylece, $\forall\omega \in T$; $F(\omega) \cap L'(\omega) \subseteq G(\omega) \cap K'(\omega)$ ve $K(\omega) \cap G'(\omega) \subseteq L(\omega) \cap F'(\omega)$.

22) (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(G,T)=(F,T) $\overset{*}{\cap_{\varepsilon}}$(G,T)^r.

İspat: (F,T) $\overset{*}{\cap_{\varepsilon}}$(G,T)^r=(H,T) olsun. Buradan, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cap G'(\omega)=F(\omega)\backslash G(\omega)$. Böylece, (H,T)=(F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(G,T).

Klasik kümelerde $T\subseteq Z \Leftrightarrow T\backslash Z=\emptyset$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

23) (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,T) $\Leftrightarrow$ (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(G,T)=$\emptyset_T$.

İspat: (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,T) olsun. Buradan, $\forall\omega\in T$; $F(\omega)\subseteq G(\omega)$ olur. (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(G,T)=(H,T) olsun. Bu durumda, $\forall\omega\in T$ için; $H(\omega)=F(\omega)\backslash G(\omega)$. $\forall\omega\in T$ için, $F(\omega)\subseteq G(\omega)$ olduğundan; $H(\omega)=F(\omega)\backslash G(\omega)=\emptyset$. Böylece, (H,T)=$\emptyset_T$. Tersine, (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(G,T)= $\emptyset_T$ olduğundan ve $\forall\omega\in T$ için, $F(\omega)\backslash G(\omega)=\emptyset$. Buradan, $\forall\omega\in T$ için $F(\omega)\subseteq G(\omega)$. Böylece, (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,Z).

Klasik kümelerde, $T\backslash(T\backslash Z)=T\cap Z$ olup, tümleyenli genişletimiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

24) (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$[(F,T)$\backslash_R$(G,Z)]=(F,T) $\underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}$ (G,Z).

İspat: (F,T)$\backslash_R$(G,T)=(K,T$\cap Z$) olsun. $\forall\omega \in T\cap Z$; $K(\omega)=F(\omega)\backslash G(\omega)$. (F,T) $\overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}$(K,T$\cap Z$)=(S,T$\cup$ (T$\cap Z$))=(S,T) olsun. $\forall\omega \in T\cup(T\cap Z)$ için,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(T\cap Z)=T\backslash Z \\ K'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash T=\emptyset \\ F(\omega)\backslash K(\omega) & \omega\in T\cap(T\cap Z)=T\cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(T\cap Z)=T\backslash Z \\ F(\omega)\backslash[F(\omega)\backslash G(\omega)] & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(T\cap Z)=T\backslash Z \\ F(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Böylece, $(S,T)=(F,T)\ \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}\ (G,Z)$.

Klasik kümelerde, $T\backslash(T\cap Z)=T\backslash Z$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

25) $(F,T)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}\,[(F,T)\cap_{R}(G,T)]=(F,T)\ \underset{\backslash}{\overset{*}{\sim}}\ (G,T)$

İspat: $(F,T)\cap_{R}G,T)=(K,T\cap Z)$ olsun. $\forall\omega\in T\cap Z$; $K(\omega)=F(\omega)\cap G(\omega)$. $(F,T)\ \overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(K,T\cap Z)=(S,T\cup(T\cap Z))=(S,T)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup(T\cap Z)$ için,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(T\cap Z)=T\backslash Z \\ K'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash T=\emptyset \\ F(\omega)\backslash K(\omega) & \omega\in T\cap(T\cap Z)=T\cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash(T\cap Z)=T\backslash Z \\ F(\omega)\backslash[F(\omega)\cap G(\omega)] & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(T\cap Z)=T\setminus Z \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Böylece, $(S,T)=(F,T)\ \underset{\setminus}{\overset{*}{\sim}}\ (G,Z)$.

Klasik kümelerde, $T\cap Z=\emptyset$ ise $T\setminus Z=T$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

26) $(F,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(G,T)=\emptyset_T$ ise $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(F,T)$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=F(\omega)\cap G(\omega)$. $(K,T)=\emptyset_T$ olduğundan, $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\cap G(\omega)=\emptyset$. $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(L,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için $L(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. $\forall\omega\in T$; $F(\omega)\cap G(\omega)=\emptyset$ olduğundan, $L(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)=F(\omega)$. Böylece, $(L,T)=(F,T)$.

Klasik kümelerde, $(T\setminus Z)\cap Z=\emptyset$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

27) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)]\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(G,T)=\emptyset_T$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$.$(K,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(G,T)=(L,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için; $L(\omega)=K(\omega)\cap G(\omega)=[F(\omega)\setminus G(\omega)]\cap G(\omega)=\emptyset$. Böylece, $(L,T)=\emptyset_T$.

Klasik kümelerde, $(T\setminus Z)\cap Z=\emptyset$ olduğundan, $(T\setminus Z)\setminus Z=T\setminus Z$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

28) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}G,T)]\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. $(K,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(L,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$; $L(\omega)=K(\omega)\setminus G(\omega)=[F(\omega)\setminus G(\omega)]\setminus G(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $(L,T)=(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$.

Klasik kümelerde, $(T\setminus Z)\cap(Z\setminus T)=\emptyset$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

29) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)]\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}[(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)]=\emptyset_T$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. $(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=(L,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $L(\omega)=G(\omega)\setminus F(\omega)$. $(K,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(L,T)=(S,T)$ olsun.

Burada, $\forall\omega\in T$ için; $S(\omega)=K(\omega)\cap L(\omega)=[F(\omega)\setminus G(\omega)]\cap[G(\omega)\setminus F(\omega)]=\emptyset$. Böylece, $(S,T)=\emptyset_T$.

Klasik kümelerde, $(T\setminus Z)\cap(Z\setminus T)=\emptyset$ olduğundan, $(T\setminus Z)\setminus(Z\setminus T)=T\setminus Z$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

30) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}G,T)]\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}[(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)]=(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. $(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)=(L,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $L(\omega)=G(\omega)\setminus F(\omega)$. $(K,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(L,T)=(S,T)$ olsun.

Burada, $\forall\omega\in T$ için; $S(\omega)=K(\omega)\setminus L(\omega)=[F(\omega)\setminus G(\omega)]\setminus[G(\omega)\setminus F(\omega)]=F(\omega)\setminus G(\omega)$. Böylece, $(S,T)=(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$.

Klasik kümelerde, $(T\setminus Z)\cap(T\cap Z)=\emptyset$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

31) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)]\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}[(F,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(G,T)]=\emptyset_T$.

İspat: (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)=(K,T) olsun. ∀ω∈T; K(ω)=F(ω)\G(ω). (F,T) $\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}$(G,T)=(L,T) olsun. ∀ω∈T; L(ω)=F(ω)∩G(ω).(K,T) $\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}$(L,T)=(S,T) olsun. Burada, ∀ω∈T için; S(ω)=K(ω)∩L(ω)=[F(ω)\G(ω)]∩[F(ω)∩G(ω)]=∅. Böylece, (S,T)= $\emptyset_T$.

Klasik kümelerde, (T\Z)∩ (T∩Z)=∅ olduğundan (T\Z)\(T∩Z)=T\Z olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

32) $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)]\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(F,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}(G,Z)]=(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$.

İspat: (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)=(K,T) olsun. ∀ω∈T; K(ω)=F(ω)\G(ω). (F,T) $\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}$(G,T)=(L,T) olsun. ∀ω∈T; L(ω)=F(ω)∩G(ω).(K,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(L,T)=(S,T) olsun.
Burada, ∀ω∈T için; S(ω)=K(ω)\L(ω)=[F(ω)\G(ω)]\[F(ω)∩G(ω)]=F(ω)\G(ω). Böylece, (S,T)= $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,T)$.

Klasik kümelerde, T∩ (Z\T)=∅ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

33) $(F,T)\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}[(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)]=\emptyset_T$.

İspat: (G,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T)=(K,T) olsun. ∀ω∈T; K(ω)=G(ω)\F(ω). (F,T) $\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}$(K,T)=(L,T) olsun. ∀ω∈T; L(ω)=F(ω)∩K(ω)=F(ω)∩[G(ω)\F(ω)]=∅. Böylece, (L,T)= $\emptyset_T$.

Klasik kümelerde, T∩ (Z\T)=∅ olduğundan, T\(Z\T)=T olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

34) $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(G,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(F,T)]=(F,T)$.

İspat: (G,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T)=(K,T) olsun. ∀ω∈T; K(ω)=G(ω)\F(ω).(F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(K,T)=(L,T) olsun. ∀ω∈T; L(ω)=F(ω)\K(ω)=F(ω)\[G(ω)\F(ω)]=F(ω). Böylece, (L,T)=(F,T).

Klasik kümelerde, T=(T\Z)∪(T∩Z) olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

35) $(F,T) = [(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,T)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} [(F,T) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G,T)]$.

İspat: $(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,T)=(K,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. $(F,T) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G,T)=(L,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için; $L(\omega)=F(\omega)\cap G(\omega)$. $(K,T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (L,T)=(S,T)$ olsun. Böylece, $\forall\omega\in T$ için; $S(\omega)=K(\omega)\cup L(\omega)=[F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup[F(\omega)\cap G(\omega)]=F(\omega)$. Böylece, $(S,T)= (F,T)$.

Klasik kümelerde, $T\cup Z=(T\setminus Z)\cup Z$ ve $T\cup Z=(Z\setminus T)\cup T$ olup, tümleyenli genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

36) $(F,T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G,T) = [(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,T)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G,T)$ ve $(F,T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G,T) = [(G,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (F,T)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (F,T)$.

İspat: $(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,T)=(K,T)$ olsun. $\forall\omega\in T$; $K(\omega)=F(\omega)\setminus G(\omega)$. $(K,T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G,T)=(L,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için;
$L(\omega)=K(\omega)\cup G(\omega)=[F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup G(\omega)=F(\omega)\cup G(\omega)$. $(F,T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G,T)=(S,T)$ olsun. Böylece, $\forall\omega\in T$ için; $S(\omega)=F(\omega)\cup G(\omega)$. Böylece, $(S,T)= (F,T)$.

Klasik kümelerde, $T\cup Z=(T\setminus Z)\cup (Z\setminus T)\cup (T \cap Z)$ olup, tümleyenli genişletililmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

37) $(F,T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G,Z) = [(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,Z)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} [(G,Z) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (F,T)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} [(F,T) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G,Z)]$

İspat: $(F,V) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,Z)=(H,T\cup Z)$, $(G,Z) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (F,T)=(K,T\cup Z)$ ve $(F,T) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G,Z)=(S,T\cup Z)$ olsun. Böylece, $\forall\omega\in T\cup Z$ için

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T-Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z-T \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

ve

$$K(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z-T \\ F'(\omega) & \omega\in T-Z \\ G(\omega)\setminus F(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

ve

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T-Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z-T \\ F(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(H,T\cup Z)\ \overset{*}{\cup}_{\varepsilon}\ (K,Z\cup T)=(M,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z$ için;

$$M(\omega)=\begin{cases} H'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)-(Z\cup T)=\emptyset \\ K'(\omega) & \omega\in(Z\cup T)-(T\cup Z)=\emptyset \\ H(\omega)\cup K(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap(Z\cup T)=T\cup Z \end{cases}$$

Böylece

$$M(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(Z\setminus T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\setminus Z)=T\setminus Z \\ F'(\omega)\cup[G(\omega)\setminus F(\omega)] & \omega\in(T\setminus Z)\cap(Z\cap T)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(Z\setminus T)=Z\setminus T \\ G'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\setminus Z)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup[G(\omega)\setminus F(\omega)] & \omega\in(Z\setminus T)\cap(Z\cap T)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(Z\setminus T)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\setminus Z)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup[G(\omega)\setminus F(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(Z\cap T)=T\cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup[G(\omega)\setminus F(\omega)] & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(M,T\cup Z) \overset{*}{\cup_{\varepsilon}} (S,T\cup Z)=(W,T\cup Z)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup Z$ için;

$$W(\omega)=\begin{cases} M'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)-(T\cup Z)=\emptyset \\ S'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)-(T\cup Z)=\emptyset \\ M(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap(T\cup Z)=T\cup Z \end{cases}$$

Buradan,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\cap(T\backslash Z)=T\backslash Z \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\cap(Z\backslash T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup[F(\omega)\cap G(\omega)] & \omega\in(T\backslash Z)\cap(T\cap Z)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\cap(T\backslash Z)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\cap(Z\backslash T)=Z\backslash T \\ G'(\omega)\cup[F(\omega)\cap G(\omega)] & \omega\in(Z\backslash T)\cap(T\cap Z)=\emptyset \\ [F(\omega)\backslash G(\omega)]\cup[G(\omega)\backslash F(\omega)]\cup F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\backslash Z)=\emptyset \\ [F(\omega)\backslash G(\omega)]\cup[G(\omega)\backslash F(\omega)]\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(Z\backslash T)=\emptyset \\ [F(\omega)\backslash G(\omega)]\cup[G(\omega)\backslash F(\omega)]\cup[F(\omega)\cap G(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\cap Z)=T\cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash Z \\ G'(\omega & \omega\in Z\backslash T \\ F(\omega)\cup G(\omega & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan $(W,T\cup Z)=(F,T) \overset{*}{\cup_{\varepsilon}} (G,Z)$ olur.

3.4. Teorem $(S_T(U), \overset{*}{\backslash_{\varepsilon}}, \emptyset_T)$ her bir elemanı involusyon olan sınırlı bir BCK-cebiridir.

İspat: $(F,T), (G,T), (H,T)\in S_T(U)$. Bu durumda,

BCI-1 $\{[(F,T) \overset{*}{\backslash_{\varepsilon}} (G,T)] \overset{*}{\backslash_{\varepsilon}} [(F,T) \overset{*}{\backslash_{\varepsilon}} (H,T)]\} \overset{*}{\backslash_{\varepsilon}} [(H,T) \overset{*}{\backslash_{\varepsilon}} (G,T)]=\emptyset_T$.

Gerçekten, (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)=(W,T) olsun. ∀ω∈T; W(ω)=F(ω)\G(ω). (F,T) $\tilde{\setminus}$(H,T)=(M,T) olsun. ∀ω∈T; M(ω)= F(ω)\H(ω). (W,T)$\tilde{\setminus}$(M,T)=(L,T) olsun. ∀ω∈T; L(ω)=W(ω)\M(ω). Böylece, ∀ω∈T; L(ω)=[F(ω)\Q(ω)]\[F(ω)\Z(ω)]. (H,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)=(S,T) olsun. ∀ω∈T; S(ω)=H(ω)\G(ω). (L,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(S,T)=(X,T). ∀ω∈T; X(ω)=L(ω)\S(ω). Böylece, ∀ω∈T; X(ω)={[F(ω)\G(ω)]\ [F(ω)\H(ω)]}\[H(ω)\G(ω)])=∅ . Böylece, (X,T)= $\emptyset_T$.

BCI-2 [(F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$[(F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)]] $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ (G,T)= $\emptyset_T$. Gerçekten, (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)=(K,T) olsun. ∀ω∈T;
K(ω)=F(ω)\G(ω).(F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(K,T)=(M,T) olsun.
Böylece, ∀ω∈T; M(ω)=F(ω)\K(ω)=F(ω)\[F(ω)\G(ω)]. Buradan, ∀ω∈T; M(ω)=F(ω)∩G(ω). (M,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T) =(L,T) olsun. Böylece, ∀ω∈T; L(ω)= M(ω)\G(ω)=[F(ω)∩G(ω)]\G(ω)=∅. Böylece, (L,T)= $\emptyset_T$.

BCI-3 Teorem 3.3 (5), (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T) =$\emptyset_T$.

BCI-4 Teorem 3.3 (24), (F,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(G,T)=$\emptyset_T$ ⟹(F,T)$\tilde{\subseteq}$(G,T) ve (G,T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T) =$\emptyset_T$ ⟹(G,T) $\tilde{\subseteq}$(F,T) ve böylece, (F,T)=(G,T).

BCK-5 Teorem 3.3 (7), $\emptyset_T$ $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T)= $\emptyset_T$.

Böylece, (S_T(U), $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$, $\emptyset_T$) bir BCK-cebiridir. Teorem 3.4 (11) den her (F,T)∈ S_T(U) için, (F, T) $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$ U_T=$\emptyset_T$. Böylece, (S_T(U), $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$, $\emptyset_T$) sınırlı bir BCK-cebiridir. Ayrıca, her (F,T)∈ S_T(U) için, U_T $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$[$U_T$ $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T)]=(F,T) olduğundan, (Çünkü Teorem 3.3 (12) den, U_T $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$(F,T)= $(F,T)^r$ ve böylece U_T $\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}$$(F,T)^r$=$[(F,T)^r]^r$=(F,T), S_T(U) kümesinin her elemanı bir involusyondur.

3.5. Teorem (F, T), (G, Z), (H,M), U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

3.5.1. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Fark İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(G,Z)\cup_R(H,M)]=[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)]\cap_R[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z)\cup_R(H,M)=(M,Z\cap M)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in Z\cap M; M(\omega)=G(\omega)\cup H(\omega)$. $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(M,Z\cap M)=(N,T\cup(Z\cap M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup(Z\cap M)$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cap M)\\ M'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus T\\ F(\omega)\setminus M(\omega) & \omega\in T\cap(Z\cap M)\end{cases}$$

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cap M)\\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus T\\ F(\omega)\setminus[G(\omega)\cup H(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M)\end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)=(M,T\cup Z)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$M(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z\\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T\\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in T\cap Z\end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(K,T\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M\\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T\\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap M\end{cases}$$

$(M,T\cup Z)\cap_R(K,T\cup M)=(W,(T\cup Z)\cap(T\cup M))$ olsun. Burada, $\forall\omega\in(T\cup Z)\cap(T\cup M)$; $W(\omega)=T(\omega)\cap K(\omega)$;

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cap F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cap[F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cap F'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\setminus M)=\emptyset \\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(M\setminus T)=T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cap[F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\cap M)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cap F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cap H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cap[F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ \emptyset & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ \emptyset & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cap[F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $T\setminus(Z\cap M)$ yi ele alırsak, $T\setminus(Z\cap M)=T\setminus(Z\cap M)'$ olup, bir eleman $(Z\cap M)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z\setminus M$ de, ya $M\setminus Z$ de, ya da $Z\cup M$ nin tümleyenindedir. Buradan, $\omega\in T\setminus(Z\cap M)$ ise $\omega\in T\cap Z\cap M'$ veya $\omega\in T\cap Z'\cap M$ veya $\omega\in T\cap Z'\cap M'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ için N ve W fonksiyonları birbirine eşit olur. $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

2) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(G,Z)\ \cap_R(H,M)]=[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)]\cup_R[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Fark İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması

1) $T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise $[(F,T)\cup_R(G,Z)]\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]\cup_R[(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,T)\cup_R(G,Z)=(R,T\cap Z)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in T\cap Z$; $R(\omega)=F(\omega)\cup G(\omega)$. $(R,T\cap Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(L,(T\cap Z)\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in(T\cap Z)\cup M$;

$$L(\omega)=\begin{cases} R'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cap Z) \\ R(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cap Z) \\ [F(\omega)\cup G(\omega)]\setminus H(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]\cup_R[(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(K,Z\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus Z \\ G(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(S,T\cup Z)\cup_R(K,Z\cup M)=(W,(T\cup Z)\cap(Z\cup M))$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in(T\cup Z)\cap(Z\cup M)$; $W(\omega)=S(\omega)\cup K(\omega)$ olup;

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(M\setminus Z)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\cap M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(M\setminus Z)=T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega)\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\cap M)=T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; L fonksiyonundaki, $M\setminus(T\cap Z)$'yi ele alırsak, $M\setminus(T\cap Z)=M\cap(T\cap Z)'$ olup, bir eleman $(T\cap Z)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $T\setminus Z$ de, ya $Z\setminus T$ de, ya da $T\cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\omega\in M\setminus(T\cap Z)$ ise $\omega\in M\cap T\cap Z'$ veya $\omega\in M\cap Z\cap T'$ veya $\omega\in M\cap T'\cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise L=W sağlanır.

2)$(T\Delta Z)\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$,$[(F,T)\cap_R(G,Z)]\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]\cap_R[(G,Z)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$.

3.5.2. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i)Tümleyenli Genişletilmiş Fark İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}[(G,Z)\cap_{\varepsilon}(H,M)]=[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(G,Z)]\cup_{\varepsilon}[(F,T)\overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (R, Z\cup M)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Z\cup M$;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega) & \omega \in Z \setminus M \\ H(\omega) & \omega \in M \setminus Z \\ G(\omega) \cap H(\omega) & \omega \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (R, Z\cup M) = (N, (T\cup(Z\cup M))$ bakalım. $\forall \omega \in T\cup(Z\cup M)$;

$$N(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega \in T \setminus (Z\cup M) \\ M'(\omega) & \omega \in (Z\cup M) \setminus T \\ F(\omega) \setminus M(\omega) & \omega \in T \cap (Z\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega \in T \setminus (Z\cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G'(\omega) & \omega \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H'(\omega) & \omega \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G'(\omega) \cup H'(\omega) & \omega \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\omega) \setminus G(\omega) & \omega \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\omega) \setminus H(\omega) & \omega \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\omega) \setminus [G(\omega) \cap H(\omega)] & \omega \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (G,Z) = (K, T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall \omega \in T\cup Z$;

$$K(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega \in T \setminus Z \\ G'(\omega) & \omega \in Z \setminus T \\ F(\omega) \setminus G(\omega) & \omega \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon} (H,M) = (S, T\cup M)$ olsun. Burada $\forall \omega \in T\cup M$;

$$S(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega \in T \setminus M \\ H'(\omega) & \omega \in M \setminus T \\ F(\omega) \setminus H(\omega) & \omega \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T\cup Z) \cup_{\varepsilon} (S, T\cup M) = (L, (T\cup Z)\cup(T\cup M))$ olsun. Burada $\forall \omega \in (T\cup Z)\cup(T\cup M)$;

$$L(\omega) = \begin{cases} K(\omega) & \omega \in (T\cup Z)\setminus(T\cup M) \\ S(\omega) & \omega \in (T\cup M)\setminus(T\cup Z) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega \in (T\cup Z)\cap(T\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega \in (T\setminus Z)\setminus(T\cup M) = \emptyset \\ G'(\omega) & \omega \in (Z\setminus T)\setminus(T\cup M) = T'\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega \in (T\cap Z)\setminus(T\cup M) = \emptyset \\ F'(\omega) & \omega \in (T\setminus M)\setminus(T\cup Z) = \emptyset \\ H'(\omega) & \omega \in (M\setminus T)\setminus(T\cup Z) = T'\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega \in (T\cap M)\setminus(T\cup Z) = \emptyset \\ F'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega \in (T\setminus Z)\cap(T\setminus M) = T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega \in (T\setminus Z)\cap(M\setminus T) = \emptyset \\ F'(\omega)\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega \in (T\setminus Z)\cap(T\cap M) = T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega \in (Z\setminus T)\cap(T\setminus M) = \emptyset \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega \in (Z\setminus T)\cap(M\setminus T) = T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega \in (Z\setminus T)\cap(T\cap M) = \emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup F'(\omega) & \omega \in (T\cap Z)\cap(T\setminus M) = T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega \in (T\cap Z)\cap(M\setminus T) = \emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega \in (T\cap Z)\cap(T\cap M) = T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\backslash G(\omega)]\cup[F(\omega)\backslash H(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

$T\cap Z\cap M'=T\cap Z'\cap M=\emptyset$ için N=L olduğu görülür. $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

2)$T\cap(Z\Delta M)$ ise $(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}[(G,Z)\cup_{\varepsilon}(H,M)]=[(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,Z)]\cap_{\varepsilon}[(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)]$.

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Fark İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

1) $T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise $[(F,T)\cap_{\varepsilon}(G,Z)]\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)]\cap_{\varepsilon}[(G,Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T)\cap_{\varepsilon}(G,Z)=(R,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$R(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in T\backslash Z \\ G(\omega) & \omega\in Z\backslash T \\ F(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(R,T\cup Z)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)=(N,(T\cup Z)\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup M$;

$$N(\omega)=\begin{cases} R'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash(T\cup Z) \\ R(\omega)\backslash H(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\setminus M=T\cap Z'\cap M' \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\setminus M=T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus M=T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cup Z)=T'\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ G(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap M=T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\cap G(\omega)]\setminus H(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]\cap_{\varepsilon}[(G,Z)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(K,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(G,Z)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus Z \\ G(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup M)\cap_{\varepsilon}(S,Z\cup M)=(L,(T\cup M)\cup(Z\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup M)\cup(Z\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup M)\setminus(Z\cup M) \\ S(\omega) & \omega\in(Z\cup M)\setminus(T\cup M) \\ K(\omega)\cap S(\omega) & \omega\in(T\cup M)\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\setminus(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(T\cap M)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus M)\setminus(T\cup M)=T'\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in(M\setminus Z)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ G(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(M\setminus Z)=\emptyset \\ F'(\omega)\cap [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\cap M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(M\setminus Z)= T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega)\cap [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\cap M)=T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cap G'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cap H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cap [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ G'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ G(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cap [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

$T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise N=L olduğu görülür.

2)$(T\Delta Z)\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise$[(F,T) \cup_\varepsilon(G,Z)] \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\ (H,M)]\cup_\varepsilon [(G,Z) \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$.

3.5.3. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Fark İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}[(G,Z)\,\tilde{\cap}\,(H,M)] = [(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,Z)]\,\tilde{\cup}\,[(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z)\,\tilde{\cap}\,(H,M)=(R,Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z$;

$$R(\omega)=\begin{cases} G(\omega) & \omega\in Z\backslash M \\ G(\omega)\cap H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(R,Z)=(N,T\cup Z)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash Z \\ R'(\omega) & \omega\in Z\backslash T \\ F(\omega)\backslash R(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash Z \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\backslash M)\backslash T=T'\cap Z\cap M' \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\backslash T=T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\backslash G(\omega) & \omega\in T\cap(Z\backslash M)=T\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\backslash\,[G(\omega)\cap H(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,Z)]\,\tilde{\cup}\,[(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\overset{*}{\backslash}_{\varepsilon}(G,Z)=(K,T\cup Z)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\backslash T \\ F(\omega)\backslash G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(F,T)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup Z)\ \tilde{\cup}\ (S,T\cup M)=(L,(T\cup Z)\cup(T\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup(T\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\setminus(T\cup M) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap(T\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\setminus(T\cup M)=T'\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\setminus G(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\setminus M)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(M\setminus T)= T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\cap M)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ G(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\setminus G(\omega)]\cup [F(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, T\Z yi ele alırsak, T\Z=T∩Z' olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya M\Z de, ya da M∪Z nin tümleyenindedir. Burdan, ω∈T\Z ise ω∈T∩M∩Z' veya ω∈T∩M'∩Z' olduğuna dikkat edecek olursak, T∩Z'∩M=T∩Z∩M'=∅ şartına ile N=L sağlanır. T∩Z'∩M=T∩Z∩M'=∅ şartının T∩(ZΔM)=∅ denk olduğu aşikardır.

2) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon}[(G,Z) \,\tilde{\cup}\, (H,M)] = [(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon}(G,Z)] \,\tilde{\cap}\, [(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon}(H,M)]$.

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Fark İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $[(F,T) \,\tilde{\cup}\, (G,Z)] \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (H,M) = [(F,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon}(H,M)] \,\tilde{\cup}\, [(G,Z) \overset{*}{\setminus_\varepsilon} (H,M)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \,\tilde{\cup}\, (G,Z)=(R,T)$ olsun. Burada, ∀ω∈T;

$$R(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ F(\omega)\cup G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(R,T) \overset{*}{\setminus_\varepsilon}(H,M) =(N,T\cup M)$ olsun. Burada, ∀ω∈T∪M;

$$N(\omega)=\begin{cases} R'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ R(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\setminus M=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus M=T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\cup G(\omega)]\setminus H(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]\ \tilde{\cup}\ [(G,Z)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım.

$(F,T)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(K,T\cup M)$ $\forall\omega\in T\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(G,Z)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus Z \\ G(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup M)\ \tilde{\cup}\ (S,Z\cup M)=(L,(T\cup M)\cup(Z\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup M)\cup(Z\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup M)\setminus(Z\cup M) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup M)\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Buradan

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\setminus(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\ F(\omega)\setminus H(\omega) & \omega\in(T\cap M)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(M\setminus Z)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\cap M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(M\setminus Z)= T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega)\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\cap M)=T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\setminus H(\omega)]\cup [G(\omega)\setminus H(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $M\setminus T$ yi ele alırsak, $M\setminus T=M\cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya $Z\setminus T$ de ya da $Z\cup T$ nin tümleyenindedir. Buradan, $\omega\in M\setminus T$ ise $\omega\in M\cap Z\cap T'$ veya $\omega\in M\cap Z'\cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T\cap Z'\cap M= T\cap Z\cap M' =\emptyset$ şartı ile N=L sağlanır. $T\cap Z'\cap M= T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ denk olduğu aşikardır.

2) $(T\Delta M)\cap Z=\emptyset$ ise $[(F,T)\,\tilde{\cap}\,(G,Z)]\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}\ (H,M) = [(F,T)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}(H,M)]\ \tilde{\cap}\ [(G,Z)\ \overset{*}{\setminus}_{\varepsilon}\ (H,M)]$

4. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ LAMDA İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş lamda adı verilen esnek küme işleminin cebirsel özellikleri klasik kümelerdeki lamda işleminin özellikleri ile karşılaştırmalı olarak incelenmiş; bu işlemin diğer işlemler ile ilişkilerini görmek için dağılma kurallarına bakılmıştır.

4.1. Tanım (F,T) ve (G,Z), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş lamda işlemi $C=T\cup Z$ ve $\forall\omega\in C$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

olmak üzere $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)=(H,C)$ ile tanımlanır.

4.2. Örnek $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametre kümesi, $T=\{e_1,e_3\}$, $Z=\{e_2,e_3,e_4\}$ E'nin iki alt kümesi, $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ evrensel küme, (F,T) ve (G,Z), U üzerinde

$(F,T)=\{(e_1,\{h_2,h_5\}),(e_3,\{h_1,h_2,h_5\})\},(G,Z)=\{(e_2,\{h_1,h_4,h_5\}),(e_3,\{h_2,h_3,h_4\}),(e_4,\{h_3,h_5\})\}$

olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)=(H,T\cup Z)$ olmak üzere, $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Burada $T\cup Z=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ve $T\setminus Z=\{e_1\}$, $Z\setminus T=\{e_2,e_4\}$, $T\cap Z=\{e_3\}$ olmak üzere,

$H(e_1)=F'(e_1)=\{h_1,h_3,h_4\}$,$H(e_2)=G'(e_2)=\{h_2,h_3\}$,$H(e_4)=G'(e_4)=\{h_1,h_2,h_4\}$,$H(e_3)=F(e_3)\cup G'(e_3)=\{h_1,h_2,h_5\}$.

Böylece,

$(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)=\{(e_1,\{h_1,h_3,h_4\}), (e_2,\{h_2,h_3\}), (e_3,\{h_1,h_2,h_5\}), (e_4,\{h_1,h_2,h_4\})\}$.

4.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\overset{*}{\lambda_\varepsilon}: S_E(U)\times S_E(U)\rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T),(G,Z)) \rightarrow (F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon} (G,Z)=(H,T\cup Z)$$

olup, (F,T) ve (G,Z), U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon} (G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\overset{*}{\lambda_\varepsilon}: S_T(U)\times S_T(U)\rightarrow S_T(U)$$

$$((F,T),(G,T)) \rightarrow (F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)=(K,T\cup T)=(K,T)$$

olup, T, E kümesinin sabit bir alt kümesi ve (F,T) ve (G,T), $S_T(U)$ kümesinin elemanı olmak üzere, $(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon} (G,T)$ de $S_T(U)$ kümesinin elemanıdır. Yani $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işlemi, $S_T(U)$ kümesi üzerinde de kapalıdır.

2) $[(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon} (G,Z)] \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M) \neq (F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,Z) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)=(S,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z$ için,

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(S,T\cup Z)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M) = (R,(T\cup Z)\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup M$ için,

$$R(\omega)=\begin{cases} S'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cup M) \\ S(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\setminus M=T\cap Z'\cap M' \\ G(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\setminus M=T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus M=T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cup Z) =T'\cap Z'\cap M \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap M=T'\cap Z\cap M \\ [F'(\omega)\cap G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G,Z)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)=(R,Z\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$R(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus Z \\ G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(R,Z\cup M) = (N,(T\cup(Z\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z\cup M$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cup M) \\ R'(\omega) & \omega\in(Z\cup M)\setminus T \\ F(\omega)\cup R'(\omega) & \omega\in T\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\ G(\omega) & \omega\in(Z\setminus M)\setminus T=T'\cap Z\cap M' \\ H(\omega) & \omega\in(M\setminus Z)\setminus T=T'\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cap H(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus T=T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\cup G(\omega) & \omega\in T\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\cup H(\omega) & \omega\in T\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\cup[G'(\omega)\cap H(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Buradan $(N,(T\cup Z)\cup M)\neq(L,T\cup(Z\cup M))$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

3) $[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)]\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,T)\neq(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,T)]$.

İspat: $[F'(\omega)\cap G(\omega)]\cup H'(\omega)\neq F(\omega)\cup[G'(\omega)\cap H(\omega)]$ olduğundan, $S_T(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

4) $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)\neq(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$.

İspat:$(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)=(H,T\cup Z)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup Z$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)=(S,Z\cup T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in Z\cup T$ için,

$$S(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)\neq(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$. Eğer, $Z\cap T=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)=(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$. Buradan, $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)\neq(G,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işleminin değişme özelliği yoktur.

5) $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)=U_T$

İspat: $(F,T)\overset{*}{\setminus_\varepsilon}(F,T)=(H,T)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cup F'(\omega)=U$ olur ve böylece $(H,T)=U_T$ elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

6) $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}\emptyset_T=U_T$

İspat: $\emptyset_T=(S,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $S(\omega)=\emptyset$. $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(S,T)=(H,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cup S'(\omega)=F(\omega)\cup U=U$. Böylece, $(H,T)=U_T$

Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

7) $\emptyset_T\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)=(F,T)^r$

İspat: $\emptyset_T=(S,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$ için, $S(\omega)=\emptyset$. $(S,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)=(H,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=S(\omega)\cup F'(\omega)=\emptyset\cup F'(\omega)=F'(\omega)$. Böylece, $(H,T)=(F,T)^r$.

8) $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}\emptyset_\emptyset=(F,T)^r$

İspat: $\emptyset_\emptyset=(S,\emptyset)$ ve $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(S,\emptyset)=(H,T\cup\emptyset)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup\emptyset=T$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus\emptyset=T \\ S'(\omega) & \omega\in\emptyset\setminus T=\emptyset \\ F(\omega)\cup S'(\omega) & \omega\in T\cap\emptyset=\emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)$ olup, $(H,T)=(F,T)^r$.

9) $\emptyset_{\emptyset}\ \overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(F,T)=(F,T)^r$

İspat: $\emptyset_{\emptyset}=(S,\emptyset)$ ve $(S,\emptyset)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(F,T)=(H,\emptyset\cup T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in\emptyset\cup T=T$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} S'(\omega) & \omega\in\emptyset\backslash T=\emptyset \\ F'(\omega) & \omega\in T\backslash\emptyset=T \\ S(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in\emptyset\cap T=\emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)$ olup, $(H,T)=(F,T)^r$.

10) $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}\emptyset_E=U_E$

İspat: $\emptyset_E=(T,E)$ olmak üzere, $\forall\omega\in E$ için, $T(\omega)=\emptyset$. $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(T,E)=(H,T\cup E)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup E=E$ için

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash E=\emptyset \\ T'(\omega) & \omega\in E\backslash T=T' \\ F(\omega)\cup T'(\omega) & \omega\in T\cap E=T \end{cases}$$

Buradan,

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash E=\emptyset \\ U & \omega\in E\backslash T=T' \\ U & \omega\in T\cap E=T \end{cases}$$

$\forall\omega\in E$; $H(\omega)=U$ olup, böylece $(H,E)=U_E$.

11) $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}U_T=(F,T)$

İspat: U_T=(K,T) olsun. Burada ∀ω∈T için, K(ω)=U. (F,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(K,T)=(H,T) olsun. Burada ∀ω∈T için, H(ω)= F(ω)∪T'(ω)=F(ω)∪ ∅=F(ω). Böylece, (H,T)=(F,T).
Yani, S_T(U) kümesi üzerinde $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işleminin sağ birim elemanı U_T esnek kümesidir.

12) U_T $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T)= U_T

İspat: U_T=(K,T) olsun. Burada, ∀ω∈T için, K(ω)=U. (K,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T)=(H,T) olsun. Burada ∀ω∈T için, H(ω)=T(ω)∪F'(ω)=U∪F'(ω)=U_T. Böylece, (H,T)=(F,T)r. Yani, S_T(U) kümesi üzerinde $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işleminin sol yutan elemanı U_T esnek kümesidir.

13) (F,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ $(F,T)^r$=(F,T).

İspat: $(F,T)^r$=(H,T) olsun. Burada ∀ω∈T için, H(ω)=F'(ω). (F,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(H,T)=(L,T) olsun. Burada ∀ω∈T için, L(ω)=F(ω)∪H'(ω)=F(ω)∪F(ω)=F(ω). Böylece, (L,T)=(F,T).
Yani, S_E(U) kümesi üzerinde, $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işlemi için her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sağ birim elemanıdır.

14) $(F,T)^r$ $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T)=$(F,T)^r$.

İspat: $(F,T)^r$=(H,T) olsun. Burada ∀ω∈T için, H(ω)=F'(ω). (H,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T)=(L,T) olsun. Burada, ∀ω∈T için, T(ω)=H(ω)∪F'(ω)=F'(ω)∪F'(ω)=F'(ω). Buradan (L,T)= $(F,T)^r$.
Yani, S_E(U) kümesi üzerinde, $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sol yutan elemanıdır.

15) $[(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon} (G,Z)]^r$=(F,T) γ_ε (G,Z).

İspat: (F,T) $\overset{*}{\backslash_\varepsilon}$ (G,Z)=(H,T∪Z) olsun. ∀ω∈T∪Z için;

$$H(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(H,T\cup Z)^r=(K,T\cup Z)$ olup, $\forall\omega\in T\cup Z$ için;

$$K(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F'(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan, $(K,T\cup Z)=(F,T)+_{\varepsilon}(G,Z)$.

16) $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)=\emptyset_T \Leftrightarrow (F,T)=\emptyset_T$ ve $(G,T)=U_T$.

İspat: $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)=(K,T)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=F(\omega)\cup G'(\omega)$. $(K,T)=\emptyset_T$ olduğundan, $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=\emptyset$. Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $K(\omega)=F(\omega)\cup G'(\omega)=\emptyset \Leftrightarrow \forall\omega\in T$ için, $F(\omega)=\emptyset$ ve $G'(\omega)=\emptyset \Leftrightarrow \forall\omega\in T$ için, $F(\omega)=\emptyset$ ve $G(\omega)=U \Leftrightarrow (F,T)=\emptyset_T$ ve $(G,T)=U_T$

17) $\emptyset_T \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)$, $\emptyset_Z \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)$, $\emptyset_Z \,\tilde{\subseteq}\, (G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$, $\emptyset_T \,\tilde{\subseteq}\, (G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$.
Ayrıca, $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z) \,\tilde{\subseteq}\, U_{T\cup Z}$ ve $(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T) \,\tilde{\subseteq}\, U_{Z\cup T}$.

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

18) $(F,T) \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)$ ve $(G,T)^r \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)$

İspat: $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)=(H,Z)$ olsun. $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\cup G'(\omega)$ olur. Böylece, $\forall\omega\in T$ için, $H(\omega)=F(\omega)\subseteq F(\omega)\cup G'(\omega)$ ve $H(\omega)=G'(\omega)\subseteq F(\omega)\cup G'(\omega)$.
Böylece, $(F,T) \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)$ ve $(G,T)^r \,\tilde{\subseteq}\, (F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)$

19) (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,T) ise (H,Z) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(G,T) $\tilde{\subseteq}$(H,Z) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T).

İspat: (F,T)$\tilde{\subseteq}$ (G,T) olsun. Buradan, ∀ω∈T için, F(ω)⊆G(ω) ve G'(ω)⊆F'(ω). (H,Z) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(G,T)=(Y,Z∪T) olsun. ∀ω∈Z∪T için;

$$Y(\omega)=\begin{cases} H'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ G'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ H(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

(H,Z) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$ (F ,T)=(W,Z∪T) olsun. ∀ω∈Z∪T için;

$$W(\omega)=\begin{cases} H'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ H(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in Z\cap T \end{cases}$$

ω∈T\Z ise, Y(ω)=H'(ω) ve W(ω)=H'(ω) olup, Y(ω)= H′(ω) ⊆ H'(ω)=W(ω); ω∈Z\T ise, Y(ω)=G'(ω) ve W(ω)=F'(ω) olup, Y(ω)= G′(ω) ⊆F'(ω)=W(ω); ω∈T∩Z ise, Y(ω)=H(ω)∪G'(ω) ve W(ω)=F(ω)∪H'(ω) olup, Y(ω)= H(ω) ∪ G′(ω) ⊆H(ω)∪F'(ω)=W(ω) olup, ∀ω∈Z∪T için Y(ω)⊆W(ω). Böylece, (H,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(G,T) $\tilde{\subseteq}$(H,T) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T).

20) (H,Z) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(G,T) $\tilde{\subseteq}$(H,Z) $\overset{*}{\lambda_\varepsilon}$(F,T) ise (F,T) $\tilde{\subseteq}$ (G,T) olmak zorunda değildir.

İspat: E={e_1,e_2,e_3,e_4, e_5, e_6} parametre kümesi, T={e_1,e_3}, Z={e_1,e_3, e_5} E'nin alt kümeleri, U={h_1,h_2, h_3,h_4, h_5} evrensel küme, (F,T), (G,T) ve (H,Z), U üzerinde (F,T)={($e_{1,}$,),(e_3, ∅)},(G,T)={(e_1,∅)},(e_3,∅)},(H,Z)={(e_1, {h_2}),(e_3,U),(e_5,{h_2})} olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(H,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)=(L,Z\cup T)$ olmak üzere $\forall\omega \in Z\cup T=\{e_1,e_3,e_5\}$ için, $L(e_1)=H(e_1)\cup G'(e_1)=U$, $L(e_3)=H(e_3)\cup G'(e_3)=U$, $L(e_5)=H'(e_5)=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$. Buradan, $(H,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)=\{(e_1,U),(e_3,U),(e_5,\{h_1,h_2,h_3,h_4\})\}$.

$(H,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)=(W,Z\cup T)$ olmak üzere $\forall\omega \in Z\cup T=\{e_1,e_3,e_5\}$ için, $W(e_1)=H(e_1)\cup F'(e_1)=U$, $W(e_3)=H(e_3)\cup F'(e_3)=U$, $W(e_5)=H'(e_5)=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}\}$. Böylece $(H,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)=\{(e_1,U),(e_3,U),(e_5,\{h_1,h_2,h_3,h_4\})\}$. Buradan, $(H,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)\,\tilde{\subseteq}\,(H,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$ fakat $(F,T)\,\tilde{\subseteq}\,(G,T)$ olmadığı açıktır.

21)$(F,T)\tilde{\subseteq}(G,T)$ ve $(K,T)\tilde{\subseteq}(L,T)$ ise $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(L,T)\tilde{\subseteq}(G,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(K,T)$ ve $(K,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,T)\,\tilde{\subseteq}\,(L,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(F,T)$.

İspat: $(F,T)\,\tilde{\subseteq}\,(G,T)$ ve $(K,T)\,\tilde{\subseteq}\,(L,T)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in T$; $F(\omega)\subseteq G(\omega)$ ve $K(\omega)\subseteq L(\omega)$. Buradan, $G'(\omega)\subseteq F'(\omega)$ ve $L'(\omega)\subseteq K'(\omega)$. Böylece, $\forall\omega\in T$; $F(\omega)\cup L'(\omega)\subseteq G(\omega)\cup K'(\omega)$ ve $K(\omega)\cup G'(\omega)\subseteq L(\omega)\cup F'(\omega)$.

4.4. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

4.4.1. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,Z)\cup_R(H,M)]=[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)]\cap_R[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z)\cup_R(H,M)=(M,Z\cap M)$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in Z\cap M; M(\omega)=G(\omega)\cup H(\omega)$.$(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(M,Z\cap M)=(N,T\cup(Z\cap M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup(Z\cap M)$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cap M) \\ M'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus T \\ F(\omega)\cup M'(\omega) & \omega\in T\cap(Z\cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cap M) \\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\cap T' \\ F(\omega)\cup [G'(\omega)\cap H'(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)=(M,T\cup Z)$ olsun. $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$M(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)=(K,T\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(M,T\cup Z)\cap_{R}(K,T\cup M)=(W,(T\cup Z)\cap(T\cup M))$ olsun. Burada, $\forall\omega\in(T\cup Z)\cap(T\cup M)$; $W(\omega)=T(\omega)\cap K(\omega)$,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cap F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cap [F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\cap M)= T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cap F'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\setminus M)=\emptyset \\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(M\setminus T)=T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cap[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\cap M)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cap F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\setminus M)= T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cap H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cap[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\cap M)= T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cap F'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cap[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $T\setminus(Z\cap M)$ yi ele alırsak, $T\setminus(Z\cap M)=T\setminus(Z\cap M)'$ olup, bir eleman $(Z\cap M)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z\setminus M$ de, ya $M\setminus Z$ de, ya da $Z\cup M$ nin tümleyenindedir. Buradan, $\omega\in T\setminus(Z\cap M)$ ise $\omega\in T\cap Z\cap M'$ veya $\omega\in T\cap Z'\cap M$ veya $\omega\in T\cap Z'\cap M'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ için N ve W fonksiyonları birbirine eşit olur. $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

2) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,Z)\ \cap_R(H,M)] = [(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)] \cup_R[(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması

1) $T\cap Z\cap M=\emptyset$ ise $[(F,T) \cup_R(G,Z)] \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)= [(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)] \cap_R [(G,Z) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,T) \cup_R(G,Z)=(R,T\cap Z)$ olsun. Buradan, $\forall$

$\omega\in T\cap Z$; $R(\omega)=F(\omega)\cup G(\omega)$. $(R,T\cap Z)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)=(L,(T\cap Z)\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in(T\cap Z)\cup M$;

$$L(\omega)=\begin{cases} R'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash(T\cap Z) \\ R(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash(T\cap Z) \\ [F(\omega)\cup G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)]\cap_R[(G,Z)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun.$\forall\omega\in T\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(G,Z)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)=(K,Z\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\backslash M \\ H'(\omega & \omega\in M\backslash Z \\ G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(S,T\cup Z)\cap_R(K,Z\cup M)=(W,(T\cup Z)\cap(Z\cup M))$ olsun. Buradan, $\forall\omega\in(T\cup Z)\cap(Z\cup M)$; $W(\omega)=S(\omega)\cap K(\omega)$ olup;

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(M\setminus Z)=\emptyset \\ F'(\omega)\cap [G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\cap M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cap H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(M\setminus Z)=T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega)\cap [G(\omega)\cup H(`\omega)] & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\cap M)=T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cap G'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cap H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cap [G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\omega)=\begin{cases} F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\cap G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; L fonksiyonundaki, $M\setminus(T\cap Z)$'yi ele alırsak, $M\setminus(T\cap Z)=M\cap(T\cap Z)'$ olup, bir eleman $(T\cap Z)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $T\setminus Z$ de, ya $Z\setminus T$ de, ya da $T\cup Z$ nin tümleyenindedir. Buradan, $\omega\in M\setminus(T\cap Z)$ ise $\omega\in M\cap T\cap Z'$ veya $\omega\in M\cap Z\cap T'$ veya $\omega\in M\cap T'\cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T\cap Z\cap M=\emptyset$ ise L=W sağlanır.

2)$T\cap Z\cap M'=T\cap Z\cap M=\emptyset$ ise$[(F,T)\cap_R(G,Z)]\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]\cap_R[(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$

.

4.4.2. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i)Tümleyenli Genişletilmiş Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,Z)\cap_\varepsilon(H,M)]=[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)]\cup_\varepsilon[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z)\cap_{\varepsilon}(H,M)=(R,Z\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$M(\omega)=\begin{cases} G(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ H(\omega) & \omega\in M\setminus Z \\ G(\omega)\cap H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}(R,Z\cup M)=(N,(T\cup(Z\cup M))$ bakalım. $\forall\omega\in T\cup(Z\cup M)$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cup M) \\ M'(\omega) & \omega\in(Z\cup M)\setminus T \\ F(\omega)\cup M'(\omega) & \omega\in T\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus M)\setminus T=T'\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in(M\setminus Z)\setminus T=T'\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus T=T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\cup[G'(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}(G,Z)]\cup_{\varepsilon}[(F,T)\overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}((H,M)]$ bakalım. $(F,T)\overset{*}{\lambda}(G,Z)=(K,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup Z)\ \cup_{\varepsilon}(S,T\cup M)=(L,(T\cup Z)\cup(T\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup(T\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\setminus(T\cup M) \\ S(\omega) & \omega\in(T\cup M)\setminus(T\cup Z) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap(T\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\setminus(T\cup M)=T'\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ F'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\setminus(T\cup Z)=\emptyset \\ H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\setminus(T\cup Z)=T'\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\setminus(T\cup Z)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\setminus Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\setminus M)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap(M\setminus T)=T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cup[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(Z\setminus T)\cap(T\cap M)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(M\setminus T)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ U & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ U & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup[F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

$T\cap Z\cap M'=T\cap Z'\cap M=\emptyset$ için N=L olduğu görülür. $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

2)$T\cap(Z\Delta M)$ ise $(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,Z) \cup_\varepsilon (H,M)]=[(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)]\cap_\varepsilon[(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$.

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

1) $T\cap Z\cap M=\emptyset$ ise $[(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z)] \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)= [(F,T) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)] \cup_\varepsilon [(G,Z) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \cap_\varepsilon(G,Z)=(R,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$R(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cap G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(R,T\cup Z) \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=(N,(T\cup Z)\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup M$;

$$N(\omega)=\begin{cases} R'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cup Z) \\ R(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\setminus M=T\cap Z'\cap M' \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\setminus M=T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\setminus M=T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus(T\cup Z)=T'\cap Z'\cap M \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\setminus T)\cap M =T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\cap G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]\cup_\varepsilon[(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=(K,T\cup Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup M$;

$$K(\omega) = \begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$S(\omega) = \begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus Z \\ G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup M)\cup_\varepsilon(S,Z\cup M)=(L,(T\cup M)\cup(Z\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup M)\cup(Z\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup M)\setminus(Z\cup M) \\ S(\omega) & \omega\in(Z\cup M)\setminus(T\cup M) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup M)\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\setminus(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\setminus M)\setminus(T\cup M)=T'\cap Z\cap M' \\ H(\omega) & \omega\in(M\setminus Z)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\cap M)\setminus(T\cup M)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(M\setminus Z)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup [G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\cap M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ H'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(M\setminus Z)= T'\cap Z'\cap M \\ H'(\omega)\cup [G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\cap M)=T'\cap Z\cap M \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup [G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ G'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\ G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup [G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

$T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise N=L olduğu görülür.

2) $T\cap Z\cap M'=\emptyset$ ise $[(F,T)\cup_{\varepsilon}(G,Z)]\ \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\ \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}(H,M)]\cup_{\varepsilon}[(G,Z)\ \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon}(H,M)]$.

4.4.3. Teorem $(F,T),(G,Z),(H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Lamda İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}[(G,Z)\,\tilde{\cap}\,(H,M)] = [(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)]\,\tilde{\cup}\,[(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)]$.

İspat*:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z)\,\tilde{\cap}\,(H,M)=(R,Z)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z$;

$$R(\omega)=\begin{cases} G(\omega) & \omega\in Z\setminus M \\ G(\omega)\cap H(\omega) & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(R,Z)=(N,T\cup Z)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ R'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup R'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in (Z\setminus M)\setminus T=T'\cap Z\cap M' \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in (Z\cap M)\setminus T=T'\cap Z\cap M \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\cup[G'(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)]\,\tilde{\cup}\,[(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\overset{*}{\lambda_{\varepsilon}}(G,Z)=(K,T\cup Z)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup Z$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ G'(\omega) & \omega\in Z\setminus T \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \overset{*}{\lambda_{\varepsilon}} (H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in T\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup Z)\ \tilde{\cup}\ (S,T\cup M)=(L,(T\cup Z)\cup(T\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup Z)\cup(T\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\backslash(T\cup M) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup Z)\cap(T\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\backslash(T\cup M)=\emptyset \\ G'(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\backslash(T\cup M)=T'\cap Z\cap M' \\ F(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash(T\cup M)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\cap(T\backslash M)=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\cap(M\backslash T)=\emptyset \\ F'(\omega)\cup [F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\backslash Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup F'(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\cap(T\backslash M)=\emptyset \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(Z\backslash T)\cap(M\backslash T)= T'\cap Z\cap M \\ G'(\omega)\cup [F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(Z\backslash T)\cap(T\cap M)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup F'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\backslash M)=T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap(M\backslash T)=\emptyset \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup [F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\cap Z)\cap(T\cap M)=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M' \\ F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\ U & \omega\in T\cap Z'\cap M \\ G'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\ U & \omega\in T\cap Z\cap M' \\ [F(\omega)\cup G'(\omega)]\cup [F(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $T\setminus Z$ yi ele alırsak, $T\setminus Z=T\cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya $M\setminus Z$ de, ya da $M\cup Z$ nin tümleyenindedir. Buradan, $\omega\in T\setminus Z$ ise $\omega\in T\cap M\cap Z'$ veya $\omega\in T\cap M'\cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartı ile N=L sağlanır. $T\cap Z'\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ denk olduğu aşikardır.

2) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $(F,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}[(G,Z)\ \tilde{\cup}\ (H,M)] = [(F,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(G,Z)]\ \tilde{\cap}[(F,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$.

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Lamda İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

1) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $[(F,T)\tilde{\cup}\ (G,Z)]\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}\ (H,M) = [(F,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]\ \tilde{\cup}\ [(G,Z)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}\ (H,M)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T)\ \tilde{\cup}\ (G,Z)=(R,T)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T$;

$$R(\omega)=\begin{cases} F(\omega) & \omega\in T\setminus Z \\ F(\omega)\cup G(\omega) & \omega\in T\cap Z \end{cases}$$

$(R,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=(N,T\cup M)$ olsun. Burada, $\forall\omega\in T\cup M$;

$$N(\omega)=\begin{cases} R'(\omega) & \omega\in T\setminus M \\ H'(\omega) & \omega\in M\setminus T \\ R(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\backslash M=T\cap Z'\cap M' \\ F'(\omega)\cap G'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\backslash M=T\cap Z\cap M' \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\backslash Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ [F(\omega)\cup G(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]\ \tilde{\cup}\ [(G,Z)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$ bakalım.

$(F,T)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=(K,T\cup M)$ $\forall\omega\in T\cup M$;

$$K(\omega)=\begin{cases} F'(\omega) & \omega\in T\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash T \\ F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap M \end{cases}$$

$(G,Z)\ \overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=(S,T\cup M)$ olsun. Burada $\forall\omega\in Z\cup M$;

$$S(\omega)=\begin{cases} G'(\omega) & \omega\in Z\backslash M \\ H'(\omega) & \omega\in M\backslash Z \\ G(\omega)\cup H'(\omega & \omega\in Z\cap M \end{cases}$$

$(K,T\cup M)\ \tilde{\cup}\ (S,Z\cup M)=(L,(T\cup M)\cup(Z\cup M))$ olsun. Burada $\forall\omega\in(T\cup M)\cup(Z\cup M)$;

$$L(\omega)=\begin{cases} K(\omega) & \omega\in(T\cup M)\backslash(Z\cup M) \\ K(\omega)\cup S(\omega) & \omega\in(T\cup M)\cap(Z\cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$
L(\omega)=\begin{cases}
F'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\setminus(Z\cup M)=T\cap Z'\cap M' \\
H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\
F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\setminus(Z\cup M)=\emptyset \\
F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\setminus M)=T\cap Z\cap M' \\
F'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(T\setminus M)\cap(M\setminus Z)=\emptyset \\
F'(\omega)\cup[G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\setminus M)\cap(Z\cap M)=\emptyset \\
H'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\
H'(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in(M\setminus T)\cap(M\setminus Z)=T'\cap Z'\cap M \\
H'(\omega)\cup[G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(M\setminus T)\cap(Z\cap M)=T'\cap Z\cap M \\
[F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup G'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\setminus M)=\emptyset \\
[F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup H'(\omega) & \omega\in(T\cap M)\cap(M\setminus Z)=T\cap Z'\cap M \\
[F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup[G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in(T\cap M)\cap(Z\cap M)=T\cap Z\cap M
\end{cases}
$$

Böylece,

$$
L(\omega)=\begin{cases}
F'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M' \\
F'(\omega)\cup G'(\omega) & \omega\in T\cap Z\cap M' \\
H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z'\cap M \\
G(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T'\cap Z\cap M \\
F(\omega)\cup H'(\omega) & \omega\in T\cap Z'\cap M \\
[F(\omega)\cup H'(\omega)]\cup[G(\omega)\cup H'(\omega)] & \omega\in T\cap Z\cap M
\end{cases}
$$

Burada; N fonksiyonundaki, $M\setminus T$ yi ele alırsak, $M\setminus T=M\cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya $Z\setminus T$ de, ya da $Z\cup T$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\omega\in M\setminus T$ ise $\omega\in M\cap Z\cap T'$ veya $\omega\in M\cap Z'\cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T'\cap Z\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartı ile N=L sağlanır. $T'\cap Z\cap M=T\cap Z\cap M'=\emptyset$ şartının $(T\Delta M)\cap Z=\emptyset$ denk olduğu aşikardır.

2) $T\cap(Z\Delta M)=\emptyset$ ise $[(F,T)\tilde{\cap}(G,Z)]\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)=[(F,T)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]\tilde{\cap}[(G,Z)\overset{*}{\lambda_\varepsilon}(H,M)]$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yeni bir esnek küme işlem formu olan, tümleyenli genişletilmiş esnek küme işlemlerinden, tümleyenli genişletilmiş fark ve lamda işlemleri tanıtılmış, bu işlemlerin özellikleri incelenmiş; bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkilerine bakılmış, sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde, tümleyenli genişletilmiş fark işleminin bir BCK-cebiri oluşturduğu gösterilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, esnek kümeler ile ilgili literatür taraması yapılmış; ikinci bölümde, kümeler, fark ve tümleyen işlemi ve esnek kümelerle ilgili kavramlara yer verilmiş, üçüncü bölümde tümleyenli genişletilmiş fark, dördüncü bölümde tümleyenli genişletilmiş lamda işleminin tüm özellikleri ve diğer işlemlere olan dağılmasına bakılmış, bu işlemlerin sabit parametreli esnek kümeler kümesi üzerinde bir BCK-cebiri oluşturduğu gösterilmiştir. İşlemlerin özelliklerine bakılırken, kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme, idempotent olma özelliği gibi tüm özellikler detaylıca incelenmiş olup, klasik kümelerdeki fark işlemi ile tümleyenli genişletilmiş fark işlemini ne gibi benzer özelliklere sahip olduğu dikkatli şekilde ele alınmış ve oldukça çarpıcı sonuçlar elde edilmiştir.

Esnek kümelerin ve işlemlerinin cebirsel yapılarını incelemek, esnek küme cebirinin klasik ve klasik olmayan mantığa nasıl uygulanabileceğini anlamak için kapsamlı bir bakış açısı sunduğundan, esnek küme işlemleri, bu teorik çerçevede pratikten uygulamalara dönüşen köşe taşı bir kavramdır. Bu açıdan yeni esnek küme işlemlerinin tanımlandığı bu çalışmanın, gelecekte yapılacak esnek küme işlemleri ile ilgili çalışmaların önünü açacağını umut ediyoruz.

KAYNAKLAR

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft set Theory. *Computers Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.

Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.

Aktaş, H. and Çağman, N. (2005). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177 (1), 2726-2735.

Atagün, A.O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29(9), 445-456.

Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations.* Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.

Aydın, N. And Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). İstanbul: Kriter Yayınevi, 3-71.

Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-88.

Cantor, Georg (1874), Ueber Eine Eigenschaft Des Inbegriffes Aller Reellen Algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik (in German), 1874 (77): 258–262.

Chen, D. G., Tsang, E. C. and Yeung, D. S. (2003). Some Notes on The Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442-1445.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and Its Applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(5-6), 757–763.

Clifford, A Hoblitzelle (1954), Bands of semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5: 499–504.

Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application To Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.

Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Matrix Theory and Its Decision Making. *Computers and Mathematics with Applications,* 59, 3308-3314.

Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and Uni-Int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.

Çallıalp, F. (1994). *Örneklerle Soyut Matematik* (Altıncı Baskı). Türkiye: Birsen Yayınevi, 1-7.

Clifford, A Hoblitzelle (1954), Bands of Semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5: 499–504.

Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operation.* Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.

Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine.* Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.

Imai, Y. and Iséki, K (1966), On Axiom Systems of Propositional calculi, XIV" *Procedings Japan Academy Series A Mathematics Science*, 42: 19–22.

Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with Its Operations. *Computers Mathematics Applications*, 60(8), 2270-2278.

Hacısalihoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik* (İkinci Baskı). Türkiye: Üniversite Yayınevi, 43-181.

Herawan, T. and Deris M. M. (2010). Soft Decision Making For Patients Suspected Influenza. *Lecture Notes in Computer Science, Springer* 60 (18), 405–418.

Herawan T. (2010). Soft Set-Based Decision Making for Patients Suspected Influenza- Like Illness. *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 1(1), 1–5.

Husain, S. and Shivani K. M. (2018). A Study of Properties of Soft Set and Its Applications. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 5(1), 363-372.

Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.

Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory Of BCK-BCI-algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178 (11), 2466-2475.

Jun, Y. B., Lee K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42–50.

Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft p-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.

Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.

Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.

Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-Int Decision Making. *The Scientific World Journal*, 10(2), 143-162.

Kilp, M., Knauer, U. and Mikhalev, A. V. (2000). *Monoids, Acts and Categories* (İkinci Baskı). Berlin*: De Gruyter Expositions in Mathematics*, (29).

Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562

Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.

Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19–31.

Mushrif, M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using A Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes Computer Science*, 3851, 246-254.

Nesin, A. (2019). *Sezgisel Kümeler Kuramı* (Altıncı Baskı). Türkiye: Nesin Yayıncılık,7-59.

Özer, O., Çoker, D. and Taş, D. (1999) *Soyut Matematik* (Üçüncü Bakı). Türkiye: İzgi Yayınevi, 36-50.

Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. 2005 IEEE International Conference on Granular Computing, 2, 617-621.

Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A.O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM, *Computational and Applied Mathematics*, 39 (2), 1-32.

Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(5), 1347–1355.*

Sarıalioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operation.* Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Science, Amasya.

Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013-1020.

Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing, 23(1-2), 161-207.*

Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A.O., Irfan Ali, M. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; a New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.

Sezgin, A., Ahmad, S. and Mehmood, A. (2019). A New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.

Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457- 1467.

Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 (2), 685-698.

Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.

Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.

Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New soft set operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.

Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O.(2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.

Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.

Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 1-37.

Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.

Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024). A Comprehensive Study on Soft Bınary Pıecewıse Dıfference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.

Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.

Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.

Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 5(2), 150-168.*

Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2),101-133.

Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012). Some Results on Distributive and Absorption Properties on Soft Operations. *IOSR Journal of Mathematics,* 4(2), 18-30.

Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.

Sun, Q. M., Zhang, Z. L and Liu, J.(2008). Soft Sets and Soft Modules, Lecture Notes in Computer Science, 5009, 403-409.

Yang, C. F. (2008).“A Note on: "Soft Set Theory" [*Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5) (2003) 555-562]," *Computers and Mathematics with Applications*, 56(7), 1899-1900.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics* 2013(5), 1-7.

Zorlutuna, İ. (2021). Soft Set-Valued Mappings and their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725-1733.

Xiao Z., Gong K., Xia S. and Zou Y. (2010). Exclusive Disjunctive Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2128–2137.

Yavuz E., (,). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties,* Unpublished Master’s Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.

.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Emre AKBULUT

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Amasya Üniversitesi	2018
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2019	Çorum Ortaköy	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Sezgin, A. and Akbulut, E. (2023). A Contribution to Complementary Soft Binary Piecewise Plus and Gamma Operations. *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology*, 4(1), 1-19.