



ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ÇARPIMSAL TÜREVİN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNA BELVEREN

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
ŞUBAT-2024**

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ÇARPIMSAL TÜREVİN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNA BELVEREN
ORCID ID: 0000-0001-6673-2560

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. SERTAÇ GÖKTAŞ
ORCID ID: 0000-0001-7842-6309

MERSİN
ŞUBAT-2024

ÖZET

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ÇARPIMSAL TÜREVİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Zaman skalası üzerinde tanımlanan çarpımsal türevin tanımı ile Rolle teoremi, ortalama değer teoremi ve keyfi bir zaman skalasında tanımlı bir fonksiyonun çarpımsal analizde monotonluk durumları gibi özellikleri daha önce araştırılmıştır. Bu özelliklerin üzerine;

Bu tez çalışmasında, zaman skalası üzerinde tanımlanmış zincir kuralları çarpımsal analizde yeniden kurulmuştur. Buna ek olarak, keyfi bir zaman skalasında tanımlı bir fonksiyonun tersinin çarpımsal türevi tanımlanmıştır. Bu kavramların özellikleri detaylıca incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Çarpımsal Analiz, Çarpımsal Delta Türev, Ters Fonksiyonun Çarpımsal Delta Türevi.

Danışman: Doç. Dr., Sertaç GÖKTAŞ, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.



ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF THE MULTIPLICATIVE DERIVATIVE ON TIME SCALES

Properties such as the definition of the multiplicative derivative defined on a time scale and Rolle's theorem, the mean value theorem, and monotonicity cases in the multiplicative analysis of a function defined on an arbitrary time scale have been previously investigated. In addition to these features;

In this thesis study, chain rules defined on the time scale were reconstructed in multiplicative analysis. In addition, the multiplicative derivative of the inverse of a function defined on an arbitrary time scale is defined. The characteristics of these concepts have been examined in detail.

Keywords: Time Scale, Multiplicative Analysis, Multiplicative Delta Derivative, Multiplicative Delta Derivative of Inverse Function.

Advisor: Assoc. Prof., Sertaç GÖKTAŞ, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım süresince, her türlü bilgi birikimi ve katkılarından yararlandığım, bana desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ'a saygılarımla teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca desteğini hissettiren ve yanımda olan değerli anne ve babama ayrıca hayatımda oldukları andan itibaren yaşamımı güzelleştiren değerli eşim ve çocuklarım Zeynep ve Çınar'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1. Çarpımsal Analiz	4
3.1.1. Çarpımsal Limit ve Çarpımsal Süreklilik	6
3.1.2. Çarpımsal Türev	6
3.1.3. Çarpımsal İntegral	8
3.2. Zaman Skalası Analizi	11
3.2.1. Delta Türev	12
3.2.2. Delta İntegral	15
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	19
4.1. Çarpımsal Delta Türev Kavramı	19
4.1.1. Sağ ve Sol Çarpımsal Delta Türevler	21
4.1.2. Çarpımsal Delta Türev Almada Genel Kurallar	22
4.1.3. Yüksek Mertebeden Çarpımsal Delta Türev	27
4.1.4. Çarpımsal Delta Türevle İlgili Teoremler	28
4.2. Ana Sonuçlar	33
4.2.1. Çarpımsal Delta Zincir Kuralı ve Uygulamaları	33
4.2.2. Ters Fonksiyonun Çarpımsal Delta Türevi ve Uygulamaları	49
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\oplus$	α – Toplam
$\ominus$	α – Fark
$\odot$	α – Çarpım
$\oslash$	α – Oran
$\otimes$	α – Sıralama
$\mathbb{R}_\alpha$	α – Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_{exp}$	exp – Reel Sayılar Kümesi
$ x ^*$	Çarpımsal Mutlak Değeri
$\lim_{x \rightarrow x_0}^* f(x)$	f Fonksiyonunun x_0 Noktasında Çarpımsal Limiti
$f^*(x) \equiv \frac{d^* f}{dx}$	f Fonksiyonunun x 'e göre Birinci Mertebeden Çarpımsal Türevi
$f^{\Delta^*}(x) \equiv \frac{d^{\Delta^*} f}{dx}$	f Fonksiyonunun x 'e göre Birinci Mertebeden Çarpımsal Delta Türevi
$\int f(x)^{dx}$	f Fonksiyonunun Çarpımsal Belirsiz İntegrali
$\int_a^b f(x)^{dx}$	f Fonksiyonunun Çarpımsal Belirli İntegrali
$\mathbb{T}$	Keyfi Zaman Skalası
σ	İleri Sıçrama Operatörü
ρ	Geri Sıçrama Operatörü
μ	Grainiess Fonksiyonu
f^Δ	Birinci Mertebeden Hilger (Delta) Türev
$C_{rd}(\mathbb{T})$	$\mathbb{T}$ Zaman Skalası Üzerinde Rd -Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\mathbb{T}^\kappa$	Türevlenebilir Bölgesi

1. GİRİŞ

17. yüzyılın sonlarına doğru, Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz bağımsız çalışmalarıyla ortaya çıkan klasik analiz kavramı, matematiğin evriminde önemli bir dönemeçtir (Bardi, 2006; Boyer, 1959). Limit kavramının ortaya çıkması gibi ilerleyen çalışmalar, bu matematiksel alanın temellerini daha sağlam bir kavramsal zemine oturtmuştur. Günümüzde, klasik analiz, bilim, mühendislik ve sosyal bilimlerde geniş bir uygulama alanına sahiptir ve Hoffmann vd., (2004) tarafından belirtildiği gibi, bu analitik yaklaşımın etkisi hala güçlüdür. Klasik analiz toplamsal analiz olarak da adlandırılır. Bunun temel nedeni, bu matematik dalında tanımlanan tüm kavramların ve türetilen tüm teoremlerin özünde toplama ve çıkarma işlemlerine dayanmasıdır. Bu, temel aritmetik işlemlerin, matematiksel yapının temelini oluşturduğu anlamına gelir.

Elemanlar arasındaki işlemlerin rolü, farklı analiz yöntemlerinin oluşturulmasında kritik bir öneme sahiptir. Bu nedenle, klasik analize alternatif olarak, farklı aritmetik işlemlerin kullanıldığı analizler de tanımlanmıştır. Bu alternatif analizlerden biri olan Volterra tipi analizin (Volterra ve Hostinsky, 1938) temeli eski dönemlere dayanmasına rağmen, bu analiz üzerine uzun yıllar boyunca sınırlı sayıda çalışma yapılmıştır (Özyapıcı vd., 2014).

Michael Grossman ve Robert Katz, Volterra tipi analizin tanımlanmasının ardından 1970'li yıllarda non-Newtonian analiz olarak adlandırdıkları bir dizi yeni analiz üzerinde çalışmışlardır. Bu analizler arasında geometrik analiz, bigeometrik analiz, anageometrik analiz, kuadratik analiz, harmonik analiz gibi farklı dallarda yeni analizler ortaya koymuşlardır.

Non-Newtonian analizler arasında son dönemlerde öne çıkan bir alan ise geometrik analizdir. Geometrik analiz, klasik analizdeki toplama ve çıkarma işlemlerinin yerine çarpma ve bölme işlemlerini temel alır. Bu nedenle, Dick Stanley (1999), geometrik analizi çarpımsal analiz (multiplicative analysis) olarak adlandırmıştır.

Analiz yöntemlerinde kullanılan farklı aritmetik işlemler, matematiksel düşüncüyü çeşitlendirmekte ve belirli problemlere özgü çözüm yöntemlerini ortaya koymaktadır. Bu çeşitlilik, matematiksel analizin geniş bir yelpazesini kapsayarak, çeşitli bilim dallarında ve uygulama alanlarında kullanılabilecek farklı perspektifler sunmaktadır.

Zaman skalası teorisi ise Hilger (1988, 1990)'in doktora tezinde ortaya konulmuştur. Hilger matematikteki sürekli ve kesikli durumları birleştirerek genelleştirmeyi amaçlamıştır (Aulbach ve Hilger, 1990).

Keyfi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde çarpımsal türev (*türev) ve bu türevin bazı temel özellikleri Goktas vd. (2021) tarafından tanımlanmıştır. Goktas vd. (2021), $\mathbb{T}$ üzerinde Δ –türev kavramını çarpımsal analize taşımışlar ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Bu tez çalışmasında, zaman skalası üzerinde tanımlanmış zincir kuralları çarpımsal analizde yeniden kurulmuştur. Buna ek olarak, keyfi bir zaman skalasında tanımlı bir fonksiyonun tersinin çarpımsal türevi tanımlanmıştır. Bu kavramların özellikleri detaylıca incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Grossman (1979) non-Newtonian analizi kurarak bazı temel özelliklerini ispatladı. Son olarak, Newton ve Leibniz'in klasik analizine alternatif olarak non-Newtonian analizlerin nihai kullanım alanlarını anlattı.

Stanley (1999) non-Newtonian analizlerden çarpımsal analiz üzerinde türev, integral kavramlarını tanımladı ve bu kavramlarla ilgili temel tanım ve teoremleri verdi.

Campbell (1999) çarpımsal Euler yöntemini kurmuş ve çarpımsal analizle ilgili bazı çalışmalar yapmıştır. Örnek olarak, $\sin x$ fonksiyonu için klasik analizdeki lineer yaklaşımla, çarpımsal analizdeki yaklaşımla grafiklerini çizerek çarpımsal Euler yaklaşımının $\sin x$ in gerçek fonksiyonuna grafiğinin daha yakın olduğunu gösterdi.

Rybczuk vd. (2001) klasik analizin yeterli kalmadığı aşamalarda alternatif olarak çarpımsal analizin uygulama alanını; Cordova-Lepe (2006, 2009) ise çarpımsal analizin iktisatta ve ekonomide bazı olası ve açık uygulamalarını inceledi. Çarpımsal türev ile bilinen esneklik kavramı arasında ilişkiyi inceledi ve esneklik kavramının çarpımsal analizde çok kapsamlı ve kullanışlı olduğunu ispatladı.

Bashirov vd. (2008), (Grosman ve Katz, 1972)'de ortaya atılan çarpımsal analizin temellerini pekiştirmek ve faydalarını ortaya koymak amacıyla teoriyi yeniden ele aldı ve nümerik örnekler verdi.

Misirli ve Ozyapici (2009) çarpımsal analizi nümerik analiz alanındaki araştırmalarda nasıl uygulanabileceğini gösterdi. Sonrasında uygun üstel fonksiyonların çarpımına dayalı üstel enterpolasyon yöntemlerini gösterdi.

Bashirov ve Rıza (2011) karmaşık değerli fonksiyonlarda karmaşık çarpımsal türevin özelliklerini incelemişlerdir. Uzer (2010) reel değerli fonksiyonlarla kurulan bir çarpımsal analizi, karmaşık değerli fonksiyonlara genişletti. Ayrıca, klasik analizin bazı temel teorem ve kavramları çarpımsal kompleks analize uyguladı ve aralarındaki ilişkiyi verdi. Kadak ve Efe (2014) reel ve kompleks durumda çarpımsal vektör uzaylarını inşaa ettiler. Buna ek olarak, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini çarpımsal analizde incelemişlerdir.

Çakmak ve Başar (2012) ve Türkmen ve Başar (2012) non-Newtonian reel sayılar ve Newton olmayan metrik kavramını tanımladı. Ayrıca non-Newtonian analizde üçgen eşitsiliği, Minkowski eşitsizlikleri tanımlandı. Daha sonra sınırlı diziler uzayı gibi bazı özel dizi uzaylarını yeniden tanımladılar.

Bashirov vd. (2012) çarpımsal analiz kavramlarını kullanarak finans, aktüerya bilimi, ekonomi ve sosyal bilimlerden bazı doğa olaylarının matematiksel modellerini vermişlerdir. Florack ve Assen (2012) çarpımsal analizin biyomedikal görüntü analizinde potansiyel kullanımını gösterdiler. Filip ve Piatecki (2014a, 2014b) neoklasik dışsal büyüme modelini non-Newtonian analiz ile nasıl uygulayabilecekleri hakkında bilgi vermişlerdir. Boruah ve Hazarika (2016) non-Newtonian analizlerden biri olan bigeometrik analizin temel özelliklerini inceleyerek matematik ve ekonominin farklı dallarındaki uygulamaları hakkında bilgi verdiler.

Bashirov (2013) eğrisel ve çift katlı integral kavramlarını çarpımsal analizde incelemiş ve teoremlerini vermiştir.

Yener ve Emiroğlu (2015) çarpımsal analizin bazı temel kavramlarının q –benzerini ele elde etmişlerdir ve buna *çarpımsal q –analiz* adını vermişlerdir. Bazı özelliklerini ispatlamışlardır.

Ayrıca, çarpımsal analizin temelleri üzerine bir çok yüksek lisans (Erdoğan, 2016; Güreffe, 2009; Yavuz Sarı, 2021) ve doktora tezi (Çakmak, 2014; Güreffe, 2013; Kadak, 2015; Özyapıcı, 2009; Yener, 2016) de hazırlanmıştır.

Diğer taraftan tezin amacı zaman skalası üzerinde çarpımsal analizin incelenmesi ile ilgili olduğundan zaman skalası analizi üzerinde bazı temel kaynakları ele alalım:

Tek ve çok değişkenli fonksiyonlar üzerinde zaman skalası analizi birçok yazar tarafından ele alınan kaynaklarda geniş bir yelpazede temel analiz kavramlarına odaklanmaktadır (Agarwal ve Bohner, 1999; Agarwal vd., 2002; Bohner ve Georgiev, 2016; Bohner ve Guseinov, 2007; Bohner ve Peterson, 2001, 2003; Guseinov, 2003; Guseinov ve Kaymakçalan, 2002; Kaymakçalan vd., 1996). Zaman skalası üzerinde yeniden tanımlanan bu kavramlar arasında türev, integral, diziler-seriler, kısmi türev, katlı integraller, eğri ve yüzey integralleri gibi önemli konular bulunmaktadır. Ayrıca, dinamik denklemlerin oluşturulması ve başlangıç-sınır değer problemleriyle ilgili temel bilgiler de bu kaynaklarda mevcuttur.

Sürekli ve ayrık durumda ayrı ayrı çalışılan ikinci mertebeden matris denklemler (Agarwal ve Bohner, 1998); Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski, Jensen, Gronwall, Bernoulli, Bihari, Opial, Wirtinger, Lyapunov tipi eşitsizler (Agarwal vd., 2001); varyasyon hesabı, zayıf yerel minimum, birinci varyasyon Euler-Lagrange denklemi (Hilscher ve Zeidan, 2004); integrallenebilen fonksiyonlar (Gürses vd. 2005); sonsuz aralıklarda sınır değer problemlerinin varlık teoremleri (Agarwal vd., 2002); bir lineer denklemin özdeğerlerinin asimptotik formüllerinin bulunması (Amster vd., 2009) konuları zaman skalası üzerinde yeniden çalışılmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Çarpımsal Analiz

Aritmetik $\mathbb{R}$ de tanımlı tam sıralı bir cisimdir. Üreteç fonksiyonu ise reel sayılar kümesinden, reel sayıların bir alt kümesine tanımlı birebir bir fonksiyondur. Üreteç fonksiyonuna I birim fonksiyonu, e^x fonksiyonu ve $\sqrt{x}$ fonksiyonu örnek olarak verilebilir (Grossman ve Katz, 1972).

$\alpha: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A_\alpha = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ bir üreteç olsun. A_α üzerinde tanımlı $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ işlemleri ve $\otimes$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972). Her $x, y \in A_\alpha$ için;

$$\begin{array}{ll} \alpha - \text{toplama} & x \oplus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - \text{fark} & x \ominus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - \text{çarpım} & x \odot y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - \text{oran} & x \oslash y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - \text{sıralama} & x \otimes y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y) . \end{array}$$

Bu işlemler altında $(A_\alpha, \oplus, \ominus, \odot, \oslash, \otimes)$ tam sıralı bir cisimdir olup aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu ürettiği için buna **α –aritmetik** denir. Her bir üreteç fonksiyonu yalnız bir aritmetik üretir. Her bir aritmetik yalnız bir üreteç vasıtasıyla üretilir. Örneğin birim fonksiyon olan $I(x) = x$ bilinen klasik aritmetiği, $\alpha(x) = e^x$ fonksiyonu da çarpımsal aritmetiği üretir (Grossman ve Katz, 1972). Sonuç olarak, üreteç fonksiyonu değiştikçe yeni non-Newtonian analizler ortaya çıkar.

A_α kümesi üzerinde $\dot{0} = \alpha(0)$ ve $\dot{1} = \alpha(1)$ sayıları sırasıyla $\forall x \in A_\alpha$ için $x \oplus \dot{0} = x$ ve $x \odot \dot{1} = x$ eşitliklerini sağlayan sayılardır.

α –pozitif sayılar $\forall x \in A_\alpha$ için $\dot{0} \otimes x$ eşitsizliğini sağlayan sayılar, α –negatif sayılar $\forall x \in A$ için $x \otimes \dot{0}$ eşitsizliğini sağlayan sayılardır.

α –tam sayılar

$$\dots, -2 = \alpha(-2), -1 = \alpha(-1), \dot{0} = \alpha(0), \dot{1} = \alpha(1), 2 = \alpha(2), \dots$$

biçimindeki sayılardır. Herhangi bir n tamsayısı $\dot{n} = \alpha(n)$ biçiminde tanımlanır. Yani $\dot{n}$ bir α –pozitif sayı ise, o halde

$$\dot{n} = \dot{1} \oplus \dot{1} \oplus \dots \oplus \dot{1}$$

dir.

α –mutlak değer

$$|x| = \begin{cases} x & , \dot{0} \otimes x \\ \dot{0} & , \dot{0} = x \\ \dot{0} \ominus x & , x \otimes \dot{0} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Çarpımsal analizde ise bu kavramlar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$\alpha = exp$ olmak üzere

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp} \subseteq \mathbb{R}^+$$

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R}_{exp} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha(x) = e^x = y$$

$$\alpha^{-1}(y) = \ln y = x$$

şeklinde verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki cebirsel işlemler geçerlidir.

$$exp - toplam \quad x \oplus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x + \ln y)} = xy,$$

$$exp - fark \quad x \ominus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x - \ln y)} = x \div y, \quad y \neq 0,$$

$$exp - çarpım \quad x \odot y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x \ln y)} = x^{\ln y} = y^{\ln x},$$

$$exp - oran \quad x \oslash y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x \div \ln y)} = x^{\frac{1}{\ln y}}, \quad y \neq 1,$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, $\mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde $\dot{0} = \alpha(0) = e^0 = 1$ ve $\dot{1} = \alpha(1) = e^1 = e$ dir.

exp –pozitif sayılar $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $1 < x$ eşitsizliğini sağlayan sayılar; *exp –negatif sayılar*

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $0 < x < 1$ eşitsizliğini sağlayan sayılardır.

exp –tam sayılar

$$\dots, \dot{-}2 = \alpha(-2) = e^{-2}, \dot{-}1 = \alpha(-1) = e^{-1}, \dot{0} = \alpha(0) = 1, \dot{1} = \alpha(1) = e, \dot{2} = \alpha(2) = e^2, \dots$$

biçimindeki sayılardır.

Herhangi bir n tamsayısı $\dot{n} = \alpha(n) = e^n$ biçiminde tanımlanır. Yani $\dot{n}$ bir *exp –pozitif sayı* ise, o halde

$$\dot{n} = \underbrace{e \dots e}_{n \text{ tane}} = e^n$$

dir.

3.1.1. Çarpımsal Limit ve Çarpımsal Süreklilik

Tanım 3.1.1. $x \in \mathbb{R}^+$ olsun. x nin *çarpımsal mutlak değeri* $|x|^*$ simgesi ile gösterilir ve

$$|x|^* = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & , x < 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Özyapıcı, 2009). Örneğin, $|3|^* = 3$, $\left|\frac{1}{5}\right|^* = 5$, $|1|^* = 1$.

Çarpımsal mutlak değerin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

- i. $1 \leq |x|^*$
- ii. $|xy|^* \leq |x|^*|y|^*$
- iii. Eğer $\lambda \geq 1$ için $\lambda^{-1} \leq x \leq \lambda$ ise $|x|^* \leq \lambda$

şeklinde.

Tanım 3.1.2. $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 1$ ve $x \in A$ için

$$|x - x_0| < \delta \text{ iken } \left| \frac{f(x)}{L} \right|^* < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa f fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında *çarpımsal limiti* vardır ve

$${}^* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında limiti var, $f(x_0)$ tanımlı ve $f(x_0) = L$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında *çarpımsal süreklidir* denir (Özyapıcı, 2009).

3.1.2. Çarpımsal Türev

Tanım 3.1.3. (Çarpımsal Türev) Pozitif bir f fonksiyonun x değişkenine bağlı çarpımsal türevi (* türevi) $\frac{d^* f}{dx}(x) = f^*(x)$, $f^*: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ sembolü ile gösterilir. Burada pozitif bir f fonksiyonunun çarpımsal türevi

$$f^*(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{x-x_0}} \quad \text{veya} \quad f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

şeklinde tanımlıdır (Stanley, 1999).

Teorem 3.1.1. Pozitif bir f fonksiyonu herhangi bir x_0 noktasında klasik anlamda diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart yine aynı noktada çarpımsal anlamda diferensiyellenebilir olmasıdır. Bu durum,

$$f^*(x) = e^{(\ln f(x))'} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

eşitliği ile gösterilir (Stanley, 1999).

Örnek 3.1.1.

$$f(x) = x^2 \text{ ise } f^*(x) = e^{\frac{(x^2)'}{x^2}} = e^{\frac{2x}{x^2}} = e^{\frac{2}{x}},$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ ise } f^*(x) = e^{\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}} = e^{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{2x}},$$

$$f(x) = \ln x \text{ ise } f^*(x) = e^{\frac{(\ln x)'}{\ln x}} = e^{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}} = e^{\frac{1}{x \ln x}}$$

dir.

Teorem 3.1.2. Eğer f^* fonksiyonu çarpımsal türevlenebiliyor ise ikinci mertebeden çarpımsal türevi vardır ve f^{**} ile gösterilir. Benzer biçimde f fonksiyonunun n . mertebeden çarpımsal türevi var ise $f^{*(n)}$ olarak gösterilir. Pozitif tanımlı f fonksiyonunun bir x noktasındaki n . mertebeden çarpımsal türevi

$$f^{*(n)}(x) = e^{(\ln f(x))^{(n)}}$$

şeklinde tanımlıdır (Bashirov vd., 2008).

Teorem 3.1.3. f ve g çarpımsal türevlenebilir iki fonksiyon ve α bir sabit olsun. O halde, αf , $f g$, $f + g$, $\frac{f}{g}$, f^g ve $f \circ g$ fonksiyonları da çarpımsal türevlenebilirdir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir (Bashirov vd., 2008).

- i. $(\alpha f)^*(x) = f^*(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- ii. $(fg)^*(x) = f^*(x)g^*(x)$,
- iii. $(f + g)^*(x) = f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} g^*(x)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}}$,
- iv. $\left(\frac{f}{g}\right)^*(x) = \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$,
- v. $(f^g)^*(x) = f^*(x)^{g(x)} f(x)^{g'(x)}$,

$$\text{vi. } (f \circ g)(x) = [f^*(g(x))]^{g'(x)}.$$

Önerme 3.1.1. $k \in \mathbb{R}^+$ olsun. f ve g çarpımsal türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

- i. $f(x) = k$ ise $f^*(x) = 1$,
- ii. $f(x) = kx$ ise $f^*(x) = e^{\frac{1}{x}}$,
- iii. $f(x) = kx^n$ ise $f^*(x) = e^{\frac{n}{x}}$,
- iv. $f(x) = kb^x$ ise $f^*(x) = b$, $b > 0$,
- v. $f(x) = k \ln x$ ise $f^*(x) = e^{\frac{1}{x \ln x}}$,
- vi. $f(x) = k \ln(g(x))$ ise $f^*(x) = [g^*(x)]^{\frac{1}{\ln g(x)}}$,
- vii. $f(x) = g(x)^n$ ise $f^*(x) = [g^*(x)]^n$,
- viii. $f(x) = k[g(x)]^{h(x)}$ ise $f^*(x) = [g^*(x)]^{h(x)}[g(x)]^{h'(x)}$

özellikleri sağlanır (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

3.1.3. Çarpımsal İntegral

Tanım 3.1.4. Her $x \in (a, b)$ için $F^*(x) = f(x)$ biçiminde ise $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun bir *çarpımsal anti türevi* denir. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun bütün çarpımsal anti türevlerinin sınıfına *çarpımsal belirsiz integral* denir ve

$$\int f(x) dx$$

ile gösterilir (Bashirov vd., 2008; Stanley, 1999).

Teorem 3.1.4. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli ise (a, b) aralığında çarpımsal integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(x) dx = e^{\int_a^b \ln(f(x)) dx}$$

şeklindedir (Bashirov vd., 2008; Stanley, 1999).

Örnek 3.1.2. $f(x) = e^{\cos x}$ fonksiyonunun çarpımsal anti türevi:

$$\int (e^{\cos x}) dx = e^{\int \ln(e^{\cos x}) dx} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x + c} = C e^{\sin x}$$

olduğundan $F(x) = e^{\sin x}$ fonksiyonu f fonksiyonun çarpımsal anti-türevlerinden biridir.

Teorem 3.1.5. $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları çarpımsal olarak integrallenebilir olsunlar. Bu durumda $f^k, fg, f/g$ ve f^g fonksiyonları da çarpımsal integrallenebilirdir ve

- i. $\int_a^b (f(x))^k dx = \left(\int_a^b (f(x)) dx \right)^k,$
- ii. $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b (f(x)) dx \int_a^b (g(x)) dx,$
- iii. $\int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx = \frac{\int_a^b (f(x)) dx}{\int_a^b (g(x)) dx},$
- iv. $\int_a^b (f(x)) dx = \int_a^c (f(x)) dx \int_c^b (f(x)) dx,$
- v. $\int_a^b (f^*(t)^{g(t)}) dt = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{\int_a^b (f(t)^{g'(t)}) dt},$
- vi. $\int_a^b f(t) dt = \left(\int_b^a f(t) dt \right)^{-1},$
- vii. $\int_a^a f(t) dt = 1$

özellikleri sağlanır. Burada $k \in \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ şeklindedir. Ayrıca, v. formülüne *çarpımsal kısmi integrasyon formülü* denir (Bashirov vd., 2008; Stanley, 1999).

Teorem 3.1.6. $c, k \in \mathbb{R}^+$ olsun. f ve g çarpımsal integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

- i. $\int 1 dx = c,$
- ii. $\int k dx = ck^x,$
- iii. $\int [e^{kx}] dx = ce^{\frac{kx^2}{2}},$
- iv. $\int [e^{kx^n}] dx = ce^{\frac{kx^{n+1}}{n+1}},$
- v. $\int \left[e^{\frac{k}{x}} \right] dx = cx^k,$
- vi. $\int [e^{\cos x}] dx = ce^{\sin x},$
- vii. $\int [e^{-\sin x}] dx = ce^{\cos x},$
- viii. $\int [e^{-\tan x}] dx = c \cos x$

özellikleri sağlanır (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

Zaman skalasında çarpımsal analizin tanımlanması sırasında aşağıdaki kavramlar kullanılmıştır:

Tanım 3.1.5. $h > 0$ olsun. Çok değerli silindir dönüşümü $\zeta_h: \mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}: z \neq -\frac{1}{h} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\zeta_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{h} \log(1 + zh), & h \neq 0 \\ z, & h = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesini ve $\log$ ise çok değerli kompleks logaritma fonksiyonunu göstermektedir (Bohner ve Peterson, 2001; 2003).

Tanım 3.1.6. $p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $p \neq 0$ fonksiyonu Δ –türevlenebilir fonksiyon olsun. O halde

$$\ell_p(t, s) = \int_s^t \zeta_{p(\tau)} \left[\frac{p^\Delta(\tau)}{p(\tau)} \right] \Delta\tau : s, t \in \mathbb{T}$$

fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde çok değerli logaritma fonksiyonu olarak tanımlanır. Burada, p sabit ise, tüm $s, t \in \mathbb{T}$ için $\ell_p(t, s) = 0$ dır (Anderson ve Bohner, 2021).

Şimdi bu fonksiyonun bazı özelliklerini ifade edelim:

Lemma 3.1.1. $f, h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $f, h \neq 0$ fonksiyonları Δ –türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O halde

$$\ell_{fh}(t, s) = \ell_f(t, s) + \ell_h(t, s)$$

ve

$$\ell_{\frac{f}{h}}(t, s) = \ell_f(t, s) - \ell_h(t, s)$$

eşitlikleri sağlanır (Anderson ve Bohner, 2021).

Lemma 3.1.2. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $p \neq 0$ fonksiyonu Δ –türevlenebilir fonksiyon olsun. O halde, $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$\ell_{p^\alpha}(t, s) = \alpha \ell_p(t, s)$$

eşitlikleri sağlanır (Anderson ve Bohner, 2021).

Teorem 3.1.7. $p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $p \neq 0$ fonksiyonu Δ –türevlenebilir fonksiyon olsun. halde, $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$\ell_p^\Delta(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(t)} \log \left[\frac{p^\sigma(t)}{p(t)} \right], & \mu(t) \neq 0 \\ \frac{p^\Delta(t)}{p(t)}, & \mu(t) = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada Δ –türev, t değişkenine göredir (Anderson ve Bohner, 2021).

3.2. Zaman Skalası Analizi

Tanım 3.2.1. (Zaman Skalası) Reel sayılar kümesinin keyfi, kapalı ve boş olmayan bir alt kümesine *zaman skalası* denir. Zaman skalası genellikle $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 3.2.1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ve $[0, 2]$ kümeleri birer zaman skalasıdır.

Örnek 3.2.2. $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$ kümeleri bir zaman skalası değildir.

Örnek 3.2.3. $\{1, 2, 5\} \cup [6, 25] \cup \{50, 55\}$ bir zaman skalasıdır.

Tanım 3.2.2. (İleri Sıçrama Operatörü) $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun ve $t \in \mathbb{T}$ için zaman skalası üzerinde tanımlı $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

olarak tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.3. (Geri Sıçrama Operatörü) $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun ve $t \in \mathbb{T}$ için zaman skalası üzerinde tanımlı $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

olarak tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.4. $\emptyset$ boş küme olmak üzere

$$\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}, \sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$$

şeklindedir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.5. (Graininess Fonksiyonu) $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ için zaman skalası üzerinde tanımlı olsun. Eğer $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü ve $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ ise

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona graininess fonksiyonu denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.6. $t \in \mathbb{T}$ için,

- i. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t sağ saçılmış nokta; $\rho(t) < t$ ise sol saçılmış nokta,
- ii. $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise izole(ayrık) nokta,
- iii. $\sigma(t) = t$ ise sağ yoğun nokta; $\rho(t) = t$ ise sol yoğun nokta,
- iv. $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise yoğun nokta

olarak tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.7. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$$

şekilde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 3.2.4. $\mathbb{T} = \{3^{n+2}, n \in \mathbb{N}_0\}$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ olsun.

$$\mathbb{T} = \{3^2, 3^3, 3^4, \dots\}$$

olup $\sigma(t) = 3t$ dir. O halde,

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = f(3t) = (3t)^2 + 3t + 1 = 9t^2 + 3t + 1$$

dir.

3.2.1. Delta Türev

Tanım 3.2.8. (Komşuluk) $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t_0| < \varepsilon\}$ kümesine t noktasının ε komşuluğu denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.9. (Delta Türev) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve t noktasının $U(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap T$ komşuluğundaki her s için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s] \right| < \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde bir $f^\Delta(t)$ sayısı varsa, bu sayıya $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasındaki Hilger(Delta) türevi (Δ -türev) denir.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğu durumda $\sigma(t) = t$ olacağından delta türev tanımından

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = f'(t)$$

şeklinde de tanımlanabilir (Bohner ve Peterson, 2001).

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için delta türev klasik türeve dönüşür yani $f^\Delta(t) = f'(t)$ dir. Benzer şekilde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğunda ise delta türev fark operatörüne dönüşür yani $f^\Delta(t) = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$ dir.

Teorem 3.2.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında delta türevlenebilir olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır (Bohner ve Peterson, 2001):

i. $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Delta türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

şeklindedir.

ii. Her α sabiti için $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Delta türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$$

şeklindedir.

iii. $f g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Delta türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f^\sigma(t)g^\Delta(t) = f^\Delta(t)g^\sigma(t) + f(t)g^\Delta(t)$$

şeklindedir.

iv. $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

şeklindedir.

Örnek 3.2.5. $\mathbb{T} = \{\sqrt[4]{2n+1}, n \in \mathbb{N}_0\}$ ve $f(t) = t^4$ olsun. $t \in \mathbb{T}$ için, $t = \sqrt[4]{2n+1}$, $n = \frac{t^4-1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ dir.

$$\sigma(t) = \inf \left\{ \sqrt[4]{2l+1} : \sqrt[4]{2l+1} > \sqrt[4]{2n+1}, l \in \mathbb{N}_0 \right\} = \sqrt[4]{2n+3} = \sqrt[4]{2\left(\frac{t^4-1}{2}\right) + 3} = \sqrt[4]{t^4+2} > t$$

olduğundan $\mathbb{T}$ nin herhangi noktasında sağ saçılmıştır. $\mathbb{T}$ de f süreklidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{(\sigma(t))^4 - t^4}{\sigma(t) - t} = (\sigma(t))^3 + t(\sigma(t))^2 + t^2\sigma(t) + t^3 \\ &= (\sqrt[4]{t^4+2})^3 + t(\sqrt[4]{t^4+2})^2 + t^2\sqrt[4]{t^4+2} + t^3 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.2.10. (Yüksek Mertebeden Delta Türev) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ olsun. f fonksiyonun ikinci mertebeden Delta türevi

$$f^{\Delta^2} = f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : \mathbb{T}^{\kappa^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde n . mertebeden Delta türevi

$$f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 3.2.6. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ bir zaman skalası olsun, $f(t) = \frac{t^2+1}{t+1}$ fonksiyonun birinci ve ikinci

Delta türevleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir: $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = 2t, \mu(t) = \sigma(t) - t = t \text{ ve burdan}$$

$$f^\Delta = \frac{(\sigma(t)+t)(t+1) - (t^2+1)}{(t+1)(\sigma(t)+t)} = \frac{2t^2+3t-1}{2t^2+3t+1},$$

$$f^{\Delta\Delta} = \frac{(2(\sigma(t)+t)+3)(2t^2+3t+1) - (2t^2+3t-1)(2(\sigma(t)+t)+3)}{(2t^2+3t+1)(2(\sigma(t))^2+3\sigma(t)+1)} = \frac{6t+3}{(2t^2+3t-1)(8t^2+6t+1)}.$$

3.2.2. Delta İntegral

Tanım 3.2.11. (Regüler Fonksiyon) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limiti, tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limiti var ise bu f fonksiyonuna regüler fonksiyon denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.12. (rd-Süreklili Fonksiyon) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerindeki sağ yoğun noktalarda süreklili, sol yoğun noktalarda sonlu limite sahipse bu f fonksiyonuna rd-süreklili fonksiyon denir. Bu fonksiyonların uzayı $C_{rd}(\mathbb{T})$ şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 3.2.13. (Delta İlkeli) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $F: \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için Delta türevli ve $F^\Delta(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun Δ -ilkeli denir.

Tanım 3.2.14. (Delta İntegrali) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regüler bir fonksiyon; F fonksiyonu ise f fonksiyonunun Δ -ilkeli ve C sabit bir sayı olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Δ -integrali $\int f(t)\Delta t = F(t) + C$ şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun Δ -Riemann integrali (Δ -integrali) $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r),$$

biçiminde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 3.2.2. Her rd -süreklili fonksiyonun Δ -integrali vardır (Bohner ve Peterson, 2001).

Aşağıdaki teoremlerde Δ – integralinin bazı temel özellikleri verilecektir:

Teorem 3.2.3. $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$, $a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler mevcuttur (Bohner ve Peterson, 2001):

- i. $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$,
- ii. $\int_a^b \lambda f(t) \Delta t = \lambda \int_a^b f(t) \Delta t$,
- iii. $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$,
- iv. $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$,
- v. $\int_a^a f(t) \Delta t = 0$,
- vi. $\int_a^b f^\sigma(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t$,
- vii. $\int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t$

Burada vi, vii eşitliklerine zaman skalasında kısmi integrasyon formülleri denir.

Bazı özel durumlarda aşağıdaki teorem ile integral almak daha kolay olacaktır.

Teorem 3.2.4. $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$, $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. Bazı zaman skalaları üzerinde integral alma kuralları aşağıdaki gibidir (Bohner ve Peterson, 2001).

- i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$ olur.
- ii. $[a, b]_{\mathbb{T}}$ sadece ayırık noktalar içeriyorsa

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t), & a < b \\ 0 & a = b \\ - \sum_{t \in (a, b]} \mu(t) f(t), & a > b \end{cases}$$

biçimindedir.

- iii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \end{cases} \quad (3.2)$$

biçimindedir.

iv. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, $h > 0$ olsun.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(th)h, & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t=\frac{a}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(th)h, & a > b \end{cases}$$

biçimindedir.

Örnek 3.2.7. $\mathbb{T} = [-1, 0] \cup 3^{\mathbb{N}_0}$, buradaki $[-1, 0]$ aralığı reel değerli aralık olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t+2)^3} - \frac{1}{8}, & t \in [-1, 0] \\ t^2 - t, & t \in 3^{\mathbb{N}_0} \end{cases}$$

fonksiyonun Δ – integrali

$$I = \int_{-1}^3 f(t)\Delta t = \int_{-1}^0 f(t)\Delta t + \int_0^1 f(t)\Delta t + \int_1^3 f(t)\Delta t = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{(t+2)^3} - \frac{1}{8} \right) \Delta t + \int_0^1 0 \Delta t + \int_1^3 (t^2 - t) \Delta t = \frac{1}{4}$$

biçimindedir.

Örnek 3.2.8. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun.

$$I = \int_{-2}^3 (t^2 + t + 1) \Delta t$$

integralini hesaplamak için (3.2) formülü kullanılsın. Burada $\sigma(t) = t + 1$ ve $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$ olmak üzere

$$I = \sum_{t \in [-2, 2]} (t^2 + t + 1) \Delta t = 4 + (-2) + 1 + (1 - 1 + 1) + 3 + 7 + 1 = 15$$

elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

$\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde çarpımsal türev (*türev) ve bu türevin bazı temel özellikleri Goktas vd., (2021) tarafından tanımlanmıştır. Goktas vd. (2021), $\mathbb{T}$ üzerinde Δ –türev kavramını çarpımsal analize taşımışlar ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Bu bölümde, bu sonuçlar detaylıca incelenecek ve bu özelliklere ek olarak çarpımsal zincir kuralları ve çarpımsal ters fonksiyonun çarpımsal türevi zaman skalasında tanımlanacak ve özellikleri detaylıca incelenecektir.

4.1. Çarpımsal Delta Türev Kavramı

Bu bölümde, çarpımsal delta türev kavramı ve bu kavramla ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir (Goktas vd., 2021).

Tanım 4.1.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ nın bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 1$ için, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda

$$\left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / \{f^{\Delta^*}(t)\}^{\sigma(t)-s} \right|^* \leq \varepsilon^{|\sigma(t)-s|}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa f^{Δ^*} ifadesine f in t noktasındaki Δ^* – türevi (zaman skalasında çarpımsal türev veya çarpımsal delta türev) olarak adlandırılır. Burada, $|\cdot|^*$, (3.1) ile tanımlanır.

Başka bir deyişle, $t \in \mathbb{T}$ yoğun noktalarında

$$f^{\Delta^*}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \left(\frac{f^\sigma(t)}{f(s)} \right)^{\frac{1}{\sigma(t)-s}}, \quad (4.1)$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek 4.1.1. $f(t) = t > 0$, $t \in \mathbb{T}$ olsun. Her $t \in \mathbb{T}^k$ için, f^{Δ^*} türevi

$$f^{\Delta^*} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu(t)} \log\left(\frac{\sigma(t)}{t}\right)}, & \mu(t) \neq 0 \text{ ise,} \\ e^{\frac{1}{t}}, & \mu(t) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçimindedir. Gerçekten de,

$$\mu(t) = 0 \text{ ise, } t \in \mathbb{T}^k, \varepsilon > 1 \text{ ve } s \in (0, t + 1) \cap \mathbb{T} \text{ için}$$

$$\left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / e^{\frac{\sigma(t)-s}{t}} \right|^* = \left| \frac{\sigma(t)}{s} / e^{\frac{\sigma(t)-s}{t}} \right|^* = \left| \frac{t}{s} / e^{\frac{t-s}{t}} \right|^* = \left\{ e^{\left| \frac{\ln t - \ln s}{t-s} \right| - \frac{1}{t}} \right\} \leq \varepsilon^{|t-s|},$$

elde edilir.

$\mu(t) \neq 0$ ise,

$$\left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / e^{\frac{1}{\mu(t)} \log\left(\frac{\sigma(t)}{t}\right)(\sigma(t)-s)} \right|^* = \left| \frac{\sigma(t)}{s} / e^{\frac{\log(\sigma(t)) - \log(t)}{\mu(t)}(\sigma(t)-s)} \right|^* = \left\{ e^{\left| \frac{\ln(\sigma(t)) - \ln s}{\sigma(t)-s} \right|} \right\}^{\sigma(t)-s} \leq \varepsilon^{|\sigma(t)-s|}$$

olur.

Örnek 4.1.2. $f(t) = \alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. Herhangi bir $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta^*}(t) = 1$ biçimindedir. Gerçekten de,

Herhangi bir $t \in \mathbb{T}^k$ ve herhangi bir $\varepsilon > 1$ için, $s \in (t-1, t+1) \cap \mathbb{T}$ şu anlama gelir:

$$\left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / \{1\}^{\sigma(t)-s} \right|^* = \left| \frac{\alpha}{\alpha} \right|^* = 1 \leq \varepsilon^{|\sigma(t)-s|}.$$

Sonuç 4.1.1. Eğer f sadece negatif değerlere sahip olduğu ve t de Δ^* -türevlenebilir olduğu durumda da f yerine $|f|$ yazılabilir.

Teorem 4.1.1. Δ^* -türevi iyi tanımlıdır.

İspat. $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Kabul edelimki $f > 0$ olsun ve her $\varepsilon > 1$ için t 'nin $U = (t-\delta, t+\delta) \cap T$ komşuluğa ait herhangi bir s için

$$\left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / \{f_1^{\Delta^*}\}^{\sigma(t)-s} \right|^* \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}|\sigma(t)-s|} \quad \text{ve} \quad \left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / \{f_2^{\Delta^*}\}^{\sigma(t)-s} \right|^* \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}|\sigma(t)-s|},$$

olacak şekilde $f_1^{\Delta^*}(t)$ ve $f_2^{\Delta^*}(t)$ var olsun. Dolayısıyla,

$s \neq \sigma(t)$ için

$$\left| \frac{f_1^{\Delta^*}(t)}{f_2^{\Delta^*}(t)} \right|^* = \left| \left(f_1^{\Delta^*}(t) / \left\{ \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} \right\}^{\frac{1}{\sigma(t)-s}} \right) \left(\left\{ \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} \right\}^{\frac{1}{\sigma(t)-s}} / f_2^{\Delta^*} \right) \right|^*$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / \{f_1^{\Delta^*}\}^{\frac{1}{\sigma(t)-s}} \right|^{*\frac{1}{|\sigma(t)-s|}} \left| \frac{f^\sigma(t)}{f(s)} / \{f_2^{\Delta^*}\}^{\frac{1}{\sigma(t)-s}} \right|^{*\frac{1}{|\sigma(t)-s|}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur ve $\varepsilon > 1$ keyfi olarak seçildiğinden, $f_1^{\Delta^*}(t) = f_2^{\Delta^*}(t)$ elde edilir.

4.1.1. Sağ ve Sol Çarpımsal Delta Türevler

Zaman skalasında çarpımsal türev tanımını pekiştirmek ve anlaşılır kılmak için tek taraflı Δ^* -türevlerini tanımlamamız gerekir.

Tanım 4.1.2. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$, tüm $t \in \mathbb{T}$ için Δ -türevlenebilir olsun. $[t_0, b) \subset \mathbb{T}$ üzerinde tanımlı $f(t)$ nin t_0 noktasında sağ taraflı Δ^* türevi

$$f_+^{\Delta^*}(t) = \lim_{s \rightarrow t_0^+} \left(\frac{f^\sigma(t_0)}{f(s)} \right)^{\frac{1}{\sigma(t_0)-s}}$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde, $[t_0, b) \subset \mathbb{T}$ üzerinde tanımlı $f(t)$ nin t_0 noktasında sol taraflı Δ^* türevi

$$f_-^{\Delta^*}(t) = \lim_{s \rightarrow t_0^-} \left(\frac{f^\sigma(t_0)}{f(s)} \right)^{\frac{1}{\sigma(t_0)-s}}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan, eğer $f_+^{\Delta^*}(t_0)$ ve $f_-^{\Delta^*}(t_0)$ var ve $f(t)$ t_0 da Δ^* -türevlenebilirdir ise

$$f^{\Delta^*}(t_0) = f_+^{\Delta^*}(t_0) = f_-^{\Delta^*}(t_0)$$

sonucu kolayca elde edilir.

Örnek 4.1.3.

$$f(t) = \begin{cases} t + 3, & t \in [-2, 2)_{\mathbb{R}} \\ t^2 + t, & t \in \{2, 4, 8\} \end{cases}$$

fonskiyonunu ele alalım. $f^{\Delta^*}(2)$ 'yi hesaplayalım.

Burada ilk önce sağ ve sol taraflı Δ^* – türevlerinin yapısını inceleyeceğiz.

$$f_-^{\Delta^*}(2) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{f(\sigma(2))}{f(t)} \right)^{\frac{1}{\sigma(2)-t}} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{f(4)}{f(t)} \right)^{\frac{1}{4-t}} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{20}{t+3} \right)^{\frac{1}{4-t}} = 2,$$

ve

$$f_+^{\Delta^*}(2) = \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(\sigma(2))}{f(t)} \right)^{\frac{1}{\sigma(2)-t}} = \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(4)}{f(t)} \right)^{\frac{1}{4-t}} = \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(\frac{20}{t^2+t} \right)^{\frac{1}{4-t}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

olduğundan f fonksiyonu $t = 2$ de Δ^* – türevlenebilir değildir.

4.1.2. Çarpımsal Delta Türev Almada Genel Kurallar

Bu bölümde, zaman skalasında çarpımsal türev almada genel kurallar verilecektir.

Lemma 4.1.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tüm $t \in \mathbb{T}$ için Δ – türevlenebilir olsun. O halde

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)}$$

dir.

İspat. $\ell_f^{\Delta}(t,s)$ nin tanımını dikkate alalım.

İlk olarak, $\mu(t) \neq 0$ için ispatı şu şekilde yapalım:

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{\frac{1}{\mu(t)} \log \left(\frac{f^{\sigma}(t)}{f(s)} \right)} = e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\mu(t) = 0$ için

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{\lim_{s \rightarrow t} \frac{\log \left(\frac{f^{\sigma}(t)}{f(s)} \right)}{\sigma(t)-s}} = e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)}$$

bulunur.

Böylece bu iki denklemden istenilen eşitlik kolayca görülebilir.

Dikkat edilirse, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğunda Δ – türevinin klasik türevine indirgenmesine benzer şekilde, Δ^* – türev de Δ – türevine (çarpımsal türev) indirgenir.

Teorem 4.1.2. Tüm $t \in \mathbb{T}$ için $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\Delta -$ türevlenebilir ise, o zaman f fonksiyonu aynı zamanda t de $\Delta^* -$ türevlenebilirdir.

Teorem 4.1.3. Tüm $t \in \mathbb{T}$ için $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\Delta^* -$ türevlenebilir ve $f^{\Delta^*}(t) \neq 0$ ise, o zaman f fonksiyonu aynı zamanda t de $\Delta -$ türevlenebilirdir.

İspat. Aşağıdaki eşitlikler daha önce verilen temel kavramlardan elde edilir:

$$f^{\Delta^*} = e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)} \quad \text{ve} \quad \log f^{\Delta^*} = \ell_f^{\Delta}(t,s).$$

Eğer $\mu(t) = 0$ ise

$$\ell_f^{\Delta}(t,s) = \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)} = \log f^{\Delta^*}$$

veya

$$f^{\Delta}(t) = f(t) \{ \log f^{\Delta^*} \}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde, $\mu(t) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \ell_f^{\Delta}(t,s) &= \frac{1}{\mu(t)} \log \left(\frac{f^{\sigma}(t)}{f(t)} \right) = \log f^{\Delta^*} \\ \frac{1}{\mu(t)} \log \left(1 + \mu(t) \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)} \right) &= \log f^{\Delta^*} \end{aligned}$$

veya

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(t)}{\mu(t)} \{ (f^{\Delta^*})^{\mu(t)} - 1 \}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. f, t de $\Delta^* -$ türevlenebilir ve $f^{\Delta^*}(t) \neq 0$ ise, o halde f, t de sürekli.
- ii. f, t de sürekli ve t noktası sağ saçılmış ise, o halde f, t de $\Delta^* -$ türevlenebilirdir ve bu türev

$$f^{\Delta^*}(t) = \left[\frac{f^{\sigma}(t)}{f(t)} \right]^{\frac{1}{\mu(t)}}$$

şeklinde ifade edilir.

iv. Eğer t noktası sağ yoğun ise, o zaman f, Δ^* – türevlenebilirdir. Diğer taraftan, f, t 'de limit

$$\lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{f(t)}{f(s)} \right]^{\frac{1}{t-s}}$$

limiti mevcutsa bu türev

$$f^{\Delta^*}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{f(t)}{f(s)} \right]^{\frac{1}{t-s}}$$

biçiminde ifade edilir.

v. f, t de Δ^* – türevlenebilir ise, o zaman

$$f^\sigma(t) = f(t)[f^{\Delta^*}(t)]^{\mu(t)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

i. f in Δ^* –türevi tanımına ve teorem 4.1.3'e göre, f fonksiyonu aynı zamanda $t \in \mathbb{T}$ 'de Δ –türevlenebilirdir. Zaman skalasında f in Δ –türevinin özelliklerinden f in sürekli olduğu ispatlanır.

ii. f fonksiyonu sürekli ve t de sağa saçılmış nokta olsun. Zaman skalasında f in Δ –türevinin özelliklerinden f fonksiyonu t de Δ –türevlenebilirdir. Sonuç olarak, teorem 4.1.2'den f fonksiyonu t de Δ^* – türevlenebilirdir.

iii. t noktası sağ yoğun olsun. Zaman skalasında f in Δ –türevinin özelliklerinden f fonksiyonu t de Δ –türevlenebilirdir. Sonuç olarak, teorem 4.1.2'den f fonksiyonu t de Δ^* – türevlenebilirdir.

iv. f fonksiyonu t de Δ^* – türevlenebilir olsun.

Eğer $\mu(t) = 0, (\sigma(t) = t)$ ise, o zaman

$$f^\sigma(t) = f(t) = f(t)[f^{\Delta^*}(t)]^{\mu(t)}$$

olur.

Eğer $\mu(t) \neq 0$ ise teorem 4.1.4.'in ii. maddesinden eşitlik elde edilir.

Şimdi çarpımsal delta türevinin bazı önemli özelliklerini ifade edip ispatlayalım.

Teorem 4.1.5. Her $t \in \mathbb{T}^k$ için $f, h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$, Δ^* – türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O halde, fh , $\frac{f}{h}$, cf , $f + h$ da Δ^* – türevlenebilir ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i. $(fh)^{\Delta^*} = f^{\Delta^*}(t)h^{\Delta^*}(t)$,
- ii. $h^{\Delta^*} \neq 0$ için $\left(\frac{f}{h}\right)^{\Delta^*}(t) = \frac{f^{\Delta^*}(t)}{h^{\Delta^*}(t)}$,
- iii. $c \in \mathbb{R}$ için $(cf)^{\Delta^*}(t) = f^{\Delta^*}(t)$,
- iv. $(f + h)^{\Delta^*}(t) = \left(f^{\Delta^*}(t)\right)^{\frac{f}{f+h}} \left(h^{\Delta^*}(t)\right)^{\frac{h}{f+h}}$.

İspat.

- i. $(fh)^{\Delta^*} = e^{\ell_{fh}^{\Delta}(t,s)} = e^{\{\ell_f(t,s) + \ell_h(t,s)\}^{\Delta}} = e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)} e^{\ell_h^{\Delta}(t,s)} = f^{\Delta^*}(t)h^{\Delta^*}(t)$,
- ii. $\left(\frac{f}{h}\right)^{\Delta^*}(t) = e^{\frac{\ell_f^{\Delta}(t,s)}{h}} = e^{\{\ell_f(t,s) - \ell_h(t,s)\}^{\Delta}} = \frac{f^{\Delta^*}(t)}{h^{\Delta^*}(t)}$,
- iii. Δ^* – türev tanımından $(cf)^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_{cf}^{\Delta}(t,s)} = e^{\ell_c^{\Delta}(t,s)} e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)}$ elde edilir. $\mu(t) = 0$ ise, $e^{\ell_c^{\Delta}(t,s)} = 1$ olduğundan $(cf)^{\Delta^*}(t) = f^{\Delta^*}(t)$ bulunur. Benzer şekilde, $\mu(t) \neq 0$ için $e^{\frac{1}{\mu(t)} \log\left(1 + \mu(t) \frac{c^{\Delta}}{c}\right)} = 1$ olduğundan $(cf)^{\Delta^*}(t) = f^{\Delta^*}(t)$ elde edilir.

iv.

$$(f + h)^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_{f+h}^{\Delta}(t,s)} = e^{\frac{(f+h)^{\Delta}}{f+h}} = \left(e^{\frac{f^{\Delta}}{f}}\right)^{\frac{f}{f+h}} \left(e^{\frac{h^{\Delta}}{h}}\right)^{\frac{h}{f+h}} = (f^{\Delta^*}(t))^{\frac{f}{f+h}} (h^{\Delta^*}(t))^{\frac{h}{f+h}}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.2. Her $t \in \mathbb{T}^k$ için $f, h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ Δ^* – türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer, $f(t) = ch(t)$, $c \in \mathbb{R}$ ise $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta^*}(t) = h^{\Delta^*}(t)$ dir.

İspat. Teorem 4.1.5.’in iii. maddesinden $f^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_f^{\Delta}t} = e^{\ell_{ch}^{\Delta}t} = h^{\Delta^*}(t)$ elde edilir.

Lemma 4.1.3. Eğer $f, h, r : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve tüm $t \in \mathbb{T}^k$ için Δ^* – türevlenebilir fonksiyonlarsa, o zaman

$$(fhr)^{\Delta^*}(t) = f^{\Delta^*}(t) h^{\Delta^*}(t) r^{\Delta^*}(t)$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.5.'nin i. Maddesinden

$$(fhr)^{\Delta^*}(t) = (fh)^{\Delta^*}(t)r^{\Delta^*}(t) = f^{\Delta^*}(t)h^{\Delta^*}(t)r^{\Delta^*}(t)$$

bulunur.

Bu sonuç aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Sonuç 4.1.2. Tüm $t \in \mathbb{T}^k$ için $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu Δ^* – türevlenebilir olsun. O halde, bazı $n \in \mathbb{N}$ için

$$(f^n)^{\Delta^*}(t) = (f^{\Delta^*}(t))^n$$

dir.

Teorem 4.1.6. α bir sabit, $t \neq \alpha$ ve $m \in \mathbb{N}$, (m tek ise $t > \alpha$) olsun.

i. Eğer $f(t) = (t - \alpha)^m$ ise, o zaman

$$f^{\Delta^*}(t) = \begin{cases} e^{\frac{m}{\mu(t)} \log\left(\frac{\sigma(t)-\alpha}{t-\alpha}\right)}, & \mu(t) \neq 0 \\ e^{\frac{m}{t-\alpha}}, & \mu(t) = 0, \end{cases}$$

ii. Eğer $h(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ ise, o zaman

$$h^{\Delta^*}(t) = \begin{cases} e^{\frac{-m}{\mu(t)} \log\left(\frac{\sigma(t)-\alpha}{t-\alpha}\right)}, & \mu(t) \neq 0 \\ e^{\frac{m}{\alpha-t}}, & \mu(t) = 0 \end{cases}$$

dir.

İspat.

i. Eğer $f(t) = (t - \alpha)^m$ ise, o zaman

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_f^{\Delta}(t,s)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu(t)} \log\left[\frac{(\sigma(t)-\alpha)^m}{(t-\alpha)^m}\right]}, & \mu(t) \neq 0 \\ e^{\frac{((t-\alpha)m)^{\Delta}}{(t-\alpha)^m}}, & \mu(t) = 0, \end{cases}$$

ii. Eğer $h(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ ise, o zaman

$$h^{\Delta^*}(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu(t)} \log \left[\frac{(\sigma(t)-\alpha)^{-m}}{(t-\alpha)^{-m}} \right]}, & \mu(t) \neq 0 \\ e^{\frac{((t-\alpha)^{-m})^{\Delta}}{(t-\alpha)^{-m}}}, & \mu(t) = 0 \end{cases}$$

olup ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.4. $\mathbb{T} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbb{N}_0} \cup \{0\}$ üzerinde $f(t) = \frac{t^2 \sin t}{1+t}$ olsun. Dolayısıyla teorem 4.1.5.'in ilgili maddeleri gereğince

$$f^{\Delta^*}(t) = \frac{(t^2)^{\Delta^*} (\sin t)^{\Delta^*}}{(1+t)^{\Delta^*}}$$

elde edilir.

Bu türev belirli bir $t = 1$ noktası için hesaplanırsa, $\mu(t) = 0$ ile birlikte $f^{\Delta^*}(1) = e^{\cot 1}$ olur. Ayrıca, $\mu(t) \neq 0$ için

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{\frac{1}{t} \log \left(\frac{8(t+1) \cos t}{2t+1} \right)}$$

olur.

4.1.3. Yüksek Mertebeden Çarpımsal Delta Türev

Tanım 4.1.3. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ nın tüm $t \in \mathbb{T}^k$ için Δ^* -türevlenebilir olsun. $(f^{\Delta^*})^{\Delta^*} : \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}^+$, f^{Δ^*} nin $t \in \mathbb{T}^{k^2}$ için Δ^* -türevlenebilir olması koşuluyla, f in ikinci mertebeden Δ^* -türevdir. Benzer şekilde, f in yüksek mertebeden Δ^* -türevi $f^{(\Delta^*)^n} : \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ ile tanımlanır. Şimdi yüksek mertebeden Δ^* -türevi için daha açık ifadeler yazalım.

Bu birinci mertebeden Δ^* -türevi, $f^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_f^{\Delta} t}$ tanımını kullanarak yapılacaktır. Aynı mantık kullanılmaya devam ederse,

$$(f^{\Delta^*})^{\Delta^*}(t) = e^{\ell_f^{\Delta\Delta} t}$$

elde edilir. Bu durum genellendiğinde

$$f^{(\Delta^*)^n} = e^{\ell_f^{\Delta^n} t}$$

İfadesi elde edilir.

4.1.4. Çarpımsal Delta Türevle İlgili Teoremler

Bu bölümde, çarpımsal analizde çok önemli bir yere sahip olan Rolle ve ortalama değer teoremleri zaman skalasında tanımlanacaktır.

Teorem 4.1.7. (Δ^* -Rolle Teoremi) f 'nin $[a, b]$ üzerindeki her noktada Δ^* -türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise

$$f^{\Delta^*}(c_1) \leq 1 \leq f^{\Delta^*}(c_2)$$

$c_1, c_2 \in [a, b]$ noktaları vardır.

İspat. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerindeki her noktada Δ^* -türevlenebilir olduğundan, f ayrıca $[a, b]$ üzerinde Δ -türevlenebilirdir. Bu nedenle, $f(a) = f(b)$ olduğundan zaman skalası analizindeki Rolle teoreminden

$$f^{\Delta}(c_1) \leq 0 \leq f^{\Delta}(c_2) \quad (4.2)$$

olacak şekilde $c_1, c_2 \in [a, b]$ vardır.

$\mu(t) = 0$ olsun. O halde, Δ^* türev tanımından ve (4.2) eşitsizliğinden

$$f^{\Delta^*}(c_1) = e^{\frac{f^{\Delta}(c_1)}{f(c_1)}} \leq 1 \quad \text{ve} \quad f^{\Delta^*}(c_2) = e^{\frac{f^{\Delta}(c_2)}{f(c_2)}} \geq 1$$

ve sonuç olarak,

$$f^{\Delta^*}(c_1) \leq 1 \leq f^{\Delta^*}(c_2).$$

elde edilir.

$\mu(t) \neq 0$ olsun. Sonrasında,

$$f^{\Delta^*}(t) = \left(1 + \mu(t) \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)}\right)^{\frac{1}{\mu(t)}}.$$

$\mu(t) \geq 0$ olduğundan ve (4.2) eşitsizliğinden aynı sonuç elde edilir.

İspat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1.5. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $f(t) = e^{t^2}$ olsun.

$$f^{\Delta^*}(c_1) \leq 1 \leq f^{\Delta^*}(c_2)$$

olacak şekilde $c_1, c_2 \in [-3, 3]$ bulalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan, $\sigma(t) = t + 1$, $\mu(t) = 1$ dir. Diğer taraftan

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{2t+1}$$

bulunur. Sonuçta,

$$f^{\Delta^*}(c_1) = e^{2c_1+1} \leq 1 \quad \text{ve} \quad f^{\Delta^*}(c_2) = e^{2c_2+1} \geq 1,$$

$c_1 \in \{-3, -2, -1\}$ ve $c_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ için geçerlidir.

Teorem 4.1.8. (Δ^* -Ortalama Değer Teoremi) f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli, $[a, b]$ üzerindeki her noktada Δ^* -türevlenebilir olsun. O zaman,

$$[f^{\Delta^*}(c_1)]^{b-a} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq [f^{\Delta^*}(c_2)]^{b-a}$$

$c_1, c_2 \in (a, b)$ noktaları vardır.

İspat. ϕ 'nin

$$\phi(t) = \frac{f(t)}{f(a)} \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{t-a}{b-a}}$$

ile tanımlı olduğunu düşünelim. O halde, ϕ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b]$ üzerindeki her noktada Δ -türevi vardır ve teorem 4.1.2. den Δ^* -türevlenebilirdir. Dahası, $\phi(a) = \phi(b) = 1$ dir. O halde, Δ^* -Rolle teoreminden

$$\phi^{\Delta^*}(c_1) \leq 1 \leq \phi^{\Delta^*}(c_2) \tag{4.3}$$

olacak şekilde $c_1, c_2 \in [a, b)$ vardır.

Öte yandan,

$$\phi^{\Delta^*}(c_1) = f^{\Delta^*}(c_1) \left[k^{\frac{t-a}{a-b}} \right]_{t=c_1}^{\Delta^*}, \quad k = \frac{f(b)}{f(a)}$$

bulunur.

Burada, eğer sağdaki ikinci çarpan ise, μ' nün farklı durumları için hesaplanır. Her iki durumda da ($\mu(t) \neq 0$, $\mu(t) = 0$)

$$\left[k^{\frac{t-a}{a-b}} \right]_{t=c_1}^{\Delta^*} = k^{\frac{1}{a-b}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\phi^{\Delta^*}(c_1) = f^{\Delta^*}(c_1) \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{a-b}}$$

bulunur. Aynı yöntem benzer şekilde kullanılırsa,

$$\phi^{\Delta^*}(c_2) = f^{\Delta^*}(c_2) \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{a-b}}$$

elde edilir. Bu eşitlikler ve (4.3) eşitsizliği dikkate alındığında,

$$f^{\Delta^*}(c_1) \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{a-b}} \leq 1 \leq f^{\Delta^*}(c_2) \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{a-b}}$$

yani;

$$[f^{\Delta^*}(c_1)]^{b-a} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq [f^{\Delta^*}(c_2)]^{b-a}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.6. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ üzerinde $f(t) = e^{t^4}$ ü ele alalım. $[a, b] = [-2, 4]$ üzerinde

$$[f^{\Delta^*}(c_1)]^{b-a} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq [f^{\Delta^*}(c_2)]^{b-a}$$

olacak şekilde $c_1, c_2 \in (-2, 4)$ değerlerini bulalım.

Verilen zaman skalası yapısından ve fonksiyonun tanımından, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ üzerinde $\sigma(t) = t + 1$, $\mu(t) = 1$ ve $f(-2) = e^{16}, f(4) = e^{256}$ dir.

Diğer taraftan

$$f^{\Delta^*}(t) = e^{4t^3+6t^2+4t+1}$$

elde edilir. Bu nedenle, Δ^* -Ortalama değer teoremi dikkate alınırsa

$$\left[e^{4c_1^3+6c_1^2+4c_1+1} \right]^6 \leq e^{240} \leq \left[e^{4c_2^3+6c_2^2+4c_2+1} \right]^6$$

veya

$$4c_1^3 + 6c_1^2 + 4c_1 + 1 \leq 40 \quad \text{ve} \quad 40 \leq 4c_2^3 + 6c_2^2 + 4c_2 + 1$$

bulunur.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için yukarıdaki eşitsizlikleri sağlayan c_1, c_2 değerleri, $c_1 \in \{-1, 0, 1\}$ ve $c_2 \in \{2, 3\}$ 'dir.

Sonuç 4.1.3. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b]$ üzerindeki her noktada ise Δ^* -türevlenebilir olsun. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) = 1$ ise, o zaman f bir sabit fonksiyondur.

İspat. $f^{\Delta^*}(t) = 1$ olduğundan ve Δ^* -ortalama değer teoremine göre öyle $c_1, c_2 \in [a, b]$ vardır ki

$$1 = [f^{\Delta^*}(c_1)]^{t-a} \leq \frac{f(t)}{f(a)} \leq [f^{\Delta^*}(c_2)]^{t-a} = 1$$

veya

$$f(t) = f(a)$$

elde edilir. Bu ise f in sabit bir fonksiyon olduğunu ispatlar.

Teorem 4.1.9. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b]$ üzerindeki her noktada ise Δ^* -türevlenebilir olsun.

Burada, aşağıdaki durumlar sağlanır:

i. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) > 1$ ise, o zaman f $[a, b]$ üzerinde artan,

- ii. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) < 1$ ise, o zaman f $[a, b]$ üzerinde azalan,
- iii. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) \geq 1$ ise, f $[a, b]$ üzerinde azalmayan,
- iv. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) \leq 1$ ise, f $[a, b]$ üzerinde artmayandır.

İspat.

- i. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) > 1$ olsun. O halde, Δ^* –Ortalama Değer Teoreminden herhangi bir $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $t_1 < t_2$ için

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \geq [f^{\Delta^*}(c)]^{t_2-t_1} > 1$$

olacak şekilde $c \in (t_1, t_2)$ vardır. Buradan $f(t_1) < f(t_2)$ elde edilir. Sonuç olarak, f $[a, b]$ üzerinde artandır.

- ii. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) < 1$ olsun. O halde, Δ^* –Ortalama Değer Teoreminden herhangi bir $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $t_1 < t_2$ için

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \leq [f^{\Delta^*}(c)]^{t_2-t_1} < 1$$

olacak şekilde $c \in (t_1, t_2)$ vardır. Buradan $f(t_1) > f(t_2)$ elde edilir. Sonuç olarak, f $[a, b]$ üzerinde azalandır.

- iii. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) \geq 1$ olsun. O halde, Δ^* –Ortalama Değer Teoreminden herhangi bir $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $t_1 < t_2$ için

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \geq [f^{\Delta^*}(c)]^{t_2-t_1} \geq 1$$

olacak şekilde $c \in (t_1, t_2)$ vardır. Buradan $f(t_1) \leq f(t_2)$ elde edilir. Sonuç olarak, f $[a, b]$ üzerinde azalmayandır.

- iv. Her $t \in [a, b]$ için $f^{\Delta^*}(t) \leq 1$ olsun. O halde, Δ^* –Ortalama Değer Teoreminden herhangi bir $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $t_1 < t_2$ için

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \leq [f^{\Delta^*}(c)]^{t_2-t_1} \leq 1$$

olacak şekilde $c \in (t_1, t_2)$ vardır. Buradan $f(t_1) \geq f(t_2)$ elde edilir. Sonuç olarak, f $[a, b]$ üzerinde artmayandır.

Örnek 4.1.7. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+ - \{1, 2\}$ üzerinde $f(t) = t^3 - 2t^2 - t$ nin artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

Δ^* – türevi kavramını kullanarak

$$f^{\Delta^*}(t) = \frac{t^3 + t^2 - 2t - 2}{t^3 - 2t^2 - t} = 1 + \frac{3t^2 - t - 2}{t^3 - 2t^2 - t}$$

elde ederiz. Böylece, $t \in \mathbb{T}$ için $[3, \infty)$ aralığında $f^{\Delta^*}(t) \geq 1$ olup f azalmayandır.

4.2. Ana Sonuçlar

Bu bölümde tezin ana sonuçları elde edilecektir: Çarpımsal zincir kuralları ve ters fonksiyonun çarpımsal türevi zaman skalasında tanımlanacak ve özellikleri detaylıca incelenecektir.

4.2.1. Çarpımsal Delta Zincir Kuralı ve Uygulamaları

Teorem 4.2.1. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir olsun. O halde,

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{f'(g(c))} \quad (4.4)$$

olacak şekilde $c \in [t, \sigma(t)]$ vardır.

İspat. Sabit $t \in \mathbb{T}^k$ ele alalım.

1. Eğer t sağa saçılmışsa, teorem 4.1.4'den

$$(e^g)^{\Delta^*}(t) = \left\{ \frac{e^{g(\sigma(t))}}{e^{g(t)}} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = \{e^{g(\sigma(t)) - g(t)}\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \quad (4.5)$$

ve

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = \left\{ \frac{e^{f(g(\sigma(t)))}}{e^{f(g(t))}} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = \{e^{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \quad (4.6)$$

yazılabilir.

Eğer $g(\sigma(t)) = g(t)$ olsun. O halde (4.5) den $(e^g)^{\Delta^*}(t) = 1$ ve (4.6) dan $(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = 1$ elde edilir. Böylece herhangi bir $c \in [t, \sigma(t)]$ için (4.4) geçerlidir.

Eğer $g(\sigma(t)) \neq g(t)$ olsun. O halde, Δ -ortalama değer teoremi ile,

$$\begin{aligned} (e^f o g)^{\Delta^*}(t) &= \left\{ e^{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = \left\{ e^{\frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)}} \right\}^{\frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)}} \\ &= \left\{ \left(\frac{e^{g(\sigma(t))}}{e^{g(t)}} \right)^{\frac{1}{\mu(t)}} \right\}^{\frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)}} = \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{f'(\xi)} \end{aligned}$$

burada $\xi, g(t)$ ve $g(\sigma(t))$ arasındadır. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli olduğundan, $g(c) = \xi$ olacak şekilde $c \in [t, \sigma(t)]$ vardır.

2. Eğer t sağ yoğun ise, o halde,

$$\begin{aligned} (e^f o g)^{\Delta^*}(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \left\{ e^{f(g(t)) - f(g(s))} \right\}^{\frac{1}{t-s}} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \left\{ e^{\frac{g(t) - g(s)}{t-s}} \right\}^{\frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \left\{ \left(\frac{e^{g(t)}}{e^{g(s)}} \right)^{\frac{1}{t-s}} \right\}^{\frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \left\{ \left(\frac{e^{g(t)}}{e^{g(s)}} \right)^{\frac{1}{t-s}} \right\}^{f'(\xi_s)} \end{aligned}$$

burada $\xi_s, g(s)$ ve $g(t)$ arasındadır. g nin sürekliliği ile $\lim_{s \rightarrow t} \xi_s = g(t)$ elde ederiz. Böylece,

$$(e^f o g)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{f'(g(t))}$$

olup ispatı tamamlar.

Örnek 4.2.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^3 + 1$, $g(t) = t^2$ olsun. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir olduğu gözükmemektedir. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan $\sigma(t) = t + 1$ ve $\mu(t) = 1$ olup

$$(e^g)^{\Delta^*}(t) = \left\{ e^{g(\sigma(t)) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = e^{g(t+1) - g(t)} = e^{2t+1}$$

ve

$$f'(t) = 3t^2$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$(e^f \circ g)(t) = e^{f(g(t))} = e^{t^6+1}$$

olup

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = (e^{t^6+1})^{\Delta^*}(t) = e^{(t+1)^6+1-t^6-1} = e^{6t^5+15t^4+20t^3+15t^2+6t+1}$$

bulunur. $t = 1$ özel hali için (4.4) eşitliğinin doğruluğunu inceleyelim.

$$(e^g)^{\Delta^*}(1) = e^3 \text{ ve } (e^f \circ g)^{\Delta^*}(1) = e^{63}$$

değerleri dikkate alınırsa $c \in [1, \sigma(1)] = [1, 2]$ olacak şekilde aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$\begin{aligned} (e^f \circ g)^{\Delta^*}(1) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(1)\}^{f'(g(c))} \\ e^{63} &= \{(e^g)^{\Delta^*}(1)\}^{f'(c^2)} = e^{9c^4} \\ 63 &= 9c^4 \end{aligned}$$

olur ki, buradan $c^4 = 7$, ve böylece (4.4) eşitliği sağlanacak şekilde $c = \sqrt[4]{7} \in [1, 2]$ elde edilir.

Örnek 4.2.2. $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $f(t) = t + 2$, $g(t) = t^2 - 1$ olsun. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir olduğu gözükmemektedir. $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ olduğundan $t \in \mathbb{T}$, $t = 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $n = \log_2 t$ için $\sigma(t) = \inf = \{2^l : 2^l > 2^n, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{n+1} = 2t$ ve $\mu(t) = t$ olup $\mathbb{T}$ nın tüm noktaları sağ saçılmıştır. $t \in \mathbb{T}$ için

$$(e^g)^{\Delta^*}(t) = \{e^{g(\sigma(t)) - g(t)}\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = e^{\frac{g(2t) - g(t)}{t}} = e^{3t}$$

ve

$$f'(t) = 1$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$(e^f \circ g)(t) = e^{f(g(t))} = e^{t^2+1}$$

olup

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = (e^{t^2+1})^{\Delta^*}(t) = \{e^{((2t)^2+1)-(t^2+1)}\}^{\frac{1}{t}} = e^{3t}$$

bulunur. $t = 2$ özel hali için (4.4) eşitliğinin doğruluğunu inceleyelim.

$$(e^g)^{\Delta^*}(2) = e^6 \text{ ve } (e^f \circ g)^{\Delta^*}(2) = e^6$$

değerleri dikkate alınırsa $c \in [2, \sigma(2)] = [2, 4]$ olacak şekilde aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$\begin{aligned} (e^f \circ g)^{\Delta^*}(2) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(2)\}^{f'(g(c))} \\ e^6 &= \{(e^g)^{\Delta^*}(2)\}^{f'(c^2-1)} = e^6 \\ e^6 &= e^6 \end{aligned}$$

olur ki, buradan her $c \in [2, 4]$ elemanı için (4.4) eşitliği sağlanır.

Örnek 4.2.3. $\mathbb{T} = \{3^{n^2} : n \in \mathbb{N}_0\}$, $f(t) = t^2 + 1$, $g(t) = t^3$ olsun. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir olduğu görülmektedir. $\mathbb{T} = \{3^{n^2} : n \in \mathbb{N}_0\}$ olduğundan $t \in \mathbb{T}$, $t = 3^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $n = (\log_3 t)^{\frac{1}{2}}$ için $\sigma(t) = \inf \{3^{l^2} : 3^{l^2} > 3^{n^2}, l \in \mathbb{N}_0\} = 3^{(n+1)^2} = 3 \cdot 3^{n^2} \cdot 3^{2n} = 3t \cdot 3^{2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}}}$ ve $\mu(t) = 3t \cdot 3^{2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}}} - t$ olup $\mathbb{T}$ nın tüm noktaları sağ saçılmıştır. $t \in \mathbb{T}$ için

$$(e^g)^{\Delta^*}(t) = \{e^{g(\sigma(t))-g(t)}\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = e^{\frac{g\left(3t \cdot 3^{2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}}}\right) - g(t)}{3t \cdot 3^{2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}}} - t}} = e^{\frac{\left(3t \cdot 3^{2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}}}\right)^3 - t^3}{3t \cdot 3^{2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}}} - t}}$$

ve

$$f'(t) = 2t$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$(e^f \circ g)(t) = e^{f(g(t))} = e^{t^6+1}$$

olup

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = (e^{t^6+1})^{\Delta^*}(t) = e^{\frac{(\sigma(t))^6+1-t^6-1}{3t^3 \cdot 2(\log_3 t)^{\frac{1}{2}-t}}}$$

bulunur. $t = 1$ özel hali için (4.4) eşitliğinin doğruluğunu inceleyelim.

$$(e^g)^{\Delta^*}(1) = e^{13} \text{ ve } (e^f \circ g)^{\Delta^*}(1) = e^{\frac{728}{2}} = e^{364}$$

değerleri dikkate alınırsa $c \in [1, \sigma(1)] = [1, 3]$ olacak şekilde aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$\begin{aligned} (e^f \circ g)^{\Delta^*}(1) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(1)\}^{f'(g(c))} \\ e^{364} &= \{(e^g)^{\Delta^*}(1)\}^{f'(c^3)} = e^{26c^3} \\ e^{364} &= e^{26c^3} \end{aligned}$$

olur ki, buradan $c^3 = 14$, ve böylece (4.4) eşitliği sağlanacak şekilde $c = \sqrt[3]{14} \in [1, 3]$ elde edilir.

Örnek 4.2.4. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^2 + 2t + 1$, $g(t) = t^2 - 3t$ olsun. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir olduğu gözükmemektedir. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan $\sigma(t) = t + 1$ ve $\mu(t) = 1$ olup

$$(e^g)^{\Delta^*}(t) = \{e^{g(\sigma(t))-g(t)}\}^{\frac{1}{\mu(t)}} = e^{g(t+1)-g(t)} = e^{2t-2}$$

ve

$$f'(t) = 2t + 2$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$(e^f \circ g)(t) = e^{f(g(t))} = e^{t^4-6t^3+11t^2-6t+1}$$

olup

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = (e^{t^4-6t^3+11t^2-6t+1})^{\Delta^*}(t) = e^{(t+1)^4-6(t+1)^3+11(t+1)^2-6(t+1)+1-(t^4-6t^3+11t^2-6t+1)}$$

bulunur. $t = 1$ özel hali için (4.4) eşitliğinin doğruluğunu inceleyelim.

$$(e^g)^{\Delta^*}(1) = 1 \text{ ve } (e^f \circ g)^{\Delta^*}(1) = 1$$

değerleri dikkate alınırsa $c \in [1, \sigma(1)] = [1, 2]$ olacak şekilde aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$\begin{aligned} (e^f \circ g)^{\Delta^*}(1) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(1)\}^{f'(g(c))} \\ 1 &= 1^{f'(c^2-3c)} = 1^{2c^2-6c+2} \end{aligned}$$

olur ki, buradan her $c \in [1, 2]$ elemanı için (4.4) eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilir olsun. O zaman $e^f \circ g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ Δ^* -türevlenebilir ve

$$(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{\left\{\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh\right\}}$$

biçimindedir.

İspat: Dikkat edilirse

$$\begin{aligned} f(g(\sigma(t))) - f(g(s)) &= \int_{g(s)}^{g(\sigma(t))} f'(y) dy \\ &= (g(\sigma(t)) - g(s)) \int_0^1 f'(hg(\sigma(t)) + (1-h)g(s)) dh \end{aligned}$$

dir. $\varepsilon > 0$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + 2 \int_0^1 |f'(hg(\sigma(t)) + (1-h)g(t))| dh}$$

olsun.

e^g, t de Δ^* -türevlenebilir olduğundan, t 'nin bir U_1 komşuluğu vardır, öyle ki tüm $s \in U_1$

$$\left| \frac{(e^g)(\sigma(t))}{(e^g)(s)\{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)}} \right|^* \leq \delta^{\frac{|\sigma(t)-s|}{2}}$$

dir. $f, \mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan, $h \in [0, 1]$ için

$$\left| hg(\sigma(t)) + (1-h)g(s) - (hg(\sigma(t)) + (1-h)g(t)) \right| = (1-h)|g(t) - g(s)| \leq |g(t) - g(s)|$$

eşitsizliği kullanılırsa, t 'nin bir U_2 komşuluğu vardır, öyle ki her $s \in U_2$ için

$$\left| f' \left(hg(\sigma(t)) + (1-h)g(s) \right) - f' \left(hg(\sigma(t)) + (1-h)g(t) \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(\delta + |g^{\Delta}(t)|)}$$

elde edilir.

Şimdi, $s \in U$ için $U = U_1 \cap U_2$ olsun. Diğer taraftan,

$$\alpha = hg(\sigma(t)) + (1-h)g(s) \quad \text{ve} \quad \beta = hg(\sigma(t)) + (1-h)g(t)$$

eşitliklerini dikkate alınsın. Aynı zamanda, ε nın seçiminden

$$|f'(\alpha) - f'(\beta)| < 1, \quad \text{yani} \quad |f'(\alpha)| < 1 + |f'(\beta)|$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{(e^f \circ g)(\sigma(t))}{(e^f \circ g)(s)}}{\{(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)}} \right|^* &= \left| \frac{\frac{(e^f \circ g)(\sigma(t))}{(e^f \circ g)(s)}}{\{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)} \int_0^1 f'(\beta) dh} \right|^* \\ &= \left| \frac{\left\{ \frac{(e^g)(\sigma(t))}{(e^g)(s)} \right\}^{\int_0^1 f'(\alpha) dh}}{\{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)} \int_0^1 f'(\beta) dh} \right|^* \\ &= \left| \frac{\left\{ \frac{(e^g)(\sigma(t))}{(e^g)(s)} \right\}^{\int_0^1 f'(\alpha) dh} \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)} \int_0^1 f'(\alpha) dh \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{-(\sigma(t)-s)} \int_0^1 f'(\alpha) dh}}{\{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)} \int_0^1 f'(\beta) dh} \right|^* \\ &= \left| \left\{ \frac{(e^g)(\sigma(t))}{(e^g)(s)\{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)}} \right\}^{\int_0^1 f'(\alpha) dh} \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{(\sigma(t)-s)} \int_0^1 (f'(\alpha) - f'(\beta)) dh \right|^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \left| \frac{(e^g)(\sigma(t))}{(e^g)(s)\{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}(\sigma(t)-s)} \right|^* \right\}^{\int_0^1 |f'(\alpha)| dh} \left\{ |(e^g)^{\Delta^*}(t)|^* \right\}^{|\sigma(t)-s| \int_0^1 |f'(\alpha)-f'(\beta)| dh} \\
&\leq \left\{ \delta^{(\sigma(t)-s)} \right\}^{\int_0^1 |f'(\alpha)| dh} \left\{ \delta |(e^g)^{\Delta^*}(t)|^* \right\}^{|\sigma(t)-s| \int_0^1 |f'(\alpha)-f'(\beta)| dh} \\
&\leq \delta^{\frac{|\sigma(t)-s|}{2}} \delta^{\frac{|\sigma(t)-s|}{2}} = \delta^{|\sigma(t)-s|}.
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.5. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $g(t) = t + 1$ olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilirdir. Ayrıca $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan $\sigma(t) = t + 1$ olup $\mu(t) = 1$ dir. f ve g fonksiyonun özelliklerinden

$$f'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \text{ ve } g^{\Delta}(t) = 1$$

olup

$$g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t) = t + 1 + h$$

elde edilir. Böylece

$$f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)) = f'(t + 1 + h) = -\frac{2(t + 1 + h)}{(1 + (t + 1 + h)^2)^2}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $e^f \circ g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ Δ^* -türevlenebilir ve Teorem 4.2.2.'den

$$\begin{aligned}
(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\}^{\left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)) dh \right\}} \\
&= \{(e^{t+1})^{\Delta^*}(t)\}^{\left\{ -\int_0^1 \frac{2(t+1+h)}{(1+(t+1+h)^2)^2} dh \right\}} \\
&= \left\{ \left\{ e^{\sigma(t)+1-(t+1)} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \right\}^{\left\{ -\int_0^1 \frac{2(t+1+h)}{(1+(t+1+h)^2)^2} dh \right\}} \\
&= \left\{ \left\{ e^{t+1+1-(t+1)} \right\}^1 \right\}^{\left\{ -\int_0^1 \frac{d(t+1+h)^2}{(1+(t+1+h)^2)^2} \right\}} \\
&= \frac{1}{e^{(1+(t+1+h)^2)^2}} \Big|_{h=0}^{h=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{1}{1+(t+2)^2} - \frac{1}{1+(t+1)^2}} \\
&= e^{\frac{(t+1)^2 - (t+2)^2}{(t^2+4t+5)(t^2+2t+3)}} = e^{\frac{-2t-3}{(t^2+4t+5)(t^2+2t+3)}}
\end{aligned}$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned}
(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) &= (e^{f(g(t))})^{\Delta^*}(t) = \left(e^{\frac{1}{1+(t+1)^2}} \right)^{\Delta^*}(t) \\
&= \left\{ e^{\frac{1}{1+(\sigma(t)+1)^2} - \frac{1}{1+(t+1)^2}} \right\}^{\frac{1}{1}} \\
&= e^{\frac{1}{1+(t+2)^2} - \frac{1}{1+(t+1)^2}} \\
&= e^{\frac{(t+1)^2 - (t+2)^2}{(t^2+4t+5)(t^2+2t+3)}} = e^{\frac{-2t-3}{(t^2+4t+5)(t^2+2t+3)}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.6. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$, $f(t) = \sin t$, $g(t) = t^2 + 1$ olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilirdir. Ayrıca $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ olduğundan $\sigma(t) = 2t$ olup $\mu(t) = t$ dir. f ve g fonksiyonun özelliklerinden

$$f'(t) = \cos t \quad \text{ve} \quad g^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = 2t + t = 3t$$

olup

$$g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t) = t^2 + 1 + ht(3t) = t^2 + 1 + 3t^2h$$

elde edilir. Böylece

$$f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)) = \cos(t^2 + 1 + 3t^2h)$$

bulunur.

Diğer taraftan, $e^f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ Δ^* -türevlenebilir ve Teorem 4.2.2.'den

$$\begin{aligned}
(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\} \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)) dh \right\} \\
&= \left\{ (e^{t^2+1})^{\Delta^*}(t) \right\} \left\{ \int_0^1 \cos(t^2+1+3t^2h) dh \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ e^{\sigma(t)^2+1-(t^2+1)} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \left\{ \int_0^1 \cos(t^2+1+3t^2h) dh \right\} \\
&= \left\{ e^{3t} \right\}^{\left\{ \frac{1}{3t^2} \int_0^1 \cos(t^2+1+3t^2h) d(t^2+1+3t^2h) \right\}} \\
&= e^{\frac{1}{t} \sin(t^2+1+3t^2h)} \Big|_{h=0}^{h=1} \\
&= e^{\frac{1}{t} (\sin(4t^2+1) - \sin(t^2+1))} = e^{\frac{2}{t} \sin \frac{3t^2}{2} \cos \left(\frac{5t^2}{2} + 1 \right)}
\end{aligned}$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned}
(e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) &= (e^{f(g(t))})^{\Delta^*}(t) = (e^{\sin(t^2+1)})^{\Delta^*}(t) \\
&= \left\{ e^{\sin(\sigma(t)^2+1) - \sin(t^2+1)} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \\
&= \left\{ e^{\sin(4t^2+1) - \sin(t^2+1)} \right\}^{\frac{1}{t}} \\
&= e^{\frac{1}{t} (\sin(4t^2+1) - \sin(t^2+1))} = e^{\frac{2}{t} \sin \frac{3t^2}{2} \cos \left(\frac{5t^2}{2} + 1 \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.7. $\mathbb{T} = 3^{\mathbb{N}_0}$, $f(t) = \log(1+t^2)$, $g(t) = t^3 - 2t$ olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilirdir. Ayrıca $\mathbb{T} = 3^{\mathbb{N}_0}$ olduğundan $\sigma(t) = 3t$ olup $\mu(t) = 2t$ dir. f ve g fonksiyonun özelliklerinden

$$f'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ ve } g^{\Delta}(t) = (\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2 - 2 = 13t^2 - 2$$

olup

$$g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t) = t^3 - 2t + h2t(13t^2 - 2) = t^3 - 2t + (26t^3 - 4t)h$$

elde edilir. Böylece

$$f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)) = 2 \frac{t^3 - 2t + (26t^3 - 4t)h}{1 + (t^3 - 2t + (26t^3 - 4t)h)^2}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $e^f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ Δ^* -türevlenebilir ve Teorem 4.2.2.'den

$$\begin{aligned}
(e^f og)^{\Delta^*}(t) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\} \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)) dh \right\} \\
&= \{(e^{t^3-2t})^{\Delta^*}(t)\} \left\{ 2 \int_0^1 \frac{t^3-2t+(26t^3-4t)h}{1+(t^3-2t+(26t^3-4t)h)^2} dh \right\} \\
&= \left\{ \{e^{\sigma(t)^3-2\sigma(t)-(t^3-2t)}\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \right\} \left\{ 2 \int_0^1 \frac{t^3-2t+(26t^3-4t)h}{1+(t^3-2t+(26t^3-4t)h)^2} dh \right\} \\
&= \left\{ \{e^{26t^3-4t}\}^{\frac{1}{2t}} \right\} \left\{ \int_0^1 \frac{d(1+(t^3-2t+(26t^3-4t)h)^2)}{1+(t^3-2t+(26t^3-4t)h)^2} \right\} \\
&= \{e^{13t^2-2}\}^{\frac{1}{26t^3-4t}} \log(1+(t^3-2t+(26t^3-4t)h)^2) \Big|_{h=0}^{h=1} \\
&= e^{\frac{1}{2t} \log(1+(t^3-2t+(26t^3-4t)h)^2) \Big|_{h=0}^{h=1}} = e^{\frac{1}{2t} \log \frac{1+(27t^3-6t)^2}{1+(t^3-2t)^2}}
\end{aligned}$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned}
(e^f og)^{\Delta^*}(t) &= (e^{f(g(t))})^{\Delta^*}(t) = (e^{\log(1+g(t)^2)})^{\Delta^*}(t) \\
&= (e^{\log(1+(t^3-2t)^2)})^{\Delta^*}(t) \\
&= \left\{ e^{\log(1+(\sigma(t)^3-2\sigma(t))^2) - \log(1+(t^3-2t)^2)} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \\
&= \left\{ e^{\log(1+(27t^3-6t)^2) - \log(1+(t^3-2t)^2)} \right\}^{\frac{1}{2t}} \\
&= e^{\frac{1}{2t} \log \frac{1+(27t^3-6t)^2}{1+(t^3-2t)^2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.8. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = \cos t$, $g(t) = t^2 + t$ olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ^* -türevlenebilirdir. Ayrıca $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan $\sigma(t) = t + 1$ olup $\mu(t) = 1$ dir. f ve g fonksiyonun özelliklerinden

$$f'(t) = -\sin t \quad \text{ve} \quad g^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t + 1 = 2t + 2$$

olup

$$g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t) = t^2 + t + h(2t + 2)$$

elde edilir. Böylece

$$f'(g(t) + h\mu(t)g^A(t)) = -\sin(t^2 + t + h(2t+2))$$

bulunur.

Diğer taraftan, $e^f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ Δ^* -türevlenebilir ve Teorem 4.2.2.'den

$$\begin{aligned} (e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) &= \{(e^g)^{\Delta^*}(t)\} \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^A(t)) dh \right\} \\ &= \{(e^{t^2+t})^{\Delta^*}(t)\} \left\{ -\int_0^1 \sin(t^2+t+h(2t+2)) dh \right\} \\ &= \left\{ \left\{ e^{\sigma(t)^2+\sigma(t)-(t^2+t)} \right\}^{\frac{1}{1}} \right\} \left\{ -\int_0^1 \sin(t^2+t+h(2t+2)) dh \right\} \\ &= \{e^{(t+1)^2+t+1-(t^2+t)}\} \left\{ -\int_0^1 \sin(t^2+t+h(2t+2)) dh \right\} \\ &= \{e^{2t+2}\}^{\frac{1}{2t+2}} \cos(t^2+t+h(2t+2)) \Big|_{h=0}^{h=1} \\ &= e^{\cos(t^2+3t+2)-\cos(t^2+t)} = e^{-2 \sin(t+1) \sin((t+1)^2)} \end{aligned}$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned} (e^f \circ g)^{\Delta^*}(t) &= (e^{f(g(t))})^{\Delta^*}(t) = (e^{\cos g(t)})^{\Delta^*}(t) \\ &= (e^{\cos(t^2+t)})^{\Delta^*}(t) \\ &= \left\{ e^{\cos(\sigma(t)^2+\sigma(t))-\cos(t^2+t)} \right\}^{\frac{1}{\mu(t)}} \\ &= e^{\cos(t^2+3t+2)-\cos(t^2+t)} \\ &= e^{-2 \sin(t+1) \sin((t+1)^2)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. (Zincir Kuralı) Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu kesin artan ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Ayrıca, $g: \tilde{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olsun. $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $f^{\Delta}(t)$ ve $(e^g)^{\tilde{\Delta}^*} \circ f$ varsa, o zaman

$$(e^g \circ f)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\tilde{\Delta}^*} \circ f\}^{f^{\Delta}}(t)$$

dır. Burada; $\tilde{\Delta}^*, \tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ üzerindeki Δ^* -türevi göstermektedir.

İspat: Teorem 4.2.2.'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek 4.2.9. $\mathbb{T} = \{2^{2n} : n \in \mathbb{N}_0\}$, $f(t) = t^2$, $g(t) = t^2 + 1$ olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ kesin artan ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T}) = \{2^{4n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ bir zaman skalasıdır. $t \in \mathbb{T}$, $t = 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{2^{2l} : 2^{2l} > 2^{2n}, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{2n+2} = 4t$$

ve $t \in \tilde{\mathbb{T}}$, $t = 2^{4n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\tilde{\sigma}(t) = \inf\{2^{4l} : 2^{4l} > 2^{4n}, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{4n+4} = 16t$$

dir. $t \in \mathbb{T}$ için

$$(e^g \circ f)(t) = e^{g(f(t))} = e^{(f(t))^2 + 1} = e^{t^4 + 1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (e^g \circ f)^{\Delta^*}(t) &= (e^{t^4 + 1})^{\Delta^*}(t) = \left\{ e^{(g \circ f)(\sigma(t)) - (g \circ f)(t)} \right\}^{\frac{1}{\sigma(t) - t}} \\ &= \left\{ e^{((\sigma(t))^4 + 1) - (t^4 + 1)} \right\}^{\frac{1}{3t}} \\ &= \left\{ e^{((4t)^4 + 1) - (t^4 + 1)} \right\}^{\frac{1}{3t}} = e^{85t^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = 5t$$

bulunur. Diğer taraftan, $t \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} (\{e^g\}^{\tilde{\Delta}^*} \circ f)(t) &= (e^{g(t)})^{\tilde{\Delta}^*}(f(t)) = \left\{ e^{g(\tilde{\sigma}(t)) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{\tilde{\sigma}(t) - t}} \Big|_{f(t)} \\ &= \left\{ e^{g(16t) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{15t}} \Big|_{f(t)} \\ &= \left\{ e^{((16t)^2 + 1) - (t^2 + 1)} \right\}^{\frac{1}{15t}} \Big|_{t^2} = e^{17t^2} \end{aligned}$$

olup

$$\{(e^g)^{\tilde{A}^*} of\}^{f^{\Delta}} = \{e^{17t^2}\}^{5t} = e^{85t^3}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$(e^g of)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\tilde{A}^*} of\}^{f^{\Delta}}(t)$$

bulunur.

Örnek 4.2.10. $\mathbb{T} = \{n+1: n \in \mathbb{N}_0\}$, $f(t) = t^2$, $g(t) = t$ olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ kesin artan ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T}) = \{(n+1)^2: n \in \mathbb{N}_0\}$ bir zaman skalasıdır. $t \in \mathbb{T}$, $t = n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\sigma(t) = \inf\{l+1: l+1 > n+1, l \in \mathbb{N}_0\} = n+2 = t+1$$

ve $t \in \tilde{\mathbb{T}}$, $t = (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(t) &= \{(l+1)^2: (l+1)^2 > (n+1)^2, l \in \mathbb{N}_0\} = (n+2)^2 \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = t + 2\sqrt{t} + 1 \end{aligned}$$

dir. $t \in \mathbb{T}$ için

$$(e^g of)(t) = e^{g(f(t))} = e^{f(t)} = e^{t^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (e^g of)^{\Delta^*}(t) &= (e^{t^2})^{\Delta^*}(t) = \{e^{(g of)(\sigma(t)) - (g of)(t)}\}^{\frac{1}{\sigma(t) - t}} \\ &= \{e^{((t+1)^2) - (t^2)}\}^{\frac{1}{t+1-t}} \\ &= e^{2t+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = t+1 + t = 2t+1$$

bulunur. Diğer taraftan, $t \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
(\{e^g\}^{\tilde{\Delta}^*} of)(t) &= (e^{g(t)})^{\tilde{\Delta}^*}(f(t)) = \left\{ e^{g(\tilde{\sigma}(t)) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{\tilde{\sigma}(t) - t}} \Big|_{f(t)} \\
&= \left\{ e^{g(t+2\sqrt{t}+1) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{t+2\sqrt{t}+1-t}} \Big|_{f(t)} \\
&= \left\{ e^{t+2\sqrt{t}+1-t} \right\}^{\frac{1}{2\sqrt{t}+1}} \Big|_{t^2} = e
\end{aligned}$$

olup

$$\{(e^g)^{\tilde{\Delta}^*} of\}^{f^{\Delta}} = \{e\}^{2t+1} = e^{2t+1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$(e^g of)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\tilde{\Delta}^*} of\}^{f^{\Delta}}(t)$$

bulunur.

Örnek 4.2.11. $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $f(t) = t$, $g(t) = t^2$ olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ kesin artan ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T}) = \{2^n : n \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{T}$ bir zaman skalasıdır. $t \in \mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}}$, $t = 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\sigma(t) = \tilde{\sigma}(t) = \inf\{2^l : 2^l > 2^n, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{n+1} = 2t$$

dir. $t \in \mathbb{T}$ için

$$(e^g of)(t) = e^{g(f(t))} = e^{(f(t))^2} = e^{t^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(e^g of)^{\Delta^*}(t) &= (e^{t^2})^{\Delta^*}(t) = \left\{ e^{(g of)(\sigma(t)) - (g of)(t)} \right\}^{\frac{1}{\sigma(t) - t}} \\
&= \left\{ e^{((2t)^2) - (t^2)} \right\}^{\frac{1}{2t - t}} \\
&= e^{3t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t) = 1$$

bulunur. Diğer taraftan, $t \in \mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} (\{e^g\}^{\tilde{\Delta}^*} of)(t) &= (e^{g(t)})^{\tilde{\Delta}^*} (f(t)) = \left\{ e^{g(\tilde{\sigma}(t)) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{\tilde{\sigma}(t) - t}} \Big|_{f(t)} \\ &= \left\{ e^{g(2t) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{t}} \Big|_{f(t)} \\ &= \left\{ e^{(2t)^2 - t^2} \right\}^{\frac{1}{t}} \Big|_t = e^{3t} \end{aligned}$$

olup $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$(e^g of)^{\Delta^*}(t) = \{(e^g)^{\tilde{\Delta}^*} of\}^{f^{\Delta}}(t)$$

bulunur.

Örnek 4.2.12. $\mathbb{T} = \{2^{3n} : n \in \mathbb{N}_0\}$, $f(t) = t^2$, $g(t) = t$ olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ kesin artan ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T}) = \{2^{6n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ bir zaman skalasıdır. $t \in \mathbb{T}$, $t = 2^{3n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{2^{3l} : 2^{3l} > 2^{3n}, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{3n+3} = 8t$$

ve $t \in \tilde{\mathbb{T}}$, $t = 2^{6n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\tilde{\sigma}(t) = \inf\{2^{6l} : 2^{6l} > 2^{6n}, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{6n+6} = 64t$$

dir. $t \in \mathbb{T}$ için

$$(e^g of)(t) = e^{g(f(t))} = e^{f(t)} = e^{t^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (e^g of)^{\Delta^*}(t) &= (e^{t^2})^{\Delta^*}(t) = \left\{ e^{(g of)(\sigma(t)) - (g of)(t)} \right\}^{\frac{1}{\sigma(t) - t}} \\ &= \left\{ e^{(\sigma(t))^2 - t^2} \right\}^{\frac{1}{7t}} \\ &= \left\{ e^{(8t)^2 - t^2} \right\}^{\frac{1}{7t}} = e^{9t} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\Delta(t) = \sigma(t) + t = 9t$$

bulunur. Diğer taraftan, $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} (\{e^g\}^{\tilde{\Delta}^*} of)(t) &= (e^{g(t)})^{\tilde{\Delta}^*}(f(t)) = \left\{ e^{g(\tilde{\sigma}(t)) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{\tilde{\sigma}(t) - t}} \Big|_{f(t)} \\ &= \left\{ e^{g(64t) - g(t)} \right\}^{\frac{1}{63t}} \Big|_{f(t)} \\ &= \left\{ e^{64t - t} \right\}^{\frac{1}{63t}} \Big|_{t^2} = e \end{aligned}$$

olup

$$\{ (e^g)^{\tilde{\Delta}^*} of \}^{f^\Delta} = \{e\}^{9t} = e^{9t}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$(e^g of)^{\Delta^*}(t) = \{ (e^g)^{\tilde{\Delta}^*} of \}^{f^\Delta}(t)$$

bulunur.

4.2.2. Ters Fonksiyonun Çarpımsal Delta Türevi ve Uygulamaları

Teorem 4.2.4. Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu kesin artan ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $f^\Delta(t) \neq 0$ olacak şekilde her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$\left((e^{f^{-1}})^{\tilde{\Delta}^*} of \right)(t) = e^{\frac{1}{f^\Delta(t)}}$$

bulunur.

İspat: $g = f^{-1}: \tilde{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{T}$ alınırsa teorem 4.2.3 ten ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.13. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olsun. O halde $\sigma(t) = t + 1$ ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu kesin artandır. Ayrıca

$$f^\Delta(t) = \sigma(t) + t = 2t + 1$$

bulunur. Buradan

$$\left((e^{f^{-1}})^{\tilde{\Delta}^*} of \right)(t) = e^{\frac{1}{2t+1}}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.14. $\mathbb{T} = \{2^{n^2} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ve $f(t) = t^3$ olsun. O halde $t = 2^{n^2}, n \in \mathbb{N}_0, n = (\log_2 t)^{\frac{1}{2}}$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{2^{l^2} : 2^{l^2} > 2^{n^2}, l \in \mathbb{N}_0\} = 2^{(n+1)^2} = 2^{n^2} 2^{2n+1} = t 2^{2(\log_2 t)^{\frac{1}{2}+1}}$$

dır ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu kesin artandır. Ayrıca

$$f^\Delta(t) = (\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2 = t^2 2^{4(\log_2 t)^{\frac{1}{2}+2}} + t^2 2^{2(\log_2 t)^{\frac{1}{2}+1}} + t^2$$

bulunur. Buradan

$$\left((e^{f^{-1}})^{\tilde{\Delta}^*} of \right)(t) = e^{\frac{1}{t^2 2^{4(\log_2 t)^{\frac{1}{2}+2}} + t^2 2^{2(\log_2 t)^{\frac{1}{2}+1}} + t^2}}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.15. $\mathbb{T} = \{n + 5 : n \in \mathbb{N}_0\}$ ve $f(t) = t^2 + t$ olsun. O halde $t = n + 5, n \in \mathbb{N}_0, n = t - 5$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{l + 5 : l + 5 > n + 5, l \in \mathbb{N}_0\} = n + 6 = n + 5 + 1 = t + 1$$

dır ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu kesin artandır. Ayrıca

$$f^\Delta(t) = \sigma(t) + t + 1 = t + 1 + t + 1 = 2t + 2$$

bulunur. Buradan

$$\left((e^{f^{-1}})^{\tilde{d}^*} of \right) (t) = e^{\frac{1}{2t+2}}$$

elde edilir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Zaman skalası teorisinin temel kavramlarından biri olan Δ -türev kavramı, çarpımsal analiz teknikleri kullanılarak yeniden tanımlanan Δ^* -türev kavramı ele alınmıştır ve özellikleri detaylıca incelenmiştir. Bu tez çalışmasında ise bu türev yardımıyla zaman skalası üzerinde tanımlanmış zincir kuralları çarpımsal analizde yeniden kurulmuştur. Buna ek olarak, keyfi bir zaman skalasında tanımlı bir fonksiyonun tersinin çarpımsal türevi tanımlanmıştır. Bu kavramların özellikleri detaylıca incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P. and Bohner, M. (1998). "Quadratic functionals for second order matrix equations on time scales." *Nonlinear Analysis*, Vol. 33, No. 7, pp. 675-692.
- Agarwal, R. P. and Bohner, M. (1999). "Basic calculus on time scales and some of its applications." *Results in Mathematics*, Vol. 35, No.1, pp. 3-22.
- Agarwal, R. P., Bohner, M. and O'Regan, D. (2002). "Time scale boundary value problems on infinite intervals." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 141, No. 1-2, pp. 27-34.
- Agarwal, R., Bohner, M. and Peterson, A. (2001). "Inequalities on time scales: a survey." *Mathematical Inequalities and Applications*, Vol. 4, pp. 535-558.
- Amster, P., De Nápoli, P. and Pinasco, J. P. (2009). "Detailed asymptotic of eigenvalues on time scales." *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 15, No. 3, pp. 225-231.
- Anderson, D. R. and Bohner, M. (2021). "A multivalued logarithm on time scales." *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 397, No. 125954, pp. 1-13.
- Bardi, J. S. (2006). *The Calculus Wars Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time*. New York: Thunder's Mouth Press. ISBN 1-56025-706-7.
- Bashirov, A. (2013). "On line and double multiplicative integrals." *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics*, Vol. 3, No. 1, pp. 103-107.
- Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. and Özyapıcı, A. (2011). "On modeling with multiplicative differential equations." *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, Vol. 26, No. 4, pp. 425-438.
- Bashirov, A. and Riza, M. (2011). "On complex multiplicative differentiation." *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics*, Vol. 1, No. 1, pp. 75-85.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. and Özyapıcı, A. (2008). "Multiplicative calculus and its applications." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 337, No.1, pp. 36-48.
- Bohner, M. and Georgiev, S. G. (2016). *Multivariable dynamic calculus on time scales*. Cham: Springer.
- Bohner, M. and Guseinov, G. S. (2007). "Double integral calculus of variations on time scales." *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 54, No. 1, pp. 45-57.

Bohner, M. and Peterson, A. (2001). Dynamic equations on time scales: An introduction with applications, Birkhäuser Boston, MA, Springer Science and Business Media. New York, USA.

Bohner, M. and Peterson, A. (2003). Advances in dynamic equations on time scales. Birkhäuser Boston. Inc., Boston, MA, Springer Science+Business Media New York, USA.

Boruah, K. and Hazarika, B. (2018). “G-calculus.” TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, Vol. 8, No. 1, pp. 94-105.

Boyer, C. B. (1959). The History of the calculus and its conceptual development. New York: Dover. OCLC 643872.

Campbell, D. (1999). “Multiplicative calculus and student Projects.” Projects, Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, Vol. 9, No. 4, pp. 327-332.

Córdova-Lepe, F. (2006). The Multiplicative Derivative As a Measure of Elasticity in Economics. Theaeteto Atheniensi Mathematica, 2.

Córdova-Lepe, F. and Pinto, M. (2009). From Quotient Operation Toward a Proportional Calculus. Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra.

Çakmak, A. F. (2014). Yeni bir cisim üzerindeki dizi uzayları. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

Çakmak, A. F. and Başar, F. (2012). “Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus.” Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2012, No. 228, pp. 1-17.

Çakmak, A. F. and Başar, F. (2015). “Some Sequence Spaces and Matrix Transformations in Multiplicative Sense.” Journal of Inequalities and Applications, Vol. 6, pp. 27-37.

Erdoğan, M. (2016). Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, Türkiye.

Filip, D. and Piatecki, C. (2014a). “A Non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth.” Universited Orleans (UO), FRA, Mathematica Aeterna, 10.

Filip, D. and Piatecki, C. (2014b) “In defense of a non-newtonian economic analysis.”

Florack, L. and Van Assen, H. (2012). “Multiplicative calculus in biomedical image analysis.” Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol. 42, pp. 64-75.

Goktas, S., Yilmaz, E. and Yar, A. C. (2022). “Multiplicative derivative and its basic properties on time

scales.” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 45, No. 4, pp. 2097-2109.

Grossman, M. (1979). “An introduction to non-Newtonian calculus.” *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, Vol. 10, No. 4, pp. 525-528.

Grossman, M. and Katz, R. (1972) *Non-Newtonian Calculus*. Pigeon Cove, Massachusetts.

Guseinov, G. S. (2003). “Integration on time scales.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 285, No. 1, pp. 107-127.

Guseinov, G. S. and Kaymakçalan, B. (2002). “Basics of riemann delta and nabla integration on time scales.” *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 8, No. 11, pp. 1001-1017.

Gürefe, Y. (2009). Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, Türkiye.

Gürefe, Y. (2013). Multiplikatif diferansiyel denklemler ve uygulamaları üzerine. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, Türkiye.

Hilger, S. (1988). “Ein maßkettenkalkül mit anwendung auf zentrumsmanigfaltigkeiten.” PhD Thesis, Universität Würzburg, Germany.

Hilger, S. (1990). “Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus.” *Results in Mathematics*, Vol. 18, No. 1, pp. 18-56.

Hilscher, R. and Zeidan, V. (2004). “Calculus of variations on time scales: weak local piecewise C_{rd}^1 solutions with variable endpoints.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 289, No. 1, pp. 143-166.

Hoffmann, L. D. and Bradley, G. L. (2004). *Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences* (8th ed.). Boston: McGraw Hill.

Kadak, U. (2015). Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye.

Kadak, U. and Efe, H. (2014). “The Construction of hilbert spaces over the Non-Newtonian Field.” *International Journal of Analysis*, Vol. 2014, pp. 1-10.

Kaymakçalan, B., Lakshmikantham, V. and Sivasundaram, S. (1996). “Dynamical systems on measure chains.” *Springer Science and Business Media*, Vol. 370.

Misirli, E. and Ozyapici, A. (2009). "Exponential approximations on multiplicative calculus." In Proc. Jangjeon Math. Soc, Vol. 12, No. 2, pp. 227-236.

Nagle, R. K., Saff, E. B. and Snider, A. D. (2014). Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems (pp. I-II). Pearson Education.

Özyapıcı, A. (2009). Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, Türkiye.

Özyapıcı, A., Riza, M., Bilgehan, B. and Bashirov, A. E. (2014). "On multiplicative and Volterra minimization methods." Numerical Algorithms, Vol. 67, No. 3, pp. 623-636.

Stanley, D. (1999). "A multiplicative calculus." Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, Vol. 9, pp. 310-326.

Türkmen, C. and Başar, F. (2012). "Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus." First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (AIP Conference Proceedings/ Mathematical and Statistical Physics), 1470, pp. 95-98.

Volterra, V. and Hostinsky, B. (1938). Operations Infinitesimales Lineares. Gauthier-Villars, Paris

Yavuz Sari, H. (2021). Newtonyen olmayan üreteç fonksiyonları ve uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, Türkiye.

Yener, G. (2016) Çarpımsal analizin q -genişlemesi: q -çarpımsal analiz ve uygulamaları. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

Yener, G. and Emiroglu, I. (2015). "A Q-analogue of the multiplicative calculus: Q-multiplicative calculus." Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, Vol. 8, pp. 1435-1450.