



**İYİ HALKALAR ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seher Cansu SERTTEN

Danışman

Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT 2024

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İYİ HALKALAR ÜZERİNE**

**Seher Cansu SERTTEN**

**Danışman**

**Prof. Dr. Muhittin BAŞER**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ŞUBAT 2024**

## TEZ ONAY SAYFASI

Seher Cansu SERTTEN tarafından hazırlanan “İyi Halkalar Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 06/02/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Muhittin BAŞER

**Başkan** : Prof. Dr. Nesip AKTAN  
Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fak.

**Üye** : Prof. Dr. Muhittin BAŞER  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.

**Üye** : Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

...../...../.....tarih ve

.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Bekir YALÇIN

Enstitü Müdürü

## BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

### Afyon Kocatepe Üniversitesi

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**06/02/2024**

Seher Cansu SERTTEN

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### İYİ HALKALAR ÜZERİNE

Seher Cansu SERTTEN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır ikinci bölümde, çalışmamız için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümün birinci kısmında iyi elemanlar ve iyi halkaların temel özellikleri incelenmiştir. İkinci kısmında ise iyi halkalar üzerine kurulan matris halkalarının iyi halka olup olmadığı araştırılmıştır. Üçüncü bölümün son kısmı iyi halka olma özelliğinin Morita değişmez olup olmadığına ayrılmıştır.

**2024, v + 40 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Birimseller, üstel sıfırlar, matris halkaları, basit halkalar, temiz halkalar, iyi halkalar, UU halkalar.

## **ABSTRACT**

M.Sc. Thesis

### **ON FINE RINGS**

Seher Cansu SERTTEN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of mathematics

**Supervisor:** Prof. Muhittin BAŞER

This thesis consist of three main chapters. The first chapter is devoted the introduction. The second chapter introduces with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be required for later use. The first part of third chapter introduces fine elements, fine rings and their basic properties. Second part, it has been investigated whether the matrix rings over fine rings are fine or not. The finally section of third chapter is devoted to whether the notion of a fine ring is Morita invariant.

**2024, v + 40 pages**

**Keywords:** Units, Nilpotents, Matrix Rings, Simple Rings, Clean Rings, Fine Rings, UU Rings.

## TEŐEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel alışmaların ynlendirilmesi, sonuların değerlendirilmesi, yazımı aşamasında yapmış olduğu byk katkılarında ve bu alışmanın gerekleşmesinde iki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı nemi asla unutamayacağım saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Muhittin BAŞER'e araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen değerli vaktinden feragat eden Sayın Doç. Dr. Fatma Kaynarca'ya çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli arkadaşım Elif Derya olaka' ya her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma teŐekkür ederim.

Beni bu günlere saygı ve sevgi kelimelerinin anlamlarını bilecek Şekilde yetiştiren ve bu çalışma boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen hayattaki en büyük Őansım olan aileme teŐekkürü borç bilirim.

Seher Cansu SERTTEN

Afyonkarahisar 2024

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .....	i
ABSTRACT... ..	ii
TEŞEKKÜRLER.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ. ....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Halkalar, Alt halkalar ve İdealler .....	3
2.2 Matris Halkaları .....	9
3. İYİ HALKALAR.....	11
3.1 Bir Halkanın İyi Elemanları ve İyi Halkaların Temel Özellikleri.....	11
3.2 İyi Halkalar Üzerine Kurulan Matris Halkaları.....	22
3.3 İyi Halka Olma Özelliği Morita Değişmez midir? .....	28
3.4 $2 \times 2$ Tipindeki İyi ve Temiz Matrisler .....	32
4. KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	40

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

---

$U(R)$	$R$ halkasının tüm birimsellerinin kümesi
$\text{idem}(R)$	$R$ halkasının tüm eşkare elemanlarının kümesi
$\text{nil}(R)$	$R$ halkasının tüm üstel sıfır elemanlarının kümesi
$\Phi(R)$	$R$ halkasının iyi ayrışımının kümesi
$\mathbb{F}$	Cisim
$M(R)$	$R$ halkasının merkezi
$\text{tr}(A)$	Bir $A$ matrisinin izi
$\text{rad}(R)$	$R$ halkasının Jacobson radikali
$M_n(R)$	$R$ üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası

## 1. GİRİŞ

$R$  birimli bir halka olmak üzere,  $R$  halkasının tüm birimsellerinin kümesi  $U(R)$ , tüm eşkare elemanlarının kümesi  $\text{idem}(R)$  ve tüm üstel sıfır elemanlarının kümesi de  $\text{nil}(R)$  ile gösterilir. Halka teorisi çalışan birçok araştırmacı bir halkanın bu üç özel alt kümesini kullanarak halkaların bazı sınıflandırmalarını yapmışlardır. Nicholson (1977) çalışmasında  $U(R)$  ve  $\text{idem}(R)$  alt kümelerini kullanarak temiz halka tanımını verirken, Diesl (2013) ise çalışmasında  $\text{idem}(R)$  ve  $\text{nil}(R)$  alt kümelerini kullanarak sıfır temiz halka kavramını tanıtmıştır. Bu sınıflandırmaların detaylarını çalışmamız içinde vereceğiz.

Bizde çalışmamızda, bir halkanın yukarıdaki üç özel alt kümesinden ikisini kullanarak yapılabilecek üçüncü ve son olası sınıflandırmayı Călugăreanu (2016) nın çalışması referans alınacaktır. Şimdi çalışmamız hakkında daha detaylı bilgi verelim.

$R$  birimli bir halka olmak üzere, Nicholson (1977) de bir  $a \in R$  için  $a = e + u$  şeklinde bir  $e \in \text{idem}(R)$  ve  $u \in U(R)$  varsa, bu durumda  $a \in R$  yi bir temiz eleman olarak adlandırmıştır. Eğer bir  $R$  halkasının her elemanı temiz ise, bu durumda  $R$  halkasına temiz halka (clean ring) denir. Diğer taraftan Diesl (2013) de bir  $a \in R$  için  $a = e + t$  olacak şekilde bir  $e \in \text{idem}(R)$  ve bir  $t \in \text{nil}(R)$  varsa, bu durumda  $a \in R$  yi sıfır temiz (nil-clean) olarak adlandırılmıştır. Eğer bir  $R$  halkasının her elemanı sıfır temiz ise, bu durumda  $R$  halkasına sıfır temiz halka (nil clean ring) denir. Her sıfır-temiz halkanın bir temiz halka olduğunu görmek kolaydır. Fakat bunun tersinin doğru olmadığını (Diesl 2013, Önerme 3.4) den görebiliriz. Çalışmamızda, yukarıda bahsedilen üçüncü olası durum için,  $0 \neq a \in R$  olmak üzere eğer,  $a = u + t$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve bir  $t \in \text{nil}(R)$  varsa, bu durumda  $a$  bir iyi (fine) eleman olarak adlandırılacaktır.  $a = u + t$  formundaki herhangi bir denklem  $a \in R \setminus (0)$  in bir iyi ayrışımı (fine decomposition) olarak adlandırılır.  $R \setminus (0)$  daki tüm iyi elemanların kümesi  $\Phi(R)$  ile gösterilir. Eğer  $0 = u + t, u \in U(R), t \in \text{nil}(R)$  olacak şekilde bir denklem varsa, bu durumda  $u = -t$  olur ki, bu ise  $R = 0$  olması anlamına gelir. Biz aksi belirtilmedikçe çalışılan halkaların sıfır halkalardan farklı olduğunu kabul ettiğimizden  $0 \notin \Phi(R)$  olmalıdır.

Sıfırdan farklı bir  $R$  halkası için eğer  $R \setminus (0) = \Phi(R)$  oluyor ise, bu durumda  $R$  halkası bir iyi halka (fine ring) olarak adlandırılır. Açık olarak herhangi bir bölümlü halka bir iyi halkadır. Diğer taraftan indirgenmiş (reduced) iyi halkalar bölümlü halkadır.

Çalışmamızda iyi halkaların sınıfı ile sıfır-temiz halkaların sınıfının oldukça farklı olduğunu göreceğiz. Ayrıca iyi halkaların çok özel bir özelliğinin de her zaman basit halkalar olduğunu göreceğiz. Fakat, tüm basit halkalar iyi halka değildir. Böylece iyi halkalar, basit halkaların yeni bir alt sınıfıdır. Basit halka üzerindeki matris halkalarının da basit olduğu iyi bilinen bir gerçektir (Lam 2001, Teorem 3.1). Bu gerçeğin ışığı altında iyi halkalar üzerine kurulan matris halkalarının da bir iyi halka olup olmadığını sormak oldukça doğaldır. Biz çalışmamızda bu soruya cevap arayacağız.

$\mathcal{P}$  bir halka özelliği olmak üzere, eğer bir  $R$  halkası  $\mathcal{P}$  özelliğine sahip olduğunda, her  $e$  tam eşkare elemanı için  $eRe$  halkası ve her  $n$  pozitif tamsayısı için  $M_n(R)$  halkası da  $\mathcal{P}$  özelliğine sahip oluyorsa bu durumda  $\mathcal{P}$  özelliğine *Morita Değişmez (Morita İnvaryant)* özellik denir.

Bu çalışmada "iyi halka olma özelliğinin" Morita değişmez özellik olup olmadığını da araştıracağız. Çalışmamızın temel bölümünü oluşturan üçüncü bölümdeki tüm sonuç ve ispatlar Călugăreanu ve Lam (2016) dan alınmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlar ve sonuçlar verilecektir. Bu kavramların çoğu, kaynaklar kısmında verdiğimiz çalışmalarda olmakla birlikte tanım ve kavramların çoğu literatürdeki kitapların tamamında bulunmaktadır.

### 2.1 Halkalar, Alt halkalar ve İdealler

**Tanım 2.1.1**  $R$  boştan farklı bir küme olmak üzere ve  $R$  de tanımlı iki ikili işlem "+" toplama ve "." çarpma olsun. Eğer;

- (i)  $(R, +)$  bir değişmeli grup,
- (ii) Her  $a, b, c \in R$  için  $(ab)c = a(bc)$ ,
- (iii) Her  $a, b, c \in R$  için  $a(b + c) = ab + ac$  ve  $(a + b)c = ac + bc$

oluyorsa, bu durumda  $R$  ye yukarıda verilen ikili işlemlere göre bir *halka* denir.  $R$  bir halka olmak üzere eğer, her  $a, b \in R$  için  $ab = ba$  oluyorsa  $R$  ye *değişmeli halka* denir. Eğer her  $a \in R$  için  $a1_R = 1_R a = a$  olacak şekilde bir  $1_R \in R$  varsa, bu durumda  $R$  ye *birimli bir halka* ve  $1_R$  elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve  $0_R$  veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe halkalar birimli halka olarak kabul edilecektir.

**Önerme 2.1.2**  $R$  bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Her  $a \in R$  için  $0a = a0 = 0$  dir.
- (ii) Her  $a, b \in R$  için  $(-a)b = a(-b) = -(ab)$  dir.
- (iii) Her  $a, b \in R$  için  $(-a)(-b) = ab$  dir.
- (iv) Her  $n \in \mathbb{Z}$  ve her  $a, b \in R$  için  $(na)b = a(nb) = n(ab)$  dir.
- (v) Her  $a_i, b_j \in R$  için  $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{j=1}^m b_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j$  dir.

**Tanım 2.1.3**  $R$  bir halka ve  $0 \neq a \in R$  olmak üzere, eğer  $ab = 0$  ( $ba = 0$ ) olacak şekilde bir  $0 \neq b \in R$  varsa, bu durumda  $a$  ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir.

**Tanım 2.1.4**  $R$  birimli bir halka olmak üzere, eğer  $R$  de hiçbir sıfır bölen yoksa, bu durumda  $R$  ye bir *bölümlü halka* (*division ring*) denir.

**Tanım 2.1.5**  $R$  bir halka ve  $0 \neq a \in R$  olmak üzere eğer  $ca = 1_R$  ( $ab = 1_R$ ) olacak şekilde bir  $c \in R$  ( $b \in R$ ) varsa, bu durumda  $a$  ya *sol tersinir (sağ tersinir)* eleman denir.  $c(b)$  elemanına  $a$  nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Eğer  $R$  nin bir elemanı hem sağ hem de sol tersinir eleman ise, bu durumda bu elemana bir *tersinir (invertible)* veya bir *birimsel (unit)* eleman denir.

Bir  $R$  halkasının tüm tersinir elemanlarının kümesi  $U(R)$  ile gösterilir ve bu  $U(R)$  kümesi halkada ki çarpma işlemine göre bir gruptur. Örneğin;  $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$  ve  $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$  şeklindedir.

**Tanım 2.1.6**  $0 \neq 1_R$  birim elemanına sahip değişmeli bir  $R$  halkasının hiçbir sıfır böleni yoksa bu halkaya bir *tamlık bölgesi (integral domain)* denir.  $0 \neq 1_R$  birim elemanına sahip değişmeli bir  $R$  halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda  $R$  halkasına bir *cisim (field)* denir. Genel olarak herhangi bir cisim  $\mathbb{F}$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.7**  $R$  bir halka ve  $a \in R$  olmak üzere, eğer  $a^n = 0$  olacak şekilde bir  $n$  doğal sayısı varsa, bu durumda  $a$  ya bir *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir. Bir  $R$  halkasının tüm üstel sıfır elemanlarının kümesi  $nil(R)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.8** Bir  $R$  halka ve  $a \in R$  olmak üzere, eğer  $a^2 = a$  oluyorsa, bu durumda  $a$  elemanına  $R$  nin bir *eşkare (idempotent) elemanı* denir.

Birimli bir halkasında  $0_R$  ve  $1_R$  aşikar eşkare elemanlardır. Bir  $R$  halkasının tüm eşkare elemanlarının kümesi  $\text{idem}(R)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.9**  $R$  bir halka ve  $e$ ;  $R$  de bir eşkare eleman olmak üzere, eğer  $ReR = R$  oluyorsa, bu durumda  $e$  ye bir *tam eşkare* ( *full idempotent* ) eleman denir.

**Örnek 2.1.10**  $R$  bir halka ve  $e \in R$  bir eşkare eleman olmak üzere;  $R$  nin

$$eRe = \{ere \mid r \in R\}$$

alt kümesi  $0 = e0_R e$  sıfırına ve  $e = e1_R e$  birimine sahip yeni bir halkadır. Bu halka  $R$  nin bir alt halkası değildir. Ayrıca  $e$  merkezi bir eşkare eleman değilse, bu durumda  $eRe$  halkası  $R$  halkasının bir homomorfik görüntüsü olmak zorunda değildir.

**Lemma 2.1.11**  $R$  bir halka olmak üzere, eğer  $U(R) \cap \text{nil}(R) \neq \emptyset$  ise, bu durumda  $R = 0$  dır.

**İspat**  $R$  bir halka olmak üzere  $U(R) \cap \text{nil}(R) \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda bir  $u \in U(R) \cap \text{nil}(R)$  vardır. Böylece  $u^n = 0$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  vardır ve  $u^{-1} \in R$  mevcuttur. Bu durumda  $1 = (u^{-1})^n u^n = 0$  elde edilir ki, bu da  $R = 0$  olduğunu gösterir. ■

**Tanım 2.1.12**  $R$  bir halka olmak üzere

$$M(R) = \{m \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } mr = rm\}$$

kümesine  $R$  halkasının *merkezi* ( *center* ) denir.

**Tanım 2.1.13** Bir  $R$  halkasının bir  $e$  eşkare elemanı aynı zamanda  $R$  nin merkezine ait ise, bu durumda  $e$  ye  $R$  nin bir *merkezil eşkare* ( *central idempotent* ) elemanı denir.

**Tanım 2.1.14**  $R$  bir halka ve  $\emptyset \neq S \subset R$  olmak üzere,  $S$  kümesi  $R$  de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer  $S$ ,  $R$  deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise, bu durumda  $S$  ye  $R$  nin bir *alt halkası* (*sub ring*) denir.

$I$ ;  $R$  nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her  $r \in R$  ve her  $x \in I$  için  $rx \in I$  oluyorsa, bu durumda  $I$  ya  $R$  nin bir *sol ideali* (*left ideal*),  $xr \in I$  oluyorsa, bu durumda da  $I$  ya  $R$  nin bir *sağ ideali* (*right ideal*) denir. Eğer  $I$  hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda  $I$  ya  $R$  nin bir *ideali* (*ideal*) denir.

**Tanım 2.1.15**  $R$  bir halka ve  $I$ ;  $R$  nin bir ideali olmak üzere, eğer  $I$  nin her elemanı üstel sıfır ise, bu durumda  $I$  ya  $R$  nin bir *sıfır ideali* (*nil ideal*) denir. Eğer  $I^n = 0$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  varsa, bu durumda  $I$  ya  $R$  nin bir *üstel sıfır ideali* (*nilpotent ideal*) denir  $I^n = 0$  olması, her  $a \in I$  için  $a^n = 0$  olmasını gerektirdiğinden, her üstel sıfır ideal bir sıfır idealdir.

**Tanım 2.1.16**  $0 \neq R$  bir halka olmak üzere, eğer  $R$  nin bir tek maksimal sol ideali veya denk olarak bir tek maksimal sağ ideali var ise, bu durumda  $R$  ye bir *yerel* (*local*) halka denir.

**Tanım 2.1.17**  $R$  bir halka ve  $M$ ;  $R$  nin bir sol ideali olsun. Eğer  $R$  nin bir sol  $I$  ideali için  $M \subset I \subset R$  olduğunda  $I = M$  veya  $I = R$  oluyorsa bu durumda  $R$  ye  $M$  nin bir *maksimal sol ideali* (*maximal left ideal*) denir.

**Tanım 2.1.18**  $R$  bir halka olmak üzere,  $R$  nin tüm maksimal sol ideallerinin arakesitine  $R$  nin *Jacobson radikali* (*Jacobson radical*) denir ve  $\text{rad}(R)$  ile gösterilir.

**Uyarı 2.1.19** Eğer  $R \neq 0$  ise, bu durumda Zorn Lemmasından dolayı  $R$  nin maksimal sol idealleri vardır ve böylece  $\text{rad}(R) \neq R$  dir. Eğer  $R = 0$  ise, bu durumda  $R$  nin maksimal sol ideali yoktur. Bu durumda  $R$  nin Jacobson radikali sıfır olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.20**  $R$  bir halka ve  $(M, +)$  bir değişmeli grup olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $R \times M \rightarrow M$ ,  $(r, m) \mapsto rm$  fonksiyonu varsa, bu durumda  $M$  ye bir *sol  $R$  – modül* denir. Her  $r, s \in R$  ve  $x, y \in M$  için;

- (i)  $r(x + y) = rx + ry$
- (ii)  $(r + s)x = rx + sx$
- (iii)  $r(sx) = (rs)x$

ve  $R$ ,  $1_R$  birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, ek olarak her  $x \in M$  için  $1_R x = x$  koşulu sağlanıyorsa, bu durumda  $M$  ye bir *birimsel sol  $R$  – modül* denir.

**Tanım 2.1.21**  $R$  ile  $S$  iki halka ve  $(M, +)$  değişmeli grubu bir sol  $R$ -modül ve bir sağ  $S$ -modül olsun. Eğer her  $r \in R$ , her  $x \in M$  ve her  $s \in S$  için  $(rx)s = r(xs)$  oluyorsa, bu durumda  $M$  ye bir sol  $R$ , sağ  $S$  – *bimodül* denir.

**Tanım 2.1.22**  $M$  bir sol  $R$  – modül ve  $N$  de  $M$  nin birtoplamsal alt grubu olmak üzere, eğer her  $r \in R$  ve her  $x \in N$  için  $rx \in N$  oluyorsa, bu durumda  $N$  ye  $M$  nin bir *sol alt modülü* denir.  $M$  bir sol  $R$  – modül olmak üzere, açık olarak  $0$  ve  $M$ ;  $M$  nin alt modülleridir.

**Tanım 2.1.23**  $0 \neq M$  bir sol  $R$  – modül olmak üzere, eğer  $M$  nin  $0$  ve  $M$  den başka alt modülü yoksa, bu durumda  $M$  ye bir *basit sol  $R$  – modül* (*simple left  $R$  – module*) denir.

**Lemma 2.1.24** (Lam 2001, (4.1) Lemma)  $R$  bir halka olmak üzere,  $y \in R$  için aşağıdaki durumlar denktir.

- (1)  $y \in \text{rad}(R)$  dir.
- (2) Herhangi bir  $x \in R$  için  $1 - xy$  sol tersinirdir.
- (3) Herhangi bir basit sol  $R$  – modül  $M$  için  $yM = 0$  dir.

**Sonuç 2.1.25**  $R$  bir halka olmak üzere,  $\text{rad}(R)$ ;  $R$  nin bir idealidir.

**Lemma 2.1.26** (Lam 2001, (4.3) Lemma)  $R$  bir halka olmak üzere,  $y \in R$  için aşağıdaki durumlar denktir.

(1)  $y \in \text{rad}(R)$  dir.

(2) Herhangi bir  $x \in R$  için  $1 - xyz \in U(R)$  dir.

**Teorem 2.1.27** (Lam 2001, (19.1) Teorem) Sıfırdan farklı bir  $R$  halkası için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(1)  $R$  bir tek maksimal sol ideale sahiptir.

(2)  $R$  bir tek maksimal sağ ideale sahiptir.

(3)  $R/\text{rad}(R)$  bir bölümlü halkadır.

(4)  $R/U(R)$ ;  $R$  nin bir idealidir.

(5)  $(R/U(R), +)$  bir gruptur.

(6) Herhangi bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $a_1 + \dots + a_n \in U(R)$  ise, bu durumda en az bir

$i \in \{1, \dots, n\}$  için  $a_i \in U(R)$  dir.

(7)  $a + b \in U(R)$  ise, bu durumda  $a \in U(R)$  veya  $b \in U(R)$  dir.

**Tanım 2.1.28**  $0 \neq R$  bir halka olmak üzere, eğer  $R$  nin  $\{0\}$  ve  $R$  den başka ideali yoksa, bu durumda  $R$  ye bir *basit halka* (*simple ring*) denir.

**Lemma 2.1.29**  $R$  bir halka olmak üzere,  $R$  nin bir basit halka olması için gerek ve yeter koşul her  $0 \neq a \in R$  için  $RaR = R$  olmasıdır.

**İspat**  $R$  bir basit halka ve  $0 \neq a \in R$  olsun. Bu durumda  $RaR$ ,  $R$  nin bir ideali,  $RaR \neq 0$  ve  $R$  bir basit halka olduğundan  $RaR = R$  olur. Tersine her  $0 \neq a \in R$  için  $RaR = R$  olsun. Kabul edelim ki  $0 \neq I$ ,  $R$  nin bir ideali olsun. Bu durumda  $0 \neq b \in I$  vardır. Kabulden  $RbR = R$  olur.

Şimdi bir  $r \in R = RbR$  için  $r = sbt$  olacak şekilde  $s, t \in R$  vardır. Böylece  $I, R$  nin bir ideali ve  $b \in I$  olduğundan  $r \in I$  olur ki buda bize  $I = R$  olduğunu verir. Sonuç olarak  $R$  bir basit halka olur. ■

**Tanım 2.1.30** Bir  $R$  halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya buna denk olarak;  $a \in R$  için;  $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$  oluyorsa, bu durumda  $R$  ye bir *inmiş halka (reduced ring)* denir.

Açık olarak her sıfır bölensiz halka bir inmiş halkadır. Örneğin  $\bar{0} \neq \bar{3} \in \mathbb{Z}_9$  için  $(\bar{3})^2 = \bar{3}\bar{3} = \bar{0}$  olduğundan  $\mathbb{Z}_9$  halkası inmiş bir halka değildir. Diğer taraftan  $0 \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olduğundan  $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  halkası bir inmiş halka değildir. Tüm cisimlerin inmiş halka olduğu açıktır.

## 2.2 Matris Halkaları

Verilen bir  $R$  halkasından yeni halkalar elde etmek mümkündür. Bunlardan en kullanışlı olanı da, bir halka üzerine kurulan matris halkasıdır.  $R$  bir halka olmak üzere,  $\mathbb{M}_n(R)$  deki matrislerin eşlenik olma ve izleri gibi tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.2.1**  $R$  bir halka ve  $a_{ij} \in R$  olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

formundaki bir elemana  $R$  üzerinde  $n \times m$  tipinde bir matris denir.  $n \times n$  tipinde bir matrise bir kare matris denir.  $i - j$  girdisi  $a_{ij} \in R$  olan bir matris  $(a_{ij})$  ile gösterilir.  $R$  üzerindeki  $n \times n$  tipindeki tüm matrislerin kümesi  $\mathbb{M}_n(R)$  ile gösterilir.  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$  olmak üzere;  $A + B = (c_{ij})$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ve  $A \cdot B = (d_{ij})$ ,  $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  şeklinde tanımlanan ikili işlemlerle birlikte  $\mathbb{M}_n(R)$  kümesi bir halka olur. Bu halkaya  $R$  halkası üzerine kurulan *matris halkası* denir.

**Tanım 2.2.2**  $R$  bir halka ve  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$  olmak üzere  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \in R$  elemanına,  $A$  matrisinin *izi (trace)* denir ve  $\text{tr}(A)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.3**  $R$  bir halka ve  $A, B \in \mathbb{M}_n(R)$  olmak üzere, eğer  $B = PAP^{-1}$  olacak şekilde tersinir bir  $P$  matrisi varsa, bu durumda  $A$  ile  $B$  matrisine *benzer (similar)* matrisler denir.

**Uyarı 2.2.4** Benzer matrislerin izleri aynıdır. Gerçekten

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$  herhangi iki matris olmak üzere,

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} a_{ij} \right) = \text{tr}(BA)$$

olduğundan,  $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PA) = \text{tr}(A)$  olur. Buda bize benzer matrislerin izlerinin aynı olduğunu gösterir.

### 3. İYİ HALKALAR

$R$  birimli bir halka olmak üzere,  $R$  halkasının tüm tersinir (çarpımsal tersi mevcut olan) elemanlarının kümesi  $U(R)$ , tüm eş kare elemanlarının kümesi  $\text{idem}(R)$  ve tüm üstel sıfır elemanlarının kümesi  $\text{nil}(R)$  ile gösterilir. Bir  $R$  halkasının bu üç alt kümesi kullanılarak son elli yılda, halkaların çeşitli sınıflandırılmaları yapılmıştır. Nicholson (1977) de; bu alt kümelerden  $\text{idem}(R)$  ve  $U(R)$  yi kullanarak temiz (clean) eleman ve temiz halka (clean ring) tanımlarını vererek halkaların bir sınıflandırılmasını yaparken, Diesl (2013) deki çalışmasında  $\text{idem}(R)$  ile  $\text{nil}(R)$  alt kümelerini kullanarak üstel sıfır-temiz (nil-clean) halka tanımlarını yaparak halkaların diğer bir sınıflandırılmasını vermiştir. Bu bölümde yukarıda bahsedilen üç alt kümeden ikisi olan,  $\text{idem}(R)$  ve  $\text{nil}(R)$  kümelerini kullanarak halkaların yeni bir sınıflandırılması yapılacaktır. Bu bölümdeki temel referansımız Călugăreanu ve Lam (2016) olurken tüm tanımlar, örnekler, sonuçlar ve ispatlar adı geçen çalışmadan alınmıştır.

#### 3.1 Bir Halkanın İyi Elemanları ve İyi Halkaların Temel Özellikleri

Bu bölüme Nicholson (1977) de verdiği temiz (clean) eleman ve temiz halka (clean ring) tanımları hatırlatarak başlayalım.

**Tanım 3.1.1**  $R$  bir halka ve  $a \in R$  olmak üzere, eğer  $a = e + u$  olacak şekilde bir  $e \in \text{idem}(R)$  ve bir  $u \in U(R)$  varsa, bu durumda  $a$  ya  $R$  halkasının bir *temiz (clean) elemanı* denir. Eğer  $R$  halkasının tüm elemanları temiz eleman ise, bu durumda  $R$  halkasına *temiz halka (clean ring)* adı verilir.

**Örnek 3.1.2**  $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  halkasını göz önüne alalım. Bu durumda  $\text{idem}(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  ve  $U(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{1}, \bar{3}\}$  dir.  $\bar{0} = \bar{1} + \bar{3}$ ,  $\bar{1} = \bar{0} + \bar{1}$ ,  $\bar{2} = \bar{1} + \bar{1}$  ve  $\bar{3} = \bar{0} + \bar{3}$  olduğundan  $\mathbb{Z}_4$  ün tüm elemanları temiz elemanlardır ve böylece  $\mathbb{Z}_4$  halkası bir temiz halkadır. Diğer taraftan  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası için  $\text{idem}(\mathbb{Z}) = \{0,1\}$  ve  $U(\mathbb{Z}) = \{-1,1\}$  olup,  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasının tüm temiz elemanları  $-1,0,1$  ve  $2$  olduğundan  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası bir temiz halka değildir.

Diesl (2013) deki çalışmasında, bir halkanın yukarıda bahsedilen üç alt kümesinden ikisini kullanarak halkaların başka sınıflandırmasını aşağıdaki şekilde yapmıştır.

**Tanım 3.1.3**  $R$  bir halka ve  $a \in R$  olmak üzere eğer  $a = e + t$  olacak şekilde bir  $e \in \text{idem}(R)$  ve bir  $t \in \text{nil}(R)$  varsa, bu durumda  $a$  ya  $R$  halkasının bir *üstel sıfır-temiz (nil-clean)* elemanı denir. Eğer  $R$  halkasının tüm elemanları üstel sıfır-temiz eleman oluyor ise, bu durumda  $R$  halkasına bir *üstel sıfır-temiz halka (nil-clean ring)* denir.

**Örnek 3.1.4**  $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  halkasını göz önüne alalım. Bu durumda  $\text{idem}(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  ve  $\text{nil}(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$  olur.  $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$ ,  $\bar{1} = \bar{1} + \bar{0}$ ,  $\bar{2} = \bar{0} + \bar{2}$  ve  $\bar{3} = \bar{1} + \bar{2}$  yazıldığından  $\mathbb{Z}_4$  halkasının tüm elemanları üstel sıfır-temiz eleman olup böylece  $\mathbb{Z}_4$  halkası bir üstel sıfır-temiz halkadır. Diğer taraftan  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası için  $\text{idem}(\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$  ve  $\text{nil}(\mathbb{Z}) = \{0\}$  olur.  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasının üstel sıfır-temiz elemanları sadece 0 ve 1 olduğundan  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası bir üstel sıfır-temiz halka değildir.

**Önerme 3.1.5** (Diesl 2013, Önerme 3.4) Her üstel sıfır-temiz halka bir temiz halkadır.

**İspat**  $R$  bir üstel sıfır-temiz halka ve  $a \in R$  olsun. Bu durumda  $a - 1 \in R$  olup,  $R$  üstel sıfır-temiz halka olduğundan  $a - 1 = e + t$  olacak şekilde  $e \in \text{idem}(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. İlk olarak,  $t \in \text{nil}(R)$  iken  $1 + t \in U(R)$  olduğunu gösterelim.  $t \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $t^n = 0$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Bu durumda  $(1 + t)(1 - t + t^2 - t^3 + \dots \pm t^{n-1}) = 1$  ve  $(1 - t + t^2 - t^3 + \dots \pm t^{n-1})(1 + t) = 1$  olduğundan  $1 + t \in U(R)$  olur. Böylece  $a = e + (1 + t)$  olup,  $e \in \text{idem}(R)$  ve  $1 + t \in U(R)$  olduğundan  $R$  halkasının her elemanı bir temiz eleman olur. Sonuç olarak  $R$  halkası temiz bir halkadır. ■

Yukarıdaki önermenin tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekten görebiliriz.

**Örnek 3.1.6**  $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$  halkasını göz önüne alalım. Bu durumda,

idem  $(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ , nil  $(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$  ve  $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$  dir.  $\bar{0} = \bar{1} + \bar{5}$ ,  $\bar{1} = \bar{0} + \bar{1}$ ,  $\bar{2} = \bar{3} + \bar{5}$ ,  $\bar{3} = \bar{4} + \bar{5}$ ,  $\bar{4} = \bar{3} + \bar{1}$ ,  $\bar{5} = \bar{0} + \bar{5}$  yazıldığından  $\mathbb{Z}_6$  halkasının her elemanı bir temiz eleman olup böylece  $\mathbb{Z}_6$  bir temiz halkadır. Fakat  $\mathbb{Z}_6$  nın tüm üstel sıfır-temiz elemanları  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}$  ve  $\bar{4}$  olduğundan  $\mathbb{Z}_6$  halkası üstel sıfır-temiz halka değildir.

Yukarıdaki verilen idem  $(R)$ , nil  $(R)$  ve  $U(R)$  kümelerini kullanarak yapılabilecek üçüncü ve son olası sınıflandırma Călugăreanu ve Lam (2016) tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

**Tanım 3.1.7**  $R$  bir halka ve  $0 \neq a \in R$  olmak üzere eğer  $a = u + t$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve bir  $t \in \text{nil}(R)$  varsa, bu durumda  $a$  ya  $R$  halkasının bir iyi (fine) elemanı denir.  $a = u + t$  formundaki bir eşitliğe  $a \in R \setminus (0)$  nin bir iyi ayrışımı (fine decomposition) denir.  $R \setminus (0)$  daki tüm iyi elemanların kümesi  $\Phi(R)$  ile gösterilir. Sıfır halkadan farklı bir  $R$  halkası için  $R \setminus (0) = \Phi(R)$  oluyorsa, bu durumda  $R$  ye bir iyi halka (fine ring) denir.

**Örnek 3.1.8** Her bölümlü halka bir iyi halkadır. Şimdi bunu gösterelim.  $R$  bir bölümlü halka olsun. Bu durumda  $U(R) = R \setminus (0)$  dir. Diğer taraftan  $0 \in \text{nil}(R)$  olduğu açıktır. Her  $0 \neq a \in R$  elemanı  $a = a + 0$ ,  $a \in U(R)$  ve  $0 \in \text{nil}(R)$  yazıldığından  $R \setminus (0) = \Phi(R)$  olur. Böylece  $R$  bir iyi halka olur. Diğer taraftan inmiş halkalar için yukarıdaki gerektirmenin tersi de doğrudur. Bunu görmek için  $R$  inmiş bir iyi halka olsun.  $R$  nin bir bölüm halkası olduğunu gösterelim. Bunun için  $0 \neq a \in R$  alalım.  $R$  bir iyi halka olduğundan  $a = u + t$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. Fakat  $R$  inmiş bir halka olduğundan  $\text{nil}(R) = \{0\}$  dir. Böylece  $a = u + 0 = u \in U(R)$  olur ki, bu da bize  $R$  nin bir bölümlü halka olduğunu gösterir.

Bu çalışmada iyi halka, temiz halka ve üstel sıfır temiz halka sınıflarının birbirinden farklı olduklarını göreceğiz.

Nicholson (1999) da ve Diesl (2013) de sırasıyla güçlü temiz elemanları ve güçlü üstel sıfır–temiz elemanları aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

**Tanım 3.1.9**  $R$  bir halka ve  $a \in R$  olmak üzere, eğer  $a = e + u$  ve  $eu = ue$  olacak şekilde bir  $e \in \text{idem}(R)$  ve  $u \in U(R)$  varsa, bu durumda  $a$  ya  $R$  nin bir *güçlü temiz (strongly clean)* elemanı denir. Eğer  $a = e + t$  ve  $et = te$  olacak şekilde bir  $e \in \text{idem}(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  varsa, bu durumda  $a$  elemanına *güçlü üstel-sıfır temiz (strongly nil-clean)* eleman denir.

Bu kavramların ışığı altında güçlü iyi eleman ve güçlü iyi halka tanımlarını yapmak oldukça doğal olacaktır.

**Tanım 3.1.10**  $R$  bir halka ve  $a \in R \setminus (0)$  olmak üzere  $a = u + t$  ve  $ut = tu$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve bir  $t \in \text{nil}(R)$  varsa yani  $a$  nın bir *iyi ayrışımı (fine decomposition)* varsa, bu durumda  $a$  ya  $R$  nin bir *güçlü iyi (strongly fine)* elemanı denir. Eğer  $R \neq 0$  halkası için  $R \setminus (0)$  da ki her eleman güçlü iyi ise, bu durumda  $R$  ye bir *güçlü iyi halka (strongly fine ring)* denir. Nicholson ve Zhou (2004) nun çalışmalarında vurguladıkları gibi,  $R \setminus (0)$  halkasının her elemanı bir bir-tek iyi ayrışımına sahip ise, bu durumda  $R$  ye *bir-tek ayrışumlu iyi halka (uniquely fine ring)* denir.

**Önerme 3.1.11** Bir  $R$  halkası için aşağıdakiler sağlanır.

- (1)  $a \in R \setminus (0)$  ın bir güçlü iyi eleman olması için gerek ve yeter koşul  $a \in U(R)$  olmasıdır.
- (2)  $R$  halkasının güçlü iyi olması için gerek ve yeter koşul  $R$  nin bir bölümlü halkası olmasıdır.
- (3)  $R$  halkasının iyi ve birimsel-merkezi (tüm birimselleri merkezi) olması için gerek ve yeter koşul  $R$  nin bir cisim olmasıdır.
- (4)  $R$  halkasının tek türlü iyi olması için gerek ve yeter koşul  $R$  nin bölümlü halka olmasıdır.

**İspat** (1)  $a \in R \setminus (0)$  bir güçlü iyi eleman olsun. Bu durumda  $a = u + t$  ve  $ut = tu$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve bir  $t \in \text{nil}(R)$  vardır.

Buradan  $tu^{-1} = u^{-1}t$  olup, diğer taraftan  $t \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $t^n=0$  olacak şekilde pozitif bir  $n$  tamsayısı vardır. Böylece  $(u^{-1}t)^n = u^{-1}t \cdot u^{-1}t \cdots u^{-1}t = t^n(u^{-1})^n = 0(u^{-1})^n = 0$  olduğundan  $u^{-1}t \in \text{nil}(R)$  olur. Buradan  $1 + u^{-1}t \in U(R)$  elde edilir. Sonuç olarak  $a = u + t = u(1 + u^{-1}t) \in U(R)$  elde edilir. Tersine  $a \in U(R)$  olsun. Bu durumda  $a \neq 0$  dır. Diğer taraftan  $a = a + 0$  ve  $a0 = 0a$  olacak şekilde  $a \in U(R)$  ve  $0 \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $a$  bir güçlü iyi elemandır. (2)  $R$  bir güçlü iyi halka olsun.  $a \in R \setminus (0)$  alalım. Bu durumda (1) den  $a \in U(R)$  olur ki, bu da  $R$  nin bir bölümlü halka olduğunu gösterir. Tersine  $R$  bir bölümlü halka ve  $a \in R \setminus (0)$  olsun. Bu durumda  $a \in U(R)$  olur. Böylece  $a = a + 0$ ,  $a0 = 0a$  olacak şekilde  $a \in U(R)$  ve  $0 \in \text{nil}(R)$  var olduğundan  $R$  nin her elemanı bir güçlü iyi eleman olup sonuç olarak  $R$  bir iyi halkadır. (3)  $R$  halkası iyi ve birimsel-merkezi olsun. Bu durumda (2) den  $R$  halkası bir bölümlü halkadır. Diğer taraftan kabulümüzden tüm birimsel elemanlar merkezi olduğundan  $R$  bir cisimdir. Tersine  $R$  bir cisim olsun. Bu durumda açık olarak  $R$  iyi ve birimsel-merkezidir. (4)  $R$  bir tek türlü iyi halka olsun. Bu durumda  $R$  nin bir inmiş halka olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için  $t \in \text{nil}(R)$  olsun. Bu durumda  $1 + t \in R \setminus (0)$  ve  $1 + t \in U(R)$  dir. Diğer taraftan,  $1 + t = (1 + t) + 0$  olup  $R$  tek türlü iyi bir halka olduğundan  $1 = 1 + t$  ve  $t = 0$  olmalıdır. Böylece  $t = 0$  elde edilir ki buda bize  $R$  nin bir inmiş halka olduğunu gösterir. ■

Şimdi çalışmamız için gerekli olan bir halkanın Jacobson radikalinin tanımını ve bir kaç lemmayı verelim.

**Tanım 3.1.12** Bir  $R$  halkasının tüm maksimal sol ideallerinin ara kesitine  $R$  halkasının *Jacobson radikali* denir ve  $\text{rad}(R)$  ile gösterilir.

$R \neq 0$  olduğunda  $\text{rad}(R) \neq R$  dir. Eğer  $R = 0$  ise, bu durumda  $\text{rad}(R) = 0$  olarak tanımlanır.  $\text{rad}(R)$  aynı zamanda  $R$  nin sol radikali olarakta adlandırılır. Benzer olarak  $R$  halkasının sağ radikalide tanımlanabilir. Fakat bir  $R$  halkasının sol ve sağ radikalleri çakışır. Böylece  $\text{rad}(R)$ ,  $R$  halkasının bir idealidir.

**Lemma 3.1.13** (Lam 2001, (4.1) Lemma) Bir  $R$  halkasının bir  $y$  elemanı için aşağıdaki durumlar bir birine denktir.

- (1)  $y \in \text{rad}(R)$  dir.
- (2) Herhangi bir  $x \in R$  için  $1 - xy$  sol tersinirdir.
- (3) Herhangi bir  $M$  basit sol  $R - \text{modülü}$  için  $yM = 0$  dır.

**İspat** (1) $\Rightarrow$ (2)  $y \in \text{rad}(R)$  olsun. Kabul edelim ki (2) sağlanmasın. Yani bir  $x_0 \in R$  için

$1 - x_0y$  sol tersinir olmasın. Bu durumda  $R(1 - x_0y) \not\subseteq R$  olup  $R(1 - x_0y)$ ;  $R$  nin bir sol ideali olduğundan  $R$  nin bir maksimal  $I$  sol ideali tarafından kapsanır. Yani  $R(1 - x_0y) \subset I$  olacak şekilde  $R$  nin bir maksimal  $I$  sol ideali vardır. Bu durumda  $1(1 - x_0y) \in R(1 - x_0y) \subset I$  olup  $1 - x_0y \in I$  ve  $y \in \text{rad}(R)$  olduğundan  $y \in I$  elde edilir.  $I$  bir sol ideal olduğundan  $1 - x_0y + x_0y = 1 \in I$  olur ki bu da bize  $I = R$  olduğunu verir. Bu ise  $I$  nin bir maksimal sol ideal olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup her bir  $x \in R$  için  $1 - xy$  sol tersinirdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her  $x \in R$  için  $1 - xy$  sol tersinir olsun. Kabul edelim ki bir basit sol  $R - \text{modül}$   $M_0$  için  $yM_0 \neq 0$  olsun. Bu durumda  $ym \neq 0$  olacak şekilde bir  $m \in M_0$  vardır. Buradan  $Rym$ ;  $M_0$  nin sıfırdan farklı bir  $R - \text{alt modülüdür}$ . Fakat,  $M_0$  basit sol  $R - \text{modül}$  olduğundan  $Rym = M_0$  olur.  $m \in M_0 = Rym$  olduğundan  $m = xym$  olacak şekilde bir  $x \in R$  vardır. Buradan  $(1 - xy)m = 0$  olup  $1 - xy$  sol tersinir olduğundan  $m = 0$  olur ki bu  $ym \neq 0$  olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup her  $M$  basit sol  $R - \text{modülü}$  için  $yM = 0$  olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) Her bir basit sol  $R - \text{modül}$   $M$  için  $yM = 0$  olsun.  $R$  nin herhangi bir  $I$  maksimal sol ideali için  $R/I$  bir basit sol  $R - \text{modüldür}$ . Kabulümüzden  $y(R/I) = 0$  olur. Buradan  $y \in I$  elde edilir ki, böylece radikal tanımından  $y \in \text{rad}(R)$  olur. ■

**Lemma 3.1.14** (Lam 2001, (4.3) Lemma) Bir  $R$  halkasının bir  $y$  elemanı için aşağıdakiler birbirine denktir.

- (1)  $y \in \text{rad}(R)$  dir.
- (2) Herhangi  $x, z \in R$  için  $1 - xyz \in U(R)$  dir.

**İspat** (2) $\Rightarrow$ (1) (2) sağlansın. Özel olarak  $z = 1$  içinde  $1 - xy1 = 1 - xy \in U(R)$  olacağından  $1 - xy$  sol tersinir olur. Böylece Lemma 3.1.13 (2) sağlanır. Sonuç olarak Lemma 3.1.13 den  $y \in \text{rad}(R)$  olur. Yani (1) sağlanır.

(1) $\Rightarrow$ (2)  $y \in \text{rad}(R)$  ve  $x, z \in R$  olsun.  $\text{rad}(R)$  ;  $R$  nin bir ideali olduğundan  $yz \in \text{rad}(R)$  olur. Böylece Lemma 3.1.13(2) den  $1 - xyz$  sol tersinir olur. Böylece  $u(1 - xyz) = 1$  olacak şekilde bir  $u \in R$  vardır. Tekrar  $xyz \in \text{rad}(R)$  olduğundan Lemma 3.1.13(2) den  $u = 1 - (-u)(xyz) = 1 + uxyz$  sol tersinirdir.  $u(1 - xyz) = 1$  eşitliğinden de  $u$  sağ tersinir olduğundan  $u \in U(R)$  olur.  $u(1 - xyz) = 1$  eşitliği soldan  $u^{-1}$  ile çarpılırsa  $1 - xyz = u^{-1} \in U(R)$  elde edilir. ■

Lemma 3.1.14 den aşağıdaki sonucu elde edebiliriz  $\text{rad}(R); 1 + I \subset U(R)$  olacak şekilde  $R$  nin  $I$  sol idealleri arasındaki en genişidir. Diğer bir ifade ile  $1 + \text{rad}(R) \subseteq U(R)$  dir.

Şimdi bir halkanın iyi elemanlarının ve iyi halkaların bazı temel özelliklerini verelim.

Bir  $R$  halkasının merkezinin  $Z(R)$  ile gösterildiğini hatırlatalım.

### Önerme 3.1.15

(1) Herhangi bir  $R \neq 0$  halkası için  $\Phi(R) \cap Z(R) = U(Z(R))$  dir.

(2) Eğer  $v \in U(R)$  ise, bu durumda  $v\Phi(R)v^{-1} = \Phi(R)$  dir. Ayrıca, eğer  $v \in U(R) \cap Z(R)$  ise, bu durumda  $v\Phi(R) = \Phi(R)$  dir.

(3) Eğer  $R \neq 0$  ve  $\text{nil}(R) \subseteq \text{rad}(R)$  ise, bu durumda  $\Phi(R) = U(R)$  dir.

**İspat** (1)  $R \neq 0$  bir halka olmak üzere  $U(R) \subset \Phi(R)$  olduğundan  $U(Z(R)) \subset \Phi(R) \cap Z(R)$  dir. Şimdi  $a \in \Phi(R) \cap Z(R)$  olsun. Bu durumda  $a \in \Phi(R)$  olup  $a = u + t$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. Buradan  $t = a - u$  ve  $a \in Z(R)$  olduğundan  $tu = au - u^2 = ut$  elde edilir. Buradan da  $u^{-1}t = tu^{-1}$  olur. Diğer taraftan  $t \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $t^n = 0$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Şimdi  $(u^{-1}t)^n = u^{-1}tu^{-1}t \cdots u^{-1}t = (u^{-1})^n t^n = (u^{-1})^n 0 = 0$  olduğundan  $u^{-1}t \in \text{nil}(R)$  olur. Böylece  $1 + u^{-1}t \in U(R)$  elde edilir.

Buradan  $a = u(1 + u^{-1}t) \in U(R)U(R)$  olduğundan  $a \in U(R)$  olur ki böylece  $\Phi(R) \cap Z(R) \subset U(Z(R))$  elde edilir. Sonuç olarak  $\Phi(R) \cap Z(R) = U(Z(R))$  olur.

(2)  $v \in U(R)$  olsun.  $b \in v\Phi(R)v^{-1}$  alalım. Bu durumda  $b = vav^{-1}$  olacak şekilde  $a \in \Phi(R)$  vardır. Böylece  $a = u + t$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. Buradan  $b = vav^{-1} = v(u + t)v^{-1} = vuv^{-1} + vtv^{-1}$  olur. Diğer taraftan  $t \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $t^n = 0$  olacak şekilde  $n \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Böylece  $(vtv^{-1})^n = vtv^{-1}vtv^{-1} \dots vtv^{-1} = vt^n v^{-1} = v0v^{-1} = 0$  olduğundan  $vtv^{-1} \in \text{nil}(R)$  olur. Diğer taraftan da  $vuv^{-1} \in U(R)$  olduğundan  $b \in \Phi(R)$  olur ki, bu da bize  $v\Phi(R)v^{-1} \subset \Phi(R)$  olduğunu gösterir. Şimdi  $c \in \Phi(R)$  olsun. Bu durumda  $c = s + r$  olacak şekilde  $s \in U(R)$  ve  $r \in \text{nil}(R)$  vardır. Böylece  $v^{-1}c = v^{-1}sv + v^{-1}rv$  ve  $v^{-1}sv \in U(R)$ ,  $v^{-1}rv \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $v^{-1}cv \in \Phi(R)$  olur. Sonuç olarak  $c = v(v^{-1}cv)v^{-1} \in v\Phi(R)v^{-1}$  olur ki, bu da bize  $\Phi(R) \subset v\Phi(R)v^{-1}$  olduğunu gösterir. Şimdi ikinci kısmı ispatlayalım. Bunun için  $v \in U(R) \cap Z(R)$  ve  $a \in \Phi(R)$  alalım. Bu durumda  $a = u + t$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. Buradan  $va = vu + vt$  olur.  $t \in \text{nil}(R)$  ve  $v \in Z(R)$  olduğunda  $vt \in \text{nil}(R)$  dir. Böylece  $va \in \Phi(R)$  olur. Diğer taraftan  $v \in U(R) \cap Z(R)$  için  $v^{-1} \in U(R) \cap Z(R)$  olur. Böylece  $a = v(v^{-1}a) \in v\Phi(R)$  olduğundan  $\Phi(R) \subset v\Phi(R)$  olur. Diğer taraftan  $b \in v\Phi(R)$  ise, bu durumda  $b = vc$  olacak şekilde  $c \in \Phi(R)$  vardır. Önceki tartışmadan  $b = vc \in \Phi(R)$  olur ki, bu da bize  $v\Phi(R) \subset \Phi(R)$  olduğunu gösterir. Sonuç olarak  $v\Phi(R) = \Phi(R)$  elde edilir.

(3)  $R \neq 0$  ve  $\text{nil}(R) \subset \text{rad}(R)$  olsun.  $a \in \Phi(R)$  alalım. Bu durumda  $a = u + t$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır.  $\text{nil}(R) \subset \text{rad}(R)$  olduğundan  $t \in \text{rad}(R)$  dir. Böylece  $u^{-1}t \in \text{rad}(R)$  ve  $1 + u^{-1}t \in 1 + \text{rad}(R) \subset U(R)$  olduğundan  $a = u(1 + u^{-1}t) \in U(R)U(R) \subset U(R)$  olup  $v \in U(R)$  olur ki, bu da  $\Phi(R) \subset U(R)$  olduğunu gösterir. Şimdi  $b \in U(R)$  olsun. Bu durumda  $b = b + 0$  olacak şekilde  $b \in U(R)$  ve  $0 \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $b \in \Phi(R)$  yani  $U(R) \subset \Phi(R)$  olduğunu gösterir. Sonuç olarak  $\Phi(R) = U(R)$  elde edilir. ■

### **Teorem 3.1.16**

- (1) Eğer  $a \in \Phi(R)$  ise, bu durumda  $RaR = R$  dir.
- (2) Her iyi halka bir basit halkadır.
- (3)  $S \neq 0$  olmak üzere herhangi bir birimsel  $f: R \rightarrow S$  halka homomorfizması için  $f(\Phi(R)) \subset \Phi(S)$  dir.

(4)  $I$ ;  $R$  nin bir nil ideali ve  $a \in R$  olsun. Bu durumda  $a \in \Phi(R)$  olması için gerek ve yeter koşul  $\bar{a} = a + I \in \Phi(R/I)$  olmasıdır.

**İspat** (1)  $a \in \Phi(R)$  olsun. Bu durumda  $a = u + t$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. Buradan  $\bar{u} = u + RaR = (a - t) + RaR = a + RaR + (-t) + RaR = 1a1 + RaR + (-t) + RaR = -t + RaR = -\bar{t}$  elde edilir. Diğer taraftan  $u \in U(R)$  olduğundan  $\bar{u} \in U(\bar{R}) = U(R/RaR)$  dir. Ayrıca  $t \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $-\bar{t} \in \text{nil}(\bar{R})$  dir. Böylece  $U(\bar{R}) \cap \text{nil}(\bar{R}) \neq \emptyset$  olur ki buradan  $\bar{R} = \{\bar{0}\}$  yani  $R = RaR$  elde ederiz.

(2)  $R$  bir iyi halka olsun. Bu durumda  $\Phi(R) = R \setminus \{0\}$  olur. (1) den  $a \in \Phi(R) = R \setminus \{0\}$  için  $RaR = R$  olur ki bu da bize  $R$  nin bir basit halka olduğunu gösterir.

(3)  $S \neq 0$  olmak üzere  $f: R \rightarrow S$  bir birimsel halka homomorfizması olsun.  $b \in f(\Phi(R))$  alalım. Bu durumda  $b = f(a)$  olacak şekilde bir  $a \in \Phi(R)$  vardır. Bu durumda (1) den  $RaR = R$  olur.  $S \neq 0$  ve  $f$  birimsel bir halka homomorfizması olduğundan  $f(R) \neq 0$  olur. Eğer  $f(a) = 0$  olsaydı, bu durumda  $R = RaR$  den  $f(R) = 0$  olurdu ki bu  $f(R) \neq 0$  olması ile çelişirdi. O halde  $f(a) \neq 0$  olmalıdır. Böylece  $f(a) \in \Phi(S)$  olup, sonuç olarak  $f(\Phi(R)) \subset \Phi(S)$  elde edilir.

(4)  $I$ ;  $R$  nin bir nil ideali ve  $a \in R$  olsun.  $a \in \Phi(R)$  alalım ve  $\pi: R \rightarrow R/I, \pi(r) = r + I$  doğal homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda açık olarak  $\pi$  bir birimsel halka homomorfizmasıdır.  $I$ ;  $R$  nin bir nil ideali olduğundan  $I \neq R$  yani  $R/I \neq 0$  dir. Diğer taraftan (3) gereğince  $\pi(\Phi(R)) \subset \Phi(R/I)$  olacağından  $\bar{a} = a + I = \pi(a) \in \pi(\Phi(R)) \subset \Phi(R/I)$  olup  $\bar{a} \in \Phi(R/I)$  elde edilir. Şimdi  $\bar{a} = a + I \in \Phi(R/I)$  alalım. Bu durumda  $\bar{a} = \bar{u} + \bar{t}$  olacak şekilde  $\bar{u} \in U(R/I)$  ve  $\bar{t} \in \text{nil}(R/I)$  vardır. Eğer  $I$ ;  $R$  nin bir (sol,sağ) nil ideali ise, bu durumda  $I \subset \text{rad}(R)$  dir. Gerçekten  $y \in I$  alalım. Bu durumda herhangi bir  $x \in R$  için  $xy \in I$  bir nilpotent elemandır. Lemma 3.1.15 ten  $y \in \text{rad}(R)$  olur. Böylece  $I \subset \text{rad}(R)$  elde edilir.  $\bar{u} = u + I \in U(R/I)$  olduğundan  $\bar{u}\bar{v} = \bar{1}$  yani  $(u + I)(v + I) = 1 + I$  olacak şekilde  $\bar{v} = u + I \in R/I$  vardır. Buradan  $1 - uv \in I \subset \text{rad}(R)$  olduğundan Lemma 3.1.14 den  $1 - 1(1 - uv)1 \in U(R)$  yani;  $uv \in U(R)$  ve böylece  $u \in U(R)$  elde edilir. Diğer taraftan;  $(a - u) + I = \bar{a} - \bar{u} = \bar{t} = t + I \in \text{nil}(R/I)$  olduğundan  $[(a - u) + I]^n = 0 + I$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{Z}^+$

vardır. Yani  $(a - u)^n \in I$  olup  $I$  bir nil ideal olduğundan  $[(a - u)^n]^m = 0$  olacak şekilde bir  $m \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Böylece  $a - u \in \text{nil}(R)$  olur. Sonuç olarak  $a = u + t_1$  olacak şekilde  $u \in U(R)$  ve  $t_1 \in \text{nil}(R)$  vardır. Sonuç olarak  $a \in \Phi(R)$  olur. ■

**Sonuç 3.1.17** Bir  $(R, m)$  yerel(local) halkasının iyi halka olması için gerek ve yeter koşul  $R$  nin bölümlü halka olmasıdır.

**İspat**  $(R, m)$  bir yerel halka olsun. Kabul edelim ki  $R$  bir iyi halka olsun. Bu durumda Teorem 3.1.16 (2) den  $R$  bir basit halkadır. Diğer taraftan  $\text{nil}(R) \subset R = \text{rad}(R)$  olacağından Önerme 3.1.15 (3) ten  $R \setminus \{0\} = \Phi(R) = U(R)$  olur ki, bu da bize  $R$  nin bir bölümlü halka olduğunu gösterir. Tersine  $R$  bir bölümlü halka ve  $0 \neq a \in R$  olsun. Bu durumda  $a \in U(R)$  olup  $a = a + 0$  ve  $0 \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $a \in \Phi(R)$  olur. Sonuç olarak  $R$  bir iyi halkadır. ■

**Önerme 3.1.18**  $R$  bir halka olmak üzere, eğer  $\text{nil}(R)$ ,  $R$ ' nin sıfırdan farklı bir toplamsal alt grubu ise, bu durumda  $R$  bir iyi halka değildir.

**İspat**  $\text{nil}(R)$ ;  $R$  nin sıfırdan farklı bir toplamsal alt grubu olsun. Bu durumda  $0 \neq t_0 \in \text{nil}(R) \subset R$  vardır. Şimdi kabul edelim ki  $R$  bir iyi halka olsun. Bu durumda  $t_0 = u + t$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve  $t \in \text{nil}(R)$  vardır. Böylece  $u = t_0 - t \in \text{nil}(R)$  olur ki buradan  $u = 0$  elde edilir. Böylece  $R = (0)$  olur ki, bu ise  $0 \neq t_0 \in R$  olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup  $R$  bir iyi halka değildir. ■

Pozitif bir  $n$  tamsayısı için, eğer  $R$  halkasının her elemanı en fazla  $n$  tane birimselin toplamı olarak yazılabiliyorsa, bu durumda  $R$  halkasına  $n$  – toplam özelliğine ( $n$  – sum property) sahiptir denir. (Grover vd 2014) Teorem 3.1.16 (1) herhangi bir iyi halkanın 2 – toplam özelliğine sahip olduğunu gösterir.  $k$  bir pozitif tamsayı olmak üzere eğer bir  $R$  halkasının her elemanı  $k$  – tane birimselin toplamı olarak yazılabiliyorsa, bu durumda  $R$  halkasına  $k$  – iyi halka ( $k$  – good ring ) denir (Vanos 2005). Teorem 3.1.16 (2) ise sadece bir istisna ( $R = \mathbb{F}_2$ ) olması dışında iyi halkaların 2 – iyi halka olduğunu gösterir.

**Teorem 3.1.19** Herhangi bir  $R$  iyi halkası için aşağıdakiler sağlanır.

(1)  $R = \{1\} \cup (U(R) + U(R))$  dir.

(2)  $R$  halkasının  $2 - iyi$  olması için gerek ve yeter koşul  $|R| \neq 2$  olmasıdır.

**İspat**  $R$  bir iyi halka olsun. (1)  $\{1\} \cup (U(R) + U(R)) \subset R$  olduğu açıktır. Şimdi  $R \subset \{1\} \cup (U(R) + U(R))$  olduğunu gösterelim. Bunun için  $1 \neq a \in R$  alalım. Bu durumda  $0 \neq a - 1 \in R$  olup  $R$  bir iyi halka olduğundan  $a - 1 = u + t$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  ve  $t \in nil(R)$  vardır. Böylece  $a = u + (1 + t) \in U(R) + U(R)$  olur ki, buda bize  $R \subset \{1\} \cup (U(R) + U(R))$  olduğunu verir. Sonuç olarak  $R = \{1\} \cup (U(R) + U(R))$  elde ederiz.

(2)  $R$  bir  $2 - iyi$  halka olsun. Kabul edelim ki  $|R| = 2$  olsun. O halde  $R = \{0,1\}$  dir. Bu durumda  $1 \notin U(R) + U(R)$  olduğundan  $R$  bir  $2 - iyi$  halka olmaz. O halde kabulümüz yanlış olup  $|R| \neq 2$  dir. Tersine  $|R| \neq 2$  olsun. Bu durumda (1) den dolayı  $R$  halkasının  $2 - iyi$  olduğunu göstermek için  $1 \in U(R) + U(R)$  olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi kabul edelim ki  $U(R) = \{1\}$  olsun. Bu durumda bir  $0 \neq a \in R$  için,  $R$  bir iyi halka olduğundan  $a = u + t$  olacak şekilde  $u \in U(R) = \{1\}$  ve  $t \in nil(R)$  vardır. Böylece  $a = 1 + t \in U(R) = \{1\}$  olup  $a = 1$  elde edilir. Bu da bize  $R = \{0,1\}$  yani  $|R|=2$  olduğunu gösterir ki bu  $|R| \neq 2$  kabulümüz ile çelişir. O halde  $U(R) \neq \{1\}$  dir. Böylece  $1 \neq v \in U(R)$  vardır. Diğer taraftan  $1 - v \in R$  için  $R$  bir iyi halka olduğundan  $1 - v = u' + t'$  olacak şekilde  $u' \in U(R)$  ve  $t' \in nil(R)$  vardır. Buradan  $w := u' + v = 1 - t' \in U(R)$  olur. Diğer taraftan  $1 = w^{-1}u' + w^{-1}v \in U(R) + U(R)$  elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. ■

$R$  bir halka olmak üzere, eğer  $U(R) \subseteq 1 + nil(R)$  oluyorsa, bu durumda  $R$  halkasına bir  $UU$  halka ( $UU$  ring) denir (Călugăreanu 2015).

**Önerme 3.1.20** Bir  $R$  halkasının iyi ve  $UU$  olması için gerek ve yeter koşul  $R \cong \mathbb{F}_2$  olmasıdır.

**İspat**  $R \cong \mathbb{F}_2$  olsun. Bu durumda açık olarak  $R$  halkası iyi ve  $UU$  dur. Tersine  $R$  halkası iyi ve  $UU$  olsun. Kabul edelim ki  $R \not\cong \mathbb{F}_2$  olsun. Bu durumda  $|R| > 2$  olur. Bu durumda Teorem 3.1.19 (2) den  $R$  bir 2-iyi halkadır. Böylece  $1 = u_1 + u_2$  olacak şekilde  $u_1, u_2 \in U(R)$  vardır. Diğer taraftan  $R, UU$  olduğundan  $u_1 = 1 + t$  olacak şekilde  $t \in \text{nil}(R)$  vardır.

Böylece  $u_1 - 1 = 1 + t - 1 = t \in \text{nil}(R)$  olup  $u_1 - 1 = -u_2 \in \text{nil}(R) \cap U(R)$  elde edilir. Bu ise, bize  $R = 0$  olduğunu verir ki, bu ise kabulümüzle çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup  $R \cong \mathbb{F}_2$  dir. ■

**Önerme 3.1.21**  $S \neq 0$  bir halka ve  $n \geq 2$  olmak üzere  $R = \mathbb{M}_n(S)$  olsun. Bu durumda  $R$ ' nin her bir elemanı  $R$  deki iki iyi elemanın bir toplamı olarak yazılabilir.

**İspat**  $M \in R$  olsun. Bu durumda  $T_1$  kesinlikle bir üst üçgensel matris,  $T_2$  kesinlikle bir alt üçgensel matris ve  $D$  de bir köşegen matris olmak üzere  $M = D + T_1 + T_2$  şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (Henriksen 1974) deki yöntemle;  $U_1$  ve  $U_2$  tersinir matrisler olmak üzere  $D = U_1 + U_2$  yazılabilir. Böylece açık olarak  $U_1 + T_1 \neq 0$  ve  $U_2 + T_2 \neq 0$  olur. Sonuç olarak  $T_1, T_2 \in \text{nil}(R)$  olup  $M = (U_1 + T_1) + (U_2 + T_2) \in \Phi(R) + \Phi(R)$  elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar. ■

### 3.2. İyi Halkalar Üzerine Kurulan Matris Halkaları

Basit halkalar üzerine kurulan matris halkalarının da basit olduğu bilinmektedir. Bu gerçeğin ışığı altında iyi halkalar üzerine kurulan matris halkalarının da iyi halkalar olup olmadığını sorgulamak oldukça doğaldır. Bu bölümdeki amacımız aşağıdaki temel teoremi ispatlamak olacaktır.

**Teorem 3.2.1**  $S$  bir iyi halka olmak üzere, herhangi bir  $n$  pozitif tamsayısı için  $\mathbb{M}_n(S)$  de bir iyi halkadır.

Bu bölüm boyunca  $S$  sıfırdan farklı bir halka ve  $R = \mathbb{M}_n(S)$  olacaktır. Yukarıdaki temel teoremin ispatına geçmeden önce ispata yardımcı olacak bazı sonuçlar vereceğiz. Bunlardan ilki;  $R$  deki matrislerin iyi olup olmadığını araştırmak olacaktır.

**Önerme 3.2.2**  $A \in \mathbb{M}_k(S)$  ve  $D \in \mathbb{M}_{n-k}(S)$  olmak üzere  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in R = \mathbb{M}_n(S)$  olsun. Eğer  $A \in \Phi(\mathbb{M}_k(S))$  ve  $D \in \Phi(\mathbb{M}_{n-k}(S))$  ise, bu durumda  $M \in \Phi(R)$  dir.

**İspat**  $A \in \Phi(\mathbb{M}_k(S))$  ve  $D \in \Phi(\mathbb{M}_{n-k}(S))$  olmak üzere  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in R$  olsun. Bu durumda  $A = U + T$  olacak biçimde  $U \in U(\mathbb{M}_k(S))$  ve  $T \in \text{nil}(\mathbb{M}_k(S))$  ve  $D = U' + T'$  olacak şekilde  $U' \in U(\mathbb{M}_{n-k}(S))$  ve  $T' \in \text{nil}(\mathbb{M}_{n-k}(S))$  vardır. Bu durumda

$$M = \begin{pmatrix} U & 0 \\ C & U' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & T' \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Burada  $\begin{pmatrix} U & 0 \\ C & U' \end{pmatrix} \in U(R)$  ve  $\begin{pmatrix} T & B \\ 0 & T' \end{pmatrix} \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $M \in \Phi(R)$  olur. ■

Bir blok matrisin diagonal (köşegen) bloklarının sayısına tümevarım yöntemini ve Önerme 3.2.2 yi uygulayarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Teorem 3.2.3 (Blok Teoremi)** Eğer,  $A_{ii}$  ler birer iyi karesel matrisler olmak üzere  $\{A_{ij}\}$  bloklarının bir matrisi  $M = (A_{ij}) \in R = \mathbb{M}_n(S)$  ise, bu durumda  $M \in \Phi(R)$  dir.

Matris halkalarındaki elemanların iyi olup olmadıklarını, yukarıdaki teoremi daha etkin kullanarak araştırabilmek için aşağıdaki tanımı yapmak uygun olacaktır.

**Tanım 3.2.4**  $n \geq 2$  için  $\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & d \end{pmatrix} \in R$  olsun. Eğer  $0 \neq A \in \mathbb{M}_{n-1}(S)$  ve  $0 \neq d \in S$  ise, bu durumda  $\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & d \end{pmatrix} \in R$  matrisine "iyi formda" (*in good form*) denir.

**Lemma 3.2.5**  $S$  sıfırdan farklı bir halka olmak üzere  $u, v \in U(S)$  için  $1 = u + v \in S$  şeklinde bir denklem var olsun. Bu durumda  $a \neq 0$  olmak üzere, herhangi bir  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matrisi iyi formda bir matrise benzerdir.

**İspat**  $d = 0$  kabul edebiliriz. Aksi halde yani  $d \neq 0$  olursa, bu durumda  $M'$  nin kendisi iyi formda olur.

Durum 1.  $b = c = 0$  olsun. Şimdi  $M$  nin  $V = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -v & 1 \end{pmatrix}$  ile eşleniğini bulalım.

$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-u & 1-v \end{pmatrix}$  olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda

$$VMV^{-1} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-u & 1-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua & -ua \\ -va & va \end{pmatrix}$$

elde edilir.  $a \neq 0$  ve  $u, v \in U(S)$  olduğundan  $ua \neq 0$  ve  $va \neq 0$  dır. Böylece  $VMV^{-1}$  matrisi iyi formdadır.

Durum 2.  $c \neq 0$  olsun. Bu durumda  $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  için

$$VMV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a+b-c \\ c & c \end{pmatrix}$$

olur. Eğer  $c \neq a$  ise  $VMV^{-1}$  matrisi iyi formdadır. Eğer  $c = a$  ise, bu durumda;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & -u^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua + va & ub \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & -u^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uau^{-1} + vau^{-1} & -uau^{-1}v - vau^{-1}v + ub \\ au^{-1} & -au^{-1}v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au^{-1} & -au^{-1}v + ub \\ au^{-1} & -au^{-1}v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur.  $a \neq 0$  ve  $u, v \in U(S)$  olduğundan  $au^{-1} \neq 0$  ve  $-au^{-1}v \neq 0$  olur ki böylece bulunan son matris iyi formda olur. Özel olarak  $b = 0$  için  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$  olur ki, bu durumda

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & -u^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au^{-1} & -au^{-1}v \\ au^{-1} & -au^{-1}v \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu son matris iyi formda olan bir matristir.

Durum 3.  $c = 0$  olsun. Eğer  $b = 0$  ise Durum 1'e döner. O halde  $b \neq 0$  kabul edelim.

Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & b \\ a-b & b \end{pmatrix}$$

olur. Eğer  $a \neq b$  ise, son matris iyi formdadır. Eğer  $a = b$  ise, bu durumda;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ -uu^{-1} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} uau^{-1} - uavu^{-1} & ua \\ vau^{-1} - vavu^{-1} & va \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua(1-v)u^{-1} & ua \\ va(1-v)u^{-1} & va \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uauu^{-1} & ua \\ vauu^{-1} & va \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua & ua \\ va & va \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur ki elde edilen son matris iyi formda olan bir matristir.

**Sonuç 3.2.6**  $u + v = 1 \in S$  olacak şekilde  $u, v \in U(S)$  mevcut olsun. Bu durumda herhangi bir  $0 \neq M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(S)$  matrisi iyi formda bir matrise benzerdir.

**İspat**  $u + v = 1 \in S$  olacak şekilde  $u, v \in U(S)$  var ve  $0 \neq M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(S)$  olsun.

Eğer  $a \neq 0$  ise, bu durumda Lemma 3.2.5 uygulanır. Eğer  $d \neq 0$  ise, bu durumda;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

olur ki, böylece ilk durum uygulanır. Şimdi  $a = d = 0$  ve  $c \neq 0$  kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b-c \\ c & -c \end{pmatrix}$$

olur ki, son matris iyi formda olan bir matristir. Eğer  $a = d = 0$  ve  $b \neq 0$  olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

olur ki bu bir önceki durumla aynı hale gelir. Böylece ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 3.2.7** Sonuç 3.2.6 deki  $1 \in U(S) + U(S)$  koşulu kaldırılamaz. Gerçekten;  $S = \mathbb{F}_2$  alırsak, bu durumda  $\mathbb{M}_2(S)$  deki iyi formda olan tüm matrisler  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ve  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dir. Ayrıca bu matrislerin izleri sıfırdır. Diğer taraftan  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ve  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(S)$  matrislerinin izleri 1 dir. Benzer matrislerin izleri aynı olduğundan bu matrislerin hiçbiri iyi formda olan yukarıdaki matrislerin hiçbirine benzer olamaz.

**Önerme 3.2.8** Kabul edelim ki  $u + v = 1 \in S$  olacak şekilde  $u, v \in U(S)$  var olsun.

Bu durumda herhangi bir  $n \geq 2$  tamsayısı için bir  $0 \neq M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \in R = \mathbb{M}_n(S)$  matrisi  $\mathbb{M}_n(S)$  deki iyi formda olan bir matrise benzerdir. Burada  $A \in \mathbb{M}_{n-1}(S)$  ve  $d \in S$  dir.

**İspat**  $n$  üzerinde tümevarım uygulayarak ispatı yapacağız.  $n = 2$  için ispat Sonuç 3.2.6 de yapılmıştır. İddiamız  $n = k - 1$  için doğru olsun. İddiamızın  $n = k$  için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için  $0 \neq M \in \begin{pmatrix} A & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_k(S)$  olsun.

Durum 1.  $A \neq 0$  olsun. Bu durumda  $0 \neq A \in \mathbb{M}_{k-1}(S)$  olup, kabulümüzden  $A$  iyi formda bir matrise benzerdir. (Bir eşlenik alma işleminden sonra)  $A$  yı iyi formda bir matris kabul edebiliriz. Bu durumda  $M$  nin  $(k - 2) \times (k - 2)$  tipindeki kuzey batı bloğu sıfırdan farklıdır. Ayrıca  $M$ ' nin  $2 \times 2$  tipindeki güney doğu bloğu  $A'$  matrisinin (1,1) girdileri sıfırdan farklıdır.

Lemma 3.2.5' dan  $A'$  matrisi iyi formda bir matrise eşleniktir. Böylece  $M'$  nin kendisi iyi formda bir matrise eşleniktir.

Durum 2.  $A \neq 0$  olsun. Eğer  $0 \neq M \in \mathbb{M}_k(S)$  matrisinin  $(k-1) \times (k-1)$  tipindeki güney doğu bloğu sıfırdan farklı ise, bu durumda tümevarım hipotezi kabulünden bu bloğun yerine iyi formda bir matris yazabiliriz. Sonuçta elde edilen bu matris iyi formda bir matris olur. Şimdi  $M$  matrisinin  $(k-1) \times (k-1)$  tipindeki güney doğu bloğunun sıfır matrisi olduğunu kabul edebiliriz. Ancak bu matrisin  $(n, 1)$  girdisi  $c$  si ve  $(1, n)$  girdisi  $b$  dışında tüm girdileri sıfırdır. Genelliği bozmaksızın  $c \neq 0$  olsun.  $M$  matrisini  $I_k + E_{1,k}$  matrisi ile eşlenik edersek  $M$  matrisi  $(n-1) \times (n-1)$  tipinde kuzey doğu bloğu sıfırdan farklı olan bir matrise eşlenik olur. Bu da ispatı Durum 1 e yönlendirir. ■

**Teorem 3.2.1 in İspatı**  $S$  bir iyi halka olmak üzere  $R = \mathbb{M}_n(S)$  olsun.  $R$  nin bir iyi halka olduğunu  $n$  üzerine tümevarım uygulayarak ispatlayacağız.  $n = 1$  için  $R = \mathbb{M}_1(S) \cong S$  olduğundan  $R$  bir iyi halkadır. İddianın  $n - 1$  için doğru olduğunu yani  $\mathbb{M}_{n-1}(S)$  halkasının bir iyi halka olduğunu kabul edelim.  $\mathbb{M}_n(S)$  nin de bir iyi halka olduğunu göstereceğiz. İlk olarak  $|S| > 2$  olması durumunda ispatı yapalım. Teorem 3.1.19 (2) den  $S$  bir 2 – iyi halkadır. Böylece  $1 \in U(S) + U(S)$  olur.  $n \geq 2$  için  $0 \neq M \in \begin{pmatrix} A & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \in R = \mathbb{M}_n(S)$  olsun. Bu durumda Önerme 3.2.8 den dolayı  $M'$  yi iyi formda kabul edebiliriz. Yani;  $A \neq 0$  ve  $d \neq 0$  dir. Böylece tümevarım hipotezi kabulümüzden  $A \in \Phi(\mathbb{M}_{n-1}(S))$  olur. Diğer taraftan  $S$  bir iyi halka ve  $0 \neq d \in S$  olduğundan  $d \in \Phi(S)$  dir. O halde Önerme 3.2.2. den  $M \in \Phi(R)$  olur.

Şimdi  $S \cong \mathbb{F}_2$  olsun. İspatı tekrar  $n$  üzerinde tümevarım ile yapacağız.  $n = 1$  için  $R = \mathbb{M}_n(\mathbb{F}_2) \cong S \cong \mathbb{F}_2$  olduğundan  $R$  bir iyi halkadır. İddiamız  $n - 1$  için doğru yani  $\mathbb{M}_{n-1}(S)$  bir iyi halka olsun.  $\mathbb{M}_n(S)$  'nin de bir iyi halka olduğunu göstereceğiz. Bunun için  $0 \neq M \in \begin{pmatrix} A & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(S) = R$  olsun.  $M \in \Phi(R)$  olduğunu gösterelim. Önerme 3.2.9' un ispatındaki Durum 2' de olduğu gibi  $A \neq 0$  kabul edebiliriz. Eğer  $d \neq 0$  ise, bu durumda;  $0 \neq d \in S \cong \mathbb{F}_2$  olduğunda  $d \in \Phi(S)$  dir. Tümevarım hipotezinden dolayı  $A \in \Phi(\mathbb{M}_{n-1}(S))$  olur. Böylece Blok Teoreminden dolayı  $M \in \Phi(R)$  olur. Şimdi  $d = 0$  olsun. Tümevarım hipotezinden dolayı  $0 \neq A \in \Phi(\mathbb{M}_{n-1}(S))$  olduğundan  $A = U + T$  olacak şekilde  $U \in U(\mathbb{M}_{n-1}(S))$  ve  $T \in \text{nil}(\mathbb{M}_{n-1}(S))$  vardır. Bu durumda,  $\delta$  seçilen bir sütun vektörü olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} U & \beta + \delta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

yazabiliriz. Burada  $\begin{pmatrix} T & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{nil}(\mathbb{M}_n(S))$  olduğu görülebilir. Böylece  $\begin{pmatrix} U & \beta + \delta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \in U(\mathbb{M}_n(S))$  olduğunu gösterirsek ispat tamamlanacaktır. Aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

Durum 1.  $\gamma \neq 0$  olsun. Bu durumda Henriksen (1974) daki makalesinde verilen

Kaplansky'nın yöntemiyle (\*) eşitliğindeki  $\begin{pmatrix} U & \beta + \delta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$  matrisi için

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\gamma U^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \beta + \delta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & \beta + \delta \\ 0 & -\gamma U^{-1}(\beta + \delta) \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu denklem göz önüne alındığında,  $\gamma U^{-1}(\beta + \delta) = 1$  olacak şekilde bir  $\delta$  seçilebilirse ispat tamamlanacaktır. Böylece  $\begin{pmatrix} U & \beta + \delta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \in U(\mathbb{M}_{n-1}(S))$  olacaktır.  $\gamma \neq 0$  olduğundan  $\gamma U^{-1} \neq 0$  olur. Buradan  $\gamma U^{-1}(\beta + \delta) = 1$  denklemi  $S$  içinde çözülebilir.

Durum 2.  $\gamma = 0$  olsun. Eğer  $\beta \neq 0$  ise, bu durumda ispatı tamamlamak için yukarıdaki işlemleri tekrarlayabiliriz. Eğer  $\beta = 0$  ise, bu durumda  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  olur. Kabul edelim ki  $A$  nın  $i$ . satırı  $\gamma' \neq 0$  olsun.  $M$ 'yi  $I_n + E_n$  ile, eşlenik yaparak  $\gamma' \neq 0$  olmak üzere  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ \gamma' & 0 \end{pmatrix}$  şeklinde yeni bir matrise ulaşırız. Bu durumda Durum1'e döneriz ki; bu da ispatı tamamlar. ■

### 3.3. İyi Halka Olma Özelliği Morita Değişmez midir?

$\mathcal{P}$  bir halka özelliği olmak üzere, eğer bir  $R$  halkası  $\mathcal{P}$  özelliğine sahip olduğunda, her  $e$  tam eşkare elemanı için  $eRe$  halkası ve her  $n$  pozitif tamsayısı için  $\mathbb{M}_n(R)$  halkası da  $\mathcal{P}$  özelliğine sahip oluyorsa bu durumda  $\mathcal{P}$  özelliğine *Morita Değişmez (Morita İnvaryant)* özellik denir.

Bu bölüm "iyi halka olma özelliğinin" Morita değişmez özellik olup olmadığının araştırılmasına ayrılmıştır. Önceki bölümde iyi halka üzerine kurulan bir matris halkasında iyi

halka olduğunu yani iyi halka olma özelliğinin matris halkalarına taşındığını gördük. Ardından doğal olarak aşağıdaki soru ortaya çıkar.

**Soru 3.3.1** Eğer  $R$  bir iyi halka ve  $e \in R$  bir tam eşkare ( $ReR = R$ ) ise, bu durumda  $eRe$  halkası bir iyi halka olur mu?

Teorem 3.1.16 (2) den, bir iyi halkanın basit halka olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan,  $R$  bir basit halka iken,  $e^2 = e \in R$  için  $eRe$  halkasında basit halka olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Şimdi bunu görelim.  $R$  bir basit halka ve  $e^2 = e \in R$  olsun.  $R$  halkasının ideallerinin kümesinden,  $eRe$  halkasının ideallerinin kümesine tanımlanan  $\alpha: I \rightarrow eIe$  dönüşümünü ve  $eRe$  halkasının ideallerinin kümesinden  $R$  halkasının ideallerinin kümesine tanımlanan  $\beta: J \rightarrow RJR$  dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda  $\alpha\beta$  özdeşlik dönüşümü olduğundan  $\beta$  bire-bir dir. Bu ise bize,  $R$  nin bir basit halka olması durumunda  $eRe$  nin de bir basit halka olduğunu gösterir. Fakat Soru 3.3.1 de iyi halkalar için sorulan soruyu cevaplamak oldukça zordur. Bunun için,  $eRe$  nin iyi elemanları ile  $R$  nin iyi elemanları arasında nasıl bir ilişki olduğunu araştırarak başlayabiliriz.  $1 - e$  nin tamamlayıcı eşkaresi  $f$  olsun. Bu durumda  $U(eRe) + f \subseteq U(R)$  ve  $nil(eRe) \subset nil(R)$  oldukları açıktır. Bu iki kapsama yardımıyla

$$\Phi(eRe) + f \subset \Phi(R)$$

olduğunu görebiliriz. Bununla beraber,  $a \in eRe$  ve  $a + f \in \Phi(R)$  olması  $a \in \Phi(eRe)$  olmasını gerektirmez. Aşağıdaki örnek den bunu göreceğiz. Yukarıdaki kapsama  $\Phi(eRe)$  ve  $\Phi(R)$  iyi kümeleri arasında bir ilişki sağlarken, bu ilişki Soru 3.3.1 cevaplamak için yeterli değildir. Soru 3.3.1 i cevaplamak için  $\Phi(R)$  ve  $\Phi(eRe)$  kümeleri arasında daha iyi bir ilişki olup olmadığını bulmak zorundayız. Örneğin, herhangi bir tam eşkare  $e \in R$  için  $eRe \cap \Phi(R) \subseteq \Phi(eRe)$  kapsaması doğru ise, bu durumda Soru 3.3.1' in cevabı kesinlikle evet olurdu. Maalesef, bu kapsama bağıntısı genelde geçerli değildir. Bunu aşağıdaki örneklerden göreceğiz.

**Örnek 3.3.2**  $R = \mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$  olmak üzere  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  tam eşkareyi göz önüne alalım.

$S := eRe$  ile gösterelim.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  matrisinin  $S$  de bir iyi olmayan eleman olduğunu

sonraki bölümde göreceğiz.  $A$ 'yı  $R$  nin elemanı olarak  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  şeklinde yazabiliriz.

Diğer taraftan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U + T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in U(R)$  ve  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{nil}(R)$  vardır.

Ayrıca  $\det(U) = -1$  ve  $T^3 = 0$  dir. Aynı inşa yöntemi kullanılarak  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Phi(R)$

olduğu görülebilir. Yani,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

**Örnek 3.3.3**  $S$  herhangi bir halka ve  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  olması durumunda  $R = \mathbb{M}_2(S)$  için  $eRe \cap \Phi(R) \subset \Phi(eRe)$  kapsama bağıntısı doğru olmayabilir. Burada  $e$ ,  $R$  nin bir tam eşkare elemanıdır.  $S = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  alalım. Bu durumda  $R = \mathbb{M}_2(S) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  olacaktır. Ayrıca  $S \cong eRe$  olur. Önceki örnekte olduğu gibi iyi olmayan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in S$  matrisini alalım. Böylece,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_1 + T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $U_1 \in U(R)$  ve  $T_1 \in \text{nil}(R)$  olduğundan  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(S)$  matrisi bir iyi matristir.  $a \in eRe$  için,  $a + (1 - e) \in \Phi(R)$  gerçeği  $a \in \Phi(eRe)$  olmasını gerektirmez. Genellikle  $e \in R$  tam eşkare elemanı için  $eRe \cap \Phi(R) \not\subseteq \Phi(eRe)$  olması Soru 3.1.1'e olumlu bir yanıt alma umutlarımızı tamamen yıkmamalıdır. Bunun nedeni, Soru 3.3.1 ile çalışırken  $R \setminus \{0\}$  in tüm elemanlarının iyi olduğuna dair güçlü bir varsayım altındayız. Aşağıdaki Teorem 3.3.5'te özel bir durumda Soru 3.3.1'e olumlu bir cevap verilecektir. Bu teoremin ispatı aşağıdaki lemma ile yapılacaktır.

**Lemma 3.3.4**  $S$  bir halka olmak üzere, eğer  $A = (a_{ij}) \in R = \mathbb{M}_n(S)$  bir iyi matris ise, bu durumda  $\sum_{i,j} Sa_{ij}S = S$  dir. Özel olarak; eğer bir  $a \in S$  ve bir  $E_{ij}$  matris birimi için  $A = aE_{ij} \in \Phi(R)$  ise, bu durumda  $SaS = S$  dir.

**İspat** İspata başlamadan önce  $R$  bir halka ve  $I \triangleleft R$  olmak üzere eğer  $U = (u_{ij}) \in U(\mathbb{M}_n(R))$  ise, bu durumda  $(u_{ij} + I) \in U(\mathbb{M}_n(R/I))$  ve  $T = (t_{ij}) \in \text{nil}(\mathbb{M}_n(R))$  ise, bu durumda  $(t_{ij}I) \in \text{nil}(\mathbb{M}_n(R/I))$  olduklarını hatırlayalım. Şimdi  $A = (a_{ij}) \in R = \mathbb{M}_n(S)$  bir iyi matris olsun. Bu durumda  $A = (a_{ij}) = (u_{ij}) + (t_{ij}) = U + T$  olacak şekilde  $U = (u_{ij}) \in U(\mathbb{M}_n(S))$  ve  $T = (t_{ij}) \in \text{nil}(\mathbb{M}_n(S))$  vardır.  $J = \sum_{i,j} Sa_{ij}S$  olsun. Bu durumda her  $i, j$  için  $a_{ij} + J = 1a_{ij}1 + J = 0 + J$  dir.  $(0 + J) \in \mathbb{M}_n(S/J)$  için  $(0 + J) = (a_{ij} + J) = (u_{ij} + t_{ij} + J) = (u_{ij} + J) + (t_{ij} + J)$  ve  $(u_{ij} + J) \in U(\mathbb{M}_n(S/J))$ ,  $(t_{ij} + J) \in \text{nil}(\mathbb{M}_n(S/J))$  olduğundan  $\mathbb{M}_n(S/J) = 0$  ve buradan da  $S/J = 0$  olur ki, bu da bize  $S = J$  olduğunu verir. Özel olarak,  $A = aE_{ij} \in \Phi(R)$  ise, bu durumda  $S = \sum_{i,j} Sa_{ij}S = SaS$  olacağı açıktır. ■

**Teorem 3.3.5**  $S$  bir değişmeli halka olmak üzere  $R = \mathbb{M}_n(S)$  olsun. Uygun  $i$  ve  $j$  için  $aE_{ij} \in \Phi(R)$  olacak şekilde bir  $a \in S$  varsa, bu durumda  $a \in U(S)$  dir. Özel olarak  $R$  nin bir iyi halka olması için gerek ve yeter koşul  $S$  nin bir cisim olmasıdır.

**İspat**  $S$  bir değişmeli halka,  $R = \mathbb{M}_n(S)$  ve  $aE_{ij} \in \Phi(R)$  olacak şekilde bir  $a \in S$  var olsun. Lemma 3.3.4 ten  $SaS = S$  olur. Buradan  $1 \in S = SaS$  olup,  $1 = S_1aS_2$  olacak şekilde  $S_1, S_2 \in S$  vardır.  $S$  değişmeli olduğundan  $a \in U(S)$  olur. Şimdi  $R$  bir iyi halka olsun.  $S$  birimli ve değişmeli olduğundan  $S$  nin bir cisim olduğunu göstermek için  $0 \neq a \in S$  olsun.  $0 \neq aE_{11} \in R$  için  $aE_{11} \in \Phi(R)$  olacağından yukarıdaki gibi  $a \in U(S)$  olur. Sonuç olarak  $S$  bir cisimdir. Tersine  $S$  bir cisim ise, bu durumda  $S$  bir iyi halkadır. Teorem 3.2.1 gereğince  $R = \mathbb{M}_n(S)$  bir iyi halkadır. ■

### 3.4 $2 \times 2$ Tipindeki İyi ve Temiz Matrisler

Bu bölümde  $R = \mathbb{M}_2(S)$  özel durumu için  $R$  halkasının iyi elemanları üzerine çalışacağız. Matrislerin tersinirliğini belirlemek için güçlü bir kriteri kullanmak amacıyla, bu bölüm boyunca  $S$  yi bir değişmeli halka olarak alacağız. İlk vereceğimiz teorem,  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  şeklindeki bir matrisin iyi olup olmadığını belirlemek için kolay bir metot verecektir ve ayrıca böyle bir matrisin iyilik özelliği ile temizlik özelliği arasındaki ilişkiyi verecektir.

**Teorem 3.4.1**  $S$  değişmeli bir bölge olmak üzere  $R = \mathbb{M}_2(S)$  olsun. Bu durumda  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  matrisinin iyi olması için gerek ve yeter koşul  $b + aS$  kümesinin  $S$  nin bir birimselini içermesidir. Bu durumda  $A$  nın  $R$  de bir temiz matris olması gerekir.

**İspat**  $S$  bir değişmeli bölge,  $R = \mathbb{M}_2(S)$  ve  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  olsun.  $A \in \Phi(R)$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $A = U + T$  olacak şekilde bir  $U \in U(R)$  ve  $T \in \text{nil}(R)$  vardır. Buradan  $U = A - T \in U(R)$  olur.  $S$  nin kesir cismi üzerinde çalışırken  $T^2 = 0$  olduğu görülür.  $T = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  olsun.  $T^2 = 0$  dan  $x^2 + yz = 0$ ,  $y(x + t) = 0$ ,  $z(x + t) = 0$  ve  $zy + t^2 = 0$  olur. Eğer  $x + t \neq 0$  olsa, bu durumda  $z(x + t) = 0$  den  $z = 0$  olmalıdır.  $y(x + t) = 0$  dan  $y = 0$  olmalıdır.  $xy = 0$  ve  $x^2 + yz = 0$  dan  $x = 0$  olmalıdır.  $y = 0$  ve  $zy + t^2 = 0$  dan  $t = 0$  olmalıdır. Böylece  $T = 0$  ve buradan  $A - T = A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U(R)$  olması bir çelişkidir.

O halde  $x + t = 0$  yani  $\text{tr}(T) = 0$  olmalıdır. Diğer taraftan  $x + t = 0$  ise  $t = -x$  olup  $xt - yz = x(-x) - yz = -x^2 - yz = -(x^2 + yz) = -0 = 0$  olduğundan  $\det(T) = 0$  elde edilir. Böylece  $T$  matrisi  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$  formunda olmalıdır. Burada  $x^2 + zy = 0$  dır. Diğer taraftan;  $A - T = \begin{pmatrix} a - x & b - y \\ -z & x \end{pmatrix} \in U(R)$  olduğundan,  $v := \det(A - T) = (a - x)x + (b - y)z = ax - x^2 + bz - yz = ax + bz - (x^2 + yz) = ax + bz - 0 = ax + bz \in U(S)$  olur. İfade edelim ki,  $z \in U(S)$  dir. Eğer böyle olmasaydı  $y ; S$  nin bir  $M$  maksimal ideali tarafından içerilirdi. Buradan  $x^2 + zy = 0$  olması  $x \in M$  olmasını gerektirirdi ve böylece  $v \in M$  olurdu ki bu da bir çelişkidir. Yukarıdaki eşitlikten  $b + a(xz^{-1}) = vz^{-1} \in U(S)$  elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. Tersine kabul edelim ki  $b + aS ; S$  de bir birimsel içersin. Bu durumda  $b + as \in U(S)$  olacak şekilde bir  $s \in S$  vardır. Bu durumda  $T = \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \in R = M_2(S)$  yazılırsa, bu durumda

$$T^2 = \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ 1 & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 - s^2 & -s^3 + s^3 \\ s - s & -s^2 + s^2 \end{pmatrix} = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \det(A - T) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ 1 & -s \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a - s & b + s^2 \\ -1 & s \end{pmatrix} = as - s^2 + b + s^2 \\ &= b + as \in U(S) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $A - T \in U(R)$  olup, bu da bize  $A \in \Phi(R)$  olduğunu verir. Son olarak  $A$  nın bir temiz matris olduğunu gösterelim. Uygun bir  $s \in S$  için  $b + as \in U(S)$  olmak üzere  $E = \begin{pmatrix} 1 + s & -s(1 + s) \\ 1 & -s \end{pmatrix} \in R$  eşkare matrisini göz önüne alalım. Bu durumda,  $\det(A - E) = \det\begin{pmatrix} a - 1 - s & b + s + s^2 \\ -1 & s \end{pmatrix} = as + b \in U(S)$  olduğundan  $A - E \in U(R)$  olur ki, bu da bize  $A$  nın bir temiz matris olduğunu gösterir. ■

$\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası için  $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$  olduğundan Teorem 3.4.1 den direkt aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Sonuç 3.4.2**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$  nin bir iyi eleman olması için gerek ve yeter koşul

$b \equiv \pm 1 \pmod{a}$  olmasıdır. Bu durumda  $A$  nın  $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  de bir temiz matris olması gerekir.

**Sonuç 3.4.3** Eğer değişmeli  $S \neq 0$  halkası sabit aralık bir özelliğine sahip ise, bu durumda  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R = \mathbb{M}_2(S)$  nin iyi olması için gerek ve yeter koşul  $aS + bS = S$  olmasıdır. Bu durumda  $A$  nın  $R$  de temiz olması gerekir.

**İspat** Kabul edelim ki  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R = \mathbb{M}_2(S)$  bir iyi matris olsun. Bu durumda Lemma 3.3.4 den  $SaS + SbS = S$  olur.  $S$  değişmeli olduğundan  $aS + bS = S$  elde edilir. Şimdi tersine  $aS + bS = S$  olsun.  $S$  halkası sabit aralık bir özelliğine sahip olduğundan  $b + aS; S$  de bir birimsel içerir. Böylece Teorem 3.4.1 den  $A \in \Phi(R)$  olduğu görülür. ■

Değişmeli halkalar üzerindeki  $2 \times 2$  tipindeki matrisler için "iyi" ve "temiz" notasyonları bağımsızdır. Aşağıdaki örnek  $\mathbb{M}_2(S)$  deki sıfırdan farklı temiz elemanları iyi olmayabileceğini gösterir.

**Örnek 3.4.4**  $S$  bir değişmeli halka olmak üzere  $R = \mathbb{M}_2(S)$  olsun. Herhangi bir birimsel olmayan  $b \in S$  için  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  üstel sıfır matrisi temizdir. Gerçekten  $A = I_2 + (A - I_2)$  olacak şekilde  $I_2 \in \text{idem}(R)$  ve  $A - I_2 \in U(R)$  vardır. Bununla beraber,  $bS \neq S$  olduğundan Lemma 3.3.4 gereğince  $A$  bir iyi matris değildir.  $A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  matrisini göz önüne alalım.  $A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in \text{idem}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}))$  ve  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in U(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}))$  olduğundan  $A'$  bir temiz matristir. Fakat Sonuç 3.4.2 ye göre  $3 \neq \pm 1 \pmod{5}$  olduğundan  $A'$  bir iyi matris değildir. İyi fakat temiz olmayan  $2 \times 2$  tipindeki bir matris inşa etmek için ilk olarak aşağıdaki teoremi vereceğiz.

**Teorem 3.4.5** Değişmeli bir  $S$  bölgesi üzerindeki bir  $A = \text{diag}(a, 1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  diagonal matrisinin  $R = \mathbb{M}_2(S)$  de temiz olması için gerek ve yeter koşul  $a \in U(S) \cup (1 + U(S))$  olmasıdır.

**İspat**  $a \in U(S) \cup (1 + U(S))$  olsun. Bu durumda  $a \in U(S)$  veya  $a \in 1 + U(S)$  dir. Eğer  $a \in U(S)$  ise, bu durumda  $\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \in U(S)$  olduğundan  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(R)$  olur.

Böylece  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{idem}(R)$  ve  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(R)$  olduğundan  $\text{diag}(a, 1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  bir temiz matristir. Şimdi  $a \in 1 + U(S)$  olsun. Bu durumda

$a = 1 + u$  olacak şekilde  $u \in U(S)$  vardır. Böylece  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  olup  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{idem}(R)$  ve  $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(R)$  olduğundan  $A = \text{diag}(a, 1)$  yine bir temiz matristir.

Şimdi kabul edelim ki  $A = \text{diag}(a, 1)$ ,  $R = \mathbb{M}_2(S)$  de bir temiz matris olsun. Bu durumda  $A = E + U$  olacak şekilde  $E = E^2 \in R$  ve  $U \in U(R)$  vardır. Böylece  $A - E \in U(R)$  dir.

Eğer  $E = I_2$  olsaydı  $A - E = A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U(R)$  olurdu. Böylece  $E \neq I_2$  olur.

Eğer  $E = 0$  ise, bu durumda  $A = U \in U(R)$  olması  $a \in U(S)$  olmasını gerektirir. Şimdi kabul edilebilir ki  $E \notin \{0, I_2\}$  olsun. Bu durumda Cayley–Hamilton teoreminden kolayca;  $s, x, y \in S$  ve  $s(1 - s) = xy$  olmak üzere  $E$  nin  $\begin{pmatrix} s & x \\ y & 1 - s \end{pmatrix}$  formunda olduğunu görebiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} \det(U) &= \det(A - E) = \det\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & x \\ y & 1 - s \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a-s & -x \\ -y & s \end{pmatrix} \\ &= (a-s)s - x = as - s^2 - xy = s(a-1) \in U(S) \end{aligned}$$

olması  $a - 1 \in U(S)$  olur. Buradan  $a \in 1 + U(S)$  olur ki bu da ispatı tamamlar. ■

**Örnek 3.4.6** Teorem 3.4.5 de olduğu gibi, eğer  $a \notin U(S) \cup (1 + U(S))$  ise, bu durumda  $A = \text{diag}(a, 1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$  matrisi temiz değildir. Fakat her  $a \in S$  için;  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U(R)$  ve  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{nil}(R)$

olduğundan  $A$  bir iyi matristir. Özel olarak  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkası içinde  $a = 3$  veya  $a = -2$  seçilirse  $A = \text{diag}(a, 1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrisi  $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  içinde iyidir. Fakat temiz değildir.

**Örnek 3.4.7** Örnek 3.3.2 de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  matrisinin  $R = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  de bir iyi matris olmadığını gördük. Şimdi bu matrisin bir iyi matris olmadığını ispat edeceğiz. Daha genel olarak  $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$  matrisi ile başlayalım.  $R$  de  $B$  nin hangi şartlar altında iyi matris olabileceğini araştıracağız. Bu iyi olma koşulu  $\det(B - T) \in \{\pm 1\}$  olacak şekilde bir  $T \in R$  üstel sıfır matrisinin var olmasına dayanır.  $\mathbb{Z}$  bir tamlık bölgesi olduğundan Teorem 3.4.1 in ispatında olduğu gibi,  $s^2 + xy = 0$  olacak şekilde uygun  $s, x, y \in \mathbb{Z}$  için  $T = \begin{pmatrix} s & x \\ y & -s \end{pmatrix}$  matrisine sahibiz. Yani,  $B$  nin iyi olma koşulu

$$\det \begin{pmatrix} 1-s & b-x \\ c-y & s \end{pmatrix} = s(1-s) - (b-x)(c-y) = s - bc + cx + by = \pm 1$$

ile ifade edilirdi.  $r := bc \pm 1$  olarak,  $s = r - (cx + by)$  yazarız. Böylece  $s^2 + xy = 0$  denklemini

$$c^2x^2 + (2bc + 1)xy + b^2y^2 - 2crx - 2bry + r^2 = 0 \quad (1)$$

haline dönüşür.  $(b, c) = (2, -3)$  alınırsa aşağıdaki iki diyafont denklemi elde edilir.

$$9x^2 - 11xy + 4y^2 - 30x + 20y + 25 = 0 \quad (2)$$

$$9x^2 - 11xy + 4y^2 - 422x + 28y + 45 = 0 \quad (3)$$

Bilgisayar yardımıyla bu iki denklemde  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  şeklinde hiçbir çözümün olmadığı görülebilir. Bu ise  $R$  de  $B$  matrisinin iyi olmadığını ispat eder. Bununla beraber  $B$  hem temiz hem de sıfır-temiz bir elemandır. Gerçekten;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

şeklinde bir ayrışım mevcuttur. Sadece  $c$  nin işaretini değiştirerek  $(b, c) = (2, -3)$  alırsak, bu durumda  $r = bc - 1$  olmak üzere (1) denkleminin çözümü yoktur. Fakat  $r = bc + 1$  iken tam olarak  $(-1, 4)$  ve  $(9, -16)$  şeklinde iki tane çözümün var olduğu bilgisayar yardımıyla görülür. Bunun anlamı, karşılık gelen yeni  $B_1$  matrisinin  $R$  de tam olarak;

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 19 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -16 & -12 \end{pmatrix} \quad (5)$$

şeklinde iki tane iyi ayrışımı vardır.  $(b, c) = (6, 7)$  alınırsa  $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \in R = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$  nin

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -417 & -355 \\ 491 & 418 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 418 & 361 \\ -484 & -418 \end{pmatrix} \quad (6)$$

şeklinde bir tek iyi ayrışımaya sahip olduğunu bilgisayar yardımıyla bulabiliriz. Diğer taraftan  $\mathbb{Z}$  halkasını  $\mathbb{Q}$  cismi ile değiştirerek  $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$  da çalışırsak  $B_2$  matrisi açıkça, herhangi bir  $q \in \mathbb{Q} \setminus \{6\}$  için

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

şeklinde sonsuz çoklukta iyi ayrışımaya sahip olur.

#### 4. KAYNAKLAR

- Alpern D, Quadratic equation solver, [www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM](http://www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM).
- Ara P, 2004, The Exchange property for purely infinite simple rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132, 2543-2547.
- Ara P, 2002, Goodearl and E Pardo K R,  $K_0$  of purely infinite simple regular rings, *K – Theory*, 26, 69-100.
- Ashrafi N and Vamos P, 2005, On the unit sum number of some rings, *Quart. J. Math.*, 56, 1-12.
- Breaz S, Călugăreanu G, 2013, P. Danchev and T Micu, Nil-clean matrix rings, *Linear Algebra Appl.*, 439, 3115-3119.
- Călugăreanu G, 2015, UU rings, *Carpathian J. Math.*, 31, 157-163.
- Călugăreanu G, Lam T Y, 2015, Further notes on fine rings, Unpublished.
- Călugăreanu G, Lam T Y, 2016, *Journal Of Algebra and Its Applications* 15, 18 sayfa
- V. Camillo and Yu H P, 1994, Exchange rings, units and idempotents, *Comm. Algebra*, 22, 4737-4749.
- Chebotar M, Lee P H and Puczyłowski E R, 2010, On commutators and nilpotent elements in simple rings, *Bull. London Math. Soc.*, 42, 191-194.
- Danchev P and Lam T Y, 2016, Rings with unipotent units, *Publ. Math. Debrecen*, 88(3-4), 449-466.
- Diesl A J, 2013, Nil clean rings, *Journal Algebra*, 383, 197-211.
- Dubrovin N I, 1993, Rational closures of group rings of left-ordered groups, *Mat. Sb.*, 184(7), 3-48.
- Fuchs L, 1973, *Infinite Abelian Groups*, Vol. 2 Academic Press, New York.
- Grover H, Wang Z, Khurana D, Chen J and Lam T Y, 2014, Sums of units in rings, *J. Algebra Appl.*, 13, Article ID: 1350072, 10 pp.

- Henriksen J and Nicholson W K, 2001, Extensions of clean rings, *Comm. Algebra*, 29, 2589-2595.
- Henriksen M, 1974, Two classes of rings generated by their units, *J. Algebra*, 31, 182-193.
- Khurana D and Lam T Y, 2004, Clean matrices and unit-regular matrices, *J. Algebra*, 280, 683-698.
- Lam T Y, 1999, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 189 Springer-Verlag, Berlin.
- Lam T Y, 2001, *A First Course in Noncommutative Rings*, 2nd edn. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 131 Springer-Verlag, Berlin.
- Lam T Y, 2003, *Exercises in Classical Ring Theory*, 2nd edn. Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- Lam T Y and Murray W, 1997, Unit regular elements in corner rings, *Bull. Hong Kong Math. Soc.*, 1, 61-65.
- Nicholson W K, 1977, Lifting idempotents and Exchange rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229, 269-278.
- Nicholson W K, 1999, Strongly clean rings and Fitting's lemma, *Comm. Algebra*, 27, 3583-3592.
- Nicholson W K and Zhou Y, 2004, Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit, *Glasgow Math. J.*, 46, 227-236.
- Vamos P, 2005, 2 – good rings, *Quart. J. Math.*, 56, 417-430.
- Zelinsky D, 1954, Every linear transformation is a sum of two nonsingular ones, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 627-630.