

T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONSUZ SERİLERİN VE FOURIER SERİLERİNİN  
MUTLAK TOPLANABİLMESİ

Hazırlayan  
Melike DAĞDELEN

Danışman  
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Yüksek Lisans Tezi

Şubat 2024  
KAYSERİ



T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİMDALI

SONSUZ SERİLERİN VE FOURIER SERİLERİNİN  
MUTLAK TOPLANABİLMESİ  
(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan  
Melike DAĞDELEN

Danışman  
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Şubat 2024  
KAYSERİ

## **BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK**

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Melike DAĞDELEN



**“Sonsuz Serilerin ve Fourier Serilerinin Mutlak Toplanabilmesi”** adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

**Hazırlayan**

Melike DAĞDELEN

**Danışman**

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

**Matematik ABD Başkanı**

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

## TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca ve tez çalışmamda beni yönlendiren; akademik anlamda bana rehberlik eden, beni her daim sabırla yönlendiren, değerli bilgi ve tecrübeleriyle eğitim hayatımda yeni tecrübeler kazanmamı sağlayan, yol gösteren kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN' a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Melike DAĞDELEN  
ŞUBAT 2024, KAYSERİ

# SONSUZ SERİLERİN VE FOURIER SERİLERİNİN MUTLAK TOPLANABİLİMESİ

Melike DAĞDELEN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi, Şubat 2024  
Danışman: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

## ÖZET

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yapılan araştırmanın amacı ve önemine yer verilmiştir. Bunlara ek olarak tez çalışmasında kullanılacak olan tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, yöntem, materyaller, verilerin toplanması ve analizleri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde,  $\sum c_m \lambda_m$ ,  $\sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  ve Fourier serilerinin  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirliği ile ilgili teoremler ve ispatlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde,  $\sum c_m \lambda_m$ ,  $\sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  ve Fourier serilerinin  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilirliği üzerine teoremler ve ispatlarına değinilmiştir.

Beşinci bölümde, ise yapılan tez çalışmasıyla ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Mutlak toplanabilme, Riesz ortalaması, Sonsuz seriler, Fourier serisi

# ABSOLUTE SUMMABILITY OF INFINITE SERIES AND FOURIER SERIES

Melike DAĞDELEN

Erciyes University, Institute of Science and Technology  
Thesis, February 2024  
Supervisor: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

## ABSTRACT

The thesis consist of five chapters.

In the first section, the purpose and importance of the research are included. In addition definitions, theorems and lemmas that will be used in the thesis are included.

In the second part, emphasis was placed on the method, materials, data collection and analysis.

In the third chapter, theorems and proofs regarding the  $|\bar{N}, p_m|_k$  summability of  $\sum c_m \lambda_m$ ,  $\sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  and Fourier series are given.

In the fourth chapter, theorems and proofs on  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  summability of  $\sum c_m \lambda_m$ ,  $\sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  and Fourier series are mentioned.

In the fifth chapter, the results and suggestions related to the thesis study are given.

**Keywords:** Absolute summability, Riesz mean, Infinite series, Fourier series.

## İÇİNDEKİLER

### SONSUZ SERİLERİN VE FOURIER SERİLERİNİN MUTLAK TOPLANABİLMESİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	iii
KABUL VE ONAY .....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
SEMBOLLER LİSTESİ .....	x
GİRİŞ .....	1

#### 1. BÖLÜM

##### GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Problem Durumu.....	3
1.2. Araştırmanın Amacı.....	3
1.3. Araştırmanın Önemi .....	3
1.4. Tanımlar .....	3

#### 2. BÖLÜM

##### YÖNTEM VE MATERYAL

2.1. Yöntem .....	12
2.2. Materyal .....	12
2.3. Veri Toplanması ve Analizi.....	12

### 3. BÖLÜM

#### SONSUZ SERİLERİN ve FOURIER SERİLERİNİN $|\bar{N}, p_m|_k$ TOPLANABİLMESİ

3.1.  $\sum c_m \lambda_m, \sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{mp_m}$  ve Fourier Serilerin  $|\bar{N}, p_m|_k$  Toplanabilmesi .....13

### 4. BÖLÜM

#### SONSUZ SERİLERİN ve FOURIER SERİLERİNİN $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$ TOPLANABİLMESİ

4.1.  $\sum c_m \lambda_m, \sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{mp_m}$  ve Fourier Serilerinin  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  Toplanabilmesi.....26

### 5. BÖLÜM

#### SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar.....41

KAYNAKÇA .....42

ÖZGEÇMİŞ .....44

## SEMBOLLER LİSTESİ

- $\sum c_m$  :  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$  sonsuz serisi
- $s_m$  :  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$  sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi
- $s_m = O(1)$  :  $s_m$  dizisi sınırlı
- $BV$  : Sınırlı salınımlı dizi uzayı
- $\Delta r_m$  : Herhangi bir  $r_m$  dizisi için  $r_m - r_{m+1}$
- $(C,1)$  : 1. Mertebeden Cesàro ortalaması
- $(\bar{N}, p_m)$  : Riesz ortalaması

## GİRİŞ

Fourier serileri ilk olarak ısı problemlerinin çözümü amacıyla kullanılmış olsa da günümüzde elektrik teknikerliğinde, akustikte, kuantum fiziğinde, mühendisliklerde, ekonomik hesaplamalarda ve birçok alanda kullanılabilir.

Konu ile ilgili ilk araştırmaları Euler, d'Alembert ve Bernoulli tarafından yapılmıştır. Riemann ve Dirichlet'in katkılarıyla günümüzdeki haline ulaşan Fourier serileri, trigonometrik serilerin çalışmalarında önemli rol oynayan J.B. Joseph Fourier (1783-1830) onuruna Fourier Serileri olarak isimlendirilmiştir.

Toplanabilme teorisi ise matematikte birçok alanda kullanılmakla birlikte genel olarak Analiz ve Uygulama Matematik alanlarında kullanılan teori olmuştur. 19. yüzyılın sonlarına doğru yükselişe geçen toplanabilme teorisi serilere olan ilgiyi arttırmıştır. Seriler genel olarak ıraksak ve yakınsak seriler olacak şekilde iki grupta incelenirken toplanabilme teorisi özellikle ıraksak serilere uygulanmıştır. ıraksak serilerde kendi içerisinde belirli ve belirsiz ıraksak seriler olmak üzere iki grupta ele alınmıştır.

Biliyoruz ki herhangi bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu serinin kısmi toplam dizisinin yakınsak olmasıdır. Yakınsak dizilerin yığılma noktasının tek olduğu kanıtlanmıştır. Belirsiz ıraksak serilere bakıldığında kısmi toplam dizisinin en az iki yığılma noktası vardır ki birden fazla yığılma noktası olan dizilere sınırlı salınımlı diziler denilmiştir. Bu serilere karşılık gelen en yakın değeri bulmak için toplanabilme metotlarına ihtiyaç duyulmuş ve çeşitli toplanabilme metotları geliştirilmiştir. Bu seriye en güzel örnek  $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m$  serisidir. Bu seri ıraksak seri teşkil ettiğinden serinin karşılık geldiği bir değer yoktur. Ancak bu serinin kısmi toplam dizisinin aritmetik Cesàro ortalama dizisi  $(t_m)$ ,  $\frac{1}{2}$  değerine yakınsak gelmektedir. Bunun anlamı Cesàro ortalaması ıraksak olan diziyi yakınsak bir diziye dönüşüyor olmasıdır.

1911 yılında Fekete [1] tarafından  $|C, 1|$  tanımı verilmiş olup daha sonrasında 1957 yılında Flett [2],  $k \geq 1$  olacak şekilde daha kapsamlı bir tanımı olan  $|C, 1|_k$  toplanabilme

metodunu vermiştir. Mutlak toplanabilirlik kavramını 1969 yılında Das [3] tarafından ortaya atılmıştır. 1970 yılında ise Kishore ve Hotta [4] toplanabilme çarpanını bizlere kazandırmıştır.

1985 yılında Bor [5] tarafından  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilme kavramı açıklanmıştır. 1992 yılında Sulaiman [6] tarafından  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilme tanımı yapılmıştır.

Bu çalışmamızda öncelikli olarak pozitif azalmayan dizilerin bilinen bir teoremi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirliği genelleştirilmiştir. Sonrasında aynı dizi için  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilirliği incelenmiştir. Daha sonra pozitif azalmayan dizi yerine hemen hemen artan dizi alınarak  $|\bar{N}, p_m|_k$  ve  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilirliği incelenerek Fourier serilerine uygulamasına yer verilmiştir.

# 1. BÖLÜM

## GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

### 1.1. Problemin Durumu

Sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak toplanabilmesinin esas problem olduğu düşünülmüştür.

### 1.2. Araştırmanın Amacı

Yaptığımız araştırmada temel amacımız, mutlak toplanabilme metotlarını kullanarak pozitif azalmayan diziler ve hemen hemen artan dizilerle ilgili yapılan teoremleri genelleştirmektir.

### 1.3. Araştırmanın Önemi

Pozitif azalmayan dizilerin ve hemen hemen artan dizilerin mutlak toplanabilirliği ile ilgili akademik anlamda yol alan araştırmacılara yardımcı olacak ve onlara ışık tutacak olması bu çalışmamızın önemini göstermektedir.

### 1.4. Tanımlar

Araştırmamızda kullandığımız  $|\bar{N}, p_m|_k$  ve  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilirlik tanımları, teoremlerin ispatı için gerek teşkil eden lemmalar ve bazı tanımları bu bölümde vererek başlayacağız.

**Tanım 1.4.1.**  $(s_m)$ ,  $\sum c_m$  serisinin kısmi toplamlar dizisini ve  $(u_m)$  de 1-inci mertebeden Cesàro ortalamasını gösterebilir.

O halde

$$u_m = \frac{1}{m+1} \sum_{v=0}^m s_v \quad (1.1)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = s$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $s$  değerine  $(C,1)$  toplanabilir denir [7].

**Tanım 1.4.2.**  $u_m$  (1.1) deki gibi tanımlı olmak üzere, eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m - u_{m-1}| < \infty \quad (1.2)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|C, 1|$  toplanabilir denir [1].

**Tanım 1.4.3.**  $k \geq 1$  olmak üzere, eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |u_m - u_{m-1}|^k < \infty \quad (1.3)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|C, 1|_k$  toplanabilir denir [2].

**Tanım 1.4.4.**  $(s_m)$ ,  $\sum c_m$  serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun.  $\alpha > -1$  olmak üzere  $u_m^\alpha$  ve  $t_m^\alpha$  sırasıyla  $(t_m)$ ,  $(mc_m)$  dizisinin  $\alpha$ -ıncı mertebeden  $n$ -inci Cesàro ortalamasını gösterecek şekilde seçelim. Yani

$$u_m^\alpha = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{v=0}^m A_{m-v}^{\alpha-1} s_v \quad (1.4)$$

$$t_m^\alpha = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{v=1}^m A_{m-v}^{\alpha-1} v s_v \quad (1.5)$$

olsun.

Eğer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m^\alpha = s$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $s$  değerine  $(C, \alpha)$  toplanabilir denir.

Burada

$$A_m^\alpha = \binom{m+\alpha}{m} = O(m^\alpha), \alpha > -1, A_0^\alpha = 1 \quad m > 0 \text{ için } A_{-m}^\alpha = 0 \quad (1.6)$$

dır [8].

**Tanım 1.4.5.**  $(u_m^\alpha)$ , (1.4) deki gibi tanımlansın. Eğer  $\alpha > -1$  olmak üzere

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^\alpha - u_{m-1}^\alpha| < \infty \quad (1.7)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|C, \alpha|$  toplanabilirdir denir [1].

**Tanım 1.4.6.**  $k \geq 1$  olacak şekilde eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |u_m^\alpha - u_{m-1}^\alpha|^k < \infty \quad (1.8)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|C, \alpha|_k$  toplanabilirdir denir [2].

**Tanım 1.4.7.**  $(p_m)$ ,

$$P_m = \sum_{v=0}^m p_v \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, (P_{-i} = p_{-i} = 0, i \geq 1) \quad (1.9)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve  $(t_m)$  de diziden diziye  $(\bar{N}, p_m)$  ortalamasını gösterebilirsin.

Yani

$$t_m = \frac{1}{P_m} \sum_{v=0}^m p_v s_v \quad (1.10)$$

olsun.

Eğer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = s$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $s$  değerine  $(\bar{N}, p_m)$  toplanabilirdir denir [9].

**Tanım 1.4.8.**  $(t_m)$ , (1.10) daki gibi tanımlansın. Eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} |t_m - t_{m-1}| < \infty \quad (1.11)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|$  toplanabilirdir denir [10].

**Tanım 1.4.9.**  $k \geq 1$  olacak şekilde eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{P_m}{p_m} \right)^{k-1} |t_m - t_{m-1}|^k < \infty \quad (1.12)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir denir [5].

**Tanım 1.4.10.**  $(\theta_m)$ , herhangi bir pozitif sabit dizi olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta_m^{k-1} |u_m - u_{m-1}|^k < \infty \quad (1.13)$$

ise  $\sum c_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilir denir [6].

**Tanım 1.4.11.**  $T$  ve  $K$  herhangi iki pozitif sabit sayı ve  $(h_m)$  pozitif artan bir dizi olmak üzere

$$Th_m \leq Y_m \leq Kh_m$$

şartını sağlayan pozitif  $(Y_m)$  dizisine hemen hemen artan dizi denir [11].

**Tanım 1.4.12.**  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ve  $e_1, e_2, \dots, e_m \geq 0, f_1, f_2, \dots, f_m \geq 0$  olsun.

Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^m e_k f_k \leq \left( \sum_{k=1}^m e_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^m f_k^q \right)^{1/q} \quad (1.14)$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [12].

**Tanım 1.4.13.**  $p \geq 1$  ve  $e_1, e_2, \dots, e_m \geq 0, f_1, f_2, \dots, f_m \geq 0$  olsun. Bu takdirde,

$$\left( \sum_{k=1}^m (e_k + f_k)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^m e_k^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^m f_k^p \right)^{1/p} \quad (1.15)$$

eşitsizliğine Minkowski Eşitsizliği denir [12].

**Tanım 1.4.14.**  $(e_k)$  ve  $(f_k)$  karmaşık diziler ve  $s_r = e_1 + e_2 + \dots + e_r$  olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^r e_k f_k = \sum_{k=1}^r s_k \Delta f_k + s_n f_n \quad (1.16)$$

eşitliğine Abel dönüşümü denir [13].

**Tanım 1.4.15.**  $C$  ve  $D$  iki farklı toplanabilme metodu için  $C$  toplanabilen her dizi aynı zamanda aynı değere  $D$  toplanabiliyor ise  $C$ 'ye  $D$ 'yi gerektiriyor denir, bu durum  $C \subseteq D$  şeklinde gösterilir. Eğer hem  $C \subseteq D$  hem de  $D \subseteq C$  oluyor ise  $C$  metodu  $D$  metoduna denktir denir [7].

**Tanım 1.4.16.** Her  $x$  için  $f(x + \varphi) = f(x)$  olacak şekilde bir  $\varphi > 0$  sayısı var ise  $f$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon ve  $\varphi$  sayısına da  $f$  nin en küçük esas periyodu denir.

Biliyoruz ki  $\sin x$  ve  $\cos x$  trigonometrik fonksiyonları  $2\pi$  periyotlu, periyodik fonksiyonlardır. Bu durumda  $m \in \mathbb{N}$  için  $k_m$  ve  $t_m$  ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$k_m \cos mx + t_m \sin mx \quad (1.17)$$

fonksiyonu  $2\pi$  periyotlu, periyodik fonksiyondur [14].

**Tanım 1.4.17.**  $x$  bir reel değişken ve  $k_0, k_1, \dots, t_1, \dots$  ler de  $x$  den bağımsız reel katsayılar olmak üzere

$$\frac{1}{2}k_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (k_m \cos mx + t_m \sin mx) \quad (1.18)$$

sonlu trigonometrik toplamına  $n$ -inci mertebeden bir trigonometrik polinom denir [14].

**Tanım 1.4.18.**  $f$ ,  $[-\pi, \pi]$  aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve  $k_m, t_m$  de  $f$  den elde edilen Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{1}{2}k_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (k_m \cos mx + t_m \sin mx) \quad (1.19)$$

trigonometrik serisine  $f$  fonksiyonu tarafından üretilen veya  $f$  fonksiyonuna ait Fourier serisi denir ve sembolik olarak

$$f(x) \sim \frac{1}{2}k_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (k_m \cos mx + t_m \sin mx) \quad (1.20)$$

şeklinde gösterilir.

$f(x)$  in Fourier serisinin sabit terimi sıfır olduğu kabul edilirse, bu durumda

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \quad (1.21)$$

ve

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} (k_m \cos mx + t_m \sin mx) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m(x) \quad (1.22)$$

olur [14].

**Tanım 1.4.19.**  $f(k)$  periyodu  $2\pi$  olan ve  $(L)$ ,  $(-\pi, \pi)$  üzerinde integrallenebilen periyodik bir fonksiyon ve (1.22) şartını sağlayacak şekilde

$$\phi(k) = \frac{1}{2} \{f(x+k) + f(x-k)\}$$

$$\phi_1(k) = \frac{1}{k} \int_0^k \phi(v) dv$$

olsun.

Biliyoruz ki  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ise o zaman  $k_n(x) = O(1)$ , burada  $k_n(x)$ ,  $(mD_m(x))$  dizisinin  $(C,1)$  ortalamasıdır [15].

**Teorem 1.4.20.** Eğer

$$\lambda_m \rightarrow 0 \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.23)$$

$$\sum_{m=1}^n m \log m |\Delta^2 \lambda_m| = O(1) \quad (1.24)$$

ve

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} |t_m|^k = O(\log n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (1.25)$$

ise  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|C, 1|_k$  toplanabilir [16].

**Teorem 1.4.21.**  $(p_m)$

$$P_m = O(mp_m) \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.26)$$

sağlayacak şekilde pozitif sayılar dizisi olsun.

Eğer

$$\sum_{m=1}^n mX_m |\Delta^2 \lambda_m| = O(1) \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.27)$$

$$\sum_{m=1}^n \frac{p_m}{P_m} |t_m|^k = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (1.28)$$

ve (1.23) sağlanırsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [17].

**Teorem 1.4.22.** Eğer  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ve  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(X_m)$  dizisi Teorem 1.4.21' in koşullarını sağlıyorsa  $\sum D_m(x) \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [17].

**Teorem 1.4.23.**  $k \geq 1$  ve  $(X_m)$  pozitif azalmayan bir dizi olsun.  $(\beta_m)$  ve  $(\lambda_m)$

$$|\Delta \lambda_m| \leq \beta_m \quad (1.29)$$

$$\beta_m \rightarrow 0 \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.30)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m |\Delta \beta_m| X_m < \infty \quad (1.31)$$

$$|\lambda_m| X_m = O(1) \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.32)$$

ve

$$\sum_{m=1}^n \frac{|s_m|^k}{m} = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (1.33)$$

sağlayacak şekilde seçilsin.

Ayrıca varsayalım ki  $(p_m)$  dizisi (1.26) ve

$$P_m \Delta p_m = O(p_m P_{m+1}) \quad (1.34)$$

koşulları sağlansın. O halde  $\sum_{m=1}^n \frac{P_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [18].

**Teorem 1.4.24.**  $k \geq 1$  ve  $(X_m)$  pozitif azalmayan bir dizi olsun.  $(\beta_m)$  ve  $(\lambda_m)$  dizisi Teorem 1.4.23'in koşullarını sağlayacak şekilde seçilsin.

$$\sum_{w=1}^s \frac{|t_w|^k}{w} = O(X_s) \quad , \quad s \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

Burada  $(t_w)$ ,  $(mc_m)$  dizisinin  $n$ -inci  $(C,1)$  ortalamasıdır. O halde  $\sum_{m=1}^n \frac{P_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilir [19].

**Teorem 1.4.25.**  $(X_m)$  pozitif azalmayan bir dizi olsun.  $(\lambda_m)$  dizisi (1.27), (1.32) ve (1.35) koşullarını sağlarsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|C, 1|_k$  toplanabilir [16].

**Teorem 1.4.26.** Eğer  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(X_m)$  dizileri Teorem 1.4.21' in koşullarını ve (1.32) koşulunu sağlıyorsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilir [20].

**Teorem 1.4.27.** Eğer  $(X_m)$  hemen hemen artan bir diziye ve (1.27), (1.28), (1.32), (1.35), (1.36) koşullarını sağlanıyorsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilir [21].

**Lemma 1.4.28.** Teorem 1.4.20' nin koşulları ve (1.32) koşulu altında

$$mX_m |\Delta \lambda_m| = O(1) \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.36)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m |\Delta \lambda_m| < \infty \quad (1.37)$$

elde edilir [17].

**Lemma 1.4.29.**  $(X_m)$  pozitif azalmayan bir dizi olsun.  $(\beta_m)$  ve  $(\lambda_m)$  dizisi (1.29) -(1.31) koşullarını sağlıyorsa

$$m\beta_m X_m = O(1) \quad (1.38)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m X_m < \infty \quad (1.39)$$

elde edilir [22].

**Lemma 1.4.30.** [19] Eğer (1.26) ve (1.34) koşulları sağlanıyorsa

$$\Delta \left( \frac{P_m}{p_m m^2} \right) = O \left( \frac{1}{m^2} \right).$$

dır.

**Lemma 1.4.31.** Eğer  $(X_m)$  hemen hemen artan bir dizi ise o zaman (1.28) ve (1.33) koşullarından

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m |\Delta \lambda_m| < \infty \quad (1.40)$$

ve

$$m X_m |\Delta \lambda_m| = O(1) \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.41)$$

sağlanır [21].

**Lemma 1.4.32.** [21] (1.27), (1.28) ve (1.32) koşulları altında

$$\sum_{m=1}^n \frac{|\lambda_m| p_m |t_m|^k}{P_m} = O(1) \quad , \quad m \rightarrow \infty \quad (1.42)$$

dır.

## 2. BÖLÜM

### YÖNTEM VE MATERYAL

#### 2.1. Yöntem

Tez çalışmamızda öncelikli olarak toplanabilme üzerine mevcut çalışmalar ile ilgili akademik kaynaklardan ve internette yararlanılarak makale taramaları ile elde edilen çalışmalar incelenmiştir.

#### 2.2. Materyal

Bu tez çalışmasında yer alan materyaller, toplanabilme teorisi hakkında yazılmış akademik kaynaklar ve yayınlanmış makalelerden oluşmaktadır.

#### 2.3. Veri Toplanması ve Analizi

Kapsamlı bir literatür taraması sonucunda elde edilen sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin  $|\bar{N}, p_m|_k$  ve  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  mutlak toplanabilmesi üzerine yazılan makaleler taranarak belirlenmiştir.

### 3. BÖLÜM

#### SONSUZ SERİLERİN ve FOURIER SERİLERİNİN $|\bar{N}, p_m|_k$ TOPLANABİLİMESİ

##### 3.1. $\sum c_m \lambda_m, \sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{m p_m}$ ve Fourier Serilerin $|\bar{N}, p_m|_k$ Toplanabilmesi

Bu bölümde  $\sum c_m \lambda_m, \sum \frac{p_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  ve Fourier serilerinin  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilmesi ile ilgili Teorem 1.4.21 de verilen teoremi daha zayıf koşullar altında ifade ve ispat edeceğiz.

**Teorem 3.1.1.**  $(X_m), (\lambda_m)$  ve  $(p_m)$  serileri (1.24)-(1.27) koşulları ve

$$\sum_{m=1}^n \frac{p_m |t_m|^k}{P_m X_m^{k-1}} = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

koşulunu sağlıyorsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [23].

**İspat.**  $\sum c_m \lambda_m$  serisinin  $(\bar{N}, p_m)$  ortalaması  $(R_m)$  ile gösterilsin.

O halde tanım gereği;

$$R_m = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m p_u \sum_{r=0}^u c_r \lambda_r = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

$u \geq 1$  için

$$R_m - R_{m-1} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=0}^{m-1} (P_{m-1} - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

olup gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
R_m - R_{m-1} &= \frac{m+1}{mP_m} p_m t_m \lambda_m \\
&\quad - \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u \Delta \lambda_u t_u \frac{u+1}{u} \\
&\quad + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u t_u \lambda_{u+1} \frac{1}{u} \\
&= R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{P_m}{p_m} \right)^{k-1} |R_{m,i}|^k < \infty \quad i = 1, 2, 3, 4$$

olduğunu göstermeliyiz.

İlk önce

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n \left( \frac{P_m}{p_m} \right)^{k-1} |R_{m,1}|^k &= \sum_{m=1}^n \left( \frac{P_m}{p_m} \right)^{k-1} \left( \frac{m+1}{m} \right)^k \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k |t_m|^k |\lambda_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m|^{k-1} |\lambda_m| \frac{p_m}{P_m} |t_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m| \frac{p_m |t_m|^k}{P_m X_m^{k-1}}
\end{aligned}$$

Abel dönüşümü uygulanıp ardından (3.1), (1.32) ve (1.37) koşulları kullanılarak;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} \Delta |\lambda_m| \sum_{r=1}^m \frac{p_r |t_r|^k}{P_r X_r^{k-1}} + O(1) |\lambda_n| \sum_{m=1}^n \frac{p_m |t_m|^k}{P_m X_m^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} |\Delta \lambda_m| X_m + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$i=2$  için  $k > 1$  ve  $\frac{1}{k} + \frac{1}{k} = 1$  olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,2}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{P_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{1}{k}} |\lambda_u| |t_u| \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \right\}^k \\
&\quad \times \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{k-1}{k}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \sum_{u=1}^{m-1} p_u |t_u|^k |\lambda_u|^k \times \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_u|^{k-1} |\lambda_u| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_u| \frac{p_u |t_u|^k}{P_u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

(3.1) ve (1.32) koşulları kullanılarak  $R_{m,1}$  deki gibi

$$= O(1) \quad , n \rightarrow \infty$$

bulunur.

Benzer şekilde  $i=3$  için Hölder eşitsizliği ve (1.36) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,3}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{P_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} p_u |\Delta \lambda_u| |t_u| \frac{u+1}{u} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left( \sum_{u=1}^{m-1} u p_u |\Delta \lambda_u| |t_u| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_{m-1}} \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u (u |\Delta \lambda_u|)^k |t_u|^k \right) \times \left( \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u (u|\Delta\lambda_u|)^{k-1} u|\Delta\lambda_u| p_u |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n u|\Delta\lambda_u| \frac{p_u |t_u|^k}{P_u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur ve bu eşitliğe Abel dönüşümü uygularsak;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u|\Delta\lambda_u|) \sum_{r=1}^u \frac{p_r |t_r|^k}{r X_r^{k-1}} + O(1) n |\Delta\lambda_n| \sum_{u=1}^n \frac{p_u |t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} |\Delta(u|\Delta\lambda_u|)| X_u + O(1) n |\Delta\lambda_n| X_n
\end{aligned}$$

$\Delta\lambda_u = \lambda_u - \lambda_{u+1}$  olup gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} u X_u |\Delta^2 \lambda_u| + O(1) \sum_{u=1}^{n-1} X_u |\Delta\lambda_u| + O(1) n |\Delta\lambda_n| X_n$$

(1.27), (1.36) ve (1.37) koşulları birlikte kullanılarak;

$$= O(1) , \quad n \rightarrow \infty$$

bulunur. Son olarak  $R_{m,1}$  deki gibi

$$\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,4}|^k \leq \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left(\sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u} |\lambda_{u+1}| |t_u|\right)^k$$

Hölder eşitsizliği uygulanıp ardından  $\lambda_m = o(1)$ , (3.1) ve (1.32) koşulları kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \left(\sum_{u=1}^{m-1} p_u |\lambda_{u+1}|^k |t_u|^k\right) x \left(\frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u\right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^m |\lambda_{u+1}| \frac{p_u |t_u|^k}{P_u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

$R_{m,1}$  deki gibi

$$= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

olarak bulunur ki Teorem 3.1.1' in ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.2.**  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ve  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(X_m)$  dizileri Teorem 3.1.1' in koşullarını sağlıyorsa  $\sum D_m(x)\lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [23].

**Teorem 3.1.3.**  $(X_m)$  pozitif azalmayan dizi olsun.  $(X_m)$ ,  $(\beta_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(p_m)$  (1.29)-(1.32), (1.26), (1.34) koşulları ve

$$\sum_{m=1}^n \frac{|t_m|^k}{mX_m^{k-1}} = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

sağlanırsa  $\sum_{m=1}^n \frac{c_m P_m \lambda_m}{m p_m}$  dizisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [24].

**İspat.**

$(R_m)$ ,  $\sum_{m=1}^n \frac{c_m P_m \lambda_m}{m p_m}$  serisinin  $(\bar{N}, p_m)$  ortalaması olsun.

O zaman tanım gereği;

$$R_m = \frac{1}{P_m} \sum_{u=1}^m p_u \sum_{r=1}^u \frac{P_r c_r \lambda_r}{r p_r} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=1}^m (P_m - P_{u-1}) \frac{P_u c_u \lambda_u}{u p_u}$$

$m \geq 1$  için

$$R_m - R_{m-1} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=1}^m (P_m - P_{u-1}) \frac{P_u c_u \lambda_u}{u p_u} - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} (P_{m-1} - P_{u-1}) \frac{P_u c_u \lambda_u}{u p_u}$$

olup gerekli işlemler yapılnca

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \frac{-p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} (u+1) t_u p_u \frac{\lambda_u}{u^2} + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u P_u \Delta \lambda_u (u+1) \frac{t_u}{u^2 p_u} \\ &\quad + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u \lambda_{u+1} (u+1) t_u \Delta \left( \frac{P_u}{u^2 p_u} \right) + \lambda_m t_m \frac{(m+1)}{m^2} \\ &= R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Minkowski eşitsizliğinden;

$$|R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}|^k \leq 4^k (|R_{m,1}|^k + |R_{m,2}|^k + |R_{m,3}|^k + |R_{m,4}|^k)$$

olup teoremin ispatını tamamlamak için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,i}|^k < \infty \quad i = 1, 2, 3, 4$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,1}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} \frac{1}{u} \right|^k \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} p_u |t_u| |\lambda_u| \frac{1}{u} \right\}^k \end{aligned}$$

Hölder eşitsizliği, (1.26) ve (1.32) koşullarını kullanarak;

$$\begin{aligned} &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{1}{k}} \left(\frac{P_u}{p_u}\right) |t_u| |\lambda_u| \left(\frac{1}{u}\right) \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \right\}^k \\ &x \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{k-1}{k}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} p_u \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^k |t_u|^k |\lambda_u|^k \frac{1}{u^k} \right\} \\ &x \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^k |\lambda_u|^k p_u |t_u|^k \frac{1}{u^k} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{P_u}{u p_u}\right)^k |\lambda_u|^k p_u |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{P_u}{u p_u}\right)^{k-1} |\lambda_u|^{k-1} |t_u|^k |\lambda_u| \frac{1}{u} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_u| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Abel dönüşümü, (3.2), (1.29), (1.32) ve (1.39) koşulları uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta |\lambda_m| \sum_{r=1}^u \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} + O(1) |\lambda_n| \sum_{u=1}^n \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta |\lambda_u| X_u + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \beta_u X_u + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1), \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi  $i=2$  için (1.26), (1.29) ve (1.39) koşulları kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,2}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{P_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} \Delta \lambda_u \frac{P_u}{u} t_u \frac{u+1}{u} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} |\Delta \lambda_u| p_u |t_u| \right\}^k \times \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^k |\Delta \lambda_u|^k |t_u|^k p_u \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^{k-1} |\Delta \lambda_u|^k |t_u|^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^{k-1} \beta_u^k |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^{k-1} \beta_u^k \beta_u^{k-1} |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n u^{k-1} \beta_u \frac{|t_u|^k}{u^{k-1} X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n u \beta_u \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

olup Abel dönüşümü, (3.2), (1.31) ve (1.39) koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u\beta_u) \sum_{r=1}^u \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} + O(1) n\beta_n \sum_{u=1}^n \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} u |\Delta\beta_u| X_u + O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \beta_u X_u + O(1) n\beta_n X_n \\
&= O(1), \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliği uygulanıp (1.26), (1.32) ve (3.2) koşulları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,3}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} P_u \Delta\left(\frac{P_u}{u^2 p_u}\right) \lambda_{u+1} (u+1) t_u \right|^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} P_u |\lambda_{u+1}| |t_u| \frac{1}{u} \frac{u+1}{u} \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} p_u |\lambda_{u+1}| \frac{1}{u} |t_u| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \left(\frac{P_u}{p_u}\right)^k p_u \frac{1}{u^k} |\lambda_{u+1}|^k |t_u|^k \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^k p_u \frac{1}{u^k} |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{P_u}{u p_u} \right)^{k-1} \frac{1}{u} |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_{u+1}| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilip  $R_{m,1}$  dekine benzer şekilde

$$= O(1) \quad n \rightarrow \infty$$

olarak bulunur.

Son olarak  $i=4$  için (1.26), (1.32) ve (3.2) koşulları kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n \left( \frac{P_m}{p_m} \right)^{k-1} |R_{m,4}|^k &= \sum_{m=1}^n \left( \frac{P_m}{p_m} \right)^{k-1} \left( \frac{m+1}{m} \right)^k \frac{1}{m^k} |\lambda_m|^k |t_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n m^{k-1} \frac{1}{m^k} |\lambda_m|^{k-1} |\lambda_m| |t_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m| \frac{|t_m|^k}{m X_m^{k-1}}
\end{aligned}$$

$R_{m,1}$  dekine benzer şekilde

$$= O(1), \quad n \rightarrow \infty$$

olarak bulunur ki böylece Teorem 3.1.3' ün ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 3.1.4.**  $(X_m)$  pozitif azalmayan dizi olsun.  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ve  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(\beta_m)$  dizileri Teorem 3.1.3' ün koşullarını sağlıyorsa  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m D_m(x) \lambda_m}{m p_m}$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilirdir [24].

**Teorem 3.1.5.**  $(X_m)$  hemen hemen artan bir dizi.  $(X_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(p_m)$  dizileri (1.26), (1.27), (1.32) koşullarını ve

$$\sum_{m=1}^n \frac{p_m |t_m|^k}{P_m X_m^{k-1}} = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

$$\sum_{m=1}^n \frac{|t_m|^k}{m X_m^{k-1}} = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

sağlıyorsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilir [25].

**İspat.**  $(R_m)$ ,  $\sum c_m \lambda_m$  serisinin  $(\bar{N}, p_m)$  ortalamasını gösterebiliriz.

Tanımdan;

$$R_m = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m p_u \sum_{r=0}^u c_r \lambda_r = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

$u \geq 1$  için

$$R_m - R_{m-1} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=0}^{m-1} (P_{m-1} - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

olup gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \frac{m+1}{m P_m} p_m t_m \lambda_m \\ &\quad - \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u \Delta \lambda_u t_u \frac{u+1}{u} \\ &\quad + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u t_u \lambda_{u+1} \frac{1}{u} \\ &= R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4} \end{aligned}$$

ele edilir.

Minkowski eşitsizliğinden;

$$|R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}|^k \leq 4^k (|R_{m,1}|^k + |R_{m,2}|^k + |R_{m,3}|^k + |R_{m,4}|^k)$$

bulunur.

Teoremin ispatını tamamlamak için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta_m^{k-1} |R_{m,i}|^k < \infty \quad i = 1, 2, 3, 4$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$i=1$  için Abel dönüşümü, (1.32), (3.3) ve (1.40) koşulları gereği

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,1}|^k &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{m+1}{m}\right)^k \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k |t_m|^k |\lambda_m|^k \\ &= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m|^{k-1} |\lambda_m| \frac{p_m}{P_m} |t_m|^k \\ &= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m| \frac{p_m |t_m|^k}{P_m X_m^{k-1}} \\ &= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} \Delta |\lambda_m| \sum_{n=1}^n \frac{p_u |t_u|^k}{P_u X_u^{k-1}} + O(1) |\lambda_n| \sum_{m=1}^n \frac{p_m |t_m|^k}{P_m X_m^{k-1}} \\ &= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} |\Delta \lambda_m| X_m + O(1) |\lambda_n| X_n \\ &= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$i=2$  için Hölder eşitsizliği uygulanıp (3.3) ve (1.32) koşulları kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,2}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{1}{k}} |\lambda_u| |t_u| \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \right\}^k \\ &= x \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{k-1}{k}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right\}^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u |\lambda_u|^k |t_u|^k x \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_u|^{k-1} |\lambda_u| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_u| \frac{p_u |t_u|^k}{P_u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

$R_{m,1}$  dekiye benzer şekilde

$$= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

olarak bulunur.  $i=3$  için Hölder eşitsizliği ve (1.41) koşulu uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,3}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left(\sum_{u=1}^{m-1} P_u |\Delta \lambda_u| |t_u| \frac{u+1}{u}\right)^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left(\sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u} u |\Delta \lambda_u| |t_u|\right)^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \left(\sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u} (u |\Delta \lambda_u|)^k |t_u|^k\right) \\
&\quad x \left(\frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u}\right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \frac{P_u}{u} (u |\Delta \lambda_u|)^{k-1} u |\Delta \lambda_u| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n u |\Delta \lambda_u| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitliğe Abel dönüşümü uygulanıp (3.4), (1.27), (1.40) ve (1.41) koşullarından

$$= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u |\Delta \lambda_u|) \sum_{r=1}^u \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} + O(1) n |\Delta \lambda_n| \sum_{u=1}^n \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u|\Delta\lambda_u|)X_u + O(1)n|\Delta\lambda_n|X_n \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} uX_u|\Delta^2\lambda_u| + O(1) \sum_{u=1}^{n-1} X_u|\Delta\lambda_u| \\
&\quad + O(1)n|\Delta\lambda_n|X_n \\
&= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak  $i = 4$  için Hölder eşitsizliği uygulanıp (1.32) ve (3.4) koşullarından

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{k-1} |R_{m,4}|^k &\leq \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^k} \left( \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u} |\lambda_{u+1}| |t_u| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \left( \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u} |\lambda_{u+1}|^k |t_u|^k \right) x \left( \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{u} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \frac{P_u}{u} |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_{u+1}| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

$R_{m,1}$  dekine benzer şekilde

$$= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.1.5' in ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.6.**  $(X_m)$  pozitif azalmayan dizi olsun.  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ve  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(\beta_m)$  dizileri Teorem 3.1.5' ün koşullarını sağlıyorsa  $\sum D_m(x)\lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m|_k$  toplanabilir [25].

## 4. BÖLÜM

### SONSUZ SERİLERİN ve FOURIER SERİLERİNİN $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$ TOPLANABİLİMESİ

#### 4.1. $\sum c_m \lambda_m, \sum \frac{P_m c_m \lambda_m}{m p_m}$ ve Fourier Serilerinin $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$ Toplanabilirliği

Bu bölümde  $\sum c_m \lambda_m, \sum \frac{P_m c_m \lambda_m}{m p_m}$  ve Fourier Serilerinin  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilirliği ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir.

**Teorem 4.1.1.**  $\left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)$  artmayan dizi olsun.  $(X_m), (\lambda_m)$  ve  $(p_m)$  dizileri Teorem 3.1.1' in koşullarını ve

$$\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{|t_m|^k}{X_m^{k-1}} = O(X_n) \quad m \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

sağlasın. O zaman  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilirdir [26].

**İspat.**  $\sum c_m \lambda_m$  serisinin Riesz ortalaması  $(R_m)$  ile gösterilsin.

Tanım gereği;

$$R_m = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m p_u \sum_{r=0}^u c_r \lambda_r = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

$u \geq 1$  için

$$R_m - R_{m-1} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=0}^{m-1} (P_{m-1} - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

olup gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
R_m - R_{m-1} &= \frac{m+1}{mP_m} p_m t_m \lambda_m \\
&\quad - \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u \Delta \lambda_u t_u \frac{u+1}{u} \\
&\quad + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u t_u \lambda_{u+1} \frac{1}{u} \\
&= R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Minkowski eşitsizliğinden;

$$|R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}|^k \leq 4^k (|R_{m,1}|^k + |R_{m,2}|^k + |R_{m,3}|^k + |R_{m,4}|^k)$$

elde edilir. Teoremin ispatını tamamlamak için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta_m^{k-1} |R_{m,i}|^k < \infty \quad i = 1, 2, 3, 4$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak  $i=1$  için Lemma 1.4.28 uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |R_{m,1}|^k &= \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{m+1}{m}\right)^k \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k |t_m|^k |\lambda_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |\lambda_m|^{k-1} |\lambda_m| \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k |t_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m| \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{|t_m|^k}{X_m^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Abel dönüşümü, (4.1) koşulu ve Lemma 1.4.28 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} \Delta |\lambda_m| \sum_{u=1}^m \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}} \\
&\quad + O(1) |\lambda_n| \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{|t_m|^k}{X_m^{k-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} |\Delta\lambda_m| X_m + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olarak bulunur.  $i=2$  için

$$\sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,2}|^k = \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{P_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} \right\}^k$$

$k > 1$  ve  $\frac{1}{k} + \frac{1}{k} = 1$  olmak üzere Hölder eşitsizliği, (4.1) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_u|^{k-1} |\lambda_u| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \left( \frac{\theta_m p_m}{P_m} \right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} p_u |t_u|^k |\lambda_u| \left( \frac{1}{X_u} \right)^{k-1} \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_u| \theta_u^{k-1} \left( \frac{p_u}{P_u} \right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

Abel dönüşümü uygulanıp Lemma 1.4.28 uygulanırsa

$$= O(1) , \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.

$i=3$  için Hölder eşitsizliği uygulanıp (1.26) koşulu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,3}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{P_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} p_u |\Delta\lambda_u| |t_u| \frac{u+1}{u} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left( \sum_{u=1}^{m-1} u p_u |\Delta\lambda_u| |t_u| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u (u |\Delta\lambda_u|)^k u^k |t_u|^k \right) \\
&\quad \times \left( \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |t_u|^k (u|\Delta\lambda_u|)^{k-1} u|\Delta\lambda_u| \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{\theta_u p_u}{P_u}\right)^{k-1} \frac{p_u}{P_u} \left(\frac{1}{X_u}\right)^{k-1} u|\Delta\lambda_u| |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n u|\Delta\lambda_u| \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

olarak bulur ki bu eşitliğe Abel dönüşümü uygulayıp (1.27) koşulu ve Lemma 1.4.28 kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u|\Delta\lambda_u|) \sum_{r=1}^u \theta_r^{k-1} \left(\frac{p_r}{P_r}\right)^k \frac{|t_r|^k}{X_r^{k-1}} \\
&+ O(1)n|\Delta\lambda_n| \sum_{u=1}^n \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} uX_u |\Delta^2 \lambda_u| + O(1) \sum_{u=1}^{n-1} X_u |\Delta\lambda_u| + O(1)n|\Delta\lambda_n|X_n \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak Abel dönüşümü, (1.26) koşulu ve Lemma 1.4.28 kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,4}|^k &\leq \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} u p_u |\lambda_{u+1}|^k |t_u|^k \frac{1}{u} \left(\frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u\right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u \left(\frac{1}{X_u}\right)^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_{u+1}| \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} |\Delta \lambda_u| X_u + O(1) |\lambda_{n+1}| X_{n+1} \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece Teorem 4.1.1' in ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 4.1.2.**  $\left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)$  artmayan dizi olsun.  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ve  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(X_m)$  dizileri Teorem 4.1.1' in koşullarını sağlıyorsa  $\sum D_m(x) \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilir [26].

**Teorem 4.1.3.**  $\left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)$  artmayan dizi ve Teorem 3.1.3' ün şartları ve

$$\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{|t_m|^k}{m X_m^{k-1}} = O(X_n) \quad (4.2)$$

koşulu altında  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m P_m \lambda_m}{m p_m}$  dizisi  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilir [27].

**İspat.**

$(R_m)$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m P_m \lambda_m}{m p_m}$  serisinin  $(\bar{N}, p_m)$  ortalaması olsun.

O zaman tanım gereği;

$$R_m = \frac{1}{P_m} \sum_{u=1}^m p_u \sum_{r=1}^u \frac{P_r c_r \lambda_r}{r p_r} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=1}^m (P_m - P_{u-1}) \frac{P_u c_u \lambda_u}{u p_u}$$

$m \geq 1$  için

$$R_m - R_{m-1} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=1}^m (P_m - P_{u-1}) \frac{P_u c_u \lambda_u}{u p_u} - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} (P_{m-1} - P_{u-1}) \frac{P_u c_u \lambda_u}{u p_u}$$

olup gerekli düzenlemeler yapınca

$$\begin{aligned}
R_m - R_{m-1} &= \frac{-p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} (u+1) t_u p_u \frac{\lambda_u}{u^2} + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u P_u \Delta \lambda_u (u+1) \frac{t_u}{u^2 p_u} \\
&\quad + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u \lambda_{u+1} (u+1) t_u \Delta \left(\frac{P_u}{u^2 p_u}\right) + \lambda_m t_m \frac{(m+1)}{m^2}
\end{aligned}$$

$$= R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}$$

elde edilir.

Minkowski eşitsizliğinden;

$$|R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4}|^k \leq 4^k (|R_{m,1}|^k + |R_{m,2}|^k + |R_{m,3}|^k + |R_{m,4}|^k)$$

olup teoremin ispatını tamamlamak için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta_m^{k-1} |R_{m,i}|^k < \infty \quad i = 1, 2, 3, 4$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |R_{m,1}|^k &= \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} p_u t_u \frac{u+1}{u} \frac{1}{u} \right|^k \\ &= O(1) \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} p_u |t_u| |\lambda_u| \frac{1}{u} \right\}^k \end{aligned}$$

eşitliğine Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &= O(1) \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{1}{k}} \left( \frac{P_u}{p_u} \right) |t_u| |\lambda_u| \frac{1}{u} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \right\}^k \\ &x \left\{ \left[ \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u^{\frac{k-1}{k}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} p_u \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^k |t_u|^k |\lambda_u|^k \frac{1}{u^k} \right\} \\ &x \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapıp (1.26) koşulu uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \left(\frac{p_u}{p_u}\right)^k |\lambda_u|^k p_u |t_u|^k \frac{1}{u^k} \right\} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{p_u}{p_u}\right)^k |\lambda_u| |\lambda_u|^{k-1} p_u |t_u|^k \frac{1}{u^k} \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{\theta_u p_u}{P_u}\right)^{k-1} \left(\frac{p_u}{u p_u}\right)^k |\lambda_u| |\lambda_u|^{k-1} p_u |t_u|^k \frac{1}{P_u} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{\theta_u p_u}{P_u}\right)^{k-1} \left(\frac{p_u}{u p_u}\right)^{k-1} |\lambda_u| |t_u|^k \frac{1}{u} \frac{1}{X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{\theta_u p_u}{P_u}\right)^{k-1} \frac{1}{u} \frac{1}{X_u^{k-1}} |\lambda_u| |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_u| \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^{k-1} \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitliğe Abel dönüşümü uygulanıp (4.2), (1.29), (1.32) ve (1.39) koşullarını kullanarak;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta |\lambda_u| \sum_{r=1}^u \theta_r^{k-1} \left(\frac{p_r}{P_r}\right)^{k-1} \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} \\
&+ O(1) |\lambda_n| \sum_{u=1}^n \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^{k-1} \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} |\Delta \lambda_u| X_u + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \beta_u X_u + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi  $R_{m,2}$  için ispatlayalım.

Hölder eşitsizliği uygulanıp (1.26), (1.29) ve Lemma 1.4.29 kullanarak;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |R_{m,2}|^k &= \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} \Delta \lambda_u \frac{P_u}{u} t_u \frac{u+1}{u} \right|^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} |\Delta \lambda_u| p_u |t_u| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^k |\Delta \lambda_u| |t_u|^k p_u \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^k |t_u|^k p_u |\Delta \lambda_u|^k \right\} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^k |\Delta \lambda_u|^k p_u |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^{k-1} \beta_u^k |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} u^{k-1} \beta_u^{k-1} \beta_u |t_u|^k \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} u^{k-1} \beta_u \frac{|t_u|^k}{u^{k-1} X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitliğe Abel dönüşümü uygulanıp (4.2), (1.31) koşulları ve Lemma 1.4.29 uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u\beta_u) \sum_{r=1}^u \theta_r^{k-1} \left( \frac{p_r}{P_r} \right)^{k-1} \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} \\
&+ O(1) n \beta_n \sum_{u=1}^n \theta_u^{k-1} \left( \frac{p_u}{P_u} \right)^{k-1} \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} u |\Delta u \beta_u| X_u + O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \beta_u X_u + O(1) n \beta_n X_n
\end{aligned}$$

$$= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.

Şimdi teoremin hipotezleri ve Lemma 1.4.29 kullanılarak;

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,3}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} P_u \Delta \left( \frac{P_u}{u^2 p_u} \right) \lambda_{u+1} (u+1) t_u \right|^k \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \frac{P_u}{p_u} p_u |\lambda_{u+1}| \frac{1}{u} |t_u| \right\}^k \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği ve (1.26) koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} \left( \frac{P_u}{p_u} \right)^k p_u \frac{1}{u^k} |\lambda_{u+1}|^k |t_u|^k \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} \left( \frac{P_u}{u p_u} \right)^k p_u |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \\ &\quad \times \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\ &= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} \left( \frac{P_u}{u p_u} \right)^{k-1} |\lambda_{u+1}| \frac{1}{u} \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}} \\ &= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} |\lambda_{u+1}| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \end{aligned}$$

elde edilir ve Abel dönüşümü kullanılır. (4.2), (1.29), (1.32) ve (1.39) koşulları uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta |\lambda_{u+1}| \sum_{r=1}^u \theta_r^{k-1} \left( \frac{p_r}{P_r} \right)^{k-1} \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} \\ &\quad + O(1) |\lambda_{m+1}| \sum_{u=1}^n \theta_u^{k-1} \left( \frac{p_u}{P_u} \right)^{k-1} \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \beta_u X_u + O(1) |\lambda_{n+1}| X_n \\
&= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Son olarak (1.26) ve (1.32) koşullarından

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |R_{m,4}|^k &= \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left| \lambda_m t_m \frac{m+1}{m^2} \right|^k \\
&= \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left( \frac{m+1}{m} \right)^k \frac{1}{m^k} |\lambda_m|^k |t_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m| \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^{k-1} \frac{1}{m X_m^{k-1}} |t_m|^k
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitliğe Abel dönüşümü uygulanıp (4.2), (1.29), (1.32) ve (1.39) koşulları sırasıyla kullanılarak

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta |\lambda_u| \sum_{r=1}^u \theta_r^{k-1} \left( \frac{p_r}{P_r} \right)^{k-1} \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} \\
&+ O(1) |\lambda_n| \sum_{u=1}^n \theta_u^{k-1} \left( \frac{p_u}{P_u} \right)^{k-1} \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} |\Delta \lambda_u| X_u + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \beta_u X_u + O(1) \lambda_n X_n \\
&= O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur ki böylece Teorem 4.1.3' ün ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 4.1.4.**  $\left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)$  artmayan dizi.  $(X_m)$ ,  $(\lambda_m)$  ve  $(p_m)$  dizileri (1.26), (1.27), (1.32), (1.35) koşullarını ve

$$\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{|t_m|^k}{X_m^{k-1}} = O(X_n) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

koşulunu sağlıyorsa  $\sum c_m \lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilir [28].

**İspat.**  $\sum c_m \lambda_m$  serisinin  $(\bar{N}, p_m)$  ortalaması  $(R_m)$  ile gösterilsin.

O halde tanım gereği

$$R_m = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m p_u \sum_{r=0}^u c_r \lambda_r = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

$u \geq 1$  için

$$R_m - R_{m-1} = \frac{1}{P_m} \sum_{u=0}^m (P_m - P_{u-1}) c_u \lambda_u - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=0}^{m-1} (P_{m-1} - P_{u-1}) c_u \lambda_u$$

olup gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \frac{m+1}{m P_m} p_m t_m \lambda_m \\ &\quad - \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u \Delta \lambda_u t_u \frac{u+1}{u} \\ &\quad + \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} P_u t_u \lambda_{u+1} \frac{1}{u} \\ &= R_{m,1} + R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,4} \end{aligned}$$

diyelim.

Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta_m^{k-1} |R_{m,i}|^k < \infty \quad i = 1,2,3,4$$

olduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak (1.32) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |R_{m,1}|^k &= \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{m+1}{m}\right)^k \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k |t_m|^k |\lambda_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} |\lambda_m|^{k-1} |\lambda_m| \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k |t_m|^k \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n |\lambda_m| \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{|t_m|^k}{X_m^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Abel dönüşümü uygulanıp (4.3), (1.32) ve (1.40) koşulları kullanılarak

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} \Delta |\lambda_m| \sum_{u=1}^m \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}} \\
&+ O(1) |\lambda_n| \sum_{m=1}^n \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{|t_m|^k}{X_m^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{m=1}^{n-1} |\Delta \lambda_m| X_m + O(1) |\lambda_n| X_n \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$i=2$  için

$$\sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,2}|^k = \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\right)^k \left\{ \sum_{u=1}^{m-1} p_u t_u \lambda_u \frac{u+1}{u} \right\}^k$$

$k > 1$  ve  $\frac{1}{k} + \frac{1}{\tilde{k}} = 1$  olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanıp (4.3) ve (1.32) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_u|^{k-1} |\lambda_u| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n \left(\frac{\theta_u p_u}{P_u}\right)^{k-1} p_u |t_u|^k |\lambda_u| \left(\frac{1}{X_u}\right)^{k-1} \sum_{m=u+1}^{n+1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\lambda_u| \theta_u^{k-1} \left(\frac{p_u}{P_u}\right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

$$= O(1) , n \rightarrow \infty$$

elde edilir.

$i=3$  için Hölder eşitsizliği ve (1.41) koşulu uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,3}|^k &= \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{P_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left| \sum_{u=1}^{m-1} P_u |\Delta \lambda_u| |t_u| \frac{u+1}{u} \right|^k \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right)^k \left( \sum_{u=1}^{m-1} u p_u |\Delta \lambda_u| |t_u| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left( \frac{p_m}{P_m} \right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \left( \sum_{u=1}^{m-1} p_u (u |\Delta \lambda_u|)^k u^k |t_u|^k \right) \\ &\quad \times \left( \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u \right)^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |t_u|^k (u |\Delta \lambda_u|)^{k-1} u |\Delta \lambda_u| \\ &\quad \times \sum_{m=u+1}^{n+1} \left( \frac{\theta_m p_m}{P_m} \right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\ &= O(1) \sum_{u=1}^n \left( \frac{\theta_u p_u}{P_u} \right)^{k-1} \frac{p_u}{P_u} \left( \frac{1}{X_u} \right)^{k-1} u |\Delta \lambda_u| |t_u|^k \\ &= O(1) \sum_{u=1}^n u |\Delta \lambda_u| \theta_u^{k-1} \left( \frac{p_u}{P_u} \right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitliğe Abel dönüşümü uygulanıp (1.27), (1.35) ve Lemma 1.4.31 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} &= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta(u |\Delta \lambda_u|) \sum_{r=1}^u \theta_r^{k-1} \left( \frac{p_r}{P_r} \right)^k \frac{|t_r|^k}{X_r^{k-1}} \\ &\quad + O(1) n |\Delta \lambda_n| \sum_{u=1}^n \theta_u^{k-1} \left( \frac{p_u}{P_u} \right)^k \frac{|t_u|^k}{X_u^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} u X_u |\Delta^2 \lambda_u| + O(1) \sum_{u=1}^{n-1} X_u |\Delta \lambda_u| + O(1) n |\Delta \lambda_n| X_n \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak Hölder eşitsizliği uygulanıp,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} |R_{m,4}|^k &\leq \sum_{m=2}^{n+1} \theta_m^{k-1} \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^k \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} u p_u |\lambda_{u+1}|^k |t_u|^k \frac{1}{u} \left(\frac{1}{P_{m-1}} \sum_{u=1}^{m-1} p_u\right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u |\lambda_{u+1}|^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n p_u \left(\frac{1}{X_u}\right)^{k-1} |\lambda_{u+1}| |t_u|^k \sum_{m=u+1}^{n+1} \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \\
&= O(1) \sum_{m=1}^n \left(\frac{\theta_m p_m}{P_m}\right)^{k-1} |\lambda_{u+1}| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \left(\frac{\theta_u p_u}{P_u}\right)^{k-1} \sum_{u=1}^n |\lambda_{u+1}| \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Abel dönüşümü ve (1.32), (1.35) ve (1.40) koşulları kullanılarak;

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} \Delta |\lambda_{u+1}| \sum_{r=1}^u \frac{|t_r|^k}{r X_r^{k-1}} + O(1) |\lambda_{n+1}| \sum_{u=1}^n \frac{|t_u|^k}{u X_u^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^{n-1} |\Delta \lambda_{u+1}| X_{u+1} + O(1) |\lambda_{n+1}| X_{n+1} \\
&= O(1) \sum_{u=2}^n |\Delta \lambda_u| X_u + O(1) |\lambda_{n+1}| X_{n+1} \\
&= O(1) \sum_{u=1}^n |\Delta \lambda_u| X_u + O(1) |\lambda_{n+1}| X_{n+1} \\
&= O(1) , \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece Teorem 4.1.4' ün ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 4.1.5.**  $\left(\frac{\theta_m p_m}{p_m}\right)$  artmayan dizi olsun.  $\phi_1(k) \in BV(0, \pi)$  ve  $(p_m)$ ,  $(\lambda_m)$ ,  $(\theta_m)$  ve  $(X_m)$  dizileri Teorem 4.1.4' ün koşullarını sağlıyorsa  $\sum D_m(x)\lambda_m$  serisi  $|\bar{N}, p_m; \theta_m|_k$  toplanabilir [28].



## 5. BÖLÜM

### SONUÇ VE ÖNERİLER

#### 5.1. Sonuç ve Öneriler

**Sonuç 5.2.1.** Teorem 4.1.3 de  $\theta_m = \frac{P_m}{p_m}$  alınırsa Teorem 3.1.3 elde edilmiş olur.

**Sonuç 5.2.2.** Teorem 4.1.4 de  $(X_m)$  hemen hemen artan dizi ve  $\theta_m = \frac{P_m}{p_m}$  alınırsa

Teorem 3.1.1 elde edilmiş olur.

## KAYNAKÇA

1. Fekete, M., 1911. Zur Theorie der divergenten reihen. **Mathematical és Termesz Ertesitö (Budapest), 29:** 719-726.
2. Flett, T. M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. **Proceedings of the London Mathematical Society , 7 (3):** 113-141.
3. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. **Proceedings of the London Mathematical Society, 19 (3):** 357-384.
4. Kishore, N., Hotta, G. C., 1970. On summability factors. **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 31:** 9- 12.
5. Bor, H., 1985. On two summability methods. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 97 (1):** 147-149.
6. Sulaiman, W.T., 1992. On some summability factors of infinite series, **Proceedings of the American Mathematical Society, 115 (2):** 313-317.
7. Petersen, G. M., 1966. Regular Matrix Transformations. McGraw-Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto, 142 pp.
8. Zygmud, A., 1959. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press.
9. Hardy, G. H., 1973. Divergent Series. Oxford University Press, Oxford, 396 pp.
10. Sunouchi, G. 1949. Notes on Fourier analysis. XVIII. Absolute summability of series with constant terms. **Tohoku Mathematical Journal, 1 (2):** 57–65.
11. Bari, N. K., Stečkin, S. B., 1956. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, 5:** 483-522.
12. Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, London, 208 pp.
13. Abel, N. H., 1826. Untersuchungen über die Reihe:  $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$  (German). **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1:** 311–339.
14. Titchmarsh, E. C., 1961. The Theory of Functions. Oxford University Press. London.

15. Chen, K. K., 1945. Functions of bounded variation and the Cesàro means of Fourier series. **Academia Sinica Science Record**, **1**: 283-289.
16. Mazhar, S. M., 1972. On  $|C, 1|_k$  summability factors of infinite series. **Indian Journal of Mathematics**, **14**: 45-48.
17. Bor, H., 1994. On the absolute Riesz summability factors. **Rocky Mountain Journal of Mathematics**, **24 (4)**: 1263-1271.
18. Bor, H., 1987. A note on  $|\bar{N}, p_n|_k$  summability factors of infinite series. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **18(4)**: 330-336.
19. Bor, H., 1988. Absolute summability factors for infinite series. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **19(7)**: 664-671.
20. Bor, H., 1993. On absolute summability factors. **Proceedings of the American Mathematical Society**, **118 (1)**: 71-75.
21. Mazhar, S. M., 1999. Absolute summability factors of infinite series. **Kyungpook Mathematical Journal**, **39 (1)**: 67-73.
22. Mishra, K. N., 1983. On the absolute Nörlund summability factors of infinite series. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **14 (1)**: 40-43.
23. Bor, H., 2016. Some new results on absolute Riesz summability of infinite series and Fourier series. **Positivity**, **20 (3)**: 599-605.
24. Bor, H., 2020. Certain new factor theorems for infinite series and trigonometric Fourier series. **Quaestiones Mathematicae**, **43(4)**: 441-448.
25. Bor, H., 2021. Factored infinite series and Fourier series involving almost increasing sequences. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, **169**: 102990, 8 pp.
26. Bor, H., 2019. On absolute Riesz summability factors of infinite series and their application to Fourier series. **Georgian Mathematical Journal**, **26 (3)**: 361-366.
27. Özarslan, H. S., Dağdelen M. (2023). A recent note on the absolute Riesz summability factors. 383-391. 7<sup>th</sup> International Conference On Mathematics “An Istanbul Meeting for Word Mathematicians” 11-13 July 2023. İstanbul. Turkey.
28. Bor, H., 2023. A new application of almost increasing sequences to infinite series and Fourier series. **Analysis and Mathematical Physics**, **13 (6)**: 89, 8 pp.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Melike DAĞDELEN

Uyruğu: Türkiye (T.C)

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	ERÜ,Matematik	2024
Lisans	ERÜ,Matematik	2020
Lise	Mustafa Özkan Anadolu Lisesi,Kayseri	2016

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2023-Halen	Dadaloğlu Battal Topuz Anadolu Lisesi	Öğretmen
2022-2023	Açı Eğitim Kurumları	Öğretmen

### YABANCI DİL

İngilizce