

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**ÇİZGELERDE JEODEZİK BASKIN BÜTÜNLÜK
DEĞERİNİN İNCELENMESİ**

Şeyma ONUR

**Danışman
Doç. Dr. Gökşen BACAĞ TURAN**

MANİSA-2024

ŞEYMA

ONUR

ÇİZGELERDE JEODEZİK BASKIN BÜTÜNLÜK DEĞERİNİN İNCELENMESİ

2024

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, tezin yazımında akademik ve etik kurallara aykırı herhangi bir yapay zeka ve program kullanmadığımı beyan ederim.

Şeyma ONUR



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	IV
TABLO DİZİNİ	V
TEŞEKKÜR	VI
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	7
3.1. Bütünlük Değeri ve Baskın Bütünlük Değeri	7
3.2. Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri	8
3.3. Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri İçin Temel Sonuçlar	10
3.4. Dikenli Çizgeler	11
3.5. Dendrimer Çizgeler	12
3.6. Bazı Özel Çizgeler	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	16
4.1. Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri	16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	26
KAYNAKLAR	27

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$V(G)$	Tepeler kümesi
$E(G)$	Ayrıtlar kümesi
$ S $	S kümesinin eleman sayısı
$d(u, v)$	u ve v tepeleri arası uzaklık
$\gamma(G)$	Baskınlık sayısı
$g(G)$	Jeodeziklik sayısı
$\gamma_g(G)$	Jeodezik baskınlık
\cup	Birleşim
P_n	Yol Çizge
C_n	Çevre çizge
W_n	Tekerlek çizge
$K_{1,n}$	Yıldız çizge
$N(v)$	v tepesinin açık komşuluğu
$N[v]$	v tepesinin kapalı komşuluğu
$\deg(v)$	v tepesinin derecesi
$ N(v) $	v tepesinin açık komşuluğunun tepe sayısı
$I(G)$	Bütünlük değeri
$DI(G)$	Baskın bütünlük değeri
$DI_g(G)$	Jeodezik baskın bütünlük değeri
$\lceil \rceil$	Üst tam değer fonksiyonu
$\lfloor \rfloor$	Alt tam değer fonksiyonu
$C_{n,m}$	Dikenli çevre çizgesi
$P_{n,p,u}$	Dikenli yol çizgesi
$S_{n,p,k}$	Dikenli yıldız çizgesi
$D_{p,h}$	Dendrimer çizge

$T_{k,d}$	Düzenli dendrimer çizge
E_P^t	Her bacağına t adet tepe bulunan ağaç çizge
H_n	Helm çizge
S_p^*	Spider çizge
S_{p_1,p_2}^*	Bispider çizge



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Königsberg Köprüsü	1
Şekil 1.2.	Königsberg Köprü Çizgesi	1
Şekil 1.3.	İzmir Büyükşehir Belediyesi Raylı Sistem Ağ Haritası	2
Şekil 2.1.	8 tepeli 7 ayrıtlı G çizgesi	5
Şekil 3.1.	P_6 çizgesi	9
Şekil 3.2.	9 tepeli 8 ayrıtlı G çizgesi	10
Şekil 3.3.	$C_{8,3}$ dikenli çevre çizgesi	11
Şekil 3.4.	$P_{6,3}$ çizgesi	11
Şekil 3.5.	$P_{6,2,3}$ dikenli yol çizgesi	12
Şekil 3.6.	$P_{6,2,3}$ dikenli yıldız çizgesi	12
Şekil 3.7.	D_0 dendrimer çizgesi	12
Şekil 3.8.	$D_{2,1}$ ve $D_{2,2}$ dendrimer çizgeleri	13
Şekil 3.9.	$T_{2,4}$ çizgesi	13
Şekil 3.10.	$T_{3,4}$ çizgesi	14
Şekil 3.11.	S_8 çizgesi	14
Şekil 3.12.	E_3^5 çizgesi	14
Şekil 3.13.	H_6 çizgesi	15
Şekil 3.14.	S_3^* çizgesi	15
Şekil 3.15.	$S_{3,3}^*$ çizgesi	15
Şekil 4.1.	$C_{8,2}$ çizgesi	17
Şekil 4.2.	$P_{6,2,2}$ çizgesi	18
Şekil 4.3.	$S_{4,3,2}$ çizgesi	19
Şekil 4.4.	H_6 çizgesi	20
Şekil 4.5.	E_6^3 çizgesi	21
Şekil 4.6.	$T_{3,3}$ çizgesi	22
Şekil 4.7.	$D_{2,2}$ çizgesi	23
Şekil 4.8.	S_4^* çizgesi	24
Şekil 4.9.	$S_{3,3}^*$ çizgesi	25

TABLO DİZİNİ

Tablo 3.1. P_6 çizgesinin jeodezik baskın kümeleri ve bu küme çıkarılınca geriye kalan en büyük boyutlu bileşen sayısı	9
--	---



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca çalıőmamın her aőamasında bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren, desteğini hiç eksik etmeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Gökşen Bacak Turan'a ve öğrenim hayatım boyunca maddi manevi destek veren ve her zaman yanımda olan aileme teőekkürlerimi sunarım.

Şeyma ONUR
Manisa, 2024



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Çizgelerde Jeodezik Baskın Bütünlük Değerinin İncelenmesi

Şeyma ONUR

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gökşen BACAĞ TURAN

Çizge teorisi günümüzde pek çok uygulama alanı olan bir matematik dalıdır. Bu uygulama alanlarından biri de iletişim ağlarıdır. Bir iletişim ağı, merkezler ve bu merkezlerin birbirleri ile iletişim kurmasını sağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bir iletişim ağında, belli merkezlerin ya da bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki, ağın dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik değeri denir. İletişim ağını modelleyen çizgenin bazı tepe veya ayrıtlarının zarar görmesi halinde çizgenin zedelenebilirlik değerini ölçmek için bazı parametreler tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları bağlantılılık sayısı, bütünlük değeri, saçılma sayısı, kopma derecesi, dayanıklılık değeri ve jeodezik baskın bütünlük değeridir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çizge teorisi ve çizgelerin zedelenebilirliğinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde çizge teorisinde kullanılan bazı temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde çizge türleri, jeodezik baskın bütünlük değeri ve bazı çizgeler için önceden hesaplanan jeodezik baskın bütünlük değerleri verilmiştir. Dördüncü bölümde dikenli çizgeler, dendrimer çizgeler ve bazı özel çizgelerin jeodezik baskın bütünlük değerleri incelenerek bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir. Beşinci bölümde ise sonuç kısmı bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Çizge Teorisi, Bütünlük Değeri, Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri.

2024, 39 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Investigation of Geodetic Dominant Integrity in Graphs

Şeyma ONUR

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Dr. Gökşen BACAĞ TURAN

Graph theory is a branch of mathematics with many areas of application. One of these areas is vulnerability of communication network. A communication network consists of centers and connection lines that enable these centers to communicate with each other. In a communication network vulnerability is the resistance of the graph after disruption of some centers or connections. There are some parameters to measure vulnerability. Some of them are connectivity, integrity, toughness, scattering, tenacity, rupture degree and geodetic domination integrity.

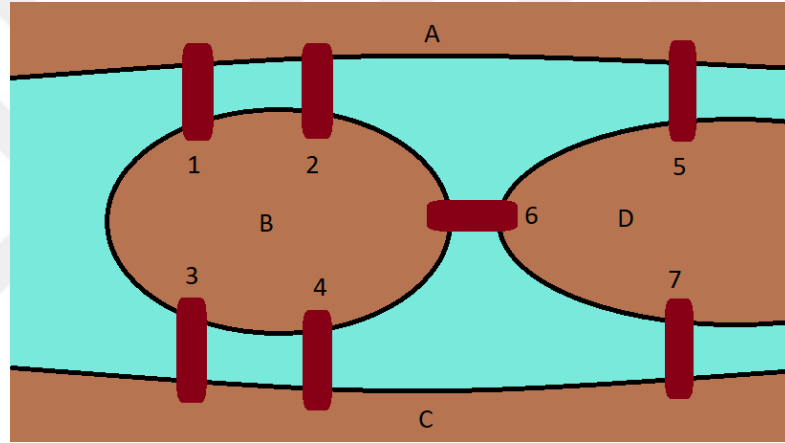
This thesis consist of five chapters. In the first chapter graph theory applications and vulnerability of graphs are mentioned. In the second chapter fundamental definitions are given. In the third chapter types of graphs, definition of geodetic domination integrity and the previously calculated geodetic domination integrity value of some special graphs are given. In the fourth chapter geodetic domination integrity of some special graphs are calculated. In the fifth chapter conclusions and suggestions obtained from that study are given.

Keywords: Graph theory, Integrity, Geodetic Domination Integrity.

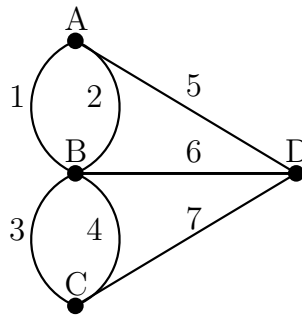
2024, 39 pages

1. GİRİŞ

Çizge teorisi 1736'da Königsberg köprü probleminin Leonhard Euler tarafından çözülmesi ile başlamıştır. Königsberg Şehrinden geçen nehir şehri dört bölgeye ayırıyordu ve bu dört bölgeyi birbirine bağlayan yedi köprü bulunmaktaydı. Şehir sakinleri her köprüden sadece bir kez geçerek şehri dolaşmaya çalışmış fakat başarılı olamamışlardı. Euler bu problemi çizge ile modelleyerek böyle bir şehir turunun mümkün olmadığını ispatlamıştır. Böylelikle çizge teorisinin temelleri atılmıştır. Şekil 1.1'de Königsberg köprülerinin şeması gösterilmiştir. Şekil 1.2'de ise köprüyü modelleyen çizge gösterilmiştir. Şehirde A, B, C ve D ile gösterilen yerler çizgenin tepeleri; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 ile gösterilen köprüler ise çizgenin ayrıtlarıdır.



Şekil 1.1. Königsberg Köprüsü



Şekil 1.2. Königsberg Köprü Çizgesi

Çizge teori, sayılabilir nesnelere arasındaki ilişkilerin bir gösterimidir. Birden fazla nesne arasındaki ilişkiyi modelleyen çizge, tepeler ve bu tepeleri birbirine bağlayan ayrıtlardan oluşan bir kümedir. Günlük hayatımızda karşılaşılan pek çok durumun matema-

etkili ulaşım rotalarının oluşturulmasına yardımcı olur. Bu kümenin analizi, trafik akışının optimize edilmesi, toplu taşıma ağlarının planlanması ve yol güvenliğinin artırılması gibi alanlarda önemli bir rol oynar. Jeodezik küme analizi, trafik sıklığı olan bölgeleri tespit etmek veya alternatif ulaşım yollarını belirlemek gibi sorunlara çözüm bulmaya yardımcı olur. Baskınlık kavramı ise tepeler arasındaki komşuluğu inceler. Haynes ve arkadaşları 1998 yılında baskınlık alanındaki çalışmaları bir kitap halinde yayınlamıştır. Çizge ile modellenebilen dağıtım, hiyerarşi, ulaşım gibi pek çok baskın küme uygulamaları vardır. Baskınlık kavramının tepeler ve ayrıtlar üzerinde tanımlanan çeşitli türleri bulunmaktadır. Bunlardan biri de jeodezik baskınlıktır. Bu kavram 2011 yılında Escudro ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır. Çizge üzerinde seçilen bir küme hem jeodezik hem baskın bir küme ise bu kümeye jeodezik baskın küme denir. Jeodezik ve baskın bir kümenin zarar görmesi ağın güvenliğini olumsuz etkiler. Jeodezik baskın kümenin zarar görmesi ağdaki iletişimin tamamını kesebilir. Bu nedenle jeodezik baskınlık kavramı çizge teoride geniş bir araştırma alanına sahiptir.

Bir ağ yapısında bulunan bağlantılar arasında bozulma veya yok olma gibi durumlar oluştuğunda, ağın genelinde oluşan hasarın derecesi araştırılırken aşağıdaki sorular sorulabilir:

- 1) Zarar gören jeodezik ve baskın merkezlerin sayısı kaçtır?
- 2) Zarar gören hatların/bağlantıların sayısı kaçtır?
- 3) Zarardan sonra oluşan alt ağlar içinde, merkez sayısı en fazla olan alt ağın merkez sayısı kaçtır?
- 4) Aralarında iletişim devam eden merkezler birer alt ağ olarak düşünülürse, bu alt ağların sayısı kaçtır?

Bu soruların yanıtları ağın uğradığı zarar ile ilgili bilgiler verir. Aynı zamanda çeşitli ağları kıyaslamaya da yardımcı olur. Ağın uğradığı zarara ve ihtiyaca göre sorular çeşitlendirilebilir.

İletişim ağları merkezleri çizgenin tepeleri ve bağlantı hatları da çizgenin ayrıtları olarak modellenebilir. Bir iletişim ağını modelleyen çizgenin bazı tepe veya ayrıtlarının zarar görmesi halinde ağın iletişiminin ne kadar dayanacağı önemli bir sorundur. Bir iletişim ağında bazı merkezlerin ya da bağlantı hatlarının zarar görmesinden sonra ge-

riye kalan ağda iletişim kesilene kadar geçen sürede ağın dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik değeri denir [1]. Ağların zedelenebilirlik değerlerini ölçmek için çeşitli parametreler tanımlanmıştır. Bu ölçümlerden bazıları bağlantılılık sayısı (connectivity), bütünlük değeri (integrity), saçılma sayısı (scattering number), kopma derecesi (rupture degree), dayanıklılık değeridir (toughness). Ağlarda ihtiyaç duyulan özelliklere göre bu parametrelerin farklı versiyonları da tanımlanmıştır. Zaman ve maliyeti optimize etmek için herhangi bir ağda jeodezik bir yol bulma sorunu önemli bir rol oynar. Jeodezik bir kümenin çıkarılması ağın güvenlik açığını artırır[2]. Jeodezik yol iki tepe arasındaki en kısa yolu ifade eder. Bu nedenle ağın genelinde oluşan hasarı araştıran, 1 ve 3 numaralı sorulara cevap veren "Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri" parametresi 2021 yılında Balaraman ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çizge teori ve çizgelerin zedelenebilirliği, ikinci bölümde çizge teoride kullanılan bazı temel tanımlar, üçüncü bölümde jeodezik baskın bütünlük değeri ve bazı çizgeler için önceden hesaplanan jeodezik baskın bütünlük değerleri, dördüncü bölümde dikenli çizgeler, dendrimer çizgeler ve bazı özel çizgelerin jeodezik baskın bütünlük değerleri incelenerek bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir. Son bölümde ise sonuç kısmı bulunmaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmada kullanılan bazı tanımlara ve çizge özelliklerine yer verilmiştir. Bir örnek üzerinde jeodeziklik sayısı, baskınlık sayısı ve jeodezik baskınlık sayısı karşılaştırılmıştır.

Tanım 2.0.1. Bir G çizgesi, boştan farklı $V(G)$ tepeler kümesi, $E(G)$ ayrıtlar kümesi olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ sıralı ikilisi ile gösterilir [16].

Tanım 2.0.2. Bir G çizgesinin tepelerinden oluşan bir $S \subseteq V(G)$ kümesi, eğer her $v \in V(G)$ tepesi S nin bir elemanı veya S nin elemanlarından birine komşu ise, S kümesi baskın kümedir. Bu kümelerden en az eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısı G çizgesinin baskınlık sayısını verir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir [1].

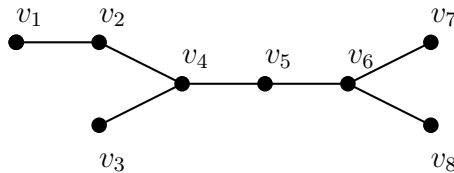
Tanım 2.0.3. $u, v \in V(G)$ iki tepe olsun. Bu iki tepe arasındaki en kısa $u - v$ yolu iki tepe arasındaki uzaklık olarak adlandırılır ve $d(u, v)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.0.4. Bir G çizgesi için $u - v$ yolunun üzerindeki tüm tepelerin kümesi $I_G[u, v]$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.0.5. Bir G çizgesi için $I_G[S] = \bigcup_{u, v \in S} I[u, v]$ olsun. Bir $S \subseteq V(G)$ için $I_G[S] = V(G)$ ise S kümesi jeodezik kümedir. Bu kümelerden en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısı G çizgesinin jeodeziklik sayısını verir ve $g(G)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.0.6. Bir G çizgesinin tepelerinden oluşan bir $S \subseteq V(G)$ kümesi, eğer hem jeodezik hem baskın küme ise, S kümesi jeodezik baskın kümedir. Bu kümelerden en az eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısı G çizgesinin jeodezik baskınlık sayısını verir ve $\gamma_g(G)$ ile gösterilir [3].

Örnek 2.0.7. Şekil 2.1'de verilen G çizgesi için baskınlık sayısı, jeodeziklik sayısı ve jeodezik baskınlık sayısı verilmiştir.



Şekil 2.1. 8 tepeli 7 ayrıtlı G çizgesi

1. G çizgesinin jeodeziklik sayısı $g(G) = 4$ 'tür ve jeodeziklik sayısını veren küme $S = \{v_1, v_3, v_7, v_8\}$ 'dir.

2. G çizgesinin baskınlık sayısı $\gamma(G) = 3$ 'tür ve baskınlık sayısını veren küme $S = \{v_2, v_4, v_6\}$ 'dir.
3. G çizgesinin jeodezik baskınlık sayısı $\gamma_g(G) = 5$ 'tir ve jeodezik baskınlık sayısını veren küme $S = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_8\}$ 'dir.

Tanım 2.0.8. Birbirinden farklı her tepesi komşu olan çizgeye tam (complete) çizge denir ve K_n ile gösterilir [17].

Tanım 2.0.9. $n \geq 1$ olmak üzere tepeleri $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ olmak üzere ayrıtları $v_i v_{i+1}$ ile etiketlenen n tane tepe ve $n-1$ tane ayrıta sahip olan çizgeye yol (path) çizge denir ve P_n ile gösterilir [17].

Tanım 2.0.10. $n \geq 3$ olmak üzere tepeleri $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ için ayrıtları $v_1 v_n$ ve $v_i v_{i+1}$ ile etiketlenen n tane tepe ve n tane ayrıta sahip olan çizgeye çevre (cycle) çizge denir ve C_n ile gösterilir [17].

Tanım 2.0.11. Bir C_{n-1} çevre çizgesine yeni bir tepe eklenmesiyle yani C_{n-1} çizgesindeki her tepenin bu yeni eklenen tepeyle birleştirilmesiyle oluşan n tepeli yeni çizgeye tekerlek (wheel) çizge denir ve W_n ile gösterilir [15].

Tanım 2.0.12. $n+1$ tepeli bir G çizgesinde n tane tepenin derecesi 1, geriye kalan bir tane tepenin derecesi n ise bu çizgeye yıldız çizge adı verilir ve $K_{1,n}$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.0.13. Bir G çizgesinin herhangi bir v tepesinin komşularının oluşturduğu küme v tepesinin açık komşuluğu denir ve $N(v)$ ile gösterilir. $N[v] = N(v) \cup v$ kümesine ise v tepesinin kapalı komşuluğu denir. Bir tepenin komşularının sayısına o tepenin derecesi denir ve $deg(v)$ ile gösterilir. $deg(v) = |N(v)|$ 'dir [17].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bir iletişim ağında bazı merkezlerin ya da bağlantı hatlarının zarar görmesinden sonra geriye kalan ağda iletişim kesilene kadar geçen sürede ağın dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik değeri denir[1]. Zedelenebilirlik değerleri, iletişim ağları ve diğer kompleks yapıları modelleyen çizgelerde ağın dayanıklılığı ve güvenlik açısından daha etkili çözümlerin üretilmesine olanak tanır. İlk olarak zarar gören tepe sayısını ve zarar gören tepeler çizgeden çıkarıldıktan sonra geriye kalan çizgede, en çok tepeye sahip olan bileşenin tepe sayısını inceleyen bir parametre olan bütünlük değeri Barefoot ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır. Bütünlük değeri tepeler ve ayrıtlar üzerinden tanımlanan çeşitli parametrelerle birleştirilerek farklı versiyonları tanımlanmıştır. Baskın bütünlük değeri, bir ağın baskın tepeleri zarar gördüğünde ağın zedelenebilirliğini ölçen bir parametredir ve Sundareswaran ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır [10]. Jeodezik baskın bütünlük değeri ise ağın hem baskın hem de jeodezik tepeleri zarar gördüğünde ağın zedelenebilirliğini ölçen bir parametredir. Jeodeziklik, baskınlık ve bütünlük olarak adlandırılan üç önemli parametrenin birleşiminden oluşur. Jeodezik baskın bütünlük değeri 2021 yılında Balaraman ve arkadaşları tarafından tanımlanmış ve kartezyen çarpım çizgeleri üzerinden bazı sonuçlar elde etmişlerdir [8].

Bu bölümde bütünlük değeri, baskın bütünlük değeri, jeodezik baskın bütünlük değerlerinin tanımları ve bu değerler için elde edilen bazı sonuçlar verimiştir. Sonraki bölümde kullanılacak olan bazı çizge türlerinin tanımları da bu bölümde verilmiştir.

3.1. Bütünlük Değeri ve Baskın Bütünlük Değeri

Tanım 3.1.1. G bir çizge ve $S \subset V(G)$ olsun. $G - S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere G çizgesinin bütünlük değeri (integrity), $I(G)$ ile gösterilir ve

$$I(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [9].

Aşağıda bütünlük değeri için bazı özel çizgelerin sonuçları verilmiştir.

Teorem 3.1.2. [9]

- $I(K_n) = n$.
- $I(K_{1,n-1}) = 2$.
- $I(W_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ için.
- $I(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ için.
- $I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$ için.

Tanım 3.1.3. G bir çizge ve $S \subset V(G)$ çizgenin bir baskın kümesi olsun. $G - S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere G çizgesinin baskın bütünlük değeri, $DI(G)$ ile gösterilir ve

$$DI(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [10].

Aşağıda baskın bütünlük değeri için bazı özel çizgelerin sonuçları verilmiştir.

Teorem 3.1.4. [10]

- $DI(K_{1,n}) = 2$.
- $DI(C_n) = \begin{cases} 3, & n = 3, 4 \text{ ise} \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2, & n \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$.
- $DI(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ ise} \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2, & n \geq 8 \text{ ise} \end{cases}$.

3.2. Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri

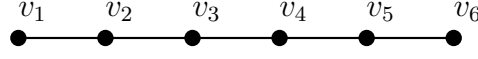
Tanım 3.2.1. G bir çizge ve $S \subset V(G)$ bir jeodezik baskın küme olsun. S kümesi çizgeden çıkarıldığında $G - S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere G çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri (geodetic domination integrity), $DI_g(G)$ ile gösterilir ve

$$DI_g(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Aşağıda jeodezik baskın bütünlük değeri için bazı özel çizgelerin sonuçları verilmiştir.

Örnek 3.2.2. Aşağıdaki yol çizge ele alınırsa, 12 farklı S jeodezik baskın kümesi vardır. Bunlar 3.1 verilmiştir.



Şekil 3.1. P_6 çizgesi

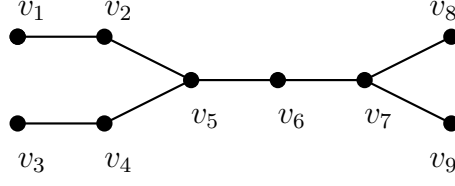
S	$m(G - S)$
$\{v_1, v_3, v_6\}$	2
$\{v_1, v_4, v_6\}$	2
$\{v_1, v_2, v_3, v_6\}$	2
$\{v_1, v_2, v_4, v_6\}$	2
$\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$	2
$\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$	1
$\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$	1
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$	1
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$	1
$\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$	1
$\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$	1
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$	0

Tablo 3.1. P_6 çizgesinin jeodezik baskın kümeleri ve bu küme çıkarılınca geriye kalan en büyük boyutlu bileşen sayısı

- $S_1 = \{v_1, v_3, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_1| + m = 3 + 2 = 5$
- $S_2 = \{v_1, v_4, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_2| + m = 3 + 2 = 5$
- $S_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_3| + m = 4 + 2 = 6$
- $S_4 = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_4| + m = 4 + 2 = 6$
- $S_5 = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_5| + m = 4 + 2 = 6$
- $S_6 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_6| + m = 4 + 2 = 6$
- $S_7 = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 2$ olduğundan $|S_7| + m = 4 + 2 = 6$
- $S_8 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 1$ olduğundan $|S_8| + m = 5 + 1 = 6$
- $S_9 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 1$ olduğundan $|S_9| + m = 5 + 1 = 6$
- $S_{10} = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 1$ olduğundan $|S_{10}| + m = 5 + 1 = 6$
- $S_{11} = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 1$ olduğundan $|S_{11}| + m = 5 + 1 = 6$
- $S_{12} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ için ve $m(G - S) = 0$ olduğundan $|S_{12}| + m = 6 + 0 = 6$

Tanım gereğince jeodezik baskın bütünlük değerinin en küçüğünün $DI_g(P_6) = 5$ olduğu açıkça görülür.

Örnek 3.2.3. Aşağıdaki G çizgesi için bütünlük, baskın bütünlük ve jeodezik baskın bütünlük değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 3.2. 9 tepeli 8 ayrıtlı G çizgesi

- $S = \{v_5, v_7\}$ ve $m(G - S) = 2$ için $I(G) = 4$ tür.
- $S = \{v_2, v_4, v_7\}$ ve $m(G - S) = 2$ için $DI(G) = 5$ tir.
- $S = \{v_1, v_3, v_5, v_8, v_9\}$ ve $m(G - S) = 2$ için $DI_g(G) = 7$ dir.

3.3. Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri İçin Temel Sonuçlar

Teorem 3.3.1. [8]

- $DI_g(K_n) = n$.
- $DI_g(K_{1,n-1}) = n$.
- $DI_g(W_n) = \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 2, n \geq 5$ için.
- $DI_g(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2, n \geq 6$ için.
- $DI_g(P_n) = \left\lceil \frac{(n+2)}{3} \right\rceil + 2$ için.

Teorem 3.3.2. [8]

- Her bağlantılı G çizgesi için; $2 \leq DI_g(G) \leq n$
- $2 \leq \gamma_g(G) + 1 \leq DI_g(G) \leq n$
- $\max\{\gamma(G), g(G)\} \leq \gamma_g(G) \leq DI_g(G) \leq n$

Teorem 3.3.3. G bağlantılı bir çizge olmak üzere $DI_g(G) = 2$ olması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_2$ olmasıdır [8].

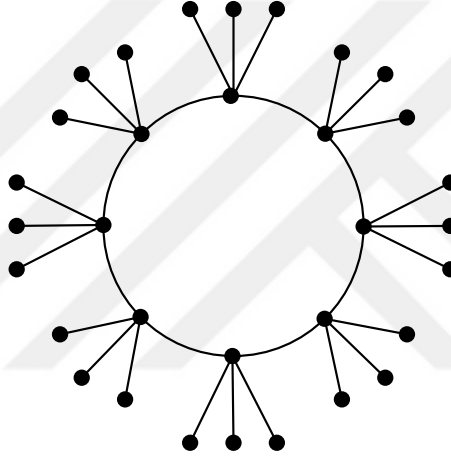
Teorem 3.3.4. G bağlantılı bir çizge olmak üzere $DI_g(G) = 3$ olması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_3$ veya öyle bir $S = \{u, v\}$ jeodezik kümesi vardır ki u ve v birbirinden bağımsızdır [8].

Teorem 3.3.5. G bağlantılı bir çizge olmak üzere $DI_g(G) = n$ olması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_n$ olmasıdır [8].

Teorem 3.3.6. Her $n, k \geq 2$ kol uzunluğu $n - 1$ olan $k - ary$ ağacının jeodezik baskın bütünlük değeri $DI_g(H_n^k) = DI(H_{n-2}^k) + k^{n-1}$ dir [8].

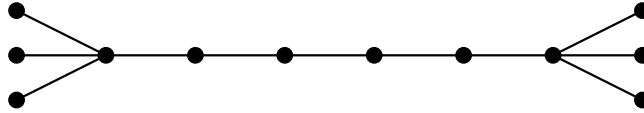
3.4. Dikenli Çizgeler

Tanım 3.4.1. m negatif olmayan tam sayı olsun. Dikenli çevre (thorn ring) çizgesi C_n çizgesinin her bir tepesine m adet izole tepe eklenmesiyle oluşturulur ve $C_{n,m}$ ile gösterilir [11].



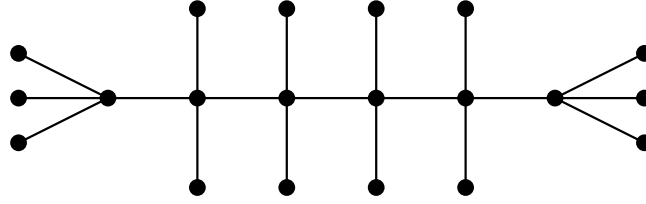
Şekil 3.3. $C_{8,3}$ dikenli çevre çizgesi

Tanım 3.4.2. n ve m negatif olmayan tam sayılar olsun. Dikenli çubuk çizgesi P_n çizgesinin başlangıç ve bitiş tepelerine m adet izole tepe eklenmesiyle oluşturulur ve $P_{n,m}$ ile gösterilir [11].



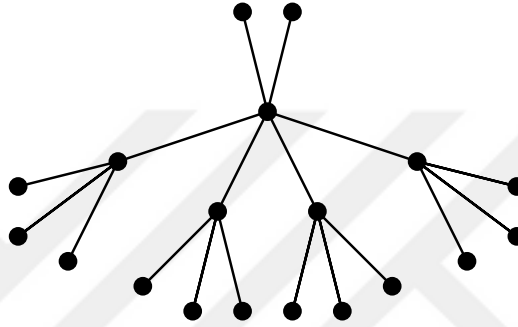
Şekil 3.4. $P_{6,3}$ çizgesi

Tanım 3.4.3. p ve u negatif olmayan tam sayılar olsun. Dikenli yol (thorn path) çizgesi P_n çizgesinin başlangıç ve bitiş tepelerine u ve her bir iç tepesine p adet izole tepe eklenmesiyle oluşturulur ve $P_{n,p,u}$ ile gösterilir [11].



Şekil 3.5. $P_{6,2,3}$ dikenli yol çizgesi

Tanım 3.4.4. p ve k negatif olmayan tam sayılar olsun. Dikenli yıldız (thorn star) çizgesi $K_{1,n}$ çizgesinin her bir pendant tepesine k ve n dereceli tepesine p adet izole tepe eklenmesiyle oluşturulur ve $S_{n,p,k}$ ile gösterilir [11].

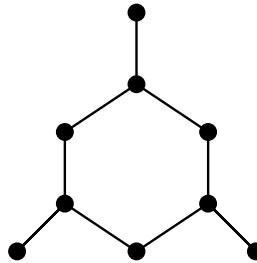


Şekil 3.6. $P_{6,2,3}$ dikenli yıldız çizgesi

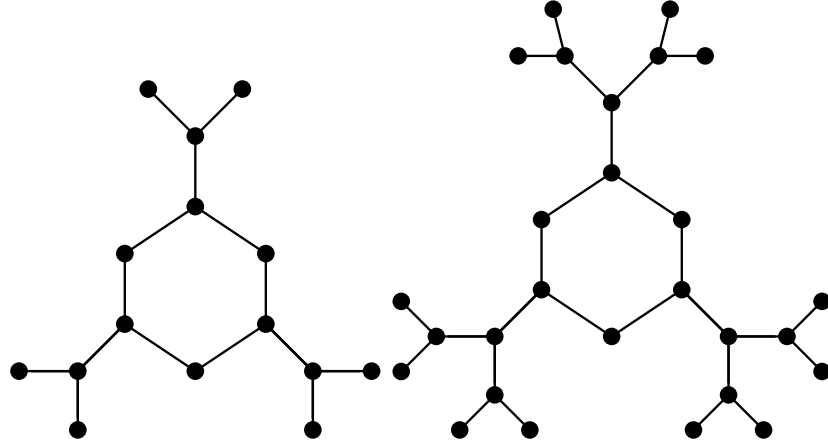
3.5. Dendrimer Çizgeleri

Tanım 3.5.1. p ve h pozitif tam sayılar olsun. $D_{p,h}$ dendrimer çizgeleri, $D_{p,0}$ olarak veilen çizgede derecesi bir olan tepelere p adet bir dereceli tepe eklenerek oluşturulur ve $D_{p,0} = D_0$ olarak tanımlanır. h ise bu işlemin tekrar sayısıdır ve $D_{p,h}$ ile gösterilir [5].

Şekil 3.7’de D_0 çizgesi ve Şekil 3.8’de $D_{2,1}$ ve $D_{2,2}$ çizgeleri gösterilmiştir.

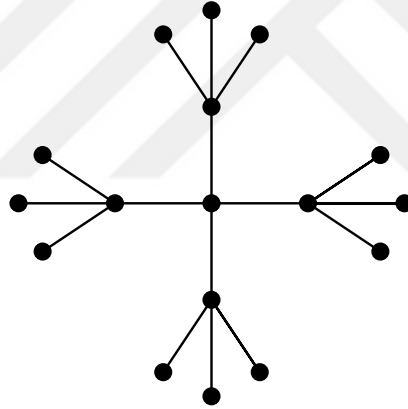


Şekil 3.7. D_0 dendrimer çizgesi

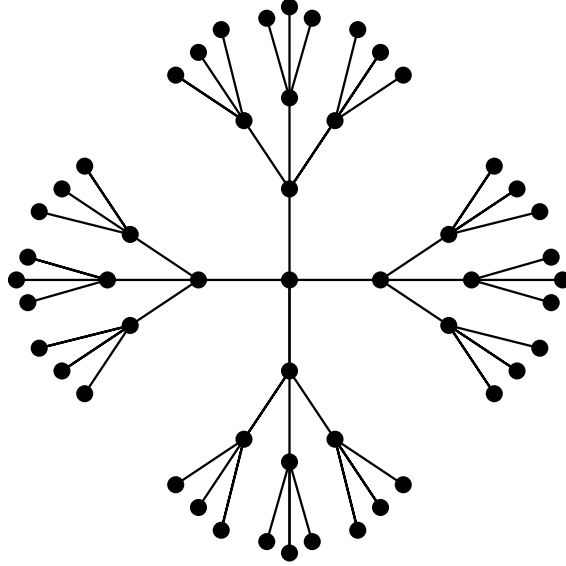


Şekil 3.8. $D_{2,1}$ ve $D_{2,2}$ dendrimer çizgeleri

Tanım 3.5.2. Düzenli dendrimer çizge, bir v merkez noktasından oluşan ve pendant olmayan her bir noktasının derecesi (d) iki veya daha fazla olan ağaçlardır. Düzenli dendrimerlerde merkez noktadan her bir pendant noktaya kadar olan mesafeye yarıçap denir ve k ile gösterilir. Düzenli dendrimer çizgeleri $T_{k,d}$ ile gösterilir [6].



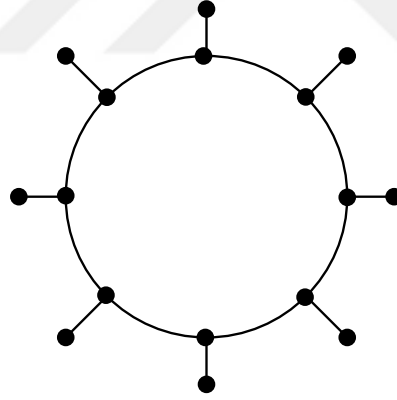
Şekil 3.9. $T_{2,4}$ çizgesi



Şekil 3.10. $T_{3,4}$ çizgesi

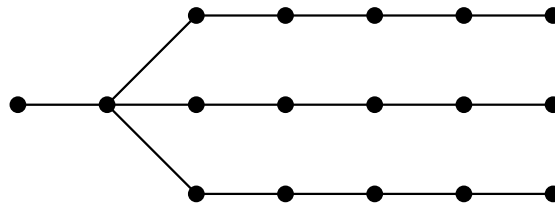
3.6. Bazı Özel Çizgeler

Tanım 3.6.1. n -sunlet çizgesi C_n çizgesinde her bir tepeye yalnız bir izole tepe eklenmesiyle oluşturulur ve S_n ile gösterilir [12].



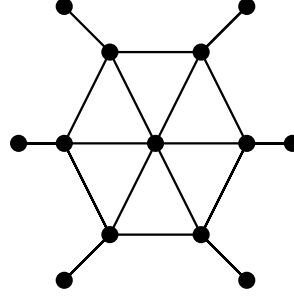
Şekil 3.11. S_8 çizgesi

Tanım 3.6.2. E_p^t çizgesi her bacağına p tepe bulunan t bacaklı bir çizgedir [18].



Şekil 3.12. E_3^5 çizgesi

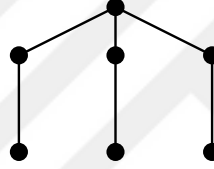
Tanım 3.6.3. Helm çizgesi, W_n çizgesinin merkez tepesi hariç her bir tepesine izole tepe eklenmesiyle oluşturulur. $2n + 1$ tepeye ve $3n$ ayrıta sahiptir ve H_n ile gösterilir [4].



Şekil 3.13. H_6 çizgesi

Tanım 3.6.4. Spider çizgesi $K_{1,n}$ çizgesinin her bir pendant tepesine 1 adet izole tepe eklenmesiyle oluşturulur ve S_p^* ile gösterilir [7].

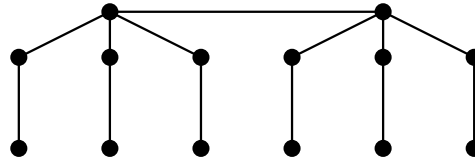
Şekil 3.14'de S_3^* spider çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 3.14. S_3^* çizgesi

Tanım 3.6.5. Bispider çizgesi 2 adet S_p^* çizgesinin merkez tepelerinin arasına bir ayrıta eklenerek oluşturulur ve S_{p_1, p_2}^* ile gösterilir [7].

Şekil 3.15'de $S_{3,3}^*$ spider çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 3.15. $S_{3,3}^*$ çizgesi

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde dikenli çizgelerin, dendrimer çizgelerin, helm çizgenin, E_p^t ağaç çizgesinin, spider çizgenin ve bispider çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değerleri incelenmiş ve çizgelerin tepe sayısı üzerinden genel formüller elde edilmiştir.

4.1. Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri

Teorem 4.1.1. $C_{n,m}$ bir dikenli çevre çizgesi olmak üzere

$$DI_g(C_{n,m}) = nm + \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 \quad (4.1)$$

dir.

İspat: $C_{n,m}$ bir dikenli çevre çizgesi, $V_j(x_i) = \{x_i : \deg(x_i) = 1, i = 1, 2, \dots, nm\}$ pendant tepeler, S jeodezik baskın küme ve $m(C_{n,m} - S), C_{n,m} - S$ çizgesindeki en büyük boyutlu bileşen olsun. $C_{n,m}$ çizgesinde $X \subset V(C_{n,m})$ ve $|X| = r$ olmak üzere $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{nm}\} \cup X$ jeodezik baskın kümesi çıkarılsın. Bu durumda $|S| = nm + r$ ve $C_{n,m} - S$ çizgesinin bileşen sayısı $\omega(S_n - S) \leq r$ olduğundan $m(S_n - S) \geq \frac{n+nm-(nm+r)}{r}$ olur. Buradan

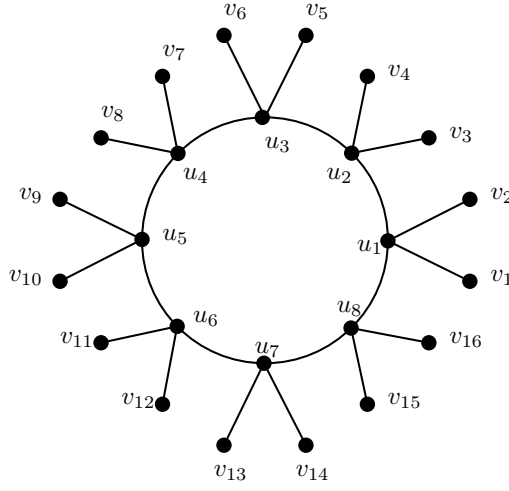
$$DI_g(S_n) \geq \min \left\{ nm + r + \frac{n-r}{r} \right\}$$

dir. $r \geq 0$ için $f(r) = nm + r + \frac{n-r}{r}$ fonksiyonunun minimum değeri $nm + \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ dir. Jeodezik baskın bütünlük tam sayı değerli olduğundan

$$DI_g(C_{n,m}) = nm + \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.1.2. Aşağıda $C_{8,2}$ çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.1. $C_{8,2}$ çizgesi

$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ ve $m(G - S) = 2$ için $DI_g(C_{8,2}) = 21$ dir.

Sonuç 4.1.3. S_n bir n -sunlet çizgesi olmak üzere

$$DI_g(S_n) = n + \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 \quad (4.2)$$

dir.

İspat: $C_{n,1} \cong S_n$ olduğundan Teorem 4.0.1'den $DI_g(S_n) = n + \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ olduğu açıktır. ■

Teorem 4.1.4. $P_{n,p,u}$ bir dikenli yol çizgesi olmak üzere

$$DI_g(P_{n,p,u}) = (n - 2)p + 2u + \lceil 2\sqrt{n + 1} \rceil - 2 \quad (4.3)$$

dir.

İspat: $P_{n,p,u}$ bir dikenli yol, $V_d(x_k) = \{x_k : \deg(x_k) = 1, k = 1, 2, \dots, (n - 2)p\}$ $V(y_j) = \{y_j : \deg(y_j) = 1, j = 1, 2, \dots, 2u\}$ pendant tepeler, S jeodezik baskın küme ve $m(P_{n,p,u} - S)$, $P_{n,p,u} - S$ çizgesindeki en büyük boyutlu bileşen olsun. $P_{n,p,u} - S$ çizgesinde $X \subset V(P_{n,p,u})$ ve $|X| = r$ olmak üzere. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{(n-2)p}\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{2u}\} \cup X$ jeodezik baskın kümesi çıkarılsın. Bu durumda $|S| = (n - 2)p + 2u + r$ ve $P_{n,p,u} - S$ çizgesinin bileşen sayısı $\omega(P_{n,p,u} - S) \leq r + 1$ olduğundan $m(P_{n,p,u} - S) \geq \frac{n + (n-2)p + 2u - ((n-2)p + 2u + r)}{r + 1}$ olur. Buradan

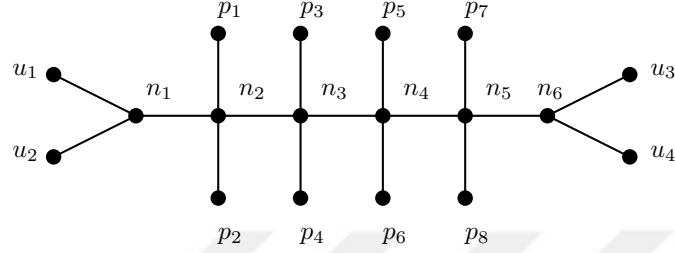
$$DI_g(P_{n,p,u}) \geq \min \left\{ (n - 2)p + 2ur + \frac{n - r}{r + 1} \right\}$$

dir. $r \geq 0$ için $f(r) = (n - 2)p + 2u + r + \frac{n-r}{r+1}$ fonksiyonunun minimum değeri $(n - 2)p + 2u + \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$ dir. Jeodezik baskın bütünlük tam sayı değerli olduğundan

$$DI_g(P_{n,p,u}) = (n - 2)p + 2u + \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$$

eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.1.5. Aşağıda $P_{6,2,2}$ çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.2. $P_{6,2,2}$ çizgesi

$S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, n_3\}$ ve $m(G - S) = 3$ için $DI_g(P_{6,2,2}) = 16$ dir.

Sonuç 4.1.6. $P_{n,m}$ bir dikenli çubuk çizgesi olmak üzere

$$DI_g(P_{n,m}) = 2m + \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2 \quad (4.4)$$

dir.

İspat: $P_{n,m} \cong P_{n,0,m}$ olduğundan Teorem 4.0.4'den $DI_g(P_{n,m}) = 2m + \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$ olduğu açıktır. ■

Teorem 4.1.7. $S_{n,p,k}$ bir dikenli yıldız çizgesi olmak üzere

$$DI_g(S_{n,p,k}) = 2 + p + nk \quad (4.5)$$

dir.

İspat: $S_{n,p,k}$ bir dikenli yıldız çizgesi, v merkez tepe $V_p(x_i) = \{x_i : \deg(x_i) = 1, i = 1, 2, \dots, nk\}$, $V_p(y_j) = \{y_j : \deg(y_j) = 1, j = 1, 2, \dots, p\}$ pendant tepeler S jeodezik baskın kümesinin eleman sayısı ile pendant tepelerin sayısı eşittir. Buradan $\gamma_g(S_{n,p,k}) = p + nk$ dir. Bu durumda çizgeden $\{x_1, x_2, \dots, x_{nk}\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ kümesi çıkarılırsa geriye $n + 1$ tepeden oluşan bir $K_{1,n}$ yıldız çizgesi kalır. $K_{1,n}$ çizgesinden v merkez tepesi çıkarılırsa n tane izole

tepe kalır. Bu nedenle $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{nk}\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \cup v$ jeodezik baskın kümesi $S_{n,p,k}$ çizgesinden çıkarılırsa en büyük boyutlu bileşen $m(S_{n,p,k} - S) = 1$ olur. Buradan

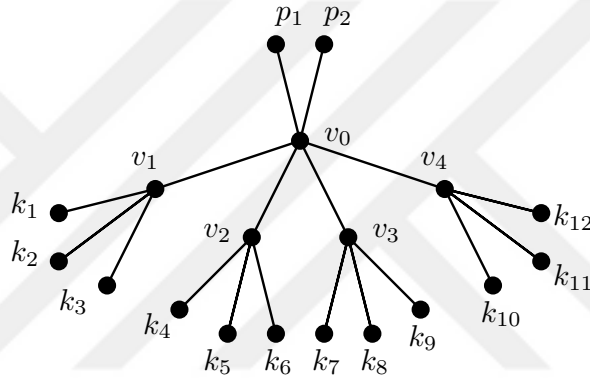
$$\begin{aligned} DI_g(S_{n,p,k}) &= |S| + m(S_{n,p,k} - S) \\ &= 1 + nk + p + 1 \\ &= 2 + p + nk \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikenli yıldız çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri

$$DI_g(S_{n,p,k}) = 2 + p + nk$$

dir. ■

Örnek 4.1.8. Aşağıda $S_{4,3,2}$ çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.3. $S_{4,3,2}$ çizgesi

$S = \{p_1, p_2, v_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}\}$ ve $m(G - S) = 1$ için $DI_g(S_{4,3,2}) = 16$ dir.

Teorem 4.1.9. H_n helm çizgesi olmak üzere

$$DI_g(H_n) = n + \lceil 2\sqrt{n} \rceil \quad (4.6)$$

dir.

İspat: H_n bir helm çizgesi, $V_p(x_i) = \{x_i : \deg(x_i) = 1\}$ pendant tepeler, v merkez tepe, S jeodezik baskın küme ve $m(H_n - S)$, $H_n - S$ çizgesindeki en büyük boyutlu bileşen olsun. H_n helm çizgesi n tepeli bir C_n çevre çizgesini içerir ve C_n çizgesinin her bir tepesi v tepesi ile komşudur. H_n çizgesinde $X \subset V(H_n)$ ve $|X| = r$ olmak üzere $S = \{v\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup X$ jeodezik baskın kümesi çıkarılsın. Bu durumda $|S| = n + 1 + r$ ve $\omega(H_n - S) \leq r$ olduğundan $m(H_n - S) \geq \frac{2n+1-(n+1+r)}{r}$ olur.

Buradan

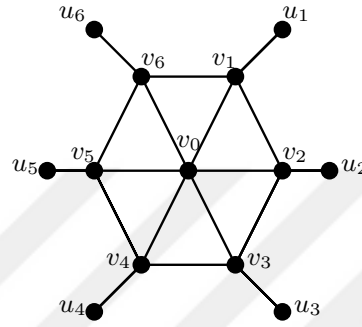
$$DI_g(H_n) \geq \min \left\{ n + 1 + r + \frac{n-r}{r} \right\}$$

dir. $r \geq 0$ için $f(r) = n + 1 + r + \frac{n-r}{r}$ fonksiyonunun minimum değeri $n + 2\sqrt{n}$ dir. Jeodezik baskın bütünlük tam sayı değerli olduğundan

$$DI_g(H_n) = n + \lceil 2\sqrt{n} \rceil$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.1.10. Aşağıda H_6 çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.4. H_6 çizgesi

$S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_0, v_1, v_4\}$ ve $m(H_6 - S) = 2$ için $DI_g(H_6) = 11$ dir.

Teorem 4.1.11. E_p^t bir ağaç çizge olmak üzere

$$DI_g(E_p^t) = \begin{cases} t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 3 & n \equiv 1 \pmod{3} \\ t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 4 & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (4.7)$$

dir.

İspat: E_p^t bir ağaç çizge, S jeodezik baskın küme ve $m(E_p^t - S)$, $E_p^t - S$ çizgesindeki en büyük boyutlu bileşen olsun. $I_G[S]$ tüm $a, b \in S$ için $I_G[a, b]$ jeodezik kümelerinin birleşimini gösterebiliriz.

(i) $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise, $S = \{u_{3k} : 1 \leq k \leq \frac{p}{3}\} \cup \{x\} \cup \{y\}$ olarak seçilirse $|S| = t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 2$ olur. Bu durumda $u_{3k-2}, u_{3k-1} \in N(u_{3k})$ ve $I_G[S] = V(E_p^t)$ olduğundan S kümesi E_p^t çizgesi için jeodezik baskın bir kümedir. S kümesi çizgeden çıkarılırsa $m(E_p^t - S) = 2$ olur. Bu nedenle $DI_g(E_p^t) = t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 4$ olarak bulunur.

(ii) $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise, $S = \{u_{3k+1} : 0 \leq k \leq \frac{p-1}{3}\} \cup \{x\}$ olarak seçilirse $|S| = t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 1$ olur. Bu durumda $u_{3k}, u_{3k+2} \in N(u_{3k+1})$ ve $I_G[S] = V(E_p^t)$ olduğundan S kümesi E_p^t çizgesi için jeodezik baskın bir kümedir. S kümesi çizgeden çıkarılırsa

$m(E_p^t - S) = 2$ olur. Bu nedenle $DI_g(E_p^t) = t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 3$ olarak bulunur.

(iii) $n \equiv 2 \pmod{3}$ ise, $S = \{u_{3k+2} : 0 \leq k \leq \frac{p-2}{3}\} \cup \{x\} \cup \{y\}$ olarak seçilirse $|S| = t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 2$ olur. Bu durumda $u_{3k}, u_{3k+1} \in N(u_{3k+2})$ ve $I_G[S] = V(E_p^t)$ olduğundan S kümesi E_p^t çizgesi için jeodezik baskın bir kümedir. S kümesi çizgeden çıkarılırsa

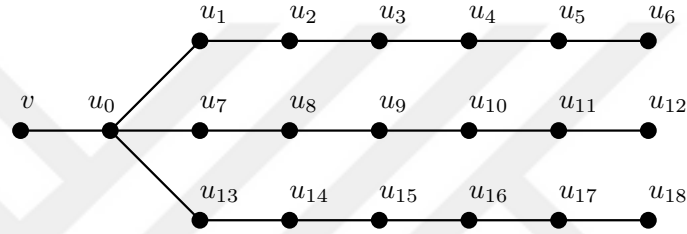
$m(E_p^t - S) = 2$ olur. Bu nedenle $DI_g(E_p^t) = t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 4$ olarak bulunur.

(i), (ii) ve (iii)'den

$$DI_g(E_p^t) = \begin{cases} t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 3 & n \equiv 1 \pmod{3} \\ t \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor + 4 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.1.12. Aşağıda E_6^3 çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.5. E_6^3 çizgesi

$S = \{v, u_0, u_3, u_6, u_9, u_{12}, u_{15}, u_{18}\}$ ve $m(G - S) = 2$ için $DI_g(E_6^3) = 10$ dir.

Lemma 4.1.13. [13] $T_{k,d}$ bir düzenli dendrimer çizge olmak üzere baskınlık sayısı, aşağıdaki gibidir.

$$\gamma(T_{k,d}) = \begin{cases} 1 + \frac{(d-1)^k - d + 1}{d-2}, & k \text{ tek} \\ \frac{(d-1)^k - 1}{d-2}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

Teorem 4.1.14. $k, d > 2$ için düzenli dendrimer çizgenin jeodezik baskın bütünlük değeri

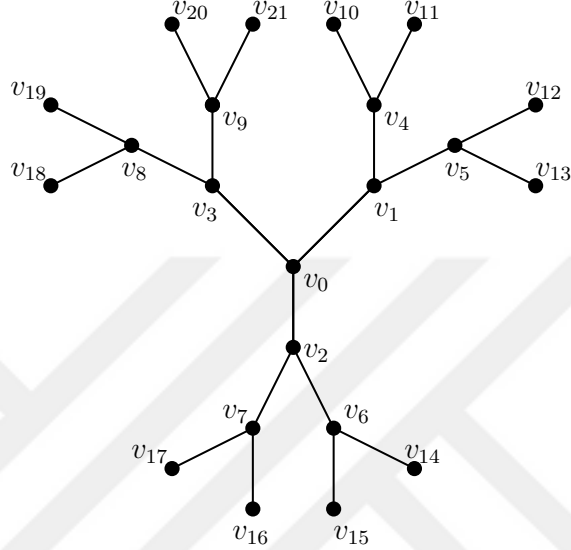
$$DI_g(T_{k,d}) = d + \gamma(T_{k-2,d}) + d(d-1)^{k-1} \quad (4.8)$$

dir.

İspat: $T_{k,d}$ bir düzenli dendrimer çizge, $k, d > 2$, v merkez tepe, $V_p(x_i) = \{x_i : d(v, x_i) = k\}$ pendant tepeler, S jeodezik baskın küme ve $m(T_{k,d} - S)$, $T_{k,d} - S$ çizgesindeki en büyük boyutlu bileşen olsun. $T_{k,d} - S$ çizgesinin minimum jeodezik kümesinin eleman sayısı ile pendant tepelerin sayısı eşittir. Bu nedenle $g(T_{k,d}) = d(d-1)^{k-1}$ olur. Bu tepeler minimum S jeodezik baskın kümesinin elemanıdır ve bu jeodezik tepeler v merkez tepesine $k-1$ uzaklıktaki tepeleri bastırır. Bu durumda $T_{k,d} - S$ çizgesi-

nin jeodezik baskın kümesini bulmak için $T_{k-2,d} - S$ çizgesinin minimum baskın kümesini bulmak yeterlidir[1]. $|S| = \gamma(T_{k-2,d}) + d(d-1)^{k-1}$ olarak bulunur. Bu durumda $m(T_{k,d} - S) = d$ olur. Buradan $|S| + m(T_{k,d} - S) \geq \gamma(T_{k-2,d}) + d(d-1)^{k-1} + d$ olacak şekilde $DI_g(T_{k,d}) = d + \gamma(T_{k-2,d}) + d(d-1)^{k-1}$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.15. Aşağıda $T_{3,3}$ çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.6. $T_{3,3}$ çizgesi

$S = \{v_0, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$ ve $m(G - S) = 3$ için $DI_g(S_{4,3,2}) = 16$ dir.

Lemma 4.1.16. [14] H_n^k bir dendrimer çizge olmak üzere baskınlık sayısı, aşağıdaki gibidir.

$$\gamma(H_n^k) = \begin{cases} \frac{k(k^{(n/3)}-1)}{7}, & \text{if } n \equiv 0(\text{mod}3) \\ 1 + \frac{k^2(k^{(\frac{n-1}{3})}-1)}{7} & \text{if } n \equiv 1(\text{mod}3) \\ 1 + \frac{k^3(k^{(\frac{n-2}{3})}-1)}{7} & \text{if } n \equiv 2(\text{mod}3) \end{cases}$$

Teorem 4.1.17. $D_{k,n}$ bir dendrimer çizge olmak üzere

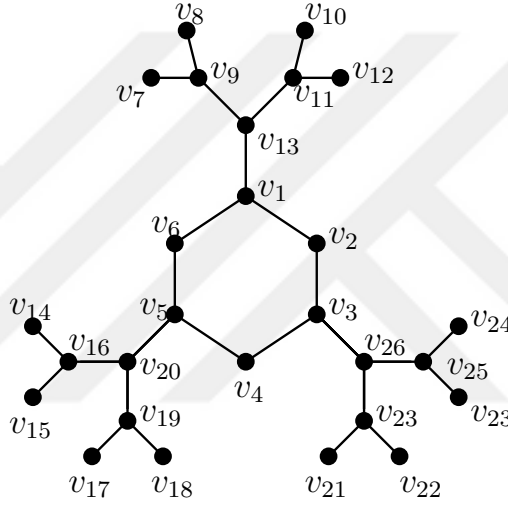
$$DI_g(D_{k,n}) = 3(\gamma(H_{n-2}^k) + k^n) + k + 4 \quad (4.9)$$

dir.

İspat: $D_{k,n}$ bir dendrimer çizge, $V_p(x_i) = \{x_i : \deg(x_i) = k^n\}$ pendant tepeler, S jeodezik baskın küme ve $m(D_{k,n} - S)$, $D_{k,n} - S$ çizgesindeki en büyük boyutlu bileşen olsun.

$D_{k,n}$ çizgesinin minimum jeodezik kümesinin eleman sayısı ile pendant tepelerin sayısı eşittir. Bu nedenle $g(D_{k,n}) = 3k^n$ olur. Bu tepeler minimum S jeodezik baskın kümesinin elemanıdır ve bu jeodezik tepeler merkezde bulunan C_6 çizgesine n uzaklıktaki tepeleri bastırır. Bu durumda $D_{k,n}$ çizgesinin jeodezik baskın kümesini bulmak için $D_{k,n-2}$ çizgesinin minimum baskın kümesini bulmak yeterlidir. $D_{k,n-2}$ çizgesi C_6 çizgesine regüller olacak şekilde 3 farklı tepesine H_{n-2}^k binary ağacı bağlanmasıyla oluşur. Bu nedenle $|S| = 3(\gamma(H_{n-2}^k) + k^n) + 3$ olarak bulunur[4]. Bu durumda $m(T_{k,d} - S) = k + 1$ olur. Buradan $|S| + m(D_{k,n} - S) \geq 3(\gamma(H_{n-2}^k) + k^n) + 3 + (k + 1)$ olacak şekilde $DI_g(D_{k,n}) = 3(\gamma(H_{n-2}^k) + k^n) + k + 4$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.18. Aşağıda $D_{2,2}$ çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.7. $D_{2,2}$ çizgesi

$S = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}\}$ ve $m(D_{2,2} - S) = 3$ için $DI_g(D_{2,2}) = 18$ dir.

Teorem 4.1.19. S_p^* bir spider çizge olmak üzere

$$DI_g(S_p^*) = k + 2 \quad (4.10)$$

dir.

İspat: S_p^* bir spider çizge, v merkez tepe, $V_p(x_i) = \{x_i : \deg(x_i) = 1, i = 1, 2, \dots, k\}$ pendant tepeler, S jeodezik baskın küme olsun. S_p^* çizgesinin minimum jeodezik kümesinin eleman sayısı ile pendant tepelerin sayısı eşittir. Buradan $g(S_p^*) = k$ dir. Bu durumda çizgeden $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ kümesi çıkarılırsa geriye $n + 1$ tepeden oluşan bir $K_{1,n}$ yıldız çizgesi kalır. $K_{1,n}$ çizgesinden v merkez tepesi çıkarılırsa n tane izole tepe kalır. Bu ne-

denle $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cup \{v\}$ jeodezik baskın kümesi S_p^* çizgesinden çıkarılırsa en büyük boyutlu bileşen $m(S_p^* - S) = 1$ olur. Buradan

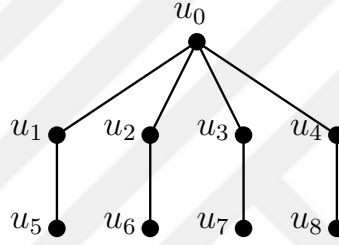
$$\begin{aligned} DI_g(B_k) &= |S| + m(S_p^* - S) \\ &= k + 1 + 1 \\ &= k + 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Spider çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri

$$DI_g(S_p^*) = k + 2$$

elde edilir. ■

Örnek 4.1.20. Aşağıda S_4^* çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.8. S_4^* çizgesi

$S = \{u_0, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ ve $m(G - S) = 1$ için $DI_g(S_{4,3,2}) = 6$ dir.

Teorem 4.1.21. S_p^* bir bispider çizge olmak üzere

$$DI_g(S_{r,s}^*) = r + s + 3 \quad (4.11)$$

dir.

İspat: $S_{r,s}^*$ bir bispider çizge, u ve v merkez tepeler, $V_p(x_i) = \{x_i : \deg(x_i) = 1, i = 1, 2, \dots, r\}$, $V_p(y_i) = \{y_i : \deg(y_i) = 1, i = 1, 2, \dots, s\}$ pendant tepeler, S jeodezik baskın küme olsun. $S_{n,m}$ çizgesinin minimum jeodezik kümesinin eleman sayısı ile pendant tepelerin sayısı eşittir. Buradan $g(S_{r,s}^*) = r + s$ dir. Bu durumda çizgeden $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ kümesi çıkarılırsa geriye $s + r + 2$ tepeden oluşan merkez tepelerinden birbirine bağlı iki yıldız çizge kalır. Kalan çizgesinden u ve v merkez tepeleri çıkarılırsa $r + s$ tane izole tepe kalır. Bu nedenle $S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_s\} \cup \{u\} \cup \{v\}$ jeodezik baskın kümesi $S_{r,s}$

çizgesinden çıkarılırsa en büyük boyutlu bileşen $m(S_{r,s}^* - S) = 1$ olur. Böylece

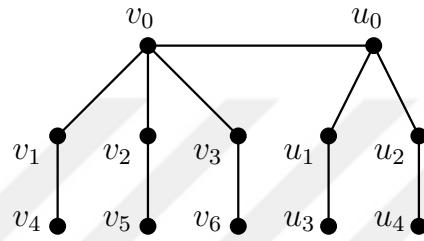
$$\begin{aligned} DI_g(S_{r,s}^*) &= |S| + m(B_k - S) \\ &= r + s + 2 + 1 \\ &= r + s + 3 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bispider çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri

$$DI_g(S_{r,s}^*) = r + s + 3$$

dir. ■

Örnek 4.1.22. Aşağıda $S_{3,3}^*$ çizgesinin jeodezik baskın bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.9. $S_{3,3}^*$ çizgesi

$S = \{v_0, v_4, v_5, v_6, u_0, u_3, u_4\}$ ve $m(G - S) = 1$ için $DI_g(S_{3,2}) = 8$ dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir iletişim ağı, merkezler ve bu merkezlerin birbirleri ile iletişim kurmasını sağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bir iletişim ağında, belli merkezlerin ya da bağlantı hatlarının zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki, ağın dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik değeri denir. İletişim ağlarının kararlılığını ve güvenilirliğini ölçmek, günümüzün hızla büyüyen ve değişen iletişim altyapılarında kritik bir öneme sahiptir. Bu nedenle zedelenebilirliği ölçmek için bazı parametreler tanımlanmıştır. Bu parametrelerden bazıları bağlantılılık sayısı, bütünlük değeri, saçılma sayısı, kopma derecesi, dayanıklılık değeri, jeodezik baskın bütünlük değeridir.

Ağlarda ihtiyaç duyulan özelliklere göre bu parametrelerin farklı versiyonları tanımlanmıştır. Zaman ve maliyeti optimize etmek için herhangi bir ağda bir jeodezik yol bulma sorunu önemli bir rol oynar. Jeodezik bir kümenin ağdan çıkarılması ağın güvenlik açığını arttırdığından, Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri ağın genelinde oluşan hasarı araştırmak için önemli bir parametredir. Bu doğrultuda, bu tezde Jeodezik Baskın Bütünlük Değeri parametresi çalışılmıştır. Literatürde sıkça yer alan çizge sınıflarından; dikenli çizgelerin, dendrimer çizgelerin, helm çizgenin, E_p^t ağaç çizgesinin, spider çizgenin ve bispider çizgesinin tepe sayısı üzerinden jeodezik baskın bütünlük değerleri için genel sonuçlar elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Haynes, T. W., Hedetniemi, S., Slater, P. (1998). *Fundamentals of Domination in Graphs*. CRC Press.
- [2] Buckley, F., Harary, F., Quintas, L. V. (1988). Extremal results on the geodetic number of a graph.
- [3] Escudro, H., Gera, R., Hansberg, A., Jafari Rad, N., Volkmann, L. (2011). Geodetic domination in graphs. *JCMCC-Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 77, 89.
- [4] Shiladhar, P., Naji, A. M., Soner, N. D. (2018). Leap Zagreb indices of some wheel related graphs. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, 9(3), 221-231.
- [5] Azari, M. (2018). On the Gutman index of Thorn graphs. *Kragujevac Journal of Science*, (40), 33-48.
- [6] Nagar, A. K., Sriram, S. (2016). On eccentric connectivity index of eccentric graph of regular dendrimer. *Mathematics in Computer Science*, 10, 229-237.
- [7] Ibrahim, N. B., Jund, A. A. (2018). Edge connected domination polynomial of a graph. *Palestine Journal of Mathematics*, 7(2), 458-467.
- [8] Balaraman, G., Kumar, S. S., Sundareswaran, R. (2021). Geodetic domination integrity in graphs.
- [9] Barefoot, C. A., Entringer, R., Swart, H. (1987). Vulnerability in graphs-a comparative survey. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 1(38), 13-22.
- [10] Sundareswaran, R., Swaminathan, V. (2010). Domination integrity in graphs. In *Proceedings of International Conference on Mathematical and Experimental Physics* (Vol. 46, p. 57). Narosa Publishing House.
- [11] Gutman, I. (1998). Distance in thorny graph. *Publ. Inst. Math. Beograd*.
- [12] Shobana, A., Logapriya, B. (2018). Domination number of n-sunlet grap. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* (Vol. 118).
- [13] Sahin, B., Sahin, A. (2018). On dominaton type invariants of regular dendrimer. *Journal of Discrete Mathematics and Its Applications*, 8(1), 27-31.
- [14] Sundareswaran, R., Swaminathan, V. (2012). Domination integrity in trees. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 2, 153-161.
- [15] Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Addison Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts.
- [16] Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications* (Vol. 290). London: Macmillan.
- [17] Chartrand, G. , Lesniak, L. , and Zhang, P. (2016). *Graphs Digraphs*, Chapman and Hall/CRC., New York, USA, 39, 628.

[18] Corman, T., Leiserson, C.E. and Rivest, R.L., 1990, Introduction to algorithms, The MIT Press.

