

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



EĞRİLİK TEORİSİNDEN ELDE EDİLEN MANYETİK EĞRİ
VE AKI REGLE YÜZEYLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Çağla Gizem ŞENER

Danışman

Doç. Dr. Fatma GÜLER

SAMSUN

2024

TEZ KABUL VE ONAYI

Çağla Gizem ŞENER tarafından, Doç. Dr. Fatma GÜLER danışmanlığında hazırlanan “EĞRİLİK TEORİSİNDEN ELDE EDİLEN MANYETİK EĞRİ VE AKI REGLE YÜZEYLERİ” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 20.2.2024 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Emin KASAP Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	<input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. Fatma GÜLER Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	<input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret
Üye	Doç. Dr. Tefik ŞAHİN Amasya Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	<input checked="" type="checkbox"/> Kabul <input type="checkbox"/> Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi?

Evet (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır

27 /12 / 2023
Çağla Gizem ŞENER

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : EĞRİLİK TEORİSİNDEN ELDE EDİLEN MANYETİK EĞRİ VE AKI REGLE YÜZEYLERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 27.12.2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 25

Tek kaynak oranı : % 5 çıkmıştır.

27 /12 / 2023
Doç. Dr. Fatma GÜLER

ÖZET

EĞRİLİK TEORİSİNDEN ELDE EDİLEN MANYETİK EĞRİ VE AKI REGLE YÜZEYLERİ

Çağla Gizem ŞENER
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans, Şubat/2024
Danışman: Doç. Dr. Fatma GÜLER

Yörünge geometrisi, parçacık üzerine etki eden kuvvetler tarafından belirlenir. Bir F manyetik alanının etkisi altında bir Riemann manifoldu üzerinde hareket eden yüklü bir parçacığın yörüngesine manyetik eğri denir. Bir manyetik eğrinin yörüngesi, F manyetik alanına karşılık gelen Lorentz kuvveti nedeniyle Lorentz veya Newton denklemi olarak adlandırılan denklem çözülerek bulunabilir. Eğrilik teorisi ise katı bir cismin yörüngelerinin ve düzlemlerin temel geometrik özelliklerini inceler. Ayrıca hareket eden katı cismin hız ve ivme dağılımı ile ilgilenir. Uzayda hareket eden bir parçacığın yörüngesi bir eğri oluşturur. Bir doğruyu bir eğri boyunca hareket ettirerek regle yüzey adı verilen bir yüzey elde edilir. Regle yüzey dışında bir yüzeyde bulunmayan, boğaz noktalarının geometrik yeri olarak tarif edilen benzersiz bir eğri vardır. Bu eğri striksiyon eğrisi olarak adlandırılır. Bir başka tarif, bitişik iki doğrultman arasındaki dik bir çizgi ile en kısa mesafe diyebiliriz. Regle yüzeyin oluşumu sırasında bu eğrinin merkez noktasında kurulan ortogonal çatıya geodezik Frenet çatısı denir.

Bu tezde, eğrilik teorisi ile geodezik Frenet çatısından elde edilen yeni çatıya karşılık gelen eğrinin manyetik alanda etkisi incelenmiştir. Yüklü parçacık manyetik alana girdiğinde bir yörünge izler. Bu yörünge eğrilik teorisinden elde edilen eğri olarak alınmıştır.

Tezin birinci bölümünde, eğrilik teorisi ve manyetik alan ile ilgili literatür özetine yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümünde, eğrilik teorisinden elde edilen manyetik eğrilerin Killing vektör alanları ile Lorentz kuvvetleri hesaplanmış ve bazı sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, manyetik eğrilerinin Killing manyetik alan vektörleri kullanılarak elde edilen manyetik akı regle yüzeyleri incelenmiştir. Tezin beşinci bölümü, manyetik akı regle yüzeylerinin örneklerine ayrılmıştır. Tezin son bölümünde diğer sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Manyetik vektör alanı, Lorentz kuvveti, Regle Yüzey, Akı yüzeyi.

ABSTRACT

MAGNETIC CURVE AND FLUX RULED SURFACES OBTAINED FROM CURVATURE THEORY

Çağla Gizem ŞENER

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Master, February/2024

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma GÜLER

Geometry of the orbit is determined by the forces that affect particle. Orbit of a charged particle which is in under the effect of a F magnetic field and acts on Riemann manifold is called magnetic curve. An orbit of magnetic curve, can be solved by equating Lorentz or Newton equation due to Lorentz force which corresponding to F magnetic field. As for theory of curvature, it does inspect orbits of a solid object and basic features geometric of planes. Also, it is interested in distribution of speed and acceleration moving solid object. Orbit of a particle that moving in space creates a curve. By motioning line through a curve a surface called ruled surface is achieved. There is a unique curve that can be only found on ruled surface and described as geometric location of throat points. That curve is named as stricture curve. With another description, we can say the shortest distance from the perpendicular line between adjacent directrix. Orthogonal frame that is constituted at the center point of this curve during the formation of the ruled surface is called a geosedic frenet frame.

In this thesis, effect of curve coressponding to new frame obtained from the geosedic Frenet frame with the theory of curvature in the magnetic field is analyzed. When the charged particle enters the magnetic field it follows an orbit, that orbit is taken as the orbit obtained with theory of curvature.

In the first chapter of thesis, summary of literature about theory of curvature and magnetic field is given. In the second chapter the basic concepts, that will be used in the following chapters, are introduced. In the third chapter, Killing vector fields and Lorentz forces of magnetic curves obtained from theory of curvature are calculated and some results are given. In the fourth chapter, magnetic flux governing surfaces obtained by using magnetic field vectors killing magnetic curves are examined. Fifth chapter is divided into examples of magnetic flux ruled surfaces. In the last chapter other results and suggestions are included.

Keywords: Flux ruled surfaces, Magnetic curves, The theory of curvature, Ruled surfaces

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam güler yüzü ve samimiyetiyle bana her zaman yardımcı olan, pek kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Fatma GÜLER' e;

Lisansüstü eğitim sürecim boyunca değerli bilgilerini bizimle paylaşan, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Emin KASAP' a;

Deneyimlerini ve desteklerini bizlerden esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma ve pek tabii ki çalışmamın her aşamasında yanımda olan, desteğiyle bana güç veren eşim Ahmet Kürşat ŞENER'e ve tüm aileme;

Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çağla Gizem ŞENER

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM KAVRAM VE TEOREMLER.....	4
3. EĞRİLİK TEORİSİNDEN ELDE EDİLEN MANYETİK EĞRİLER.....	10
3.1. g^* Manyetik Eğriler	10
3.2. g^* Manyetik Eğrilerde V Manyetik Alanı'nın Bulunması	11
3.3. e^* Manyetik Eğriler	14
3.4. e^* Manyetik Eğrilerde V Manyetik Alanı'nın Bulunması.....	16
3.5. t^* Manyetik Eğriler	19
3.6. t^* Manyetik Eğrilerde V Manyetik Alanı'nın Bulunması	21
4. MANYETİK EĞRİLERİN AKI REGLE YÜZEYLERİ.....	25
4.1. g^* Akı Regle Yüzeyi.....	25
4.2. e^* Akı Regle Yüzeyi	28
4.3. t^* Akı Regle Yüzeyi.....	31
5. AKI REGLE YÜZEYİ ÖRNEKLERİ	35
6. SONUÇ.....	39
KAYNAKÇA.....	40
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER VE KISALTMALAR

$C^\infty(M, R)$: Diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
∇	: Levi-Civita koneksiyonu
$\phi(X)$: Lorentz kuvveti fonksiyonu
$F(X, Y)$: Manyetik vektör alanı fonksiyonu
$g(X, Y)$: Metrik
$R(X, Y)Z$: Riemann Christoffel eğrilik tensörü
$\chi(M)$: Tanjant uzayı
M	: Akı yüzeyi
V	: Manyetik vektör alanı
$X(s, v)$: Regle yüzeyi
$K(s, v)$: Gauss eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1.1. g^* - manyetik akı açılabilir regle yüzeyi.....	35
Şekil 5.1.2. e^* - manyetik akı açılabilir regle yüzeyi	37
Şekil 5.1.3. t^* - manyetik akı açılabilir regle yüzeyi.....	38



1. GİRİŞ

Manyetik alan bir vektör niceliğidir. Herhangi bir noktadaki yönüne ve yoğunluğuna bağlı olarak tanımlanır. Manyetik alanın bir çok kullanım alanı vardır. Örneğin, dünya kendi manyetik alanını üretir ve pusulanın temel çalışma prensibi bu manyetik alana bağlıdır. Yine elektrik motorlarının ve jeneratörlerin çalışmasını da manyetik alana bağlı olan başka bir kullanım alanı olarak söyleyebiliriz. Manyetik alan, hareket halinde olan bir elektrik yüküne etki eden Lorentz kuvvetiyle tanımlanır.

Manyetik alan içerisinde elektrik yüküne sahip bir parçacığın hareket halinde olduğunu varsayalım. Bu yük üzerine etki eden manyetik kuvvet, Lorentz kuvvetidir. Bir başka deyişle yüklü bir parçacık, bir V manyetik alanına girdiğinde bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenerek Lorentz kuvveti adı verilen bir kuvvet açığa çıkar. Kuvvetin etkisiyle parçacık bu alan içerisinde manyetik eğri olarak adlandırılan bir yörünge izlemeye başlar. Örneğin; 3- boyutlu Öklid uzayında yüklü parçacığın teğet vektörü manyetik alandan etkilenmesiyle

$$\phi(T) = V \times T$$

biçiminde tanımlanan Lorentz kuvveti ortaya çıkar. Bu kuvvetin etkisiyle oluşan parçacık hareketini üç farklı şekilde açıklayabiliriz. Eğer T teğet vektörü, V manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olacağı için parçacık manyetik alanda paralel yörünge izler. Teğet vektörü manyetik alana dik ise kuvvet maksimum olup parçacık çember eğrisi şeklinde bir yörünge boyunca hareket eder. Eğer teğet vektörü V manyetik alanıyla sabit bir açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisiyle yüklü parçacık helis eğrisi şeklinde hareket eder (Barros ve Romeo 2007).

Lorentz kuvveti, özellikle elektromanyetizmada, fizikte; elektromanyetik alanlarının oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektro ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Lorentz kuvvetinin yardımıyla bazı metotlar öne sürülmüştür. Bunlardan biri, elektriksel direnç tomografisi ile biyolojik dokuların elektriksel iletkenliğinin gözlenmesiydi. Bu metot son zamanlarda kanser hücrelerinin erken teşhisi için önerildi. (M^n, g) , $(n \geq 2)$ Riemann manifoldu üzerindeki manyetik kuvvet çizgileri, F manyetik alanının etkisi altındaki M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Buradan F , M üzerinde kapalı 2-formlu bir manyetik alandır ve

(M^n, g) manifoldu üzerindeki F manyetik alanın Lorentz kuvveti ϕ ,
 $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ için

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y)$$

denklemleri ile verilen (1,1) - tensör alanıdır (Barros ve Romeo 2007).

Munteanu, 3- boyutlu Öklid uzayında bir Killing vektör alanına karşılık gelen manyetik yörüngelerin yaklaşımları üzerine çalışmıştır (Munteanu 2013). Yine Munteanu ve Nistor, Killing manyetik alanlarının etkisi altında olan homojen 3- boyutlu R^3 modellenmiş alan içinde hareket eden yüklü parçaların yörüngelerini incelemişlerdir (Munteanu ve Nistor 2012). Stabil bir enerji seviyesinde belirli manyetik alanda eğrilerin analizini yaparken çeşitli metodlar keşfetmişlerdir.

V manyetik alanının T -manyetik eğrilerinin Lorentz denklemi Barros tarafından verilmiştir (Barros ve Romeo 2007). Bu denklemin çözümü analitik kimya, atmosferik bilimleri, jeokimya, proton ve kanser terapisi gibi bir çok alanda yararlı kullanımı vardır. Bu alandaki bazı araştırma çalışmaları 3- boyutlu Riemann manifoldlarında şu şekilde özetlenebilir. Barros, Killing manyetik alanıyla ilgili manyetik alana varyasyonel bir yaklaşım yapılarak elde edilen yörüngeleri incelemiştir (Barros vd. 2007). Daha sonra, yazarlar parçacık üzerindeki yükün sürekli değiştiğini ve bir kompleks eğriyi çeşitli eğrilerle takip ettiğini göstermiş ve ateş, saç, ağaç gibi şekillerin bu metotla elde edilen manyetik eğrilerle çizilebildiğini araştırmalarında ortaya koymuşlardır (Xu ve Mould 2009). Sonrasında yazarlar Frenet çatısına göre tanımlanan manyetik eğriler için bazı karakteristik özellikler vermişlerdir (Özdemir vd. 2015).

Eğrilik teorisi; katı bir cismin yörüngelerinin ve düzlemlerin temel geometrik özelliklerini inceler. Ayrıca hareket eden katı cismin hız ve ivme dağılımlarıyla ilgilenir. Uzayda hareket eden bir parçacığın yörüngesi bir eğri oluşturur. Bir doğruyu bir eğri boyunca hareket ettirerek regle yüzey olarak adlandırılan bir yüzey elde edilir. Regle yüzey dışında bir yüzeyde bulunmayan, boğaz noktalarının geometrik yeri olarak tarif edilen bir eğri vardır. Bu eğriye striksiyon eğrisi adı verilir. Bir başka deyişle, bitişik iki doğrultman arasındaki dik bir çizgi ile en kısa mesafe diyebiliriz. Bu nedenle bu eğri robot yörünge planlamalarında avantaj

sağlamaktadır. Regle yüzeyin oluşumu sırasında bu eğrinin merkez noktasında kuralan ortogonal çatıya geodezik Frenet çatısı denir.

Bir robot uç işlevci, uzayda belirli bir yol boyunca hareket ederken uç işlevciye bağlı bir doğru, bir regle yüzey çizer. Ryuh ve Pennock, ilk kez robot-uç işlevci hareketini, bu işlevciye bağlı doğrunun oluşturduğu regle yüzey ve spin açısı olarak adlandırılan parametre ile ifade etmişlerdir (Ryuh 1989, Pennock 1990). Çalışmalarında robot uç işlevcisinin hareketinin diferansiyel özelliklerini belirlemek için regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanmışlardır. Bu sayede robot uç hareketinin kinematığı ile regle yüzeylerin geometrisi arasında önemli bir bağlantı kurmuşlardır.

Daha öncede bahsettiğimiz gibi yörünge geometrisi, parçacık üzerine etki eden kuvvetler tarafından belirlenir. Bir F manyetik alanının etkisi altında (M, g) Riemann manifoldu üzerinde hareket eden yüklü parçacığın yörüngesine manyetik eğri adı verilir. Bir manyetik eğrinin yörüngesi, F manyetik alanına karşılık gelen Lorentz kuvveti nedeniyle Lorentz denklemi olarak adlandırılan denklem çözülerek bulunabilir. Bu manyetik alanın yokluğunda yörünge bir geodeziktir. Yani, manyetik eğriler geodeziklerin genelleştirilmesidir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde verilen bir α^* uzay eğrisinin $\{\bar{e}, \bar{t}, \bar{g}\}$ çatısının θ darbox açısı kadar döndürülmesiyle $\{g^*, e^*, t^*\}$ dönme çatısı elde edilmiştir. Bu çatı ile elde edilen α^* eğrisinin teğet, normal ve binormal vektörlerinin Lorentz kuvvetinden etkilenmesiyle elde edilen yörüngeler incelenecektir. Bu yörüngeler eğrilik teorisi ile elde edilen eğri olarak alınacaktır. Bu eğrinin Frenet çatısının Lorentz kuvveti denklemlerini hesaplanacak, manyetik alan vektörü ile hareketinden oluşan akı regle yüzeylerini ve diferansiyel özelliklerini araştırılacaktır. Son olarak bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar ve akı regle yüzeyi örnekleri verilecektir.

2. TEMEL TANIM KAVRAM VE TEOREMLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1. M diferansiyellenebilir bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den \mathbb{R} ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan simetrik, pozitif tanımlı ve 2-lineer g dönüşümüne *Riemann metriği* adı verilir. g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir. (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Tanım 2.2. (M, g) Riemann manifold, g standart metrik ve $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \chi(M)$ olmak üzere

$$g(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır (O'Neil, 1966).

Tanım 2.3. M diferansiyellenebilir bir Riemann manifold olmak üzere

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesinde tanımlı olup, her bir C^∞ $X, Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. $\forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$i) \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$iii) \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

$$iv) \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

(2.2)

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde tanımlı bir *Lineer koneksiyon (afin koneksiyon)* veya *kovaryant türev* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4. (M, g) Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde tanımlı afin koneksiyon olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
i) \nabla_X Y - \nabla_Y X &= [X, Y] \\
ii) Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

koşullarını sağlıyorsa ∇ ya M nin *Levi Civita Koneksiyonu* denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.5. (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ M üzerinde tanımlı Levi Civita Koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için:

$$\begin{aligned}
R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\
(X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z
\end{aligned} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu bir tensör alanıdır ve M manifoldunun *Riemann eğrilik tensör alanı* olarak adlandırılır. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ biçiminde tanımlanan tensörde M manifoldunun *Riemann Christoffel eğrilik tensörü* denir ve aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\begin{aligned}
i) R(X, Y)Z &= -R(Y, X)Z \\
ii) R(X, Y, Z, W) &= -R(X, Y, W, Z) \\
iii) R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= 0 \\
iv) R(X, Y, Z, W) &= R(Z, W, X, Y)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

(O'Neil, 1966).

Tanım 2.6. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y, Z, W) = C \{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \tag{2.6}$$

biçiminde ise M ye *sabit eğrilikli uzay* adı verilir ve bu uzay $M(C)$ ile gösterilir (O'Neil, 1966).

Tanım 2.7. M üzerinde manyetik vektör alanı F , F 'nin Lorentz kuvveti

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlıdır (Munteanu, 2013).

Tanım 2.8. F nin T -Manyetik yörüngesi M üzerinde γ eğrisi olmak üzere

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \phi(\gamma') = V \times \gamma' \tag{2.8}$$

yazılır (Munteanu, 2012).

Teorem 2.9. ϕ Lorentz kuvveti, g Riemann metriği olsun. Burada,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g(\gamma', \gamma') &= g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma') \\
&= g(\phi(\gamma'), \gamma') + g(\gamma', \phi(\gamma')) \\
&= g(\phi(\gamma'), \gamma') - g(\phi(\gamma'), \gamma') \\
&= 0 \\
\|\gamma'\| &= V_0 = \text{Sabit}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olup, manyetik eğriler sabit hızlıdır (Munteanu, 2012).

Tanım 2.10. γ eğrisi, V manyetik alanın manyetik yörüngesi olsun. Eğer V Killing ise

$$\frac{d}{dt} g(V, \gamma') = 0 \tag{2.10}$$

dır. Ayıca bu eşitlikten

$$\frac{d}{dt} g(V, \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} V, \gamma') + g(V, \nabla_{\gamma'} \gamma') = 0$$

olup manyetik eğriler sabit hızlı olduğu için $\gamma' = T$, $\nabla_{\gamma'} \gamma' = V \times \gamma'$ alınır.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g(V, \gamma') &= g(\nabla_{\gamma'} V, T) + g(V, V \times \gamma') = 0 \\
g(V, V \times \gamma') &= \det(V \times V \times \gamma') = 0
\end{aligned}$$

olup buradan

$$g(\nabla_{\gamma'} V, T) = 0 \tag{2.11}$$

olup, buradan V nin Killing vektör alanı elde edilir (Munteanu, 2012).

Tanım 2.11. γ M de kesitsel eğriliği C ile verilmiş bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ γ nın Frenet çatısının türev formülleri, κ eğrilik, τ burulma fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

(O'Neill, 1966).

Tanım 2.12. γ 3 boyutlu reel uzay formu M üzerinde kesitsel eğriliği C olan ve

$$\begin{aligned}\gamma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow M(C) \\ s &\rightarrow \gamma(s)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı regüler ve “ s ” de eğrinin kendi yay parametresi olsun. Eğer

$$V(\bar{v}) = V(\kappa) = V(\tau) = 0 \quad (2.13)$$

ise $V(s) = V$ vektör alanına γ eğrisi boyunca *Killing vektör alanı* denir (Barros ve Romeo, 2007).

Tanım 2.13. γ , 3 boyutlu reel uzay formu M üzerinde kesitsel eğriliği C olan regüler bir eğri olsun. $\bar{v}(s)$ hız fonksiyonu, $\gamma_t(s)$ eğrilik fonksiyonu $\kappa(s, t)$, burulma fonksiyonu $\tau(s, t)$ olmak üzere Killing vektör alanı için aşağıdaki eşitlikler tanımlıdır.

$$\begin{aligned}(1) \quad V(\bar{v}) &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_T V, T)_v \\ (2) \quad V(\kappa) &= \frac{\partial \kappa}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_T^2 V, N) - 2\kappa g(\nabla_T V, T) + g(R(V, T)T, N) \\ (3) \quad V(\tau) &= \frac{\partial \tau}{\partial s} \Big|_{t=0} = \left[\frac{1}{\kappa} g(\nabla_T^2 V + R(V, T)T, B) \right]_s + g(R(V, T)N, B) + \tau g(\nabla_T V, T) \\ &\quad + \kappa g(\nabla_T V, B)\end{aligned} \quad (2.14)$$

(Barros, 1997).

Tanım 2.14. Bir M yüzeyin birim normal vektör alanı \hat{N} ve V manyetik vektör alanı olsun. M üzerindeki her noktada

$$g(V, \hat{N}) = 0 \quad (2.15)$$

eşitliği sağlanıyorsa, M *akı yüzeyi* olarak adlandırılır (Barros, 1997).

Tanım 2.15. Bir doğrunun herhangi bir eğri boyunca sürekli hareketi ile meydana gelen yüzeylere *Regle yüzey* adı verilir. Bu doğruya regle yüzeyin

doğrultmanı veya ana doğrusu, eğriye ise dayanak eğrisi denir. Regle yüzeyin bir parametrik denklemi;

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s) \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha(s)$ yüzeyin dayanak eğrisi ve $\bar{R}(s)$ doğrultman vektörüdür. $\gamma = g(\bar{R} \times \bar{R}, \bar{R})$ doğrultman vektörünün geodezik eğriliğidir. Burada $\{\bar{e}, \bar{t}, \bar{g}\}$ regle yüzeyin *geodezik Frenet çatısı* olarak adlandırılır.

$$\bar{e} = \frac{\bar{R}}{\|\bar{R}\|}, \bar{t} = \frac{d\bar{R}}{ds} \text{ ve } \bar{g} = \bar{e} \times \bar{t} \quad (2.17)$$

birim vektör alanlarıdır, (Ryuh, 1989), (McCarthy ve Roth, 1981).

X regle yüzeyinin $\{g^*, e^*, t^*\}$ dönme çatısı,

$$\begin{cases} e^* = \cos \theta \bar{e} - \sin \theta \bar{g} \\ g^* = \sin \theta \bar{e} + \cos \theta \bar{g} \\ t^* = \bar{t} \end{cases} \quad (2.18)$$

şeklinde olup, burada,

$$R = \|\bar{R}\| \text{ ve } \theta' = \frac{d\theta}{ds} \text{ eğrilik ve } \lambda = \left\| \frac{d\bar{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{1}{R} (-\bar{e} + \gamma \bar{g}) \right\| = \mp \sqrt{\frac{1+\gamma^2}{R^2}} \quad (2.19)$$

X regle yüzeyinin Lancret eğriliği olmak üzere, dönme çatısının türev formülleri,

$$\begin{cases} g^{*'} = \theta' e^* \\ e^{*'} = -\theta' g^* + \lambda t^* \\ t^{*'} = -\lambda e^* \end{cases} \quad (2.20)$$

şeklindedir, (Güler ve Kasap, 2018).

Tanım 2.16. Denklemi $X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s)$ olan bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\det(\alpha'(s), \bar{R}(s), \bar{R}'(s)) = 0 \quad (2.21)$$

olmasıdır, (O'Neill, 1966).

Ayrıca, açılabilir yüzeyler regle yüzeylerin bir alt kümesidir. Bu yüzeylerin doğrultman boyunca yüzey normaleri sabittir. Açılabilir yüzeylerin yüzeyin tüm noktalarında Gauss eğrilikleri sıfırdır.

Tanım 2.17. Regle yüzeyin Gauss eğriliği

$$K(s, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.22)$$

dir, (Kreyzig, 1959).

Tanım 2.18. $X(s, v)$ bir regle yüzey olmak üzere, bu yüzey üzerinde birinci temel form elemanları,

$$\begin{cases} E = \langle X_s, X_s \rangle = \|X_s\|^2 \\ F = \langle X_s, X_v \rangle \\ G = \langle X_v, X_v \rangle = \|X_v\|^2 \end{cases} \quad (2.23)$$

ve ikinci temel form elemanları,

$$\begin{cases} L = \langle X_{ss}, X_s \times X_v \rangle = \det(X_{ss}, X_s, X_v) \\ N = \langle X_{vv}, X_s \times X_v \rangle = \det(X_{vv}, X_s, X_v) \\ M = \langle X_{sv}, X_s \times X_v \rangle = \det(X_{sv}, X_s, X_v) \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklindedir. O halde $X(s, v)$ regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları sırasıyla,

$$\begin{cases} I = Eds^2 + 2Fdsdv + Gdv^2 \\ II = Lds^2 + 2Mdsdv + Ndv^2 \end{cases} \quad (2.25)$$

denklemleri ile verilir, (O'Neill, 1966).

Tanım 2.19. Eğer $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$, s reel değişkeninin sürekli fonksiyonları ise, $s \geq 0$ olduğu durumlarda eğriliği κ , burulması τ olan bir uzay eğrisi vardır, (Willmore, 2013).

3. EĞRİLİK TEORİSİNDEN ELDE EDİLEN MANYETİK EĞRİLER

Bu bölümde, eğrilik teorisi yardımıyla elde edilen α^* eğrisi manyetik alanda incelenecektir. Bu eğrinin $\{g^*, e^*, t^*\}$ Frenet elemanlarının manyetik eğrileri ve bu eğrilerin Killing vektör alanları ile Lorentz kuvvetleri hesaplanacaktır.

3.1. g^* -Manyetik Eğriler

$\alpha^* = \alpha^*(s)$ eğrisi $\{g^*, e^*, t^*\}$ dönme çatısıyla birlikte g^* -manyetik eğri olsun. ϕ Lorentz kuvveti ve V manyetik alanı için

$$\phi(g^*) = \nabla_{\alpha^*} g^* = V \times g^* \quad (3.1)$$

eşitliği yazılır.

Önerme 3.1.1. α^* eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde birim hızlı bir g^* -manyetik eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{g^*, e^*, t^*, \theta', \lambda\}$ olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti denklemleri, $\mu_1 = g(\phi(e^*), t^*)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \phi(g^*) \\ \phi(e^*) \\ \phi(t^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' & 0 & \mu_1 \\ 0 & -\mu_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^* \\ e^* \\ t^* \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

İspat. α^* eğrisi (M, g) 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde bir g^* -manyetik eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{g^*, e^*, t^*, \theta', \lambda\}$ olsun.

$\phi(g^*) \in sp\{g^*, e^*, t^*\}$ olduğundan

$$\phi(g^*) = a_1 g^* + a_2 e^* + a_3 t^* \quad (3.3)$$

şeklindedir. Burada (2.20) den a_1, a_2, a_3 katsayıları

$$1) a_1 = g(\phi(g^*), g^*) = g(\nabla_{\alpha^*} g^*, g^*) = g(V \times g^*, g^*) = \det(V, g^*, g^*) = 0$$

$$2) a_2 = g(\phi(g^*), e^*) = g(\nabla_{\alpha^*} g^*, e^*) = g(g^*, e^*) = g(\theta' e^*, e^*) = \theta'$$

$$3) a_3 = g(\phi(g^*), t^*) = g(\nabla_{\alpha^*} g^*, t^*) = g(g^*, t^*) = g(\theta' e^*, t^*) = 0$$

dır. Buradan

$$\phi(g^*) = \theta' e^* \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde g^* -manyetik eğriler için $\phi(e^*)$ ve $\phi(t^*)$ değerleri bulunur.

$\phi(e^*) \in sp \{ g^*, e^*, t^* \}$ olduğundan

$$\phi(e^*) = b_1 g^* + b_2 e^* + b_3 t^* \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada (2.20) eşitliği kullanılırsa, b_1, b_2, b_3 katsayıları

- 1) $b_1 = g(\phi(e^*), g^*) = -g(\phi(g^*), e^*) = -g(\theta' e^*, e^*) = -\theta'$
- 2) $b_2 = g(\phi(e^*), e^*) = g(\nabla_{\alpha^*} e^*, e^*) = g(V \times e^*, e^*) = \det(V, e^*, e^*) = 0$
- 3) $b_3 = g(\phi(e^*), t^*) = \mu_1$

bulunur. O halde,

$$\phi(e^*) = -\theta' g^* + \mu_1 t^* \quad (3.6)$$

bulunur.

$\phi(t^*) \in sp \{ g^*, e^*, t^* \}$ olduğundan

$$\phi(t^*) = c_1 g^* + c_2 e^* + c_3 t^* \quad (3.7)$$

şeklindedir. Burada (2.20) den c_1, c_2, c_3 katsayıları

- 1) $c_1 = g(\phi(t^*), g^*) = -g(\phi(g^*), t^*) = -g(g^*, t^*) = -g(\theta' e^*, t^*) = 0$
- 2) $c_2 = g(\phi(t^*), e^*) = -g(\phi(e^*), t^*) = -g(-\theta' e^* + \mu_1 t^*, t^*) = -\mu_1$
- 3) $c_3 = g(\phi(t^*), t^*) = g(\nabla_{\alpha^*} t^*, t^*) = g(V \times t^*, t^*) = \det(V, t^*, t^*) = 0$

olur. Buradan

$$\phi(t^*) = -\mu_1 e^* \quad (3.8)$$

bulunur.

3.2. g^* -Manyetik Eğrilerde V Manyetik Alanı'nın Bulunması

Önerme 3.2.1. Birim hızlı α^* , g^* -manyetik eğrisi V manyetik alanın yörüngesindedir gerek ve yeter şart V manyetik alanı α^* eğrisi boyunca

$$V = \mu_1 g^* + \theta' t^* \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mu_1 = g(\phi(e^*), t^*)$ dır.

İspat.

$$V = ag^* + be^* + ct^* \quad (3.10)$$

şeklinde alalım. Burada a, b, c katsayılarını bulalım.

$$\phi(g^*) = \nabla_{\alpha^*} g^* = V \times g^* = g'^* = \theta' e^*$$

olduğu biliniyor.

$$V \times g^* = (ag^* + be^* + ct^*) \times g^* = a(g^* \times g^*) + b(e^* \times g^*) + c(t^* \times g^*)$$

$$V \times g^* = a0 + b(-t^*) + ce^* = \theta' e^*$$

$$V \times g^* = -bt^* + ce^* = \theta' e^*$$

olup burada g^* , e^* , t^* vektörlerinin katsayılarının eşitliğinden:

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ c &= \theta' \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur. Ayrıca

$$\phi(V) = 0, \quad \nabla_{\alpha^*} V = V \times V = 0 \quad (3.12)$$

olduğu kullanılırsa

$$\phi(V) = \phi(ag^* + be^* + ct^*) = 0$$

$$a\phi(g^*) + b\phi(e^*) + c\phi(t^*) = 0$$

olup, g^* -manyetik eğriler için $\phi(g^*)$, $\phi(e^*)$ ve $\phi(t^*)$ değerleri yerine yazılırsa

$$a\theta' e^* + b(-\theta' g^* + \mu_1 t^*) + c(-\mu_1 e^*) = 0$$

$$a\theta' e^* - b\theta' g^* + b\mu_1 t^* - c\mu_1 e^* = 0$$

olur.

Bu durumda, (3.11) eşitliğinden $b = 0$ ve $c = \theta'$ olması kullanılırsa

$$a = \mu_1 \quad (3.13)$$

olup

$$V = \mu_1 g^* + \theta' t^*$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. M , 3 boyutlu reel uzay formu $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği C olan bir manifold ve V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. $(M(C), g, V)$ nin g^* -manyetik yörüngelerinin eğrilik ve burulması aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$V(\theta') = \theta''(\mu_1 - 2\lambda) - \theta' \lambda' = 0 \quad (3.14)$$

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} (\theta''' + \theta' \lambda'(\mu_1 - \lambda) + c\theta'') \right]' + \left(\frac{1}{2} \theta'^2 \right)' = 0 \quad (3.15)$$

İspat. V Killing vektör alanı olduğundan (3.9), (2.13) ve (2.14) deki (1) eşitliğinden

$$V(\bar{v}) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*)_{\bar{v}} = 0$$

$$V = \mu_1 g^* + \theta t^*$$

yazılır. Burada,

$$\nabla_{\alpha^*} V = \mu_1' g^* + \mu_1 g^{*'} + \theta' t^* + \theta t^{*'} \quad (3.16)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = \mu_1' = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (2.20) ve (3.17) değerleri, (3.16) da yerlerine yazılırsa

$$\nabla_{\alpha^*} V = \mu_1 \theta' e^* + \theta' t^* - \theta' \lambda e^*$$

ve düzenlenirse

$$\nabla_{\alpha^*} V = \theta' (\mu_1 - \lambda) e^* + \theta' t^* \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) eşitliğinde tekrar türev alınır

$$\nabla_{\alpha^*}^2 V = \theta'' (\mu_1 - \lambda) e^* + \theta' (\mu_1 - \lambda)' e^* + \theta' (\mu_1 - \lambda) e^{*'} + \theta'' t^* + \theta' t^{*'}$$

olup, (2.20)'deki eşitlikler ve değerleri yerine yazılırsa

$$\nabla_{\alpha^*}^2 V = \theta'' (\mu_1 - \lambda) e^* + \theta' (\mu_1 - \lambda)' e^* + \theta' (\mu_1 - \lambda) (-\theta' g^* + \lambda t^*) + \theta'' t^* + \theta' (-\lambda e^{*'})$$

ve düzenlenirse

$$\nabla_{\alpha^*}^2 V = -\theta'' (\mu_1 - \lambda) g^* + \left[(\theta' (\mu_1 - \lambda))' - \theta'' \lambda \right] e^* + \left[\theta' \lambda (\mu_1 - \lambda) + \theta'' \right] t^* \quad (3.19)$$

elde edilir.

V Killing vektör alanı olduğundan (2.13) ve (2.14) deki (2) eşitliğinden

$$V(\theta') = \frac{\partial \theta'}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, e^*) - 2\theta' g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) + g(R(V, g^*) g^*, e^*) = 0$$

bulunur. Burada,

$$g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, e^*) = (\theta' (\mu_1 - \lambda))' - \theta'' \lambda \quad (3.20)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = 0 \quad (3.21)$$

$$g(R(V, g^*) g^*, e^*) = R(V, g^*, g^*, e^*) = C \left\{ g(g^*, g^*) g(V, e^*) - g(V, g^*) g(g^*, e^*) \right\} = 0 \quad (3.22)$$

olup, gerekli işlemler yapılırsa

$$V(\theta') = (\theta' (\mu_1 - \lambda))' - \theta'' \lambda = 0$$

$$V(\theta') = \theta'' (\mu_1 - \lambda) + \theta' (\mu_1' - \lambda') - \theta'' \lambda = 0$$

$$V(\theta') = \theta'' \mu_1 - \theta'' \lambda + \theta' \mu_1' - \theta' \lambda' - \theta'' \lambda = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) de (3.17) değeri, yani $\mu_1' = 0$ yerine yazılırsa

$$V(\theta') = \theta'' \mu_1 - 2\theta' \lambda - \theta' \lambda' = 0 \quad (3.24)$$

olmaktadır. Buradan

$$V(\theta') = \theta'' (\mu_1 - 2\lambda) - \theta' \lambda' = 0$$

elde edilir.

(2.13) ve (2.14) deki (3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} \\ &= \left[\frac{1}{\theta'} g(\nabla_{\alpha^*}^2 V + R(V, g^*) g^*, t^*) \right]_s + g(R(V, g^*) e^*, t^*) + \lambda g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) + \theta' g(\nabla_{\alpha^*} V, t^*) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

olup, gerekli değerler sırasıyla hesaplanırsa

$$g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, t^*) = \theta' \lambda (\mu_1 - \lambda) + \theta'' \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} g(R(V, g^*) g^*, t^*) &= R(V, g^*, g^*, t^*) = C \{ g(g^*, g^*) g(V, t^*) - g(V, g^*) g(g^*, t^*) \} \\ &= C g(V, t^*) \\ &= C \theta' \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$g(R(V, g^*) e^*, t^*) = R(V, g^*, e^*, t^*) = C \{ g(g^*, e^*) g(V, t^*) - g(V, e^*) g(g^*, t^*) \} = 0 \quad (3.28)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = g(\theta' (\mu_1 - \lambda) e^* + \theta'' t^*, g^*) = 0 \quad (3.29)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, t^*) = g(\theta' (\mu_1 - \lambda) e^* + \theta'' t^*, t^*) = \theta'' \quad (3.30)$$

bulunur. Bulunan (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) değerleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} (\theta'' + \theta' \lambda (\mu_1 - \lambda) + c \theta') \right] + \theta' \theta'' = 0 \quad (3.31)$$

olur. Buradan,

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} (\theta'' + \theta' \lambda (\mu_1 - \lambda) + c \theta') \right] + \left(\frac{1}{2} \theta'^2 \right)' = 0$$

elde edilir.

3.3. e*-Manyetik Eğriler

$\alpha^* = \alpha^*(s)$ eğrisi $\{g^*, e^*, t^*\}$ dönme çatısıyla birlikte e^* -manyetik eğri olsun. ϕ

Lorentz kuvveti ve V manyetik alanı için

$$\nabla_{\alpha^*} e^* = \phi(e^*) = V \times e^* \quad (3.32)$$

eşitliği yazılır.

Önerme 3.3.1. α^* eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde $\{g^*, e^*, t^*, \theta', \lambda\}$ Frenet elemanları ile birlikte bir e^* -manyetik eğri olsun. e^* -manyetik eğri için Lorentz kuvveti eşitliği, $\mu_2 = g(\phi(g^*), t^*)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \phi(g^*) \\ \phi(e^*) \\ \phi(t^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & \mu_2 \\ -\theta' & 0 & \lambda \\ -\mu_2 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^* \\ e^* \\ t^* \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

şeklindedir.

İspat. α^* eğrisi (M, g) 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde bir e^* -manyetik eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{g^*, e^*, t^*, \theta', \lambda\}$ olsun.

$\phi(g^*) \in sp\{g^*, e^*, t^*\}$ olduğundan

$$\phi(g^*) = a_1 g^* + a_2 e^* + a_3 t^* \quad (3.34)$$

şeklindedir. Buradan (2.20) türev formülleri kullanılırsa a_1, a_2, a_3 katsayıları

$$1) a_1 = g(\phi(g^*), g^*) = g(\nabla_{\alpha^*} g^*, g^*) = g(V \times g^*, g^*) = \det(V, g^*, g^*) = 0$$

$$2) a_2 = g(\phi(g^*), e^*) = -g(\phi(e^*), g^*) = -g(\nabla_{\alpha^*} e^*, g^*) = -g(e^*, g^*) \\ = -g(-\theta' g^* + \lambda t^*, g^*) = \theta'$$

$$3) a_3 = g(\phi(g^*), t^*) = \mu_2$$

olup

$$\phi(g^*) = \theta' e^* + \mu_2 t^* \quad (3.35)$$

elde edilir. Benzer şekilde e^* -manyetik eğriler için $\phi(e^*), \phi(t^*)$ değerleri hesaplanırsa, $\phi(e^*) \in sp\{g^*, e^*, t^*\}$ olduğundan

$$\phi(e^*) = b_1 g^* + b_2 e^* + b_3 t^* \quad (3.36)$$

şeklindedir. Buradan (2.20) den b_1, b_2, b_3 katsayıları

$$1) b_1 = g(\phi(e^*), g^*) = g(\nabla_{\alpha^*} e^*, g^*) = g(e^*, g^*) = g(-\theta' g^* + \lambda t^*, g^*) = -\theta'$$

$$2) b_2 = g(\phi(e^*), e^*) = g(\nabla_{\alpha^*} e^*, e^*) = g(V \times e^*, e^*) = \det(V, e^*, e^*) = 0$$

$$3) b_3 = g(\phi(e^*), t^*) = g(\nabla_{\alpha^*} e^*, t^*) = g(e^*, t^*) = g(-\theta' g^* + \lambda t^*, t^*) = \lambda$$

dır. Buradan

$$\phi(e^*) = -\theta' g^* + \lambda t^* \quad (3.37)$$

bulunur.

$\phi(t^*) \in sp \{ g^*, e^*, t^* \}$ olduğundan

$$\phi(t^*) = c_1 g^* + c_2 e^* + c_3 t^* \quad (3.38)$$

şeklindedir. Buradan (2.20) den c_1, c_2, c_3 katsayıları

- 1) $c_1 = g(\phi(t^*), g^*) = -g(\phi(g^*), t^*) = -g(\theta' e^* + \mu_2 t^*, t^*) = -\mu_2$
- 2) $c_2 = g(\phi(t^*), e^*) = -g(\phi(e^*), t^*) = -g(e^*, t^*) = -g(-\theta' g^* + \lambda t^*, t^*) = -\lambda$
- 3) $c_3 = g(\phi(t^*), t^*) = g(\nabla_{\alpha^*} t^*, t^*) = g(V \times t^*, t^*) = \det(V, t^*, t^*) = 0$

dır. Buradan

$$\phi(t^*) = -\mu_2 g^* - \lambda e^* \quad (3.39)$$

elde edilir.

3.4. e*-Manyetik Eğrilerde V Manyetik Alanı'nın Bulunması

Önerme 3.4.1. Birim hızlı α^*, e^* -manyetik eğrisi V manyetik alanın yörüngesindedir gerek ve yeter şart V manyetik alanı α^* eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^* \quad (3.40)$$

Burada, $\mu_2 = g(\phi(g^*), t^*)$ dır.

$$\text{İspat.} \quad V = a g^* + b e^* + c t^* \quad (3.41)$$

şeklinde alalım. Buradan a, b, c katsayılarını bulalım.

$$\phi(e^*) = \nabla_{\alpha^*} e^* = e^* = V \times e^* = -\theta' g^* + \lambda t^*$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$\begin{aligned} V \times e^* &= (a g^* + b e^* + c t^*) \times e^* = a(g^* \times e^*) + b(e^* \times e^*) + c(t^* \times e^*) \\ V \times e^* &= a t^* - c g^* = -\theta' g^* + \lambda t^* \end{aligned}$$

olup buradan g^*, e^*, t^* vektörlerinin katsayılarının eşitliğinden,

$$\begin{aligned} a &= \lambda \\ c &= \theta' \end{aligned} \quad (3.42)$$

bulunur. Ayrıca

$$\phi(V) = \nabla_{\alpha^*} V = V \times V = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi(V) &= \phi(ag^* + be^* + ct^*) = 0 \\ \phi(V) &= a\phi(g^*) + b\phi(e^*) + c\phi(t^*) = 0\end{aligned}$$

olup, burada (3.33) değerleri yerine yazılırsa

$$a(\theta'e^* + \mu_2 t^*) + b(-\theta'g^* + \lambda t^*) + c(-\mu_2 g^* - \lambda e^*) = 0 \quad (3.43)$$

bulunur. (3.43) de (3.42) değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}\lambda\theta'e^* + \lambda\mu_2 t^* - b\theta'g^* + b\lambda t^* - \theta'\mu_2 g^* - \theta'\lambda e^* &= 0 \\ \lambda\mu_2 t^* - b\theta'g^* &= -b\lambda t^* + \theta'\mu_2 g^*\end{aligned}$$

olup, katsayıların eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mu_2 \lambda &= -b\lambda \\ b &= -\mu_2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-b\theta' &= \theta'\mu_2 \\ b &= -\mu_2\end{aligned} \quad (3.44)$$

yazılır. (3.42) ve (3.44) eşitlikleri (3.41) de yerine yazılırsa

$$V = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^*$$

elde edilir.

Teorem 3.4.2. M , 3 boyutlu reel uzay formu $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği C olan bir manifold ve V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. $(M(C), g, V)$ nin e^* -manyetik yörüngelerinin eğrilik ve burulması aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$V(\theta') = -\mu_2'' - \lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda) + C(-\mu_2) = 0 \quad (3.45)$$

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} \left((\theta'' - \mu_2 \lambda)' - \mu_2' \lambda + C\theta' \right) \right] + \theta'(\theta'' - \mu_2 \lambda) = 0 \quad (3.46)$$

İspat. V , M üzerinde bir Killing vektör alanı olsun. (3.40) eşitliğinden

$$V = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^*$$

olup, bu eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\nabla_{\alpha^s} V = \lambda' g^* + \lambda g^{*'} - \mu_2' e^* - \mu_2 e^{*'} + \theta'' t^* + \theta' t^{*'}$$

bulunur. Buradan (2.20) eşitliği yerine yazılır

$$\nabla_{\alpha^s} V = \lambda' g^* + \lambda(\theta' e^*) - \mu_2' e^* - \mu_2(-\theta' g^* + \lambda t^*) + \theta'' t^* + \theta'(-\lambda e^*)$$

ve düzenlenirse

$$\nabla_{\alpha^*} V = (\lambda' + \mu_2 \theta') g^* - \mu_2' e^* + (-\mu_2 \lambda + \theta'') t^* \quad (3.47)$$

elde edilir.

V Killing vektör alanı ise (2.13) ve (2.14) de (1) eşitliğinden

$$V(\bar{v}) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*)_{\bar{v}} = 0$$

yazılır. Burada (3.47) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) &= g((\lambda' + \mu_2 \theta') g^* - \mu_2' e^* + (-\mu_2 \lambda + \theta'') t^*, g^*) = 0 \\ \lambda' + \mu_2 \theta' &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.47) de yerine yazılırsa

$$\nabla_{\alpha^*} V = -\mu_2' e^* + (\theta'' - \mu_2 \lambda) t^* \quad (3.49)$$

elde edilir. Burada (3.49) eşitliğinde tekrar türev alınırsa

$$\nabla_{\alpha^*}^2 V = -\mu_2'' e^* - \mu_2' \theta' e^* + (\theta''' - \mu_2 \lambda') t^* + (\theta'' - \mu_2 \lambda) t^* \quad (3.50)$$

olup, (2.20) eşitliği (3.50) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha^*}^2 V &= -\mu_2'' e^* - \mu_2' (-\theta' g^* + \lambda t^*) + (\theta''' - \mu_2 \lambda') t^* - (\theta'' - \mu_2 \lambda) \lambda e^* \\ \nabla_{\alpha^*}^2 V &= \mu_2' \theta' g^* + (-\mu_2'' - \lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda)) e^* + ((\theta''' - \mu_2 \lambda') - \mu_2' \lambda) t^* \end{aligned} \quad (3.51)$$

bulunur. Ayrıca (3.48) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \lambda' + \mu_2 \theta' &= 0 \\ \lambda' &= -\mu_2 \theta' \\ \mu_2 &= -\frac{\lambda'}{\theta'} \end{aligned} \quad (3.52)$$

elde edilir. Burada, V Killing vektör alanı olup, (2.14) de (2) eşitliğinden

$$V(\theta') = \frac{\partial \theta'}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, e^*) - 2\theta' g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) + g(R(V, g^*) g^*, e^*) = 0$$

yazılır. Burada,

$$g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, e^*) = -\mu_2'' - \lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda) \quad (3.53)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} g(R(V, g^*) g^*, e^*) &= R(V, g^*, g^*, e^*) = C \{ g(g^*, g^*) g(V, e^*) - g(V, g^*) g(g^*, e^*) \} \\ &= C(-\mu_2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

olup, gerekli işlemler yapılırsa

$$V(\theta') = -\mu_2'' - \lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda) + C(-\mu_2) = 0$$

elde edilir.

Buradan V Killing vektör alanı olup, (2.14) de (3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
V(\lambda) &= \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} \\
&= \left[\frac{1}{\theta'} g(\nabla_{\alpha^*}^2 V + R(V, g^*)g^*, t^*) \right]_s + g(R(V, g^*)e^*, t^*) + \lambda g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) + \theta' g(\nabla_{\alpha^*} V, t^*) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

olup, gerekli işlemler yapılırsa

$$g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, t^*) = (\theta'' - \mu_2 \lambda)' - \mu_2' \lambda \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
g(R(V, g^*)g^*, t^*) &= R(V, g^*, g^*, t^*) = C \{ g(g^*, g^*)g(V, t^*) - g(V, g^*)g(g^*, t^*) \} \\
&= C\theta'
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$g(R(V, g^*)e^*, t^*) = R(V, g^*, e^*, t^*) = C \{ g(g^*, e^*)g(V, t^*) - g(V, e^*)g(g^*, t^*) \} = 0 \tag{3.59}$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = \lambda' + \mu_2 \theta' = 0 \tag{3.60}$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, t^*) = \theta'' - \mu_2 \lambda \tag{3.61}$$

bulunur. (3.57), (3.58), (3.59), (3.60), (3.61) değerleri (3.56) da yerine yazılırsa

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} \left((\theta'' - \mu_2 \lambda)' - \mu_2' \lambda + C\theta' \right) \right] + \theta' (\theta'' - \mu_2 \lambda) = 0$$

elde edilir.

3.5. t^* -Manyetik Eğriler

$\alpha^* = \alpha^*(s)$ eğrisi $\{g^*, e^*, t^*\}$ dönme çatısıyla birlikte t^* -manyetik eğri olsun. ϕ

Lorentz kuvveti ve V manyetik alanı olmak üzere, α^* eğrisinin binormal vektör alanı aşağıdaki Lorentz kuvveti eşitliğini sağlıyorsa α^* eğrisine M üzerinde t^* -manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\alpha^*} t^* = \phi(t^*) = V \times t^* \tag{3.62}$$

Önerme 3.5.1. α^* eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde $\{g^*, e^*, t^*, \theta', \lambda\}$ elemanları ile birlikte bir t^* -manyetik eğri olsun. t^* -manyetik eğri için Lorentz kuvveti eşitliği

$$\begin{bmatrix} \phi(g^*) \\ \phi(e^*) \\ \phi(t^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_3 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^* \\ e^* \\ t^* \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

şeklindedir. Burada, $\mu_3 = g(\phi(g^*), e^*)$ dir.

İspat. α^* eğrisi (M, g) 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde bir t^* -manyetik eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{g^*, e^*, t^*, \theta', \lambda\}$ olsun.

$\phi(g^*) \in sp\{g^*, e^*, t^*\}$ olduğundan

$$\phi(g^*) = a_1 g^* + a_2 e^* + a_3 t^* \quad (3.64)$$

şeklindedir. Burada (2.20) eşitliği kullanılırsa a_1, a_2, a_3 katsayıları

$$1) a_1 = g(\phi(g^*), g^*) = g(\nabla_{\alpha^*} g^*, g^*) = g(V \times g^*, g^*) = \det(V, g^*, g^*) = 0$$

$$2) a_2 = g(\phi(g^*), e^*) = \mu_3 \text{ alalım.}$$

$$3) a_3 = g(\phi(g^*), t^*) = -g(\phi(t^*), g^*) = -g(\nabla_{\alpha^*} t^*, g^*) = -g(t^*, g^*) = -g(-\lambda e^*, g^*) = 0$$

dır. Buradan

$$\phi(g^*) = \mu_3 e^* \quad (3.65)$$

bulunur.

Benzer şekilde t^* -manyetik eğriler için $\phi(e^*), \phi(t^*)$ değerlerini de bulunursa, $\phi(e^*) \in sp\{g^*, e^*, t^*\}$ olduğundan

$$\phi(e^*) = b_1 g^* + b_2 e^* + b_3 t^* \quad (3.66)$$

şeklindedir. Burada (2.20) eşitliğinden b_1, b_2, b_3 katsayıları

$$1) b_1 = g(\phi(e^*), g^*) = -g(\phi(g^*), e^*) = -\mu_3$$

$$2) b_2 = g(\phi(e^*), e^*) = g(\nabla_{\alpha^*} e^*, e^*) = g(V \times e^*, e^*) = \det(V, e^*, e^*) = 0$$

$$3) b_3 = g(\phi(e^*), t^*) = -g(\phi(t^*), e^*) = -g(\nabla_{\alpha^*} t^*, e^*) = -g(t^*, e^*) = -g(-\lambda e^*, e^*) = \lambda$$

dır. Buradan

$$\phi(e^*) = -\mu_3 g^* + \lambda t^* \quad (3.67)$$

bulunur.

$\phi(t^*) \in sp\{g^*, e^*, t^*\}$ olduğundan

$$\phi(t^*) = c_1 g^* + c_2 e^* + c_3 t^* \quad (3.68)$$

şeklindedir. Buradan (2.20) eşitliği kullanılırsa c_1, c_2, c_3 katsayıları

$$1) c_1 = g(\phi(t^*), g^*) = g(\nabla_{\alpha^*} t^*, g^*) = g(t^*, g^*) = g(-\lambda e^*, g^*) = 0$$

$$2) c_2 = g(\phi(t^*), e^*) = g(\nabla_{\alpha^*} t^*, e^*) = g(t^*, e^*) = g(-\lambda e^*, e^*) = -\lambda$$

$$3) c_3 = g(\phi(t^*), t^*) = g(\nabla_{\alpha^*} t^*, t^*) = g(t^*, t^*) = g(-\lambda e^*, t^*) = 0$$

şeklindedir. Buradan

$$\phi(t^*) = -\lambda e^* \quad (3.69)$$

elde edilir.

3.6. t*-Manyetik Eğrilerde V Manyetik Alanı'nın Bulunması

Önerme 3.6.1. Birim hızlı α^* , t^* -manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesindedir gerek ve yeter şart V manyetik alanı α^* eğrisi boyunca, $\mu_3 = g(\phi(g^*), e^*)$ olmak üzere,

$$V = \lambda g^* + \mu_3 t^* \quad (3.70)$$

eşitliği gibi yazılabilir.

İspat. α^* eğrisi V manyetik vektör alanının yörüngesi olsun.

$$V = a g^* + b e^* + c t^* \quad (3.71)$$

şeklinde alalım. Buradan a, b, c katsayılarını bulalım.

$$\phi(t^*) = \nabla_{\alpha^*} t^* = t^* = V \times t^* = -\lambda e^*$$

olduğu biliniyor.

$$\begin{aligned} V \times t^* &= (a g^* + b e^* + c t^*) \times t^* = a(g^* \times t^*) + b(e^* \times t^*) + c(t^* \times t^*) \\ &= -a e^* + b g^* = -\lambda e^* \end{aligned}$$

olup buradan g^*, e^*, t^* vektörlerinin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} a &= \lambda \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

bulunur. Ayrıca

$$\phi(V) = \nabla_{\alpha^*} V = V \times V = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \phi(V) &= \phi(a g^* + b e^* + c t^*) = 0 \\ \phi(V) &= a \phi(g^*) + b \phi(e^*) + c \phi(t^*) = 0 \end{aligned}$$

olup buradan (3.63) değerleri yerine yazılırsa

$$a \mu_3 e^* + b(-\mu_3 g^* + \lambda t^*) + c(-\lambda e^*) = 0$$

olup, (3.72) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\lambda\mu_3 e^* + 0(-\mu_3 g^* + \lambda t^*) + c(-\lambda e^*) &= 0 \\ \lambda\mu_3 e^* &= c\lambda e^* \\ c &= \mu_3\end{aligned}\quad (3.73)$$

bulunur. (3.72) ve (3.73) eşitlikleri (3.71) de yerine yazılırsa,

$$V = \lambda g^* + \mu_3 t^*$$

elde edilir.

Teorem 3.6.2. M , 3 boyutlu reel uzay formu $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği C olan bir manifold ve V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. $(M(C), g, V)$ nin t^* -Manyetik yörüngelerinin eğrilik ve burulması aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$V(\theta') = \lambda\theta'' - 2\lambda\mu_3' = 0, \mu_3' = \frac{\theta''}{2} \quad (3.74)$$

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} (\lambda^2 \theta' + \mu_3'' - \lambda^2 \mu_3 + C\mu_3) \right]' + \theta' \mu_3' = 0 \quad (3.75)$$

İspat. V , M üzerinde bir Killing vektör alanı olsun. (3.70) eşitliğinden

$$V = \lambda g^* + \mu_3 t^*$$

yazılır. Buradan

$$\nabla_{\alpha^*} V = \lambda' g^* + \lambda g^{*'} + \mu_3' t^* + \mu_3 t^{*'} \quad (3.76)$$

olup buradan (2.20) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha^*} V &= \lambda' g^* + \lambda\theta' e^* + \mu_3' t^* - \mu_3 \lambda e^{*'} \\ \nabla_{\alpha^*} V &= \lambda' g^* + \lambda(\theta' - \mu_3) e^* + \mu_3' t^*\end{aligned}\quad (3.77)$$

bulunur. Buradan (3.77), (2.13) ve (2.14) de (1) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}V(\bar{v}) &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*)_{\bar{v}} = 0 \\ g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) &= g(\lambda' g^* + \lambda(\theta' - \mu_3) e^* + \mu_3' t^*, g^*) = 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\lambda' = 0 \quad (3.78)$$

$$\lambda = \text{Sabit} \quad (3.79)$$

olup, (3.78) eşitliği (3.77) de yerine yazılırsa

$$\nabla_{\alpha^*} V = \lambda(\theta' - \mu_3) e^* + \mu_3' t^* \quad (3.80)$$

elde edilir. Buradan (3.80) de tekrar türev alınır

$$\nabla_{\alpha^*}^2 V = \lambda'(\theta' - \mu_3)e^* + \lambda(\theta' - \mu_3)'e^* + \lambda(\theta' - \mu_3)e^{*'} + \mu_3''t^* + \mu_3't^{*'} \quad (3.81)$$

bulunur. (3.78) ve (2.20) eşitlikleri (3.81) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha^*}^2 V &= \lambda(\theta' - \mu_3)'e^* + \lambda(\theta' - \mu_3)(-\theta'g^* + \lambda t^*) + \mu_3''t^* + \mu_3'(-\lambda e^*) \\ \nabla_{\alpha^*}^2 V &= \lambda\theta''e^* - \lambda\mu_3'e^* + (\lambda\theta' - \lambda\mu_3)(-\theta'g^* + \lambda t^*) + \mu_3''t^* - \lambda\mu_3'e^* \\ \nabla_{\alpha^*}^2 V &= \lambda\theta''e^* - \lambda\mu_3'e^* - \theta'^2\lambda g^* + \lambda^2\theta't^* + \theta'\lambda\mu_3g^* - \lambda^2\mu_3t^* + \mu_3''t^* - \lambda\mu_3'e^* \\ \nabla_{\alpha^*}^2 V &= (\theta'\lambda\mu_3 - \theta'^2\lambda)g^* + (\lambda\theta'' - 2\lambda\mu_3')e^* + (\lambda^2\theta' + \mu_3'' - \lambda^2\mu_3)t^* \end{aligned} \quad (3.82)$$

bulunur.

(2.13) ve (2.14) de (2) eşitliğini kullanırsa

$$V(\theta') = \frac{\partial \theta'}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, e^*) - 2\theta'g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) + g(R(V, g^*)g^*, e^*) = 0 \quad (3.83)$$

olup, gerekli değerler hesaplanırsa

$$g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, e^*) = \lambda\theta'' - 2\lambda\mu_3' \quad (3.84)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = 0 \quad (3.85)$$

$$g(R(V, g^*)g^*, e^*) = R(V, g^*, g^*, e^*) = C\{g(g^*, g^*)g(V, e^*) - g(V, g^*)g(g^*, e^*)\} = 0 \quad (3.86)$$

bulunur. (3.84), (3.85), (3.86) eşitlikleri (3.83) de yerine yazılırsa

$$V(\theta') = \lambda\theta'' - 2\lambda\mu_3' = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda = \text{Sabit} \quad (3.87)$$

$$\lambda\theta'' = 2\lambda\mu_3'$$

$$\theta'' = 2\mu_3'$$

$$\mu_3' = \frac{\theta''}{2} \quad (3.88)$$

elde edilir. (3.88) eşitliğinin integrali alınır

$$\mu_3 = \frac{\theta'}{2} + k, \quad k = \text{Sabit} \quad (3.89)$$

elde edilir.

(2.13) ve (2.14) de (3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} \\ &= \left[\frac{1}{\theta'} g(\nabla_{\alpha^*}^2 V + R(V, g^*)g^*, t^*) \right]_s + g(R(V, g^*)e^*, t^*) + \lambda g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) + \theta' g(\nabla_{\alpha^*} V, t^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup,

$$g(\nabla_{\alpha^*}^2 V, t^*) = \lambda^2 \theta' + \mu_3'' - \lambda^2 \mu_3 \quad (3.90)$$

$$g(R(V, g^*)g^*, t^*) = R(V, g^*, g^*, t^*) = C \{g(g^*, g^*)g(V, t^*) - g(V, g^*)g(g^*, t^*)\} = C\mu_3 \quad (3.91)$$

$$g(R(V, g^*)e^*, t^*) = R(V, g^*, e^*, t^*) = C \{g(g^*, e^*)g(V, t^*) - g(V, e^*)g(g^*, t^*)\} = 0 \quad (3.92)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, g^*) = 0 \quad (3.93)$$

$$g(\nabla_{\alpha^*} V, t^*) = \mu_3' \quad (3.94)$$

bulunur. Burada gerekli işlemler yapılırsa,

$$V(\lambda) = \left[\frac{1}{\theta'} (\lambda^2 \theta' + \mu_3'' - \lambda^2 \mu_3 + C\mu_3) \right]' + \theta' \mu_3' = 0$$

elde edilir.

4. MANYETİK EĞRİLERİN AKI REGLE YÜZEYLERİ

Bu bölümde eğrilik teorisinden elde edilen ortogonal dönme çatısı ile tanımlanan α^* eğrisi alındı. Bu çatı tarafından manyetik alan içinde çizilen manyetik eğriler dayanak eğrisi olarak kabul edildi. Bu eğrilerin doğrultman vektörünü manyetik alan eğrilerinin Killing manyetik alan vektörleri olarak kabul eden akı regle yüzeyleri incelendi. Akı regle yüzeylerinin açılabilirlik koşulları aşağıdaki gibi elde edildi ve grafikleri çizildi.

4.1. g^* - Akı Regle Yüzeyi

Teorem 4.1.1. α^* bir g^* -manyetik eğrisi ve V Killing manyetik vektör alanı olmak üzere, V manyetik alan vektörü α^* eğrisi boyunca hareket ederek bir akı regle yüzeyi oluşturur.

İspat. Birim hızlı α^* , g^* -manyetik eğrisi V manyetik alanın yörüngesinde olup,

$$V = \mu_1 g^* + \theta' t^* \quad (4.1)$$

şeklindedir. Bu V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketiyle oluşan yüzeye akı regle yüzeyi denir ve (2.16) dan bu yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + vV(s) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + v(\mu_1 g^* + \theta' t^*) \quad (4.3)$$

elde edilir. (2.15) den akı yüzeyi oluşturabilmesi için

$$g(V, \hat{N}) = 0 \quad (4.4)$$

olup,

$$\hat{N} = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \quad (4.5)$$

şeklindedir. (4.3) de s parametresine göre türev alınırsa

$$\varphi_s = \alpha'^* + v(\mu_1' g^* + \mu_1 g^* + \theta'' t^* + \theta' t'^*) \quad (4.6)$$

olup, (2.20), (3.17) ve $\alpha'^* = g^*$ eşitlikleri (4.6) da yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \varphi_s &= g^* + v(\mu_1 \theta' e^* + \theta'' t^* - \theta' \lambda e^*) \\ \varphi_s &= g^* + v(\mu_1 \theta' - \theta' \lambda) e^* + v \theta'' t^* \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.3) de v parametresine göre türev alınırsa

$$\varphi_v = \mu_1 g^* + \theta' t^* \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitlikleri (4.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \begin{vmatrix} g^* & e^* & t^* \\ 1 & v\theta'(\mu_1 - \lambda) & v\theta'' \\ \mu_1 & 0 & \theta' \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} (v\theta''(\mu_1 - \lambda), v\mu_1\theta'' - \theta', v\mu_1\theta'(\lambda - \mu_1)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.1) ve (4.9) eşitlikleri (2.15) de yerine yazılırsa

$$g(V, \hat{N}) = v\mu_1\theta''(\mu_1 - \lambda) + v\mu_1\theta''(\lambda - \mu_1) = v\mu_1\theta''(\mu_1 - \lambda) - v\mu_1\theta''(\mu_1 - \lambda) = 0$$

bulunur. Yani akı regle yüzeyi oluşturur.

Sonuç 4.1.2. α^* , g^* - manyetik eğrisi, V Killing manyetik vektör alanı olmak üzere, V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketi ile oluşan akı regle yüzeyleri açılabilir yüzeylerdir gerek ve yeter şart

$$\lambda = \mu_1 \quad (4.10)$$

olmasıdır.

İspat. α^* , g^* - manyetik eğrisinin V manyetik alanı

$$V = \mu_1 g^* + \theta' t^*$$

şeklinde olup, bir akı yüzeyi oluşturduğunu biliyoruz. Yine (2.16) eşitliğinden V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketiyle oluşan regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + vV(s) \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlıdır. (4.11) eşitliğinde (3.9) yerine yazılırsa

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + v(\mu_1 g^* + \theta' t^*) \quad (4.12)$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) gereğince akı regle yüzeyinin açılabilir olması için

$$K(s, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \quad (4.13)$$

gereklidir. (4.12) de s parametresine bağlı türev alınırsa,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \varphi_s = \alpha'^* + v(\mu_1' g^* + \mu_1 g'^* + \theta'' t^* + \theta' t'^*) \quad (4.14)$$

olup, (2.20), (3.17) ve $\alpha'^* = g'^*$ eşitlikleri (4.14) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \varphi_s = g^* + v\theta'(\mu_1 - \lambda)e^* + v\theta''t^* \quad (4.15)$$

bulunur. (4.12) de v ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_v = \mu_1 g^* + \theta' t^* \quad (4.16)$$

elde edilir. Buradan (4.15) ve (4.16) de tekrar türev alınır ve (2.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= g^* + v(\theta''(\mu_1 - \lambda)e^* + \theta'(\mu_1' - \lambda')e^* + \theta'(\mu_1 - \lambda)e^*) + v\theta'''t^* + v\theta''t^* \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= \theta'e^* + v(\theta''(\mu_1 - \lambda)e^* + \theta'(\mu_1' - \lambda')e^* + \theta'(\mu_1 - \lambda)(-\theta'g^* + \lambda t^*)) + v\theta'''t^* - v\theta''\lambda e^* \end{aligned}$$

olup, (3.14) ve (3.17) eşitlikleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \theta^2(\lambda - \mu_1)g^* + \theta'e^* + v(\theta'(\mu_1 - \lambda)\lambda + \theta''')t^* \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial v} = \theta'(\mu_1 - \lambda)e^* + \theta''t^* \quad (4.19)$$

bulunur. Burada (2.23) ve (2.24) eşitliklerinden

$$\begin{cases} E = g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = 1 + v^2 \theta^2 (\mu_1 - \lambda)^2 + v^2 \theta''^2 \\ F = g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \mu_1 + v\theta'\theta'' \\ G = g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \mu_1^2 + \theta'^2 \\ L = g \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} \theta^2(\lambda - \mu_1) & \theta' & v(\theta'(\mu_1 - \lambda)\lambda + \theta''') \\ 1 & v\theta'(\mu_1 - \lambda) & v\theta'' \\ \mu_1 & 0 & \theta' \end{vmatrix} \\ = \theta^2(\lambda - \mu_1)(v\theta^2(\mu_1 - \lambda)) + \theta'(v\theta''\mu_1 - \theta') + v(\theta'(\mu_1 - \lambda)\lambda + \theta''')(v\mu_1\theta'(\lambda - \mu_1)) \\ N = g \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0 \\ M = g \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} 0 & \theta'(\mu_1 - \lambda) & \theta'' \\ 1 & v\theta'(\mu_1 - \lambda) & v\theta'' \\ \mu_1 & 0 & \theta' \end{vmatrix} = \theta'(\mu_1 - \lambda)(v\mu_1\theta'' - \theta') + \theta''v\mu_1\theta'(\lambda - \mu_1) \\ = \theta'^2(\lambda - \mu_1) \end{cases} \quad (4.21)$$

elde edilir. O halde, açılabilir olması için (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} K(s, v) &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \\ LN - M^2 &= 0 \\ M^2 &= 0, \quad M = 0 \\ \theta'^2 (\lambda - \mu_1) &= 0, \quad \theta' \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda - \mu_1 &= 0 \\ \lambda &= \mu_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. e*- Akı Regle Yüzeyi

Teorem 4.2.1. α^* bir e^* -manyetik eğrisi ve V Killing manyetik vektör alanı olmak üzere, V manyetik alan vektörü α^* eğrisi boyunca hareket ederek bir akı regle yüzeyi oluşturur.

İspat. α^* , e^* -manyetik eğrisi V manyetik alanın yörüngesinde olup,

$$V = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^*$$

şeklindedir. (2.16) dan bu V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketiyle oluşan regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + vV(s) \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + v(\lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^*) \quad (4.23)$$

elde edilir. Burada (2.15) den akı yüzeyi oluşturabilmesi için

$$g(V, \hat{N}) = 0 \quad (4.24)$$

olup,

$$\hat{N} = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \quad (4.25)$$

şeklindedir. (4.23) eşitliğinde s parametresine bağlı türev alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \alpha'^*(s) + v \nabla_{\alpha^*} V \\ \varphi_s &= \alpha'^*(s) + v(\lambda' g^* + \lambda g'^* - \mu_2' e^* - \mu_2 e'^* + \theta'' t^* + \theta' t'^*) \end{aligned} \quad (4.26)$$

bulunur. (4.26) da, (2.20), (3.52) ve $\alpha'^* = g^*$ eşitlikleri yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\varphi_s = g^* + v(-\theta' \mu_2 g^* + \lambda \theta' e^* - \mu_2' e^* - \mu_2(-\theta' g^* + \lambda t^*) + \theta'' t^* - \theta' \lambda e^*)$$

$$\begin{aligned}\varphi_s &= g^* - v\mu_2' e^* - v\mu_2 \lambda t^* + v\theta' t^* \\ \varphi_s &= g^* - v\mu_2' e^* + v(\theta'' - \mu_2 \lambda) t^*\end{aligned}\quad (4.27)$$

elde edilir. (4.23) de v parametresine bağlı türev alınırsa

$$\varphi_v = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^* \quad (4.28)$$

bulunur. (4.27) ve (4.28), (4.25) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \begin{vmatrix} g^* & e^* & t^* \\ 1 & -v\mu_2' & v(\theta'' - \mu_2 \lambda) \\ \lambda & -\mu_2 & \theta' \end{vmatrix} \\ \hat{N} &= \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} (-v\mu_2' \theta' + v\mu_2(\theta'' - \mu_2 \lambda), v\lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda) - \theta', v\lambda\mu_2' - \mu_2)\end{aligned}\quad (4.29)$$

elde edilir. (4.29) ve (3.40) eşitlikleri (2.15) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}g(V, \hat{N}) &= -v\lambda\mu_2' \theta' + v\lambda\mu_2 \theta'' - v\lambda^2 \mu_2^2 - v\lambda\mu_2 \theta'' + v\lambda^2 \mu_2^2 + \mu_2 \theta' + v\lambda\mu_2' \theta' - \mu_2 \theta' \\ g(V, \hat{N}) &= 0\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O halde, akı regle yüzeyi oluşturur.

Sonuç 4.2.2. α^* , e^* - manyetik eğrisinin V Killing manyetik vektör alanı olmak üzere, V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketi ile oluşan akı regle yüzeyleri açılabilir yüzeylerdir gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\mu_2}{\theta'}\right)' = -\lambda \left(\frac{\mu_2}{\theta'}\right)^2, \quad \mu_2 \int \lambda ds - \theta' = 0 \quad (4.30)$$

olmasıdır.

İspat. α^* , e^* - manyetik eğrisinin

$$V = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^*$$

killig manyetik vektör alanının bir akı yüzeyi oluşturduğunu biliyoruz. (2.16) dan bu V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketiyle oluşan regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi_2(s, v) = \alpha^*(s) + vV(s)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\varphi_2(s, v) = \alpha^*(s) + v(\lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^*) \quad (4.31)$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) gereğince akı regle yüzeyinin açılabilir olması için

$$K(s, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \quad (4.32)$$

sağlanmalıdır. (4.31) de s parametresine bağlı türev alınırsa

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} = \alpha^*(s) + v \nabla_{\alpha^*} V \quad (4.33)$$

olup, (3.49) ve $\alpha^* = g^*$ eşitliği (4.33) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} &= g^* + v(-\mu_2' e^* + (\theta'' - \mu_2 \lambda) t^*) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} &= g^* - v \mu_2' e^* + v(\theta'' - \mu_2 \lambda) t^* \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.31) de v parametresine bağlı türev alınırsa

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \lambda g^* - \mu_2 e^* + \theta' t^* \quad (4.35)$$

elde edilir. (4.34) ve (4.35) de tekrar türev alınır ve (2.20) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} &= g^{*'} - v(\mu_2'' e^* + \mu_2' e^{*'}) + v(\theta''' - \mu_2' \lambda - \mu_2 \lambda') t^* + v(\theta'' - \mu_2 \lambda) t^{*'} \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} &= \theta' e^{*'} - v(\mu_2'' e^* + \mu_2'(-\theta' g^* + \lambda t^*)) + v(\theta''' - \mu_2' \lambda - \mu_2 \lambda') t^* + v(\theta'' - \mu_2 \lambda)(-\lambda e^{*'}) \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} &= v \mu_2' \theta' g^* + (\theta' - v(\mu_2'' + \lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda))) e^{*'} + v(\theta''' - 2\mu_2' \lambda - \mu_2 \lambda') t^* \end{aligned} \quad (4.36)$$

bulunur. (3.45) eşitliği (4.36) da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} = v \mu_2' \theta' g^* + (\theta' + v C \mu_2) e^{*'} + v(\theta''' - 2\mu_2' \lambda - \mu_2 \lambda') t^* \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v^2} = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s \partial v} = -\mu_2' e^* + (\theta'' - \mu_2 \lambda) t^* \quad (4.39)$$

elde edilir. Burada (2.23) ve (2.24) eşitliklerinden

$$\begin{cases} E = g \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \right) = 1 + v^2 (\mu_2')^2 + v^2 (\theta'' - \mu_2 \lambda)^2 \\ F = g \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) = \lambda + v \mu_2 \mu_2' + v \theta' (\theta'' - \mu_2 \lambda) \\ G = g \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) = \lambda^2 + \mu_2^2 + \theta^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\begin{cases}
L = g \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} v\mu_2' \theta' & \theta' + vC\mu_2 & v(\theta'' - 2\mu_2' \lambda - \mu_2 \lambda') \\ 1 & -v\mu_2' & v(\theta'' - \mu_2 \lambda) \\ \lambda & -\mu_2 & \theta' \end{vmatrix} \\
= v\mu_2' \theta' (v\mu_2(\theta'' - \mu_2 \lambda) - v\mu_2' \theta') + (\theta' + vC\mu_2)(v\lambda(\theta'' - \mu_2 \lambda) - \theta') \\
+ v(\theta'' - 2\mu_2' \lambda - \mu_2 \lambda')(v\mu_2' \lambda - \mu_2) \\
N = g \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) = 0 \\
M = g \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s \partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} 0 & -\mu_2' & \theta'' - \mu_2 \lambda \\ 1 & -v\mu_2' & v(\theta'' - \mu_2 \lambda) \\ \lambda & -\mu_2 & \theta' \end{vmatrix} \\
= \mu_2' (\theta' + v\lambda(\mu_2 \lambda - \theta'')) + (\theta'' - \mu_2 \lambda)(v\lambda\mu_2' - \mu_2) \\
= \mu_2' \theta' - \mu_2 \theta'' + \mu_2^2 \lambda
\end{cases} \quad (4.41)$$

elde edilir. O halde, açılabilir olması için (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
K(s, v) &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \\
LN - M^2 &= 0 \\
M^2 &= 0, \quad M = 0 \\
\mu_2' \theta' - \mu_2 \theta'' + \mu_2^2 \lambda &= 0 \\
\left(\frac{\mu_2}{\theta'} \right)' &= -\lambda \left(\frac{\mu_2}{\theta'} \right)^2 \\
\mu_2 \int \lambda ds - \theta' &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3. t^* - Akı Regle Yüzeyi

Teorem 4.3.1. α^* bir t^* -manyetik eğrisi ve V Killing manyetik vektör alanı olmak üzere, V manyetik alan vektörü α^* eğrisi boyunca hareket ederek bir akı regle yüzeyi oluşturur.

İspat. α^* , t^* -manyetik eğrisi V manyetik alanın yörüngesinde olup,

$$V = \lambda g^* + \mu_3 t^*$$

şeklinindedir. (2.16) dan bu V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketiyle oluşan regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + vV(s) \quad (4.42)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\varphi(s, v) = \alpha^*(s) + v(\lambda g^* + \mu_3 t^*) \quad (4.43)$$

elde edilir. (2.15) den akı yüzeyi oluşturabilmesi için

$$g(V, \hat{N}) = 0 \quad (4.44)$$

olup,

$$\hat{N} = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \quad (4.45)$$

şeklindedir. (4.43) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \alpha'^*(s) + v \nabla_{\alpha^*} V \\ \varphi_s &= \alpha'^* + v(\lambda' g^* + \lambda g'^* + \mu_3' t^* + \mu_3 t'^*) \end{aligned} \quad (4.46)$$

olup, (2.20), (3.78), (3.79) ve $\alpha'^* = g^*$ eşitlikleri (4.46) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_s &= g^* + v(\lambda \theta' e^* + \mu_3' t^* - \mu_3 \lambda e^*) \\ \varphi_s &= g^* + v\lambda(\theta' - \mu_3) e^* + v\mu_3' t^* \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. (4.43) de v ye göre türev alınırsa

$$\varphi_v = \lambda g^* + \mu_3 t^* \quad (4.48)$$

elde edilir. (4.47) ve (4.48) eşitlikleri (4.45) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \begin{vmatrix} g^* & e^* & t^* \\ 1 & v\lambda(\theta' - \mu_3) & v\mu_3' \\ \lambda & 0 & \mu_3 \end{vmatrix} \\ \hat{N} &= \frac{1}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} (v\lambda\mu_3(\theta' - \mu_3), v\lambda\mu_3' - \mu_3, v\lambda^2(\mu_3 - \theta')) \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir. (4.49) ve (3.70) eşitlikleri (2.15) de yerine yazılırsa

$$g(V, \hat{N}) = v\lambda^2 \mu_3 \theta' - v\lambda^2 \mu_3^2 + v\lambda^2 \mu_3^2 - v\lambda^2 \mu_3 \theta' = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda, akı regle yüzeyidir.

Sonuç 4.3.2. α^*, t^* - manyetik eğrisinin V Killing manyetik vektör alanı olmak üzere, V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketi ile oluşan akı regle yüzeyleri açılabilir yüzeylerdir gerek ve yeter şart

$$\theta' = \mu_3 \quad (4.50)$$

olmasıdır.

İspat. α^*, t^* - manyetik eğrisinin

$$V = \lambda g^* + \mu_3 t^*$$

killing manyetik vektör alanının bir akı yüzeyi oluşturduğunu biliyoruz. Yine Tanım (2.16) den bu V manyetik alan vektörünün α^* eğrisi boyunca hareketiyle oluşan regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi_3(s, v) = \alpha^*(s) + vV(s) \quad (4.51)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\varphi_3(s, v) = \alpha^*(s) + v(\lambda g^* + \mu_3 t^*) \quad (4.52)$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) gereğince akı regle yüzeyinin açılabilir olması için

$$K(s, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \quad (4.53)$$

sağlanmalıdır. (4.52) de s parametresine bağlı türev alınırsa

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial s} = \alpha'^*(s) + v \nabla_{\alpha^*} V \quad (4.54)$$

olup, (3.80) ve $\alpha^* = g^*$ eşitlikleri (4.54) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} &= g^* + v(\lambda(\theta' - \mu_3)e^* + \mu_3 t^*) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} &= g^* + v\lambda(\theta' - \mu_3)e^* + v\mu_3 t^* \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.52) de v parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial v} = \lambda g^* + \mu_3 t^* \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.55) de s ye göre tekrar türev alınırsa

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s^2} = g'^* + v\lambda'(\theta' - \mu_3)e^* + v\lambda(\theta'' - \mu_3')e^* + v\lambda(\theta' - \mu_3)e'^* + v\mu_3''t^* + v\mu_3't'^* \quad (4.57)$$

olup, (2.20) den eşitlikler (4.57) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s^2} &= \theta'e^* + v\lambda'(\theta' - \mu_3)e^* + v\lambda(\theta'' - \mu_3')e^* + v\lambda(\theta' - \mu_3)(-\theta'g^* + \lambda t^*) + v\mu_3''t^* + v\mu_3'(-\lambda e^*) \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s^2} &= -v\lambda\theta'(\theta' - \mu_3)g^* + (\theta' + v(\lambda\theta' - \lambda'\mu_3 + \lambda\theta'' - 2\lambda\mu_3'))e^* + v(\lambda^2(\theta' - \mu_3) + \mu_3'')t^* \end{aligned} \quad (4.58)$$

bulunur. Burada (3.74) ve (3.78) eşitlikleri (4.58) de yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s^2} = -v\lambda\theta'(\theta' - \mu_3)g^* + \theta'e^* + v(\lambda^2(\theta' - \mu_3) + \mu_3'')t^* \quad (4.59)$$

elde edilir. (4.55) ve (4.56) da v ye bağlı tekrar türev alınırsa

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial v^2} = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s \partial v} = \lambda(\theta' - \mu_3)e^* + \mu_3' t^* \quad (4.61)$$

elde edilir. Burada açılabilir olma şartlarını kontrol edebilmek için (2.23) ve (2.24) eşitliklerinden

$$\begin{cases} E = g\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}\right) = 1 + v^2 \lambda^2 (\theta' - \mu_3)^2 + v^2 (\mu_3')^2 \\ F = g\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right) = \lambda + \mu_3 \mu_3' \\ G = g\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right) = \lambda^2 + \mu_3^2 \end{cases} \quad (4.62)$$

$$\begin{cases} L = g\left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s^2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} -v\lambda\theta'(\theta' - \mu_3) & \theta' & v(\lambda^2(\theta' - \mu_3) + \mu_3'') \\ 1 & v\lambda(\theta' - \mu_3) & v\mu_3' \\ \lambda & 0 & \mu_3 \end{vmatrix} \\ = -v\lambda\theta'(\theta' - \mu_3)(v\lambda\mu_3(\theta' - \mu_3)) + \theta'(v\lambda\mu_3' - \mu_3) + v(\lambda^2(\theta' - \mu_3) + \mu_3'')(v\lambda^2(\mu_3 - \theta')) \\ N = g\left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right) = 0 \\ M = g\left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s \partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \lambda(\theta' - \mu_3) & \mu_3' \\ 1 & v\lambda(\theta' - \mu_3) & v\mu_3' \\ \lambda & 0 & \mu_3 \end{vmatrix} \\ = \lambda(\theta' - \mu_3)(v\lambda\mu_3' - \mu_3) + \mu_3' v\lambda^2(\mu_3 - \theta') \\ = \lambda\mu_3(\mu_3 - \theta') \end{cases} \quad (4.63)$$

elde edilir. O halde, açılabilir olması için (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} K(s, v) &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \\ LN - M^2 &= 0 \\ M^2 &= 0, \quad M = 0 \\ \lambda\mu_3(\mu_3 - \theta') &= 0 \\ \theta' &= \mu_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

5. AKI REGLE YÜZEYİ ÖRNEKLERİ

Örnek 5.1. $X(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s, \frac{1}{2} \sin 2s \right) \subset E^3$ doğrultman vektör

olsun. geodezik Frenet çatısı elemanları,

$$\begin{aligned}\bar{e}(s) &= (\cos^2 s, \sin^2 s, \sqrt{2} \cos s \sin s), \\ \bar{t}(s) &= (-\sqrt{2} \cos s \sin s, \sqrt{2} \cos s \sin s, \cos 2s), \\ \bar{g}(s) &= (-\sin^2 s, -\cos^2 s, \sqrt{2} \cos s \sin s)\end{aligned}$$

şeklinde olup, (2.18) den $\{\bar{e}, \bar{t}, \bar{g}\}$ çatısı, $\theta = \theta(s) = s$ Darboux açısı kadar döndürülecek olursa,

$$\begin{cases} g^* = ((\cos s - \sin s) \cos s \sin s, \sin^3 s - \cos^3 s, \sqrt{2} \cos s \sin s (\cos s + \sin s)), \\ e^* = (\sin^3 s + \cos^3 s, (\cos s + \sin s) \cos s \sin s, \sqrt{2} \cos s \sin s (\cos s - \sin s)), \\ t^* = (-\sqrt{2} \cos s \sin s, \sqrt{2} \cos s \sin s, \cos 2s) \end{cases}$$

$\{g^*, e^*, t^*\}$ dönme çatısı elde edilir. Burada eğriliği θ' , burulması λ Lancret eğriliği ve g^* 'ı teğet kabul eden, yani $\alpha^*(s) = g^*$ olacak şekilde bir $\alpha^*(s)$ eğrisinin varlığından söz edebiliriz.

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= \int g^*(s) ds \\ &= \left(\begin{array}{l} \frac{1}{12} \sin 3s - \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{1}{4} \cos s, \\ \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{3}{4} \sin s - \frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{12} \sin 3s, \\ \frac{1}{4} \sqrt{2} \sin s - \frac{1}{4} \sqrt{2} \cos s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \cos 3s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \sin 3s \end{array} \right)\end{aligned}$$

Doğrultman vektörü kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$R = |X| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \gamma = g(X'' \times X, X') = -1, \quad \lambda = \sqrt{\frac{(1+\gamma^2)}{R^2}} = \sqrt[4]{8}.$$

Durum 1. g^* - manyetik akı regle yüzeyi

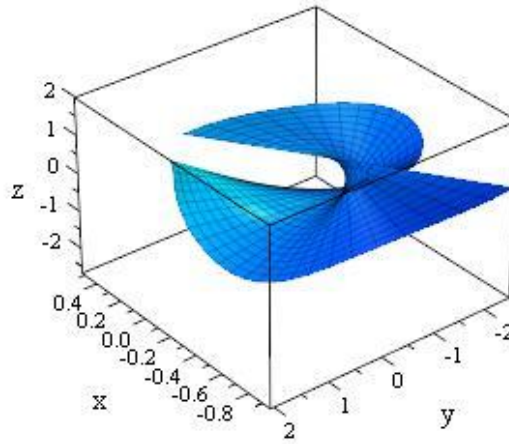
$\alpha^*(s)$, g^* - manyetik eğri olsun. (4.10), (3.9) eşitliği ve $\theta = \theta(s) = s$ gereğince, V Killing manyetik vektör alanı g^* - manyetik eğrisi boyunca hareket ederek bir akı regle yüzeyi oluşturur. V Killing manyetik vektör alanı,

$$V(s) = \begin{pmatrix} (s \sin s \cos s (\cos s - \sin s) - \sqrt{2} \cos s \sin s), \\ \sqrt{2} \cos s \sin s - s(\cos^3 s - \sin^3 s), \\ \cos 2s + \sqrt{2} s \cos s (\cos s + \sin s) \sin s \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, (3.9) ve (4.3) eşitliği kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa, g^* - açılabilir akı regle yüzeyi için $-1 \leq s, v \leq 1$ aralığında,

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \sin 3s - \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{1}{4} \cos s \\ -v(\sqrt{2} \cos s \sin s - \sqrt[4]{8} \sin s \cos s (\cos s - \sin s)), \\ \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{3}{4} \sin s - \frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{12} \sin 3s \\ -v(\sqrt[4]{8}(\cos^3 s - \sin^3 s) - \sqrt{2} \cos s \sin s), \\ v(\cos 2s + \sqrt{2} \sqrt[4]{8} \cos s \sin s (\cos s + \sin s)) \\ -\frac{1}{4} \sqrt{2} \cos s + \frac{1}{4} \sqrt{2} \sin s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \cos 3s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \sin 3s \end{pmatrix}$$

parametrik formu elde edilir, (Şekil 5.1.1).



Şekil 5.1.1. g^* - manyetik açılabilir akı regle yüzeyi

Durum 2. e^* - akı regle yüzeyi

$\alpha^*(s)$, e^* - manyetik eğri olsun. (4.30), (3.40) eşitliği ve $\theta = \theta(s) = s$ gereğince, V Killing manyetik vektör alanı e^* - manyetik eğrisi boyunca hareket ederek bir akı regle yüzeyi oluşturur. V Killing manyetik vektör alanı,

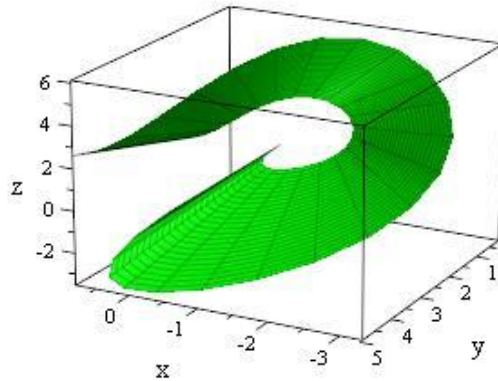
$$V(s) = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{8} \sin s \cos s (\cos s - \sin s) - \sqrt{2} \cos s \sin s - \frac{1}{8} \frac{8^{\frac{3}{4}}}{s} (\cos^3 s + \sin^3 s), \\ \sqrt{2} \cos s \sin s - \sqrt[4]{8} (\cos^3 s - \sin^3 s) - \frac{1}{8} \frac{8^{\frac{3}{4}}}{s} \cos s (\cos s + \sin s) \sin s, \\ \cos 2s + \sqrt{2} \sqrt[4]{8} \cos s (\cos s + \sin s) \sin s - \frac{1}{8} \sqrt{2} \frac{8^{\frac{3}{4}}}{s} \sin s \cos s (\cos s - \sin s) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, (3.40) ve (4.23) eşitliklerinden gerekli işlemler yapılırsa, e^* - açılabilir

akı regle yüzeyi için, $\mu_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{8}s}$ ve $1 \leq s, v \leq 3$ aralığında,

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \sin 3s - \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{1}{4} \cos s \\ -v \left(\frac{1}{8} \frac{8^{\frac{3}{4}}}{s} (\cos^3 s + \sin^3 s) + \sqrt{2} \cos s \sin s - \sqrt[4]{8} \sin s \cos s (\cos s - \sin s) \right), \\ \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{3}{4} \sin s - \frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{12} \sin 3s \\ -v \left(\sqrt[4]{8} (\cos^3 s - \sin^3 s) - \sqrt{2} \cos s \sin s + \frac{1}{8} \frac{8^{\frac{3}{4}}}{s} \cos s (\cos s + \sin s) \sin s \right), \\ v \left(\cos 2s + \sqrt{2} \sqrt[4]{8} \cos s (\cos s + \sin s) \sin s - \frac{1}{8} \sqrt{2} \frac{8^{\frac{3}{4}}}{s} \sin s \cos s (\cos s - \sin s) \right) \\ -\frac{1}{4} \sqrt{2} \cos s + \frac{1}{4} \sqrt{2} \sin s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \cos 3s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \sin 3s \end{pmatrix}$$

parametrik formu elde edilir, (Şekil 5.1.2).



Şekil 5.1.2. e^* - manyetik açılabilir akı regle yüzeyi

Durum 3. t^* - akı regle yüzeyi

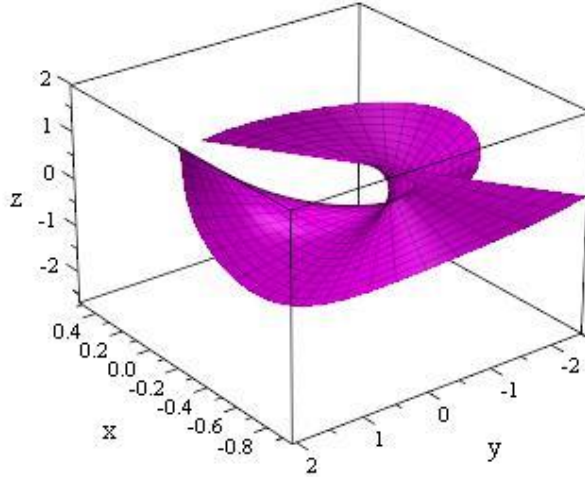
$\alpha^*(s)$, t^* -manyetik eğri olsun. (4.50) ve (3.70) eşitliği ve $\theta = \theta(s) = s$ gereğince, V Killing manyetik vektör alanı t^* -manyetik eğrisi boyunca hareket ederek bir akı regle yüzeyi oluşturur. V Killing manyetik vektör alanı,

$$V(s) = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{8}(\cos s - \sin s) \cos s \sin s - \sqrt{2} \sin s \cos s, \sqrt{2} \sin s \cos s - \sqrt[4]{8}(\cos^3 s - \sin^3 s), \\ \cos 2s + \sqrt{2} \sqrt[4]{8}(\cos s + \sin s) \cos s \sin s \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, (3.70) ve (4.43) eşitliklerinden gerekli işlemler yapılırsa, t^* - açılabilir akı regle yüzeyi için $-1 \leq s, v \leq 1$ aralığında,

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \sin 3s - \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{1}{4} \cos s \\ -v \left(\sqrt{2} \cos s \sin s - \sqrt[4]{8} \sin s \cos s (\cos s - \sin s) \right), \\ \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{3}{4} \sin s - \frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{12} \sin 3s \\ -v \left(\sqrt[4]{8}(\cos^3 s - \sin^3 s) - \sqrt{2} \cos s \sin s \right), \\ v \left(\cos 2s + \sqrt{2} \sqrt[4]{8} \cos s (\cos s + \sin s) \sin s \right) \\ -\frac{1}{4} \sqrt{2} \cos s + \frac{1}{4} \sqrt{2} \sin s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \cos 3s - \frac{1}{12} \sqrt{2} \sin 3s \end{pmatrix}$$

parametrik formu elde edilir, (Şekil 5.1.3).



Şekil 5.1.3. t^* - manyetik açılabilir akı regle yüzeyi

6. SONUÇ

Eğrilik teorisi yardımıyla özellikle robot hareketlerinin diferansiyel özellikleri belirlenmektedir. Robotun yörüngesini bir eğri ve regle yüzey belirler. Bazı fiziksel şartlar altında robot yörünge hareketini etkileyecek durumlar ile karşılaşılabilir ve bu nedenle yeniden bir yörünge planlaması gerekebilir. Manyetik alan içerisinde robot hareketinin etkilendiği bu gibi durumlarda yörünge değişimi için yeni eğriler bulmak gerekir.

Robot yörüngesi ise regle yüzeyin striksiyon eğrisinin merkez noktasında kurulan ortogonal çatı olan geodezik Frenet çatısı olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla bu çalışmada regle yüzeyin doğal çatısının θ Darboux açısı kadar döndürülmesi ile oluşan yeni dönme çatısı ve eğrilik teorisi gereğince elde edilen eğriliği θ' , burulması λ Lancret eğriliği olan α^* uzay eğrisi için yeni yörünge planlamaları yapılabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- Barros, M. (1997). General helices and a theorem of Lancret. *Proc. Am.Math. Soc.* 125, 1503-1509.
- Barros M., Romero, A. (2007). Magnetic vortices. *EPL*, 77, 1- 5.
- Barros, M., Cabrerizo, J. L., Fern´andez, M., & Romero, A. (2007). Magnetic vortex filament flows. *Journal of Mathematical Physics*. 48(8), 082904.
- Bayram, E., Güler, F., & Kasap, E. (2023). Magnetic flux ruled surfaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 46(5), 5989-6001.
- Freudenstein, F ., 1965, Higher Path-Curvature Analysis in Plane Kinematics, *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B*, Vol. 87, No. 2, pp. 184-190.
- Güler, F., Bayram, E., & Kasap, E. (2023). Magnetic spherical indicatrices in Minkowski 3-space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2350179.
- Güler, F., (2023). Berry phase models and the electromagnetic trajectories of an optical fiber with a geodesic Frenet frame. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2450065.
- Guler, F., Kasap, E., & Altinisik, N. (2024). A New Approach to find the Magnetic Flux Surfaces. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*.
- Güler, F., & Kasap, E. (2018). A path planning method for robot end effector motion using the curvature theory of the ruled surfaces. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 15(03), 1850048.
- Güler, F. (2021). Offset trajectory planning of robot end effector and its jerk with curvature theory. *International Journal of Computational Methods*. 18(10), 2150050.
- Hacısalıhoğlu, H.H., Ekmekci, F.N. (2003). *Tensör Geometri*. Ankara: Hacısalıhoğlu Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1980). *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*. İstanbul: Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of differential geometry*. New York-London: Vol I, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons.
- Körpınar, T., & Demirkol, R. C. (2018). Gravitational magnetic curves on 3D Riemannian manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 15(11), 1850184.
- McCarthy, J.M., & Roth, B. (1981). The curvature theory of line trajectories in spatial kinematics. *J. Mech. Design*. 103 (4), 718-724.
- Munteanu, M.I. (2013). Magnetic Curves ina Euclidean Space: One exam- ple, Several Applications. *Publications de L’Institut Mathematique*. 94(108), 141-150.
- Munteanu, M.I., Nistor, A.I. (2012). The Classification of Killing Magnetic Curves in $S^2 \times \mathbb{R}$, *Journal of Geometry and Physics*. 62, 170 – 182.
- Munteanu, M. I., & Nistor, A. I. (2022). Magnetic curves in the generalized Heisenberg group. *Nonlinear Analysis*. 214, 112571.x
- O’Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*. New York-London: Academic Press.
- O’Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. New York: Academic Press.
- Özdemir, Z. (2023). Magnetic trajectories on lightlike surfaces. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 31(2), 269-281.

- Özdemir, Z., Gök, I., Yaylı, Y., Ekmekçi, F.N., (2015). Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds. *Turk J. Math.* 39, 412-426.
- Özdemir, Z. (2018). *Manyetik vektör alanları ve uygulamaları*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- Ryuh, B. S., & Pennock, G. R. (1988). Accurate motion of a robot end-effector using the curvature theory of ruled surfaces.
- Ryuh, B. S. (1989). *Robot trajectory planning using the curvature theory of ruled surfaces*. Doctoral dissertation, Purdue University.
- Ryuh, B. S., & Pennock, G. R. (1990). Trajectory planning using the Ferguson curve model and curvature theory of a ruled surface.
- Willmore, Thomas James (2013). *An introduction to differential geometry*. Courier Corporation.
- Xu, L., & Mould, D. (2009, May). Magnetic Curves: Curvature-Controlled Aesthetic Curves Using Magnetic Fields. In CAe (pp. 1-8).
- Yıldırım, A., Kasap, E. (2023). Magnetic spherical indicatrix of a ruled surface. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 10.1142/s0219887824500683.

ÖZ GEÇMİŞ

Çağla Gizem ŞENER, Samsun 19 Mayıs Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünden 09.06.2013 tarihinde mezun oldu. 2022 yılında OMÜ LEE Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi. Mezuniyetinden bu yana Matematik öğretmenliği görevini yerine getirmektedir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0009-0000-5642-1830

Yayınlar:

1. Şener, Ç.G., Güler, F. (2019). Regle yüzeylerin eğrilik teorisi yardımıyla ureteç çatıdan elde edilen yeni eğri ve regle yüzeyler. *32. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.
2. Şener, Ç.G., Güler, F. (2023). Eğrilik teorisinden elde edilen manyetik eğri ve akı yüzeyleri. *35. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Trakya Üniversitesi, Edirne.
3. Şener Ç.G., Güler F., 'Flux Ruled Surfaces and the Magnetic Curves obtained from the Curvature Theory', *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, accepted paper, 2024.