



**PARA-SASAKI BENZERİ
RIEMANN MANİFOLDLARI**

Yüksek Lisans Tezi

Pınar İNSELÖZ

Eskişehir, 2024

PARA-SASAKI BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARI

Pınar İNSELÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Geometri Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şenay BULUT

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Ocak, 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Pınar İNSELÖZ'ün "Para-Sasaki benzeri Riemann Manifoldları" başlıklı çalışma 15/01/2024 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Şenay BULUT

Üye : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Üye : Doç. Dr. Yasemin SOYLU

Prof.Dr. Semra KURAMA

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

15/01/2024

DANIŞMAN ONAYI

Danışmanlığımı yürüttüğüm yüksek Lisans öğrencisi Pınar İNSELÖZ , "PARASAKI BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARI" başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlanmış olduğu tez tarafımda incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Şenay BULUT

ÖZET

PARA-SASAKI BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARI

Pınar İNSELÖZ

Matematik Bölümü

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak, 2024

Danışman: Prof. Dr. Şenay BULUT

Bu tezde hemen hemen parakontakt hemen hemen parakompleks Riemann manifoldlarının özel bir sınıfı olan para-Sasaki benzeri Riemann manifoldları araştırılmıştır. Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış hemen hemen parakontakt hemen hemen parakompleks Riemann manifoldları incelenmiştir. Özel olarak para-Sasaki benzeri Riemann manifoldları için Levi-Civita konneksiyonu ile genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon arasındaki ilişki verilmiştir. Eğrilik tensörleri, Ricci tensörü ve skaler eğrilik tensörleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Para-Einstein manifoldlar incelenmiş ve para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon ile para-Ricci benzeri solitonlar çalışılmıştır. Elde edilen teoremleri destekleyen 3 ve 5 boyutlu örnekler verilmiştir. Son bölümde apapR manifoldları üzerinde \mathcal{D} -homotetik deformasyon tanımlanmış özel olarak para-Sasaki benzeri Riemann manifoldları için eğrilik tensörleri hesaplanmıştır. Para-Einstein benzeri manifoldun \mathcal{D} -homotetik deformasyonunun yine para-Einstein benzeri manifold olduğu gösterilmiştir. Para-Sasaki benzeri Riemann manifold, para-Ricci benzeri soliton kabul ediyorsa \mathcal{D} -homotetik deformasyonunun da para-Ricci benzeri soliton kabul ettiği ispatlanmıştır. \mathcal{D} -homotetik deformasyona karşılık gelen bazı diferansiyel operatörler hesaplanmıştır. Elde edilen teoremleri destekleyen 5 boyutlu bir örnek verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: ApapR manifold, Para-Sasaki benzeri Riemann Manifold, Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon, \mathcal{D} -homotetik deformasyon.

ABSTRACT

PARA-SASAKI-LIKE RIEMANN MANIFOLDS

Pınar İNSELÖZ

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Graduate School of Sciences, January, 2024

Supervisor: Prof. Dr. Şenay BULUT

In this thesis, para-Sasaki-like Riemannian manifolds, which are a special class of almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds, have been investigated. Almost paracontact almost paracomplex Riemann manifolds equipped with generalized symmetric metric connection have been studied. Specifically, the relationship between the Levi-Civita connection and the generalized symmetric metric connection for para-Sasaki-like Riemann manifolds is given. Relationships between curvature tensor, Ricci tensor and scalar curvature tensor are obtained. Para-Einstein manifolds are examined and para-Ricci-like solitons with generalized symmetric metric connection on para-Sasaki-like Riemannian manifolds are studied. 3 and 5 dimensional examples supporting the obtained theorems are given. In the last section, \mathcal{D} -homothetic deformation is defined on apapR manifolds, and curvature tensors are calculated specifically for para-Sasaki-like Riemannian manifolds. It is shown that the \mathcal{D} -homothetic deformation of the para-Einstein-like manifold is also a para-Einstein-like manifold. It has been proven that if the para-Sasaki-like Riemannian manifold admits para-Ricci-like soliton, the \mathcal{D} -homothetic deformation of the para-Sasaki-like Riemannian manifold also admits para-Ricci-like soliton. Some differential operators corresponding to \mathcal{D} -homotetic deformation have been calculated. A 5-dimensional example supporting the obtained theorems is given.

Keywords: ApapR manifolds, Para-Sasaki-like Riemannian manifolds, Generalized Symmetric Metric Connection, \mathcal{D} -homothetic deformation.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emeği olan ve her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Şenay BULUT'a, yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman yanımda olan sevgili eşime ve aileme en içten teőekkürlerimi sunarım.

Pınar İNSELÖZ

Ocak 2024

15/01/2024

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Pınar İNSELÖZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR	4
2.1. BAZI DİFERANSİYEL OPERATÖRLER.....	9
3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK MANİFOLDLAR	11
3.1. PARA-SASAKİ BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLAR	18
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON İLE PARA-SASAKİ BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARI ..	21
5. PARA-RICCI BENZERİ SOLİTONLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON İLE PARA-SASAKİ BEN- ZERİ RIEMANN MANİFOLDLAR	30
5.1. ÖRNEKLER	36
5.1.1. Örnek 1	36

	<u>Sayfa</u>
5.1.2. Örnek 2	42
6. PARA-SASAKİ BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARIN \mathcal{D} -HOMOTETİK DEFORMASYONLARI	53
6.1. ÖRNEK-3	67
7. \mathcal{D} -HOMOTETİK WARPİNG	69
8. SONUÇ.....	71
KAYNAKÇA.....	72
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

M	: $(2n+1)$ boyutlu türevlenebilir manifold
TM	: M manifoldunun tanjant demedi
$\chi(M)$: M manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının modülü
$\chi^*(M)$: $\chi(M) \rightarrow C^\infty$ ye C^∞ -lineer 1-formların modülü
$C^\infty(M)$: $M \rightarrow \mathbb{R}$ ye C^∞ (sonsuz kez türevlenebilir) fonksiyonların uzayı
g	: Metrik tensör
\hat{g}	: \mathcal{D} -Homotetik deformasyon ile g den elde edilen metrik tensörü
∇	: g metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu
ϕ	: $(1, 1)$ tipinde tensör alanı
η	: 1- form
ξ	: Reeb vektör alanı
(ϕ, ξ, η)	: M üzerinde hemen hemen parakontak yapı
(ϕ, ξ, η, g)	: M üzerinde hemen hemen parakontak metrik yapı
R	: Riemann Eğrilik tensörü
Ric	: Ricci Tensörü
\mathcal{L}	: Lie Türevi
$scal$: Skaler Eğrilik
$\bar{\nabla}$: Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu
\bar{R}	: Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonunun eğrilik tensörü
\bar{Ric}	: Genelleştirilmiş simetrik metriğe karşılık gelen Ricci tensörü
\bar{scal}	: Genelleştirilmiş simetrik metriğe karşılık gelen skaler eğrilik
$\bar{\mathcal{L}}$: Genelleştirilmiş simetrik metrik Lie Türevi
$\hat{\nabla}$: \hat{g} metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu
\hat{R}	: \hat{g} metriğine karşılık gelen Riemann eğrilik tensörü
\hat{Ric}	: \hat{g} metriğine karşılık gelen Ricci tensörü
\hat{scal}	: \hat{g} metriğine karşılık gelen skaler eğriliği
$\hat{\mathcal{L}}$: \hat{g} metriğine karşılık gelen Lie türevi

1. GİRİŞ

Manifoldlar diferansiyel geometrinin ve göreliliğe dayanan teorik fiziğin temelini oluşturmaktadır. Diferansiyel geometri alanında çalışılan tek boyutlu türevlenebilir manifoldlar olan Sasaki manifoldlar 1960 yılında S. Sasaki tarafından tanımlanmıştır [29]. Hemen hemen parakontak yapılar 1976 yılında I. Sato tarafından tanımlanmıştır [31, 32]. Parakontak ve para-Sasaki metrik manifoldlar hem matematikte hem de fizikte yaygın olarak çalışılmaktadır [1, 13, 30, 33]. 1979 yılında Riemann metriğine sahip hemen hemen parakontak metrik manifoldlar I. Sato tarafından ve para-Sasaki manifoldlar K. Matsumoto tarafından çalışılmıştır [31, 32, 34]. Parakontak yapılar ile ilgili önemli özellikler S. Zamkovoy tarafından 2009 da incelenmiştir [38]. Buradan Zamkovoy, parakontak metrik manifoldların \mathcal{D} -homotetik deformasyonlarını ve birçok yapının deformasyonlar altındaki değişimlerini incelemiştir. Sonrasında η -Einstein manifold kavramı tanımlanmış ve η -Einstein bir manifoldun skaler eğriliğinin sabit olduğu ispatlanmıştır.

Hemen hemen parakontak hemen hemen para-kompleks Riemann manifoldları çalışılmıştır [20–22]. $(0, 3)$ tipinde F tensör alanı kullanılarak hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifoldları 11 temel sınıfa ayrılmıştır [20]. Bu manifoldların özel bir sınıfı da para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlarıdır. Para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar günümüzde yaygın olarak çalışılmaktadır [12]. Bu manifoldlar üzerinde para-Ricci benzeri soliton kavramı tanımlanmıştır ve düşük boyutlardaki para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar için örnekler verilmiştir [16–18].

Lorentz para-Sasaki manifoldlar ve Kenmotsu manifoldları üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu tanımlanmıştır [3, 4, 35]. Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyona karşılık bu manifoldların eğrilik tensörü ve Ricci tensörü hesaplanmıştır. Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile donatılmış para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar üzerinde para-Einstein manifoldlar tanımlanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir [9]. Ayrıca bu konneksiyon ile donatılmış altın-Lorentz manifoldları çalışılmıştır [15]. Hemen hemen kontak B -metrik manifoldlar üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonun özel durumu olan simetrik metrik konneksiyonlar ve çeyrek simetrik metrik konneksiyonlar çalışılmıştır [6, 7]. Ayrıca

farklı tipteki manifoldlar üzerinde de simetrik metrik konneksiyonlar ve çeyrek simetrik metrik konneksiyonlar incelenmiştir [23, 24, 26, 27, 36, 37].

\mathcal{D} -homotetik deformasyon kavramı hemen hemen kontak metrik manifoldlar, hemen hemen kontak B -metrik manifoldlar, Kenmotsu manifoldları ve kontak Lorentz manifoldları gibi farklı tipteki manifoldların \mathcal{D} -homotetik deformasyonları araştırılmıştır [8,25]. Hemen hemen kontak B -metrik manifoldlar için \mathcal{D} -homotetik warping kavramı incelenmiştir [8].

Ricci soliton kavramı R.S. Hamilton tarafından Ricci akış denkleminin özel bir çözümü olarak tanımlanmıştır [12, 16–18]. Riemann Ricci solitonlar çalışıldıktan sonra kontak Riemann geometride Ricci soliton araştırmaları başlamıştır [2]. Ricci soliton kavramının η -Ricci soliton, $*$ -Ricci soliton, genelleştirilmiş Ricci soliton gibi bazı genelleştirmeleri hemen hemen kontak metrik manifoldlar için incelenmiştir [5]. Para-Sasaki benzeri manifoldlar üzerinde para-Ricci benzeri solitonlar ve gradyan Ricci solitonlar çalışılmıştır [11, 16–18]. Hemen hemen kontak B -metrik manifoldlar üzerinde potansiyel Reeb vektör alanı ile Ricci benzeri solitonlar tanımlanmış ve Sasaki benzeri manifoldlar için bazı sonuçlar elde edilmiştir. 3 ve 5 boyutta bazı örnekler verilmiştir [19].

Bu tezde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile donatılmış hemen hemen para-kontak hemen hemen para-kompleks Riemann manifoldları incelenmiştir ve bu manifoldların \mathcal{D} -homotetik deformasyonları ele alınmıştır. İkinci ve üçüncü bölümde temel kavramlar ele alınmıştır [9, 10]. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile donatılmış para-Sasaki benzeri Riemann manifoldları düşünülmüştür. Levi-Civita konneksiyonu ile genelleştirilmiş simetrik konneksiyonu arasındaki ilişki verilmiştir. Bu iki konneksiyona karşılık gelen eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik tensörü arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Beşinci bölümde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar üzerinde para-Ricci benzeri solitonlar ele alınmıştır. Altıncı bölümde elde edilen teoremleri destekleyen 3 boyutlu ve 5 boyutlu örnekler verilmiştir. Yedinci bölümde para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar üzerinde \mathcal{D} -homotetik deformasyon tanımlanmıştır. \mathcal{D} -homotetik deforme edilmiş para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar üzerinde gradyan Ricci benzeri solitonlar düşünülmüştür. \mathcal{D} -homotetik deforme edilmiş para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlar için eğrilik

tensörü, skaler eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Deforme edilmiş metriğe karşılık hessian, diverjans, Laplace operatörleri hesaplanmıştır. 5 boyutlu \mathcal{D} -homotetik deforme edilmiş para-Sasaki benzeri Riemann manifold örneği verilmiştir. Son bölümde \mathcal{D} -homotetik warping kavramı tanımlanmıştır. Son dört bölüm tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır.



2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde tezin genel hatları için gerekli olacak bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.0.1. V reel sayılar cisminde bir n -boyutlu vektör uzayı olsun. Eğer

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü

$$(1) \forall u, v \in V \text{ için } g(u, v) = g(v, u),$$

$$(2) \forall u, v, w \in V \text{ ve } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$$

$$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$$

koşullarını sağlıyorsa g ye simetrik bilinear form denir [28].

Tanım 2.0.2. g simetrik bilinear form olsun.

$\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlı,

$g(v, v) < 0$ ise g ye negatif tanımlı,

$g(v, v) \leq 0$ ise g ye negatif yarı-tanımlı (semi-definite),

bazı v ler için $g(v, v) > 0$, bazı v ler için de $g(v, v) < 0$ oluyorsa g ye indefinite denir [28].

Tanım 2.0.3. g simetrik bilinear form olsun. Her $u \in V$ için $g(u, v) = 0$ olması $v = 0$ olmasını gerektiriyor ise g ye non-dejeneredir, diğer durumda g ye dejeneredir, denir. [28]

Tanım 2.0.4. g , V vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form olmak üzere

$$g|_W : W \subset V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü negatif tanımlı ise en geniş $W \subset V$ alt vektör uzayının boyutuna g bilinear formunun indeksi denir. Diğer bir ifadeyle, V üzerinde g simetrik bilinear formunun

indeksi g yi negatif tanımlı yapan en geniş $W \subset V$ alt vektör uzayının boyutudur ve index g veya $\text{index}(V)$ ile gösterilir. [14]

Tanım 2.0.5. V vektör uzayı üzerinde g simetrik bilinear formu non-dejenere ise g ye V üzerinde bir skaler çarpım ve (V, g) ikilisine de bir skaler çarpım uzayı denir. [28]

Önerme 2.0.6. Her (V, g) skaler çarpım uzayının bir ortonormal bazı var ve (V, g) skaler çarpım uzayının ortonormal bazı vardır. (V, g) skaler çarpım uzayının ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$$g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij} , \varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$$

dir. Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır. [14]

Tanım 2.0.7. M bir n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için tanjant uzayı $T_p M$ üzerinde bir sabit indeksli g_p skaler çarpım var ise g ye M manifoldu üzerinde $(0, 2)$ tipinde bir metrik tensör ve (M, g) ikilisine de bir yarı Riemann manifold denir. [28]

U kümesi n -boyutlu M yarı Riemann manifoldunun açık bir alt kümesi olmak üzere U üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. O halde g metrik tensörünün bileşenleri $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) , 1 \leq i, j \leq n$$

dir. g metrik tensörü $(0, 2)$ tipten simetrik tensör alanı olduğundan $1 \leq i, j \leq n$ için $g_{ij} = g_{ji}$ dir. Buradan U üzerinde g metrik tensörü

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

şeklinde yazılır. M üzerinde g metrik tensörü pozitif tanımlı olduğunda (M, g) ye Riemann manifold denir. [4]

Tanım 2.0.8. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

bilineer dönüşümü her $x, y, z \in \chi(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ için,

- i. $\nabla_{(fx+gy)}z = f\nabla_x z + g\nabla_y z$,
- ii. $\nabla_x(fy) = f\nabla_x y + x(f)y$,

koşullarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne M üzerinde bir konneksiyon, $\nabla_x y$ ye y nin x e göre kovaryant türevi denir.

Tanım 2.0.9. M bir diferansiyellenebilir yarı-Riemann manifold ve (M, \cdot) grup olsun.

$$M \times M \rightarrow M$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

ve

$$M \rightarrow M$$

$$x \rightarrow x^{-1}$$

fonksiyonları diferansiyellenebilir ise M ye bir Lie grubu denir.

Tanım 2.0.10. M bir diferansiyellenebilir yarı-Riemann manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$[\cdot, \cdot] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(x, y) \rightarrow [x, y]$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[x, y](f) = x(yf) - y(xf)$$

şeklinde tanımlanan, $[\cdot, \cdot]$ ye bir **Lie operatörü** denir [1].

Tanım 2.0.11. M üzerindeki (r, s) tipindeki tüm tensör alanlarının $\mathfrak{T}_r^s(M)$ kümesi, $C^\infty(M)$ üzerinde bir modüldür. $r = s = 0$ durumunda M üzerindeki $(0, 0)$ tipindeki bir tensör alanı bir fonksiyondur.

Tanım 2.0.12. (M, g) yarı-Riemann manifoldu olsun. $x \in \chi(M)$ olmak üzere L_x ,

(p, q) tipindeki keyfi bir vektör alanını, (p, q) tipinde bir vektör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşümdür. Bu dönüşüme Lie türev dönüşümü denir [1].

$$i. L_x(f) = x(f), \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

$$ii. L_x y = [x, y], \quad \forall y \in \chi(M)$$

$$iii. L_x g(y, z) = xg(y, z) - g([x, y], z) - g([x, z], y), \quad \forall y, z \in \chi(M)$$

Önerme 2.0.13. ∇ , M üzerinde bir konneksiyon olsun. $T \in \mathfrak{T}_r^s(M)$, $x_1, \dots, x_r \in \chi(M)$, $\theta^1, \dots, \theta^s \in \chi^*(M)$ olmak üzere (r, s) tipindeki T tensörünün kovaryant türevi

$$\begin{aligned} (\nabla_x T)(\theta^1, \dots, \theta^s, x_1, \dots, x_r) &= x(T(\theta^1, \dots, \theta^s, x_1, \dots, x_r)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r T(\theta^1, \dots, \nabla_x \theta^i, \dots, \theta^s, x_1, \dots, x_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s T(\theta^1, \dots, \theta^s, x_1, \dots, \nabla_x x_i, \dots, x_r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [28].

$\theta \in \chi^*(M)$ 1-formunun kovaryant türevi

$$(\nabla_x \theta)(y) = x(\theta(y)) - \theta(\nabla_x y) \quad (2.1)$$

şeklinde olur. $\phi : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ $C^\infty(M)$ -lineer dönüşüm ise ϕ , $(1, 1)$ tipinde bir tensör olarak düşünülebilir. Bu durumda ϕ nin kovaryant türevi

$$(\nabla_x \phi)(y) = \nabla_x(\phi y) - \phi(\nabla_x y) \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Tanım 2.0.14. ∇ , M üzerinde bir konneksiyon olsun. Her $x, y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = \nabla_x y - \nabla_y x - [x, y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin torsiyon tensörü denir.

Özel olarak $T = 0$ yani $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$ ise ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu

konneksiyon denir.

Teorem 2.0.15. (Riemann Geometrinin Temel Teoremi)

(M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde tek türlü belirli bir ∇ konneksiyonu var öyle ki

$$iii. [x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x, \quad (\text{Sıfır torsiyonlu olma koşulu}) \quad (2.3)$$

$$iv. xg(y, z) = g(\nabla_x y, z) + g(y, \nabla_x z) \quad (\text{Metrik uyumluluk koşulu}) \quad (2.4)$$

koşulları sağlanıyorsa ∇ konneksiyonuna M 'nin Levi-Civita konneksiyonu denir ve bu konneksiyon aşağıda verilen Kozsul formülü ile karakterize edilir:

$$2g(\nabla_x y, z) = xg(y, z) + yg(z, x) - zg(x, y) - g(x, [y, z]) + g(y, [z, x]) + g(z, [x, y]).$$

Tanım 2.0.16. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

$$R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z \quad (2.5)$$

ile tanımlanan $(1, 3)$ tipindeki R tensör alanına M nin **Riemann eğrilik tensörü** denir.

Ayrıca, her $x, y, z, v, w \in \chi(M)$ olmak üzere R Riemann eğrilik tensörü

- i. $R(x, y)z = -R(y, x)z$,
- ii. $g(R(x, y)v, w) = -g(R(x, y)w, v)$,
- iii. $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$,
- iv. $g(R(x, y)v, w) = g(R(v, w)x, y)$

özelliklerini sağlar [1].

M n boyutlu Riemann manifold olmak üzere $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal vektör alanları için R Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri $R_{ijkl} = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.0.17. M , n boyutlu diferansiyellenebilir Riemann manifold olsun.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olsun. Bu durumda Ricci tensörü

$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, x)y, e_i) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.0.18. M diferansiyellenebilir Riemann manifold olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları ve Ric Ricci tensörü olmak üzere skaler eğrilik fonksiyonu

$$scal = iz(Ric) = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1. BAZI DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

M diferansiyellenebilir Riemann manifoldu üzerinde \mathbb{R}^3 üzerinde vektör hesabı yapılabilen diferansiyel operatörlerin doğal genellemeleri vardır. Bunlar gradyan, diverjans, Hessian ve Laplace operatörleridir.

Tanım 2.1.1. Bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun gradyanı $grad f$, $df \in \chi^*(M)$ diferansiyeline metrik olarak eşdeğer vektör alanıdır yani her $x \in \chi(M)$ için

$$g(grad f, x) = xf \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2. $A \in \mathfrak{X}_r^s(M)$ için A 'nın diverjansı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$div x = iz(\nabla x) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} x, e_i) \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3. $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun Hessian'ı f 'nin ikinci kovaryant türevi

$H^f = \nabla(\nabla f)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda f nin Hessianı $(0, 2)$ tipindeki tensör alanıdır öyle ki,

$$\text{Hess}f(x, y) = g(\nabla_x \text{grad } f, y) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4. $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için Δf , f nin gradyanının diverjansı şeklinde tanımlanır öyle ki

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}f) \in C^\infty(M) \quad (2.11)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.5. M üzerinde $(1, 1)$ tipinde

$$J : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

tensör alanı $J^2 = I$ koşulunu sağlayacak şekilde var ve her $x, y \in \chi(M)$ için M üzerinde bir g metriği var öyle ki

$$g(Jx, Jy) = -g(x, y) \quad (2.12)$$

koşulunu sağlıyorsa (M, g, J) ye hemen hemen parahermityen manifold denir.

Tanım 2.1.6. M diferansiyellenebilir manifoldu $(1, 1)$ tipinde

$$J : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

tensör alanı ve g Riemann metriği ile donatılmış öyle ki

$$J^2 = I, \quad g(Jx, Jy) = g(x, y) \quad (2.13)$$

koşullarını sağlıyorsa M ye hemen hemen çarpım manifoldu denir.

3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK MANİFOLDLAR

Tanım 3.0.1. M , diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $(1,1)$ tipinde ϕ tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-form olmak üzere,

$$\begin{aligned} & i. \eta(\xi) = 1, \\ & ii. \phi^2 = Id - \eta \otimes \xi, \\ & iii. D = Ker(\eta), \eta \text{ tarafından üretilen dağılım} \\ & \text{hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

koşulları sağlanıyorsa, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir **hemen hemen parakontak yapı** ve bu yapı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η) dördlüsüne bir **hemen hemen parakontak manifold** denir [20].

(3.1)(ii) şikkından her $x \in \chi(M)$ için,

$$\phi^2(x) = x - \eta(x)\xi \tag{3.2}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 3.0.2. (M, ϕ, ξ, η) dördlüsü hemen hemen parakontak manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} & i. \phi(\xi) = 0 \\ & ii. \eta \circ \phi = 0, \\ & iii. rank\phi = 2n, \\ & iv. iz\phi = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitlikleri vardır [1].

Kanıt. i. (3.2) eşitliğinde x gördüğümüz yere ξ koyduğumuzda

$$\phi^2(\xi) = \xi - \eta(\xi)\xi$$

bulunur (3.1)(i) den dolayı,

$$\phi^2(\xi) = \xi - \xi = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafa ϕ dönüşümünü uygulayalım.

$$\phi(\phi^2(\xi)) = \phi(0) = 0.$$

Buradan $\phi(\phi^2(\xi)) = \phi^3(\xi) = \phi^2(\phi(\xi)) = 0$ ulaşırız.

(3.2) eşitliğinde x yerine $\phi(\xi)$ koyarsak,

$$\phi^2(\phi(\xi)) = \phi(\xi) - \eta(\phi(\xi))\xi = 0$$

olacağından $\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\xi$ bulunur. Diğer taraftan $\phi^2(\xi) = 0$ olduğunu bulmuştuk. Kabul edelim ki

$\phi(\xi) \neq 0$ olsun. $\phi(\phi(\xi)) = 0$ eşitliğinde $\phi(\xi)$ gördüğümüz yere $\eta(\phi(\xi))\xi$ yazdığımızda

$$\phi(\eta(\phi(\xi))\xi) = 0$$

olur. ϕ 'nin lineerliğinden $(\eta(\phi(\xi)))\phi(\xi)$ burdan $\phi(\xi)$ gördüğümüz yere $\eta(\phi(\xi))\xi$ yazdığımızda;

$$(\eta(\eta(\phi(\xi))\xi))\eta(\phi(\xi))\xi$$

olur ki son durumda $\eta(\eta(\phi(\xi)))^2\xi = 0$ ve $\xi \neq 0$ ulaşırız.

O halde burada $\eta(\phi(\xi)) = 0$ olur. Bu durum $\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\xi$ denkleminde $\xi \neq 0$ bildiğimizden $\phi(\xi) \neq 0$ olma durumu ile çelişir. Buradan $\phi(\xi) = 0$ eşitliğine ulaşırız.

ii. (3.2) eşitliğinde x yerine $\phi(x)$ yazılırsa

$$\phi^3(x) = \phi(x) - \eta(\phi(x))\xi \tag{3.4}$$

bulunur. Buradan

$$\phi^3(x) = \phi^2(\phi x) = \phi(\phi^2(x)) = \phi(x - \eta(x))\xi$$

olur. ϕ lineer olduğundan

$$\phi^3(x) = \phi(x) - \phi((\eta(x)\xi)) = \phi(x) - \eta(x)\phi(\xi)$$

elde edilir. $\phi(\xi) = 0$ olduğundan

$$\phi^3(x) = \phi(x) \quad (3.5)$$

(3.4) ve (3.5) den $\eta(\phi(x))\xi = 0$ ve ξ karakteristik vektör alanı sıfırdan farklı olduğundan $\eta(\phi(x)) = 0$ elde edilir. Bu ise $(\eta \circ \phi)(x) = 0(x)$ yani $\eta \circ \phi = 0$ olur.

iii. $\phi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$ dönüşümünün çekirdeği $\text{Ker } \phi$ olmak üzere;

$$\text{Ker } \phi = \{x \in \chi(M) \mid \phi(x) = 0\}$$

şeklinindedir. Her $x \in \text{Ker } \phi$ için $\phi(x) = 0$, eşitliğinin her iki tarafına ϕ uygulanırsa $0 = \phi(\phi(x)) = x - \eta(x)\xi$ ve buradan da $x = \eta(x)\xi$ elde edilir. Böylece $\forall x \in \text{Ker } \phi$ için $x \in \text{Sp}\{\xi\}$ olur ki bu da

$$\text{Ker } \phi \subset \text{Sp}\{\xi\} \quad (3.6)$$

demektir. Her $x \in \text{Sp}\{\xi\}$ için $x = \lambda\xi$ olduğundan (3.3)(i) eşitliğinden

$$\phi(x) = \lambda\phi(\xi) = 0$$

olur. Böylece her $x \in \text{Sp}\{\xi\}$ için $x \in \text{Ker } \phi$ olur ki bu da

$$\text{Sp}\{\xi\} \subset \text{Ker } \phi \quad (3.7)$$

olmasıdır. (3.6) ve (3.7) dan $\text{Ker } \phi = \text{Sp}\{\xi\}$ demektir. Sonuç olarak

$$\text{rank } \phi + \text{sıfırlık } \phi = \text{boy } \chi(M) = 2n + 1$$

olur ve sıfırlık $\phi = \text{boy}(\text{Ker } \phi) = 1$ olduğundan $\text{rank } \phi = 2n$ elde edilir. \square

(M, ϕ, ξ, η) dörtlüsü hemen hemen parakontak manifold olmak üzere M mani-

foldu üzerinde bir g Riemann metriği var öyle ki her $x, y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi x, \phi y) = g(x, y) - \eta(x)\eta(y) \quad (3.8)$$

eşitliğini sağlıyorsa M manifolduna **hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifold** denir. Bu manifoldları kısaca apapR manifoldlar olarak göstereceğiz.

(3.8) eşitliğini

$$g(x, y) = \eta(x)\eta(y) + g(\phi x, \phi y) \quad (3.9)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Bu eşitlikte y yerine ξ yazılırsa

$$g(x, \xi) = \eta(x)\eta(\xi) + g(\phi x, \phi \xi)$$

ve (3.3)(i) ve (3.1)(i) olduğu kullanılırsa

$$g(x, \xi) = \eta(x) \quad (3.10)$$

bulunur. Ayrıca son eşitlikte x yerine ξ yazılırsa

$$g(\xi, \xi) = 1 \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde x yerine ϕx yazılırsa (3.3)(ii) ve (3.2) eşitliklerinden $g(x - \eta(x)\xi, \phi y) = g(\phi x, y) - \eta(\phi x)\eta(y)$ olacaktır. Burdan,

$$g(\phi x, y) = g(x, \phi y) \quad (3.12)$$

elde edilir. (2.4) eşitliğinde $x = y = \xi$ yazılırsa ve (3.8) eşitliği kullanılırsa $0 = 2 g(\nabla_x \xi, \xi)$ olacağından

$$\eta(\nabla_x \xi) = 0 \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilir.

(M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik manifoldu üzerinde g ye karşılık

gelen \tilde{g} metriği

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, \phi y) + \eta(x)\eta(y) \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır. \tilde{g} metriğinin (3.8) eşitliğini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldunun $i, j \in \{0, \dots, 2n\}$ için

$$g(e_i, e_j) = g(\phi e_i, \phi e_j) = \delta_{ij} \quad (3.15)$$

$$g(e_i, \phi e_j) = 0 \quad (3.16)$$

özelliğine sahip $\{e_0 = \xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \phi e_2, \dots, \phi e_n\}$ lokal ortonormal tabanı vardır. Bu tabana ϕ -taban da denir [20].

Tanım 3.0.3. $(0, 3)$ tipinde F tensör alanı

$$F(x, y, z) = g((\nabla_x \phi)y, z) = g(\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y, z) \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanır.

F tensör alanı aşağıdaki temel özelliklere sahiptir:

$$i. F(x, y, z) = F(x, z, y) \quad (3.18)$$

$$= -F(x, \phi y, \phi z) + \eta(y)F(x, \xi, z) + \eta(z)F(x, y, \xi) \quad (3.19)$$

$$ii. (\nabla_x \eta)(y) = x(\eta(y)) - \eta(\nabla_x y) = g(\nabla_x \xi, y) = -F(x, \phi y, \xi). \quad (3.20)$$

(3.18) eşitliğini gösterelim. (3.17), (2.2) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} F(x, z, y) &= g(\nabla_x \phi z - \phi \nabla_x z, y) \\ &= g(\nabla_x \phi z, y) - g(\phi \nabla_x z, y) \\ &= xg(\phi z, y) - g(\phi z, \nabla_x y) - xg(z, \phi y) + g(z, \nabla_x \phi y) \\ &= -g(\phi z, \nabla_x y) + g(z, \nabla_x \phi y) \\ &= g(z, \nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y) \\ &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

kullanılırsa (3.18) eşitliği elde edilir.

Şimdi de (3.19) eşitliğini gösterelim. (3.17), (2.2), (3.2), (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F(x, \phi y, \phi z) &= g(\nabla_x \phi^2 y - \phi \nabla_x \phi y, \phi z) \\
&= g(\nabla_x (y - \eta(y)\xi), \phi z) - g(\nabla_x \phi y, \phi^2 z) \\
&= g(\nabla_x y, \phi z) - g(x\eta(y)\xi + \eta(y)\nabla_x \xi, \phi z) - g(\nabla_x \phi y, z - \eta(z)\xi) \\
&= g(\nabla_x y, \phi z) - \eta(y)g(\nabla_x \xi, \phi z) - g(\nabla_x \phi y, z) + \eta(z)g(\nabla_x \phi y, \xi)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) eşitliğinde $y = \xi$ yazılırsa (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
F(x, \xi, z) &= g(\nabla_x \phi \xi - \phi \nabla_x \xi, z) \\
&= -g(\nabla_x \xi, \phi z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.17) eşitliğinde $z = \xi$ yazılırsa yazılırsa (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
F(x, y, \xi) &= g(\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y, \xi) \\
&= g(\nabla_x \phi y, \xi)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir.

Son üç eşitlikten (3.19) eşitliği doğrulanır.

(3.17) de y yerine ϕy koyduğumuzda (2.2), (3.2), (3.10) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned}
F(x, \phi y, \xi) &= g(\nabla_x \phi^2 y - \phi \nabla_x \phi y, \xi) \\
&= g(\nabla_x (y - \eta(y)\xi), \xi) \\
&= g(\nabla_x y, \xi) - g(\nabla_x (\eta(y)\xi), \xi) \\
&= g(\nabla_x y, \xi) - x\eta(y) - \eta(y)g(\nabla_x \xi, \xi) \\
&= \eta(\nabla_x y) - x\eta(y) \\
&= -g(\nabla_x \xi, y)
\end{aligned}$$

bulunur. F 'nin F_i alt uzaylarındaki bileşenleri

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\theta(\phi^2 z) + g(\phi x, \phi z)\theta(\phi^2 y) \\ - g(x, \phi y)\theta(\phi z) - g(x, \phi z)\theta(\phi y)\}$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{4} \{2F(\phi^2 x, \phi^2 y, \phi^2 z) + F(\phi^2 y, \phi^2 z, \phi^2 x) + F(\phi^2 z, \phi^2 x, \phi^2 y) \\ - F(\phi y, \phi z, \phi^2 x) - F(\phi z, \phi y, \phi^2 x)\} \\ - \frac{1}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\theta(\phi^2 z) + g(\phi x, \phi z)\theta(\phi^2 y) \\ - g(x, \phi y)\theta(\phi z) - g(x, \phi z)\theta(\phi y)\}$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{4} \{2F(\phi^2 x, \phi^2 y, \phi^2 z) - F(\phi^2 y, \phi^2 z, \phi^2 x) - F(\phi^2 z, \phi^2 x, \phi^2 y) \\ + F(\phi y, \phi z, \phi^2 x) + F(\phi z, \phi y, \phi^2 x)\}$$

$$F_4(x, y, z) = \frac{\theta(\xi)}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\eta(z) + g(\phi x, \phi z)\eta(y)\}$$

$$F_5(x, y, z) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{g(x, \phi y)\eta(z) + g(x, \phi z)\eta(y)\}$$

$$F_6(x, y, z) = \frac{1}{4} \{[F(\phi^2 x, \phi^2 y, \xi) + F(\phi^2 y, \phi^2 x, \xi) + F(\phi x, \phi y, \xi) + F(\phi y, \phi x, \xi)]\eta(z) \\ + [F(\phi^2 x, \phi^2 z, \xi) + F(\phi^2 z, \phi^2 x, \xi) + F(\phi x, \phi z, \xi) + F(\phi z, \phi x, \xi)]\eta(y)\} \\ - \frac{\theta(\xi)}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\eta(z) + g(\phi x, \phi z)\eta(y)\} \\ - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{g(x, \phi y)\eta(z) + g(x, \phi z)\eta(y)\}$$

$$F_7(x, y, z) = \frac{1}{4} \{[F(\phi^2 x, \phi^2 y, \xi) - F(\phi^2 y, \phi^2 x, \xi) + F(\phi x, \phi y, \xi) - F(\phi y, \phi x, \xi)]\eta(z) \\ + [F(\phi^2 x, \phi^2 z, \xi) - F(\phi^2 z, \phi^2 x, \xi) + F(\phi x, \phi z, \xi) - F(\phi z, \phi x, \xi)]\eta(y)\}$$

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{4} \{[F(\phi^2 x, \phi^2 y, \xi) + F(\phi^2 y, \phi^2 x, \xi) - F(\phi x, \phi y, \xi) - F(\phi y, \phi x, \xi)]\eta(z) \\ + [F(\phi^2 x, \phi^2 z, \xi) + F(\phi^2 z, \phi^2 x, \xi) - F(\phi x, \phi z, \xi) - F(\phi z, \phi x, \xi)]\eta(y)\}$$

$$F_9(x, y, z) = \frac{1}{4} \{ [F(\phi^2 x, \phi^2 y, \xi) - F(\phi^2 y, \phi^2 x, \xi) - F(\phi x, \phi y, \xi) + F(\phi y, \phi x, \xi)] \eta(z) \\ + [F(\phi^2 x, \phi^2 z, \xi) - F(\phi^2 z, \phi^2 x, \xi) - F(\phi x, \phi z, \xi) + F(\phi z, \phi x, \xi)] \eta(y) \}$$

$$F_{10}(x, y, z) = \eta(x) F(\xi, \phi^2 y, \phi^2 z)$$

$$F_{11}(x, y, z) = \eta(x) \{ \eta(y) \omega(z) + \eta(z) \omega(y) \}$$

şeklindedir.

F tensör alanı kullanılarak apapR manifoldları 11 temel sınıfa ayrılmıştır ve bu sınıflar $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{11}$ şeklinde gösterilmiştir. Bu temel sınıfların arakesiti \mathcal{F}_0 ile gösterilir ve $F = 0$ koşulu ile belirli özel bir sınıftır [21].

F ye karşılık gelen Lee 1- formları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\theta = g^{ij} F(e_i, e_j, \cdot), \quad \theta^* = g^{ij} F(e_i, \phi e_j, \cdot), \quad \omega = F(\xi, \xi, \cdot) \quad (3.22)$$

Burada (g^{ij}) , $p \in M$, $T_p M$ tanjant uzayının $\{\xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n\}$ tabanına karşılık gelen g metriğinin ters matrisidir [21].

3.1. PARA-SASAKİ BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLAR

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold olsun. ∇ , g metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$(\nabla_x \phi)y = -g(x, y)\xi - \eta(y)x + 2\eta(x)\eta(y)\xi \\ = -g(\phi x, \phi y)\xi - \eta(y)\phi^2(x) \quad (3.23)$$

koşulu sağlanıyorsa M manifolduna para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu denir. [12]

Teorem 3.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu olsun. Bu

durumda aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
i. \nabla_x \xi &= \phi x, & ii. (\nabla_x \eta)y &= g(x, \phi y), \\
iii. R(x, y)\xi &= -\eta(y)x + \eta(x)y, & iv. R(\xi, y)\xi &= \phi^2 y, \\
v. Ric(x, \xi) &= -2n \eta(x), & vi. Ric(\xi, \xi) &= -2n, \\
vii. \nabla_{\phi x} \xi &= \phi \nabla_x \xi = x - \eta(x)\xi
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Burada R Riemann eğrilik tensörü ve Ric Ricci eğrilik tensörüdür.

Kanıt. i. (3.23) eşitliğinde $y = \xi$ konulursa ve (3.3)(i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \phi)\xi &= \nabla_x(\phi\xi) - \phi \nabla_x \xi = -\eta(x)\xi - x + 2\eta(x)\xi \\
-\phi \nabla_x \xi &= -x + \eta(x)\xi \\
\phi \nabla_x \xi &= x - \eta(x)\xi
\end{aligned} \tag{3.25}$$

eşitliği bulunur. (3.2) ve (3.3)(i) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\phi^2(\nabla_x \xi) &= \phi(\phi \nabla_x \xi) = \phi(x - \eta(x)\xi) = \phi x \\
\nabla_x \xi - \eta(\nabla_x \xi)\xi &= \phi x
\end{aligned}$$

(3.13) eşitliğinden dolayı $\nabla_x \xi = \phi x$ eşitliği elde edilir.

ii. (2.2) eşitliği ile (3.10) kullanarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \eta)y &= x\eta(y) - \eta(\nabla_x y) \\
&= xg(y, \xi) - g(\nabla_x y, \xi)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (2.4) eşitliğinde $z = \xi$ yazılırsa

$$xg(y, \xi) = g(\nabla_x y, \xi) + g(y, \nabla_x \xi)$$

olur. Bu eşitlikte (i.) kullanılırsa

$$xg(y, \xi) = g(\nabla_x y, \xi) + g(y, \phi x)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$xg(y, \xi) - g(\nabla_x y, \xi) = g(y, \phi x)$$

olacağından (3.12) ve (3.10) eşitliklerinden

$$(\nabla_x \eta)y = g(y, \phi x) = g(x, \phi y)$$

elde edilir.

iii. (2.5) eşitliğinde z yerine ξ yazılır. (3.24)(i.) , (2.3), (2.2) ve (3.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(x, y)\xi &= \nabla_x \nabla_y \xi - \nabla_y \nabla_x \xi - \nabla_{[x, y]}\xi \\ &= \nabla_x(\phi y) - \nabla_y(\phi x) - \phi[x, y] \\ &= \nabla_x(\phi y) - \nabla_y(\phi x) - \phi(\nabla_x y - \nabla_y x) \\ &= \nabla_x(\phi y) - \nabla_y(\phi x) - \phi(\nabla_x y) - \phi(\nabla_y x) \\ &= \nabla_x(\phi y) - \phi(\nabla_x y) - \nabla_y(\phi x) - \phi(\nabla_y x) \\ &= (\nabla_x \phi)y - (\nabla_y \phi)x \\ &= -g(x, y)\xi - \eta(y)x + 2\eta(x)\eta(y)\xi + g(y, x)\xi + \eta(x)y - 2\eta(x)\eta(y)\xi \\ &\quad + g(y, x)\xi + \eta(x)y - 2\eta(x)\eta(y)\xi \\ &= \eta(x)y - \eta(y)x \end{aligned}$$

olup istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

iv. (3.24)(iii.) eşitliğinde x yerine ξ yazılırsa ve (3.1) de (i.) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(\xi, y)\xi &= \eta(\xi)y - \eta(y)\xi = y - \eta(y)\xi \\ R(\xi, y)\xi &= \phi^2(y) \end{aligned}$$

olduğunu bulmuş oluruz.

v. (2.6) eşitliğinde y yerine ξ koyduğumuzda ve (3.24)(iii.) eşitliğinden,

$$Ric(x, \xi) = \sum_{i=0}^{2n} g(R(e_i, x)\xi, e_i) = \sum_{i=0}^{2n} g(-\eta(x)e_i + \eta(e_i)x, e_i)$$

elde edilir. $e_0 = \xi$ ve $i = 1, \dots, 2n$ için $\eta(e_i) = 0$ eşitlikleri ve (3.1)(i) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ric(x, \xi) &= g(-\eta(x)\xi + x, \xi) + \sum_{i=1}^{2n} g(-\eta(x)e_i, e_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{2n} g(-\eta(x)e_i, e_i) \\ &= -2n \eta(x) \end{aligned}$$

istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

vi. (3.24)(v) deki eşitlik ve (3.1)(i) eşitliği kullanılırsa

$$Ric(\xi, \xi) = -2n \eta(\xi) = -2n \quad (3.26)$$

olur.

vii. (3.25) den $\phi \nabla_x \xi = x - \eta(x)\xi$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan (3.24)(i) de verilen eşitlikte x yerine ϕx yazılırsa

$$\nabla_{\phi x} \xi = \phi^2(x) = x - \eta(x)\xi$$

olup ispat tamamlanır. □

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON İLE PARA-SASAKI BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARI

Bu bölümde apapR manifoldları üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ele alacağız.

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold olsun. M üzerinde $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + \alpha \{g(x, y)\xi - \eta(y)x\} + \beta \{g(\phi x, y)\xi - \eta(y)\phi x\} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonudur. $\bar{\nabla}$ konneksiyono-

nuna karşılık gelen M nin T torsiyon tensörü $x, y \in \chi(M)$ ve α, β diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \bar{\nabla}_x y - \bar{\nabla}_y x - [x, y] \\ &= \alpha\{\eta(x)y - \eta(y)x\} + \beta\{\eta(x)\phi y - \eta(y)\phi x\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde olduğu kolaylıkla doğrulanır. $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ise bu genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyona yarı simetrik konneksiyon, $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ ise bu genelleştirilmiş simetrik konneksiyona çeyrek simetrik konneksiyon denir. M üzerinde bir Riemann metriği var öyle ki $\bar{\nabla}$ konneksiyonu her $x, y, z \in \chi(M)$ için

$$(\bar{\nabla}_x g)(y, z) = 0 \quad (4.3)$$

koşulunu sağlıyorsa $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu denir, aksi takdirde genelleştirilmiş simetrik metrik olmayan konneksiyon denir.

Şimdi (4.2) ve (4.3) eşitliklerini sağlayan konneksiyonun (4.1) ile verilen konneksiyon olduğunu gösterelim.

$\bar{\nabla}$ herhangi bir lineer konneksiyonu $x, y \in \chi(M)$ ve H , (1, 2) tipinde bir tensör alanı olmak üzere

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + H(x, y) \quad (4.4)$$

eşitliği ile belirlidir. Şimdi H tensör alanını $\bar{\nabla}$ konneksiyonu (4.2) ve (4.3) koşullarını sağlayacak şekilde belirleyelim. Torsiyon tensörünün tanımını ve (4.2) eşitliğini kullanırsak her $x, y \in \chi(M)$ için

$$T(x, y) = H(x, y) - H(y, x)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$g(T(x, y), z) = g(H(x, y), z) - g(H(y, x), z) \quad (4.5)$$

olur. (4.3) eşitliği kullanılırsa

$$0 = xg(y, z) - g(\bar{\nabla}_x y, z) - g(\bar{\nabla}_x z, y) = g(H(x, y), z) + g(H(x, z), y)$$

bulunur. Son eşitlikten

$$g(H(x, y), z) = -g(H(x, z), y) \quad (4.6)$$

bulunur. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla

$$g(T(x, y), z) + g(T(z, x), y) + g(T(z, y), x) = 2g(H(x, y), z) \quad (4.7)$$

elde edilir. Son eşitlik , (4.2) ve (3.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2g(H(x, y), z) &= g(T(x, y), z) + g(T(z, x), y) + g(T(z, y), x) \\ &= \alpha\eta(x)g(y, z) - \alpha\eta(y)g(x, z) + \beta\eta(x)g(\phi y, z) - \beta\eta(y)g(\phi x, z) \\ &\quad + \alpha\eta(z)g(x, y) - \alpha\eta(x)g(z, y) + \beta\eta(z)g(\phi x, y) - \beta\eta(x)g(\phi z, y) \\ &\quad + \alpha\eta(z)g(y, x) - \alpha\eta(y)g(z, x) + \beta\eta(z)g(\phi y, x) - \beta\eta(y)g(\phi z, x) \\ &= 2\alpha\eta(z)g(x, y) - 2\alpha\eta(y)g(x, z) + 2\beta\eta(z)g(\phi x, y) - 2\beta\eta(y)g(\phi x, z) \\ &= 2g(\alpha(g(x, y)\xi - \eta(y)x) + \beta(g(\phi x, y)\xi - \eta(y)\phi x), z) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan g Riemann metriği olduğundan

$$H(x, y) = \alpha\{g(x, y)\xi - \eta(y)x\} + \beta\{g(\phi x, y)\xi - \eta(y)\phi x\}$$

olmalıdır.

(3.1), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 4.0.1. M , genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu olsun. Buna göre her $x, y \in \chi(M)$ için

$$i. \quad \bar{\nabla}_x \phi = (\beta - 1)\{g(\phi x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi^2(x)\} + \alpha\{g(x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi x\},$$

$$ii. \quad \bar{\nabla}_x \xi = (1 - \beta)\phi x - \alpha\phi^2 x,$$

$$iii. \quad (\bar{\nabla}_x \eta)y = (1 - \beta)g(\phi x, y) - \alpha g(\phi x, \phi y)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt. i. (2.2) ve (4.1) eşitlikleri daha sonra (3.23) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_x \phi)y &= \bar{\nabla}_x \phi y - \phi(\bar{\nabla}_x y) \\
&= \nabla_x \phi y + \alpha g(x, \phi y) \xi + \beta g(\phi x, \phi y) \xi - \phi \nabla_x y + \alpha \eta(y) \phi x + \beta \eta(y) \phi^2 x \\
&= (\beta - 1)g(\phi x, \phi y) \xi + (\beta - 1)\eta(y) \phi^2 x + \alpha(g(x, \phi y) \xi + \eta(y) \phi x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. (4.1) eşitliğinde $y = \xi$ yazılır ve (3.1)(i), (3.10), (3.2), (3.24)(i) eşitlikleri sırasıyla kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_x \xi &= \nabla_x \xi + \alpha \{g(x, \xi) \xi - \eta(\xi) x\} + \beta \{g(\phi x, \xi) \xi - \eta(\xi) \phi x\} \\
&= \phi x + \alpha(\eta(x) \xi - x) - \beta \phi x \\
&= (1 - \beta) \phi x - \alpha \phi^2 x
\end{aligned}$$

bulunur.

iii. İlk önce (3.20) ve (4.1) eşitlikleri daha sonra (2.1), (3.3)(i) ve (3.24)(ii) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_x \eta)y &= x \eta(y) - \eta(\bar{\nabla}_x y) \\
&= (\nabla_x \eta)y - \alpha g(x, y) + \alpha \eta(y) \eta(x) - \beta g(\phi x, y) \\
&= g(x, \phi y) - \alpha g(x, y) + \alpha \eta(y) \eta(x) - \beta g(\phi x, y) \\
&= (1 - \beta)g(x, \phi y) - \alpha g(\phi x, \phi y)
\end{aligned}$$

olur. □

Önerme 4.0.2. (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile para-Sasaki benzeri Riemann manifold olsun. ∇ , g metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu ile $\bar{\nabla}$, genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonuna karşılık gelen R ve \bar{R} Riemann eğrilik tensörleri arasında aşağıdaki ilişki

vardır:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(x, y)z &= R(x, y)z + x(\alpha)g(y, z)\xi + (\alpha - \alpha\beta)g(y, z)\phi x \\
&\quad -x(\alpha)\eta(z)y + x(\beta)g(\phi y, z)\xi + (2\beta - \beta^2)g(\phi y, z)\phi x \\
&\quad -x(\beta)\eta(z)\phi y + (\alpha^2 + \beta)g(y, z)\eta(x)\xi + \alpha\beta g(\phi y, z)\eta(x)\xi \\
&\quad -\alpha^2 g(y, z)x + (\alpha^2 + \beta)\eta(y)\eta(z)x + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z)x \\
&\quad +\alpha\beta\eta(y)\eta(z)\phi x - y(\alpha)g(x, z)\xi + y(\alpha)\eta(z)x \\
&\quad -y(\beta)g(\phi x, z)\xi + (\beta^2 - 2\beta)g(\phi x, z)\phi y + y(\beta)\eta(z)\phi x \\
&\quad -(\alpha^2 + \beta)\eta(y)g(x, z)\xi - \alpha\beta g(\phi x, z)\eta(y)\xi + \alpha^2 g(x, z)y \\
&\quad -(\alpha^2 + \beta)\eta(x)\eta(z)y + (\alpha\beta - \alpha)g(\phi x, z)y \\
&\quad -\alpha\beta\eta(x)\eta(z)\phi y + (\alpha\beta - \alpha)g(x, z)\phi y.
\end{aligned}$$

Kanıt. M üzerindeki $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonunun \bar{R} eğrilik tensörü

$$\bar{R}(x, y)z = \bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_y z - \bar{\nabla}_y \bar{\nabla}_x z - \bar{\nabla}_{[x, y]} z \quad (4.8)$$

şekilde tanımlanır. Burada (3.10) eşitliği yazılarak ve (3.1)(i), (3.2)(i), (3.10), (3.11), (3.12), (3.8), (3.24) eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır. \square

α, β sabit fonksiyonlar olması durumunda \bar{R} eğrilik tensörü aşağıdaki şekle indirgenir:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(x, y)z &= R(x, y)z + (\alpha - \alpha\beta)g(y, z)\phi x + (2\beta - \beta^2)g(\phi y, z)\phi x \\
&\quad +(\alpha^2 + \beta)g(y, z)\eta(x)\xi + \alpha\beta g(\phi y, z)\eta(x)\xi \\
&\quad -\alpha^2 g(y, z)x + (\alpha^2 + \beta)\eta(y)\eta(z)x + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z)x \\
&\quad +\alpha\beta\eta(y)\eta(z)\phi x + (\beta^2 - 2\beta)g(\phi x, z)\phi y \\
&\quad -(\alpha^2 + \beta)\eta(y)g(x, z)\xi - \alpha\beta g(\phi x, z)\eta(y)\xi + \alpha^2 g(x, z)y \\
&\quad -(\alpha^2 + \beta)\eta(x)\eta(z)y + (\alpha\beta - \alpha)g(\phi x, z)y \\
&\quad +(\alpha\beta - \alpha)g(x, z)\phi y - \alpha\beta\eta(x)\eta(z)\phi y.
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Yukarıdaki eşitlikte $z = \xi$ yazılırsa, (3.1)(i), (3.3)(i) ve (3.3)(ii) eşitlikleri kullanılarak

$$\bar{R}(x, y)\xi = \alpha\eta(y)\phi x + (\beta - 1)\eta(y)x - (\beta - 1)\eta(x)y - \alpha\eta(x)\phi y \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada $x = \xi$ yazılırsa ve (4.10) eşitliği kullanılırsa

$$\overline{R}(\xi, y)\xi = (1 - \beta)\phi^2 y - \alpha\phi(y)$$

elde edilir.

M apapR manifoldu üzerinde $\{\xi, e_1, \dots, e_{2n}\}$ lokal ortonormal çatı alanı olsun. $\overline{R}(x, y, z, w) = g(\overline{R}(x, y)z, w)$ olmak üzere genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonuna karşılık gelen $\overline{\text{Ric}}$ Ricci tensörü ve $\overline{\text{scal}}$ skaler eğrilik tensörü sırasıyla

$$\overline{\text{Ric}}(x, y) = \sum_{i=0}^{2n} g(\overline{R}(e_i, x, y), e_i), \quad (4.11)$$

$$\overline{\text{scal}} = \sum_{i=0}^{2n} \overline{\text{Ric}}(e_i, e_i) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.0.3. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu olsun. Bu durumda Ric ve $\overline{\text{Ric}}$ Ricci eğrilikleri arasında aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(x, y) = & \text{Ric}(x, y) + [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2]g(x, y) \\ & + [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2]\eta(x)\eta(y) \\ & + [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(x, \phi y) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Kanıt. $i \neq 0$ olmak üzere $\eta(e_i) = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \overline{R}(e_i, y)z = & R(e_i, y)z + (\alpha - \alpha\beta)g(y, z)\phi e_i + (2\beta - \beta^2)g(\phi y, z)\phi e_i \\ & - \alpha^2 g(y, z)e_i + (\alpha^2 + \beta)\eta(y)\eta(z)e_i + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z)e_i \\ & + \alpha\beta\eta(y)\eta(z)\phi e_i + (\beta^2 - 2\beta)g(\phi e_i, z)\phi y \\ & - (\alpha^2 + \beta)\eta(y)g(e_i, z)\xi - \alpha\beta g(\phi e_i, z)\eta(y)\xi + \alpha^2 g(e_i, z)y \\ & + (\alpha\beta - \alpha)g(\phi e_i, z)y + (\alpha\beta - \alpha)g(e_i, z)\phi y \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik aşağıda kullanılırsa ve $g(\phi e_i, e_i) = 0$, $g(e_i, e_i) = 1$, $\eta(e_i) =$

0, (3.10) eşitlikleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned} g(\overline{R}(e_i, y)z, e_i) &= g(R(e_i, y)z, e_i) - \alpha^2 g(y, z) + (\alpha^2 + \beta)\eta(y)\eta(z) \\ &\quad + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z) + (\beta^2 - 2\beta)g(\phi e_i, z)g(\phi e_i, y) + \alpha^2 g(e_i, z)g(y, e_i) \\ &\quad + (\alpha\beta - \alpha)g(\phi e_i, z)g(y, e_i) + (\alpha\beta - \alpha)g(e_i, z)g(\phi y, e_i) \end{aligned}$$

olur.

$i = 0$, $e_0 = \xi$ için (3.1), (3.3i), (3.11), (3.10) eşitlikleri kullanıldığında,

$$g(\overline{R}(\xi, y)z, \xi) = g(R(\xi, y)z, \xi) - \alpha^2 g(y, z) + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z) + (2\alpha^2 - \beta)\eta(z)\eta(y)$$

eşitliği elde edilir. $\overline{\text{Ric}}$ tanımı kullanıldığında ve elde edilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(y, z) &= g(\overline{R}(\xi, y)z, \xi) + \sum_{i=1}^{2n} g(\overline{R}(e_i, y)z, e_i) \\ &= \text{Ric}(y, z) + [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2]g(y, z) \\ &\quad + [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2]\eta(y)\eta(z) \\ &\quad + [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(y, \phi z) \end{aligned}$$

istenilen eşitlik bulunur. □

scal ve $\overline{\text{scal}}$ skaler eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki vardır:

Teorem 4.0.4. (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon ile para-Sasaki benzeri Riemann manifold olsun. scal ve $\overline{\text{scal}}$ skaler eğrilikleri arasında

$$\overline{\text{scal}} = \text{scal} + 2n[\beta^2 + (1 - 2n)\alpha^2]$$

eşitliği vardır.

Kanıt.

$$\overline{\text{scal}} = \sum_{i=0}^{2n} \overline{\text{Ric}}(e_i, e_i),$$

(4.13) eşitliğinde $i \neq 0$ olmak üzere $x = y = e_i$ konulduğunda

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ric}}(e_i, e_i) &= \text{Ric}(e_i, e_i) + [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2]g(e_i, e_i) \\ &\quad + [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2]\eta(e_i)\eta(e_i) \\ &\quad + [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(e_i, \phi e_i) \\ &= \text{Ric}(e_i, e_i) + \beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2\end{aligned}$$

bulunur. Eğer (4.13) eşitliğinde $x = y = \xi$ konulursa

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ric}}(\xi, \xi) &= \text{Ric}(\xi, \xi) + [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2] \\ &\quad + [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2] \\ &\quad + [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(\xi, \phi\xi)\end{aligned}$$

olur. Burada (3.1)i, (3.11), (3.3)i, (4.13) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ric}}(\xi, \xi) &= -2n + [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2] \\ &\quad + [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2] \\ &= 2n(\beta - 1)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{\text{scal}} &= 2n(\beta - 1) + 2n[\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2] + \sum_{i=1}^{2n} \text{Ric}(e_i, e_i) \\ &= \text{scal} + 2n[\beta^2 + (1 - 2n)\alpha^2]\end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Teorem 4.0.5. $\overline{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyona göre diverjans, Hessian ve Laplace operatörleri aşağıdaki eşitlikler ile verilir:

$$\begin{aligned}\overline{\text{div}}(x) &= \text{div } x - 2n\alpha \eta(x) \\ \overline{\text{Hess}}f(x, y) &= \text{Hess}f(x, y) + \alpha(xf)\eta(y) - \alpha(\xi f)g(x, y) \\ &\quad + \beta(\phi x)f\eta(y) - \beta(\xi f)g(\phi x, y) \\ \overline{\Delta}f &= \Delta f - 2n\alpha (\xi f)\end{aligned}$$

Kanıt. $p \in M$ olacak şekilde $T_p M$ nin ortonormal tabanı $\{e_0 = \xi, e_1, \dots, e_{2n}\}$ olsun.

Bu durumda (2.9)'den

$$\overline{\text{div}}(x) = iz(\overline{\nabla}x) = \sum_{i=0}^{2n} g(\overline{\nabla}_{e_i}x, e_i).$$

şeklinde yazılır. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\overline{\text{div}}(x) = \sum_{i=0}^{2n} [g(\nabla_{e_i}x, e_i) + \alpha g(e_i, x)\eta(e_i) - \alpha\eta(e_i)g(x, e_i) + \beta g(\phi e_i, x)\eta(e_i)]$$

olur. Buradan (3.1)(i), (3.3)(i), (3.15), (3.16), (3.10) eşitlikleri ile

$$\overline{\text{div}}(x) = \text{div}(x) - 2n\alpha\eta(x)$$

olup ispat tamamlanır.

$v = \text{grad } f$ potansiyel vektör alanı ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık gelen f fonksiyonunun Hessian operatörü bilineer form olup

$$\overline{\text{Hess}}f(x, y) = g(\overline{\nabla}_x \text{grad } f, y)$$

şeklinde tanımlanır. (4.1) eşitliği $\overline{\nabla}_x \text{grad } f$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_x \text{grad } f &= \nabla_x \text{grad } f + \alpha(g(x, \text{grad } f)\xi - \eta(\text{grad } f)x) \\ &\quad + \beta(g(\phi x, \text{grad } f)\xi - \eta(\text{grad } f)\phi x) \\ \overline{\text{Hess}}(x) &= g(\nabla_x \text{grad } f, y) + \alpha g(x, \text{grad } f)\eta(y) - \alpha\eta(\text{grad } f)g(x, y) \\ &\quad + \beta g(\phi x, \text{grad } f)\eta(y) - \beta\eta(\text{grad } f)g(\phi x, y) \end{aligned}$$

$g(\text{grad } f, x) = x(f)$ ve $\eta(\text{grad } f) = \xi f$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} \overline{\text{Hess}}(x) &= \text{Hess}f(x, y) + \alpha x(f)\eta(y) - \alpha(\xi f)g(x, y) \\ &\quad + \beta\phi x(f)\eta(y) - \beta(\xi f)g(\phi x, y) \end{aligned}$$

bulunur.

(2.8) de $x = \text{grad } f$ olarak deęiştirilirse

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}f &= \bar{\text{div}}(\text{grad } f) \\ &= \text{div}(\text{grad } f) - 2n\alpha\eta(\text{grad } f)\end{aligned}$$

$\eta(\text{grad } f) = \xi f$ kullanırsak

$$\bar{\Delta}f = \Delta f - 2n\alpha(\xi f) \quad (4.14)$$

olarak bulunur. □

5. PARA-RICCI BENZERİ SOLİTONLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON İLE PARA-SASAKI BEN- ZERİ RIEMANN MANİFOLDLAR

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu olmak üzere Ric Ricci tensörü (a, b, c) sabitler olmak üzere

$$\text{Ric} = a g + b \tilde{g} + c \eta \otimes \eta \quad (5.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye para-Einstein benzeri manifold denir [16].

$x, y \in \chi(M)$ olmak üzere (5.1) eşitliği

$$\text{Ric}(x, y) = a g(x, y) + b \tilde{g}(x, y) + c \eta(x)\eta(y) \quad (5.2)$$

şeklinde yazılır. (a, b, c) sabit olduğu durumda $b = 0$ koşulu sağlandığında η -Einstein manifold, $b = c = 0$ koşulu sağlandığında ise Einstein manifold olarak adlandırılır. Eğer (a, b, c) ler M üzerinde fonksiyonlar ise M manifolduna hemen hemen para-Einstein benzeri manifold denir.

Teorem 5.0.1. *(M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann Manifoldu (a, b, c) sabitleri ile para-Einstein benzeri manifold olsun. Bu durumda (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile yine para-Einstein*

benzeri manifolddur öyle ki (λ, μ, ν) sabiti

$$\begin{aligned}\lambda &= \beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2 + a, \\ \mu &= (2 - 2n)(\alpha\beta - \alpha) + \alpha + b \\ \nu &= (2n - 1)\alpha^2 + (2n - 2)\alpha\beta + (1 - 2n)\alpha + (2n + 1)\beta - \beta^2 + c\end{aligned}$$

şeklindedir.

Kanat. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, (a, b, c) sabitleri ile para-Einstein benzeri manifold olsun. Bu durumda (5.1) eşitliği sağlanır. (5.1) eşitliğinde Ric yerine (4.13) den elde edilen

$$\begin{aligned}\text{Ric}(x, y) &= \overline{\text{Ric}}(x, y) - [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2]g(x, y) \\ &\quad - [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2]\eta(x)\eta(y) \\ &\quad - [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(x, \phi y)\end{aligned}\tag{5.3}$$

eşitlik yazıldığında

$$\begin{aligned}a g(x, y) + b \tilde{g}(x, y) + c \eta(x)\eta(y) &= \overline{\text{Ric}}(x, y) - [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2]g(x, y) \\ &\quad - [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2]\eta(x)\eta(y) \\ &\quad - [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(x, \phi y)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ric}}(x, y) &= [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2 + a]g(x, y) \\ &\quad + [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha + b]g(x, \phi y) \\ &\quad + [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2 + b + c]\eta(x)\eta(y)\end{aligned}$$

olur.(3.14) eşitliği yazıldığında

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ric}}(x, y) &= [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2 + a]g(x, y) \\ &\quad + [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha + b]\tilde{g}(x, y) \\ &\quad + [(2n - 1)\alpha^2 + (2n - 2)\alpha\beta \\ &\quad + (1 - 2n)\alpha + (2n + 1)\beta - \beta^2 + c]\eta(x)\eta(y)\end{aligned}$$

eşitliğinden istenilen gösterilmiş olur. \square

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu, ξ potansiyel vektör alanı olmak üzere (λ, μ, ν) sabitleri ile

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \text{Ric} + \lambda g + \mu\tilde{g} + \nu\eta \otimes \eta = 0 \quad (5.4)$$

eşitliği sağlanıyorsa M' ye para-Ricci benzeri soliton kabul eder, denir [14]. Burada \mathcal{L} Lie türevine ve Ric Ricci tensorüne karşılık gelir. $\xi \in \chi(M)$ olmak üzere g nin ξ yönündeki Lie türevi

$$(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = g(\nabla_x \xi, y) + g(x, \nabla_y \xi) \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanır. (5.4) eşitliği her $x, y \in \chi(M)$ için

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(x, y) + \text{Ric}(x, y) + \lambda g(x, y) + \mu\tilde{g}(x, y) + \nu\eta(x)\eta(y) = 0 \quad (5.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $\mu = 0$ ise M bir η -Ricci soliton, $\mu = \nu = 0$ ise M bir Ricci soliton olur. Eğer λ, μ, ν fonksiyonlar ise M hemen hemen para-Ricci benzeri soliton denir.

(M, ϕ, ξ, η, g) bir para-Ricci benzeri soliton, v herhangi bir potansiyel vektör alanı olmak üzere (λ, μ, ν) sabitleriyle

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_v g + \text{Ric} + \lambda g + \mu\tilde{g} + \nu\eta \otimes \eta = 0 \quad (5.7)$$

eşitliği geçerli ise M' ye v potansiyeli ve (λ, μ, ν) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul eder. Burada $v \in \chi(M)$ olmak üzere g nin v yönündeki Lie türevi

$$(\mathcal{L}_v g)(x, y) = g(\nabla_x v, y) + g(x, \nabla_y v) \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanır.

(M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifold ise

$$\mathcal{L}_\xi g(x, y) = g(\nabla_x \xi, y) + g(x, \nabla_y \xi) = 2g(x, \phi y) \quad (5.9)$$

eşitliği vardır. (5.8) ve (5.9) kullanılarak

$$\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g(x, y) = \mathcal{L}_{\xi}g(x, y) - 2\alpha g(\phi x, \phi y) - 2\beta g(\phi x, y) \quad (5.10)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Para-Ricci benzeri soliton kavramını genelleştirebiliriz. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu $\overline{\nabla}$ konneksiyonu ile

$$\frac{1}{2}\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g + \overline{\text{Ric}} + \lambda g + \mu\tilde{g} + \nu\eta \otimes \eta = 0 \quad (5.11)$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık ξ potansiyeli ve (λ, μ, ν) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul ediyor, denir. Burada $\overline{\mathcal{L}}$ ve $\overline{\text{Ric}}$ sırasıyla $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık gelen Lie türevini ve Ricci tensörünü belirtir.

Teorem 5.0.2. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu ξ potansiyeli ve (a, b, c) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul etsin. Bu durumda (M, ϕ, ξ, η, g) , $\overline{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonuna karşılık ξ potansiyeli ile para-Ricci benzeri soliton kabul eder öyle ki (λ, μ, ν) sabitleri

$$\begin{aligned} \lambda &= (2n - 1)\alpha^2 - \beta^2 + \alpha + \beta + a \\ \mu &= 2(n - 1)\alpha\beta + (1 - 2n)\alpha + \beta + b \\ \nu &= \beta^2 + (1 - 2n)\alpha^2 + (\alpha - \alpha\beta)(2n - 2) - (2n + 2)\beta + c \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kanıt. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifold olsun ve ξ potansiyeli ve (a, b, c) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul etsin. Bu durumda (5.4) eşitliği sağlanır. (5.10) eşitliğinden

$$\mathcal{L}_{\xi}g(x, y) = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g(x, y) + 2\alpha g(\phi x, \phi y) + 2\beta g(\phi x, y) \quad (5.12)$$

elde edilir. Ayrıca (5.3), (5.12), (3.8) eşitlikleri (5.4) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{L}}_\xi g(x, y) + 2\alpha g(\phi x, \phi y) + 2\beta g(\phi x, y)) + \overline{Ric}(x, y) \\ & - [\beta^2 - \beta + (1 - 2n)\alpha^2]g(x, y) - [(2n + 1)\beta - \beta^2 + (2n - 1)\alpha^2]\eta(x)\eta(y) \\ & - [(\alpha\beta - \alpha)(2 - 2n) + \alpha]g(x, \phi y) + ag(x, y) + b\tilde{g}(x, y) + c\eta(x)\eta(y) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{L}}_\xi g(x, y) + \overline{Ric}(x, y) + [-\beta^2 + \beta + (2n - 1)\alpha^2 + a + \alpha]g(x, y) \\ & + (2(\alpha\beta - \alpha)(n - 1) - \alpha + \beta + b)g(\phi x, y) \\ & + (c - (2n + 1)\beta + \beta^2 + (1 - 2n)\alpha^2 - \alpha)\eta(x)\eta(y) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen eşitlik elde edilir. \square

Teorem 5.0.3. *Let (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ boyutlu para-Sasaki benzeri Riemann manifold ve (a, b, c) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul etsin. v potansiyel vektör alanı $v = k\xi$ koşulunu sağlasın ve ξ Reeb vektör alanı tüm noktalarda doğrusaldır, burada k M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu durumda $\overline{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonuna para-Ricci benzeri soliton kabul eder ve (λ, μ, ν) sabitleri*

$$\begin{aligned} \lambda &= a - \alpha k - \beta^2 + \beta + (2n - 1)\alpha^2 \\ \mu &= b - \beta k + (\alpha - \alpha\beta)(2n - 2) \\ \nu &= -\alpha k - (2n + 1)\beta + \beta^2 + (1 - 2n)\alpha^2 + c + \beta k + (\alpha\beta - \alpha)(2n - 2) \end{aligned}$$

ile verilir.

Kanıt. (5.3) ve (5.7) eşitliklerini ele alarak g nin $v = k\xi$ boyunca Lie türevini hesaplayalım. $\overline{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyona karşılık gelen Lie türevi

$$\overline{\mathcal{L}}_v g(x, y) = \mathcal{L}_v g(x, y) + 2\alpha k\eta(x)\eta(y) - 2\alpha k g(x, y) - 2\beta g(x, \phi y)$$

şeklindedir.

İkinci eşitlikte $\mathcal{L}_v g(x, y)$ 'yi çekip (5.4) kullanarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \overline{\mathcal{L}_v g}(x, y) + \overline{\text{Ric}}(x, y) + [-\beta^2 + \beta + (2n - 1)\alpha^2 + \alpha k + a]g(x, y) \\ & + [(\alpha\beta - \alpha)(2n - 2) - \alpha + \beta + b]g(x, \phi y) \\ & + [-(2n + 1)\beta + \beta^2 + (1 - 2n)\alpha^2 - \alpha k + b + c]\eta(x)\eta(y) = 0 \end{aligned}$$

ispat tamamlanır. □

(M, ϕ, ξ, η, g) herhangi bir v potansiyeline sahip para-Ricci benzeri soliton kabul ediyor ise genelleştirilmiş simetrik metrik bağlantıya göre para-Ricci benzeri soliton hali ile çözümü olmayabilir.

5.1. ÖRNEKLER

Para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu örnekleri [12] te ve [27]' te ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bundan hareketle bu manifoldların üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyon ele alınmış ve bu örnekler üzerinde Teorem (5.0.1) ve Teorem (5.0.2) desteklenmiştir.

5.1.1. Örnek 1

L , 3–boyutlu Lie grubu [18]'te verilen makalede ayrıntılı olarak çalışılmıştır. L üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının global tabanı $\{\xi = e_0, e_1, e_2\}$ olmak üzere karşılık gelen Lie cebirleri

$$[e_0, e_1] = -e_2, \quad [e_0, e_2] = -e_1, \quad [e_1, e_2] = 0$$

eşitlikleri ile verilir. L 3–boyutlu Lie grubu üzerinde (ϕ, ξ, η, g) apapR yapısı $i, j \in \{0, 1, 2\}$ ve $i \neq j$ koşulları ile

$$\begin{aligned} \phi(e_0) &= 0, & \phi(e_1) &= e_2, & \phi(e_2) &= e_1, & \eta(e_0) &= 1, \\ g(e_0, e_0) &= g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) &= 1, & & & & & (5.13) \\ g(e_i, e_j) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. g Riemann metriğine karşılık gelen ∇ Levi-Civita konneksiyonunun sıfırdan farklı bileşenleri Kozsul formülü yardımıyla

$$\nabla_{e_1} e_0 = e_2, \quad \nabla_{e_2} e_0 = e_1, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = -e_0 \quad (5.14)$$

şeklinde hesaplanır. (5.13), (5.14), (2.2) ve (3.23) eşitliklerinden (L, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu olduğunu gösterelim. $i = 0, 1, 2$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_0} \phi)e_i &= \nabla_{e_0} \phi e_i - \phi \nabla_{e_0} e_i = 0 \\ -g(\phi e_0, \phi e_i) \xi - \eta(e_i) \phi^2 e_0 &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde diğer bileşenler için de kontrol edelim:

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_1}\phi)e_0 &= \nabla_{e_1}\phi e_0 - \phi\nabla_{e_1}e_0 = -e_1 \\ -g(\phi e_1, \phi e_0)\xi - \eta(e_0)\phi^2 e_1 &= -e_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_1}\phi)e_1 &= \nabla_{e_1}\phi e_1 - \phi\nabla_{e_1}e_1 = -e_0 \\ -g(\phi e_1, \phi e_1)\xi - \eta(e_1)\phi^2 e_1 &= -e_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_1}\phi)e_2 &= \nabla_{e_1}\phi e_2 - \phi\nabla_{e_1}e_2 = 0 \\ -g(\phi e_1, \phi e_2)\xi - \eta(e_2)\phi^2 e_1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_2}\phi)e_0 &= \nabla_{e_2}\phi e_0 - \phi\nabla_{e_2}e_0 = -\phi e_1 = -e_2 \\ -g(\phi e_2, \phi e_0)\xi - \eta(e_0)\phi^2 e_2 &= -e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_2}\phi)e_1 &= \nabla_{e_2}\phi e_1 - \phi\nabla_{e_2}e_1 = 0 \\ -g(\phi e_2, \phi e_1)\xi - \eta(e_1)\phi^2 e_2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_2}\phi)e_2 &= \nabla_{e_2}\phi e_2 - \phi\nabla_{e_2}e_2 = -e_0 \\ -g(\phi e_2, \phi e_2)\xi - \eta(e_2)\phi^2 e_2 &= -e_0\end{aligned}$$

Böylece $\{\xi = e_0, e_1, e_2\}$ tabanı üzerinden (L, ϕ, ξ, η, g) nin para-Sasaki benzeri Riemann manifold olduğunu gösterilmiş olur.

(5.14) bulduğumuz sonuçlar yardımıyla (2.5) ve (2.6) eşitlikleri kullanılarak $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ eğriliği ve $\text{Ric}_{ij} = \text{Ric}(e_i, e_j)$ Ricci tensörünün sıfırdan farklı temel bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}R_{1221} &= g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]}e_2, e_1) \\ &= g(\nabla_{e_2}e_0, e_1) = g(e_1, e_1) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{1001} &= g(R(e_1, e_0)e_0, e_1) = g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_0}e_0 - \nabla_{e_0}\nabla_{e_1}e_0 - \nabla_{[e_1, e_0]}e_0, e_1) \\ &= g(-\nabla_{e_0}e_2 - \nabla_{e_2}e_0, e_1) = g(-e_1, e_1) = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{2002} &= g(R(e_2, e_0)e_0, e_2) = g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_0}e_0 - \nabla_{e_0}\nabla_{e_2}e_0 - \nabla_{[e_2, e_0]}e_0, e_2) \\ &= g(0 - \nabla_{e_0}e_1 - \nabla_{e_1}e_0, e_2) = g(-e_2, e_2) = -1\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikler yardımıyla Ricci tensörünün sıfırdan farklı tek bileşeni

$$Ric_{00} = Ric(e_0, e_0) = R_{0000} + R_{1001} + R_{2002} = -2$$

şeklindedir.

Kabul edelim ki L manifoldu para-Einstein manifold olsun. Bu durumda (5.2) eşitliği sağlanır. (5.2) eşitliğinde $x = y = \xi$ yazılırsa

$$Ric_{00} = a g(\xi, \xi) + b \tilde{g}(\xi, \xi) + c \eta(\xi)\eta(\xi) = -2$$

olacağından $a + b + c = -2$ olmalıdır. (5.2) eşitliğinde $x = y = e_1$ yazılırsa

$$Ric_{11} = a g(e_1, e_1) + b \tilde{g}(e_1, e_1) + c \eta(e_1)\eta(e_1) = a = 0$$

elde edilir. (5.2) eşitliğinde $x = e_1, y = e_2$ yazılırsa

$$Ric_{12} = a g(e_1, e_2) + b \tilde{g}(e_1, e_2) + c \eta(e_1)\eta(e_2) = b = 0$$

bulunur. $a + b + c = -2, a = 0, b = 0$ eşitliklerinden $a = -2$ elde edilir. Dolayısıyla L manifoldu $(a, b, c) = (0, 0, -2)$ sabitleri ile para-Einstein benzeri manifold olduğu elde edilir.

Kabul edelim ki L manifoldu para-Ricci benzeri soliton kabul etsin. O halde (5.6) eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikte $x = y = \xi$ yazılırsa

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g(\xi, \xi) + Ric(\xi, \xi) + \lambda g(\xi, \xi) + \mu \tilde{g}(\xi, \xi) + \nu \eta(\xi)\eta(\xi) = 0$$

olacağından

$$\lambda + \mu + \nu = 2 \tag{5.15}$$

eşitliği bulunur. (5.6) eşitliğinde $x = y = e_i, i \neq 0$ yazılırsa

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g(e_i, e_i) + Ric(e_i, e_i) + \lambda g(e_i, e_i) + \mu \tilde{g}(e_i, e_i) + \nu \eta(e_i)\eta(e_i) = 0$$

olup buradan $\lambda = 0$ elde edilir. $x = e_1, y = e_0$ yazılırsa

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(e_1, e_0) + \text{Ric}(e_1, e_0) + \lambda g(e_1, e_0) + \mu \tilde{g}(e_1, e_0) + \nu \eta(e_1)\eta(e_0) = 0$$

olacağından $\mu = -1$ bulunur. (5.15) eşitliğinde bulunan λ ve μ değerleri yerine yazıldığında $\nu = 3$ elde edilir. O halde (5.15) eşitliğini sağlayacak şekilde (λ, μ, ν) sabitleri var olduğundan L , $(0, -1, 3)$ sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul eder. g Riemann metriğinin ξ yönündeki Lie türevinin bileşenleri, $(\mathcal{L}_\xi g)(e_i, e_j) = (\mathcal{L}_\xi g)_{ij}$ olmak üzere L manifoldu üzerinde g nin ξ yönündeki Lie türevinin sıfırdan farklı tek bileşeni, (5.5) eşitliğinde $x = e_1, y = e_2$ yazılırsa ve (5.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)(e_1, e_2) &= g(\nabla_{e_1}\xi, e_2) + g(e_1, \nabla_{e_2}\xi) \\ &= g(e_2, e_2) + g(e_1, e_1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer durumlar için bakıldığında $(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = 0$ olduğu görülür.

L üzerindeki $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu dikkate alındığında (4.1) ve (5.14) eşitlikleri yardımı ile $\bar{\nabla}$ nin sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_1}e_0 &= \nabla_{e_1}e_0 + \alpha\{g(e_1, e_0)\xi - \eta(e_0)e_1\} + \beta\{g(\phi e_1, e_0)\xi - \eta(e_0)\phi e_1\} \\ &= (1 - \beta)e_2 - \alpha e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_2}e_0 &= \nabla_{e_2}e_0 + \alpha\{g(e_2, e_0)\xi - \eta(e_0)e_2\} + \beta\{g(\phi e_2, e_0)\xi - \eta(e_0)\phi e_2\} \\ &= (1 - \beta)e_1 - \alpha e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_1}e_2 &= \nabla_{e_1}e_2 + \alpha\{g(e_1, e_2)\xi - \eta(e_2)e_1\} + \beta\{g(\phi e_1, e_2)\xi - \eta(e_2)\phi e_1\} \\ &= (\beta - 1)e_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_2}e_1 &= \nabla_{e_2}e_1 + \alpha\{g(e_2, e_1)\xi - \eta(e_1)e_2\} + \beta\{g(\phi e_2, e_1)\xi - \eta(e_1)\phi e_2\} \\ &= (\beta - 1)e_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_1}e_1 &= \nabla_{e_1}e_1 + \alpha\{g(e_1, e_1)\xi - \eta(e_1)e_1\} + \beta\{g(\phi e_1, e_1)\xi - \eta(e_1)\phi e_1\} \\ &= \alpha e_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{e_2}e_2 &= \nabla_{e_2}e_2 + \alpha\{g(e_2, e_2)\xi - \eta(e_2)e_2\} + \beta\{g(\phi e_2, e_2)\xi - \eta(e_2)\phi e_2\} \\ &= \alpha e_0\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıda elde edilen eşitlikler düzenlendiğinde $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{e_1}e_0 &= (1 - \beta)e_2 - \alpha e_1, & \bar{\nabla}_{e_2}e_0 &= (1 - \beta)e_1 - \alpha e_2, \\ \bar{\nabla}_{e_1}e_2 &= \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = (\beta - 1)e_0, & \bar{\nabla}_{e_1}e_1 &= \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = \alpha e_0\end{aligned}\tag{5.16}$$

şeklinde bulunur.

(2.5) ve (5.16) eşitlikleri yardımıyla $\bar{R}_{ijkl} = \bar{R}(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(\bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l)$ eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri simetriler ve anti simetriler dışında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{0101} &= g(\bar{\nabla}_{e_0}\bar{\nabla}_{e_1}e_0 - \bar{\nabla}_{e_1}\bar{\nabla}_{e_0}e_0 - \bar{\nabla}_{[e_0, e_1]}e_0, e_1) \\ &= g(\bar{\nabla}_{e_0}((1 - \beta)e_2 - \alpha e_1) + (1 - \beta)e_1 - \alpha e_2, e_1) \\ &= g((1 - \beta)e_1 - \alpha e_2, e_1) = 1 - \beta \\ \bar{R}_{0202} &= g(\bar{\nabla}_{e_0}\bar{\nabla}_{e_2}e_0 - \bar{\nabla}_{e_2}\bar{\nabla}_{e_0}e_0 - \bar{\nabla}_{[e_0, e_2]}e_0, e_2) \\ &= g(\bar{\nabla}_{e_0}((1 - \beta)e_1 - \alpha e_2) + (1 - \beta)e_2 - \alpha e_1, e_2) = 1 - \beta \\ \bar{R}_{0102} &= g(\bar{\nabla}_{e_0}\bar{\nabla}_{e_1}e_0 - \bar{\nabla}_{e_1}\bar{\nabla}_{e_0}e_0 - \bar{\nabla}_{[e_0, e_1]}e_0, e_2) \\ &= g(\bar{\nabla}_{e_0}((1 - \beta)e_2 - \alpha e_1) + (1 - \beta)e_1 - \alpha e_2, e_2) = -\alpha \\ \bar{R}_{1212} &= g(\bar{\nabla}_{e_1}\bar{\nabla}_{e_2}e_1 - \bar{\nabla}_{e_2}\bar{\nabla}_{e_1}e_1 - \bar{\nabla}_{[e_1, e_2]}e_1, e_2) \\ &= g(\bar{\nabla}_{e_1}(\beta - 1)e_0 - \bar{\nabla}_{e_2}(\alpha e_0), e_2) \\ &= g((\beta - 1)((1 - \beta)e_2 - \alpha e_1) - \alpha((1 - \beta)e_1 - \alpha e_2), e_2) = \alpha^2 - (\beta - 1)^2\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikler ve (2.6) de verilen eşitlik kullanılarak Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}\bar{\text{Ric}}_{00} &= \bar{R}_{0000} + \bar{R}_{1001} + \bar{R}_{2002} = 2(\beta - 1) \\ \bar{\text{Ric}}_{11} &= \bar{R}_{0110} + \bar{R}_{1111} + \bar{R}_{2112} = \beta(\beta - 1) - \alpha^2 \\ \bar{\text{Ric}}_{22} &= \bar{R}_{0220} + \bar{R}_{1221} + \bar{R}_{2222} = \beta(\beta - 1) - \alpha^2 \\ \bar{\text{Ric}}_{12} &= \bar{R}_{0120} + \bar{R}_{1121} + \bar{R}_{2122} = \alpha\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak

$$\overline{\text{Ric}}_{00} = 2(\beta - 1), \quad \overline{\text{Ric}}_{11} = \overline{\text{Ric}}_{22} = \beta(\beta - 1) - \alpha^2, \quad \overline{\text{Ric}}_{12} = \alpha \quad (5.17)$$

şeklinde bulunur.

(5.17) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık gelen skaler eğrilik

$$\begin{aligned} \overline{\text{scal}} &= \sum_{i=0}^{2n} \overline{\text{Ric}}_{ii} \\ &= \overline{\text{Ric}}_{00} + \overline{\text{Ric}}_{11} + \overline{\text{Ric}}_{22} \\ &= 2(\beta - 1) + \beta(\beta - 1) - \alpha^2 + \beta(\beta - 1) - \alpha^2 \\ &= 2(\beta^2 - \alpha^2 - 1) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Eğer (L, ϕ, ξ, η, g) manifoldu $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık (λ, μ, ν) sabitleri ile para-Einstein manifold ise (5.2) eşitliğini sağlayacağından

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{00} &= 2(\beta - 1) = \lambda + \mu + \nu \\ \text{Ric}_{11} &= \beta(\beta - 1) - \alpha^2 = \lambda \\ \text{Ric}_{12} &= \alpha = \mu \end{aligned}$$

eşitliklerinden (λ, μ, ν) sabitlerinin

$$\lambda = \beta(\beta - 1) - \alpha^2, \quad \mu = \alpha, \quad \nu = \alpha(\alpha - 1) - (\beta - 1)(\beta - 2) \quad (5.18)$$

olması gerektiği elde edilir.

$\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık gelen g nin ξ yönündeki Lie türevi $\overline{\mathcal{L}}_\xi g$ 'nin, (5.9) eşitliği ile sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_1, e_1) &= g(\overline{\nabla}_{e_1} e_0, e_1) + g(e_1, \overline{\nabla}_{e_1} e_0) = -2\alpha \\ \overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_2, e_2) &= g(\overline{\nabla}_{e_2} e_0, e_2) + g(e_2, \overline{\nabla}_{e_2} e_0) = -2\alpha \\ \overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_1, e_2) &= g(\overline{\nabla}_{e_1} e_0, e_2) + g(e_1, \overline{\nabla}_{e_2} e_0) = 2(1 - \beta) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{11} = (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{22} = -2\alpha, \quad (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{12} = 2(1 - \beta) \quad (5.19)$$

şeklindedir.

(5.17) ve (5.19) eşitlikleri kullanarak, L manifoldunun $\overline{\nabla}$ konneksiyonu ile para-Ricci benzeri soliton kabul ediyorsa (λ, μ, ν) sabitleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_1, e_1) + \overline{\text{Ric}}(e_1, e_1) + \lambda g(e_1, e_1) + \mu \tilde{g}(e_1, e_1) + \nu \eta(e_1)\eta(e_1) &= 0 \\ -\alpha + \beta(\beta - 1) - \alpha^2 + \lambda &= 0 \\ \frac{1}{2}\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_1, e_2) + \overline{\text{Ric}}(e_1, e_2) + \lambda g(e_1, e_2) + \mu \tilde{g}(e_1, e_2) + \nu \eta(e_1)\eta(e_2) &= 0 \\ (1 - \beta) + \alpha + \mu &= 0 \\ \frac{1}{2}\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_0, e_0) + \overline{\text{Ric}}(e_0, e_0) + \lambda g(e_0, e_0) + \mu \tilde{g}(e_0, e_0) + \nu \eta(e_0)\eta(e_0) &= 0 \\ 2(\beta - 1) + \lambda + \mu + \nu &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla (λ, μ, ν) sabitleri

$$\lambda = \alpha^2 + \alpha + \beta - \beta^2, \quad \mu = \beta - \alpha - 1, \quad \nu = (\beta - 1)(\beta - 3) - \alpha^2 \quad (5.20)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak, 3-boyutlu (L, ϕ, ξ, η, g) manifoldu $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık (5.18), (5.14) eşitlikleri ile Teorem (5.0.1) ve Teorem (5.0.2) desteklenir.

5.1.2. Örnek 2

5-boyutlu G para-Sasaki benzeri Riemann manifoldunun örneği [12] de ayrıntılı olarak verilmiştir. G Lie grubu üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının global tabanı $\{e_0, \dots, e_4\}$ olsun öyle ki Lie cebiri $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerle belirlidir:

$$\begin{aligned} [e_0, e_1] &= \alpha e_2 - e_3 + \beta e_4, & [e_0, e_2] &= -\alpha e_1 - \beta e_3 - e_4, \\ [e_0, e_3] &= -e_1 + \beta e_2 + \alpha e_4, & [e_0, e_4] &= -\beta e_1 - e_2 - \alpha e_3, \end{aligned}$$

G Lie grubu üzerinde (ϕ, ξ, η, g) apapR yapısı

$$\begin{aligned}\xi &= e_0, & \phi e_1 &= e_3, & \phi e_2 &= e_4, & \phi e_3 &= e_1, & \phi e_4 &= e_2, \\ g(e_i, e_i) &= 1, & g(e_i, e_j) &= 0, & i, j &\in \{0, 1, \dots, 4\}, & i &\neq j\end{aligned}$$

şeklinde verilir. ∇ , Levi-Civita konneksiyonunun sıfırdan farklı bileşenleri Kozsul formülü yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_0} e_1 &= \alpha e_2 + \beta e_4, & \nabla_{e_1} e_0 &= e_3, & \nabla_{e_0} e_2 &= -\alpha e_1 - \beta e_3, & \nabla_{e_2} e_0 &= e_4, \\ \nabla_{e_0} e_3 &= \beta e_2 + \alpha e_4, & \nabla_{e_3} e_0 &= e_1, & \nabla_{e_0} e_4 &= -\beta e_1 - \alpha e_3, & \nabla_{e_4} e_0 &= e_2, \\ \nabla_{e_1} e_3 &= \nabla_{e_2} e_4 = \nabla_{e_3} e_1 = \nabla_{e_4} e_2 &= -e_0.\end{aligned}$$

$R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ nin sıfırdan farklı bileşenleri bilinen simet-
riler ve anti-simetrixler dışındakiler aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}
R_{0110} &= g(\nabla_{e_0} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} \nabla_{e_0} e_1 - \nabla_{[e_0, e_1]} e_1, e_0) \\
&= g(-\nabla_{e_1} (\alpha e_2 + \beta e_4) - \nabla_{\alpha e_2 - e_3 + \beta e_4} e_1, e_0) \\
&= g(-e_0, e_0) = 1 \\
R_{0220} &= g(\nabla_{e_0} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_0} e_2 - \nabla_{[e_0, e_2]} e_2, e_0) \\
&= g(-\nabla_{e_2} (-\alpha e_1 - \beta e_3) - \nabla_{-\alpha e_1 - e_4 - \beta e_3} e_2, e_0) \\
&= g(-e_0, e_0) = -1 \\
R_{0330} &= g(\nabla_{e_0} \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_3} \nabla_{e_0} e_3 - \nabla_{[e_0, e_3]} e_3, e_0) \\
&= g(-\nabla_{e_3} (\beta e_2 + \alpha e_4) - \nabla_{-e_1 + \beta e_2 + \alpha e_4} e_3, e_0) \\
&= g(-e_0, e_0) = -1 \\
R_{0440} &= g(\nabla_{e_0} \nabla_{e_4} e_4 - \nabla_{e_4} \nabla_{e_0} e_4 - \nabla_{[e_0, e_4]} e_4, e_0) \\
&= g(-\nabla_{e_4} (-\beta e_1 - \alpha e_3) - \nabla_{-\beta e_1 - e_2 - \alpha e_3} e_4, e_0) \\
&= g(-e_0, e_0) = -1 \\
R_{1234} &= g(\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_3, e_4) \\
&= g(-\nabla_{e_2} (-e_0), e_4) \\
&= g(e_4, e_4) = 1 \\
R_{1432} &= g(\nabla_{e_1} \nabla_{e_4} e_3 - \nabla_{e_4} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_4]} e_3, e_2) \\
&= g(-\nabla_{e_4} (-e_0), e_2) \\
&= g(e_2, e_2) = 1 \\
R_{1331} &= g(\nabla_{e_1} \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_3]} e_3, e_1) \\
&= g(-\nabla_{e_3} (-e_0), e_1) \\
&= g(e_1, e_1) = 1 \\
R_{2442} &= g(\nabla_{e_2} \nabla_{e_4} e_4 - \nabla_{e_4} \nabla_{e_2} e_4 - \nabla_{[e_2, e_4]} e_4, e_2) \\
&= g(-\nabla_{e_4} (-e_0), e_2) \\
&= g(e_2, e_2) = 1
\end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen eşitlikler kısaca

$$\begin{aligned}
R_{0110} &= R_{0220} = R_{0330} = R_{0440} = -1, \\
R_{1234} &= R_{1432} = R_{1331} = R_{2442} = 1
\end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklinde yazılır.

Ric Ricci tensörünün sıfırdan farklı tek bileşeni

$$\text{Ric}_{00} = R_{0000} + R_{1001} + R_{2002} + R_{3003} + R_{4004} = -4$$

şeklinde dir. $\mathcal{L}_\xi g$ Lie türevinin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{13} = g(\nabla_{e_1} \xi, e_3) + g(\nabla_{e_3} \xi, e_1) = g(e_3, e_3) + g(e_1, e_1) = 2$$

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{24} = g(\nabla_{e_2} \xi, e_4) + g(\nabla_{e_4} \xi, e_2) = g(e_4, e_4) + g(e_2, e_2) = 2$$

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{31} = g(\nabla_{e_3} \xi, e_1) + g(\nabla_{e_1} \xi, e_3) = g(e_1, e_1) + g(e_3, e_3) = 2$$

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{42} = g(\nabla_{e_4} \xi, e_2) + g(\nabla_{e_2} \xi, e_4) = g(e_2, e_2) + g(e_4, e_4) = 2$$

Buradan

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{13} = (\mathcal{L}_\xi g)_{24} = (\mathcal{L}_\xi g)_{31} = (\mathcal{L}_\xi g)_{42} = 2$$

şeklinde yazılır. (G, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldunun bir para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu olduğunu $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatısı üzerinden kontrol edelim, ancak (3.23) eşitliğinin her iki tarafının sıfır çıkması durumu atlanmıştır.

$x = y = e_0$ için

$$(\nabla_{e_0} \phi)e_0 = -g(e_0, e_0)\xi - \eta(e_0)e_0 + 2\eta(e_0)\eta(e_0)\xi = -\xi - \xi + 2\xi = 0$$

ve

$$\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y = \nabla_{e_0} \phi e_0 - \phi \nabla_{e_0} e_0 = 0$$

$i \neq 0$ olacak biçimde $x = y = e_i$ için

$$(\nabla_{e_i} \phi)e_i = -g(e_i, e_i)\xi - \eta(e_i)e_i + 2\eta(e_i)\eta(e_i)\xi = -\xi$$

ve

$$\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y = \nabla_{e_i} \phi e_i - \phi \nabla_{e_i} e_i = -\xi - 0 = -\xi$$

$x = e_1$ ve $y = e_0$ için

$$(\nabla_{e_1} \phi)e_0 = -g(e_1, e_0)\xi - \eta(e_0)e_1 + 2\eta(e_1)\eta(e_0)\xi = -e_1$$

ve

$$\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y = \nabla_{e_1} \phi e_0 - \phi \nabla_{e_1} e_0 = 0 - \phi(e_3) = -e_1$$

$x = e_2$ ve $y = e_0$ için

$$(\nabla_{e_2} \phi)e_0 = -g(e_2, e_0)\xi - \eta(e_0)e_2 + 2\eta(e_2)\eta(e_0)\xi = -e_2$$

ve

$$\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y = \nabla_{e_2} \phi e_0 - \phi \nabla_{e_2} e_0 = 0 - \phi(e_4) = -e_2$$

$x = e_3$ ve $y = e_0$ için

$$(\nabla_{e_3} \phi) e_0 = -g(e_3, e_0) \xi - \eta(e_0) e_3 + 2\eta(e_3) \eta(e_0) \xi = -e_3$$

ve

$$\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y = \nabla_{e_3} \phi e_0 - \phi \nabla_{e_3} e_0 = 0 - \phi(e_1) = -e_3$$

$x = e_4$ ve $y = e_0$ için

$$(\nabla_{e_4} \phi) e_0 = -g(e_4, e_0) \xi - \eta(e_0) e_4 + 2\eta(e_4) \eta(e_0) \xi = -e_4$$

ve

$$\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y = \nabla_{e_4} \phi e_0 - \phi \nabla_{e_4} e_0 = 0 - \phi(e_2) = -e_4$$

Böylece yukarıdaki eşitliklerden $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ tabanı için (3.23) eşitliğinin sağlandığı görülebilir. Bu nedenle (G, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu para-Sasaki benzeri Riemann manifoldudur.

(G, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu bir para-Einstein manifoldu olabilmesi için (5.2) eşitliğinin sağlanması gerekir. *Ric* eğriliğinin sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned} Ric_{00} &= ag(e_0, e_0) + b\tilde{g}(e_0, e_0) + c\eta(e_0)\eta(e_0) = a + b + c = -4 \\ Ric_{11} &= ag(e_1, e_1) + b\tilde{g}(e_1, e_1) + c\eta(e_1)\eta(e_1) = a = 0 \\ Ric_{12} &= ag(e_1, e_2) + b\tilde{g}(e_1, e_2) + c\eta(e_1)\eta(e_2) = b = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan (G, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldunun $(a, b, c) = (0, 0, -4)$ sabitleri ile η -Einstein olduğu elde edilir.

(G, ϕ, ξ, η, g) nin ξ potansiyeli ile para-Ricci benzeri soliton kabul edebilmesi için (5.6) eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu durumda

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g(\xi, \xi) + Ric(\xi, \xi) + \lambda g(\xi, \xi) + \mu \tilde{g}(\xi, \xi) + \nu \eta(\xi) \eta(\xi) = 0$$

olması gerekeceğinden $\lambda + \mu + \nu = 4$ eşitliği sağlanmalıdır. $x = y = e_1$ için

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g(e_1, e_1) + Ric(e_1, e_1) + \lambda g(e_1, e_1) + \mu \tilde{g}(e_1, e_1) + \nu \eta(e_1) \eta(e_1) = 0$$

olacağından $\lambda = 0$ olmalıdır. $x = e_1$ ve $y = e_3$ için

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g(e_1, e_3) + Ric(e_1, e_3) + \lambda g(e_1, e_3) + \mu \tilde{g}(e_1, e_3) + \nu \eta(e_1) \eta(e_3) = 0$$

olması gerektiğinden $\mu = -1$ olması gerektiği elde edilir. Buradan $\lambda + \mu + \nu = 4$ eşitliğinde yerine koyduğumuzda $\nu = 5$ bulunur. Diğer durumlar için de bakıldığında bulunan (λ, μ, ν) sabitleri için istenilen eşitliğin sağlandığı görülür. O halde (G, ϕ, ξ, η, g) para-Ricci benzeri Riemann manifoldunun, $(0, -1, 5)$ sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul ettiği elde edilir.

(G, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu düşünüldüğünde bu $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla} e_i e_i &= \alpha e_0, \quad (i \neq 0) \\
\bar{\nabla}_{e_0} e_1 &= \nabla_{e_0} e_1 + \alpha(g(e_0, e_1)e_0 - \eta(e_1)e_0) + \beta(g(\phi e_0, e_1)e_0 - \eta(e_1)\phi e_0) \\
&= \nabla_{e_0} e_1 = \alpha e_2 + \beta e_4 \\
\bar{\nabla}_{e_0} e_2 &= \nabla_{e_0} e_2 + \alpha(g(e_0, e_2)e_0 - \eta(e_2)e_0) + \beta(g(\phi e_0, e_2)e_0 - \eta(e_2)\phi e_0) \\
&= \nabla_{e_0} e_2 = -\alpha e_1 - \beta e_3 \\
\bar{\nabla}_{e_0} e_3 &= \nabla_{e_0} e_3 + \alpha(g(e_0, e_3)e_0 - \eta(e_3)e_0) + \beta(g(\phi e_0, e_3)e_0 - \eta(e_3)\phi e_0) \\
&= \nabla_{e_0} e_3 = \alpha e_4 + \beta e_2 \\
\bar{\nabla}_{e_0} e_4 &= \nabla_{e_0} e_4 + \alpha(g(e_0, e_4)e_0 - \eta(e_4)e_0) + \beta(g(\phi e_0, e_4)e_0 - \eta(e_4)\phi e_0) \\
&= \nabla_{e_0} e_4 = -\beta e_1 - \alpha e_3 \\
\bar{\nabla}_{e_1} e_0 &= \nabla_{e_1} e_0 + \alpha(g(e_1, e_0)e_0 - \eta(e_0)e_1) + \beta(g(\phi e_1, e_0)e_0 - \eta(e_0)\phi e_1) \\
&= e_3 + \alpha(-e_1) + \beta(-\phi e_1) = (1 - \beta)e_3 - \alpha e_1 \\
\bar{\nabla}_{e_1} e_3 &= \nabla_{e_1} e_3 + \alpha(g(e_1, e_3)e_0 - \eta(e_3)e_1) + \beta(g(\phi e_1, e_3)e_0 - \eta(e_3)\phi e_1) \\
&= (\beta - 1)e_0 \\
\bar{\nabla}_{e_2} e_0 &= \nabla_{e_2} e_0 + \alpha(g(e_2, e_0)e_0 - \eta(e_0)e_2) + \beta(g(\phi e_2, e_0)e_0 - \eta(e_0)\phi e_2) \\
&= (1 - \beta)e_4 - \alpha e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{e_2} e_4 &= \nabla_{e_2} e_4 + \alpha(g(e_2, e_4)e_0 - \eta(e_4)e_2) + \beta(g(\phi e_2, e_4)e_0 - \eta(e_4)\phi e_2) \\
&= (\beta - 1)e_0 \\
\bar{\nabla}_{e_3} e_0 &= \nabla_{e_3} e_0 + \alpha(g(e_3, e_0)e_0 - \eta(e_0)e_3) + \beta(g(\phi e_3, e_0)e_0 - \eta(e_0)\phi e_3) \\
&= (1 - \beta)e_1 - \alpha e_3 \\
\bar{\nabla}_{e_3} e_1 &= \nabla_{e_3} e_1 + \alpha(g(e_3, e_1)e_0 - \eta(e_1)e_3) + \beta(g(\phi e_3, e_1)e_0 - \eta(e_1)\phi e_3) \\
&= (\beta - 1)e_0 \\
\bar{\nabla}_{e_4} e_0 &= \nabla_{e_4} e_0 + \alpha(g(e_4, e_0)e_0 - \eta(e_0)e_4) + \beta(g(\phi e_4, e_0)e_0 - \eta(e_0)\phi e_4) \\
&= (1 - \beta)e_2 - \alpha e_4 \\
\bar{\nabla}_{e_4} e_2 &= \nabla_{e_4} e_2 + \alpha(g(e_4, e_2)e_0 - \eta(e_2)e_4) + \beta(g(\phi e_4, e_2)e_0 - \eta(e_2)\phi e_4) \\
&= (\beta - 1)e_0
\end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen eşitlikler düzenlendiğinde $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{e_i} e_i &= \alpha e_0, \quad (i \neq 0) \\
\bar{\nabla}_{e_0} e_1 &= \alpha e_2 + \beta e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_0} e_2 = -\alpha e_1 - \beta e_3, \\
\bar{\nabla}_{e_0} e_3 &= \alpha e_4 + \beta e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_0} e_4 = -\beta e_1 - \alpha e_3, \\
\bar{\nabla}_{e_1} e_0 &= (1 - \beta)e_3 - \alpha e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_0 = (1 - \beta)e_4 - \alpha e_2 \\
\bar{\nabla}_{e_3} e_0 &= (1 - \beta)e_1 - \alpha e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_4} e_0 = (1 - \beta)e_2 - \alpha e_4 \\
\bar{\nabla}_{e_1} e_3 &= \bar{\nabla}_{e_2} e_4 = \bar{\nabla}_{e_3} e_1 = \bar{\nabla}_{e_4} e_2 = (\beta - 1)e_0
\end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde dir. (4.8) eşitliği ve (5.22) değerleri kullanılarak \bar{R} eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{010} = -\bar{R}_{100} &= \bar{\nabla}_{e_0} \bar{\nabla}_{e_1} e_0 - \bar{\nabla}_{e_1} \bar{\nabla}_{e_0} e_0 - \bar{\nabla}_{[e_0, e_1]} e_0 \\
&= \bar{\nabla}_{e_0} [(1 - \beta)e_3 - \alpha e_1] - \bar{\nabla}_{\alpha e_2 - e_3 + \beta e_4} e_0 \\
&= (1 - \beta)(\alpha e_4 + \beta e_2) - \alpha(\alpha e_2 + \beta e_4) - \alpha[(1 - \beta)e_4 - \alpha e_2] \\
&\quad + [(1 - \beta)e_1 - \alpha e_3] - \beta[(1 - \beta)e_2 - \alpha e_4] \\
&= (1 - \beta)e_1 - \alpha e_3
\end{aligned}$$

olduğundan $\bar{R}_{0101} = -\bar{R}_{1001} = (1 - \beta)$ ve $\bar{R}_{0103} = -\bar{R}_{1003} = -\alpha$ eşitlikleri elde edilir.

Benzer işlemler yapılarak (4.8) ve (5.21) eşitlikleri kullanılarak sıfırdan farklı

$\bar{R}_{ijkl} = \bar{R}(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(\bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l)$ değerleri simetriler ve anti-simetriler

dışında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{0101} &= -\bar{R}_{0440} = \bar{R}_{0202} = -\bar{R}_{0330} = 1 - \beta, \\ \bar{R}_{0103} &= \bar{R}_{0402} = -\alpha, \\ \bar{R}_{1412} &= -\bar{R}_{3423} = -\bar{R}_{3441} = -\bar{R}_{2312} = \alpha(\beta - 1), \\ \bar{R}_{3434} &= \bar{R}_{2323} = \bar{R}_{1414} = \bar{R}_{1212} = \alpha^2, \\ \bar{R}_{1313} &= \bar{R}_{2424} = \alpha^2 - (\beta - 1)^2, \\ \bar{R}_{1234} &= -\bar{R}_{2314} = (\beta - 1)^2.\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak \bar{Ric} Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenlerini



hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_0, e_0) &= \overline{R}_{0000} + \overline{R}_{1001} + \overline{R}_{2002} + \overline{R}_{3003} + \overline{R}_{4004} \\ &= (\beta - 1) + (\beta - 1) + (\beta - 1) + (\beta - 1) = 4(\beta - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_1, e_1) &= \overline{R}_{0110} + \overline{R}_{1111} + \overline{R}_{2112} + \overline{R}_{3113} + \overline{R}_{4114} \\ &= \beta - 1 - \alpha^2 + (\beta - 1)^2 - \alpha^2 \\ &= \beta^2 - \beta - 3\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_2, e_2) &= \overline{R}_{0220} + \overline{R}_{1221} + \overline{R}_{2222} + \overline{R}_{3223} + \overline{R}_{4224} \\ &= \beta - 1 - \alpha^2 + (\beta - 1)^2 - \alpha^2 \\ &= \beta^2 - \beta - 3\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_3, e_3) &= \overline{R}_{0330} + \overline{R}_{1331} + \overline{R}_{2332} + \overline{R}_{3333} + \overline{R}_{4334} \\ &= \beta - 1 - \alpha^2 + (\beta - 1)^2 - \alpha^2 \\ &= \beta^2 - \beta - 3\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_4, e_4) &= \overline{R}_{0440} + \overline{R}_{1441} + \overline{R}_{2442} + \overline{R}_{3443} + \overline{R}_{4444} \\ &= \beta - 1 - \alpha^2 + (\beta - 1)^2 - \alpha^2 \\ &= \beta^2 - \beta - 3\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_2, e_4) &= \overline{R}_{0240} + \overline{R}_{1241} + \overline{R}_{2242} + \overline{R}_{3243} + \overline{R}_{4244} \\ &= \alpha - \alpha\beta + \alpha - \alpha\beta + \alpha \\ &= 3\alpha - 2\alpha\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_3, e_1) &= \overline{R}_{0310} + \overline{R}_{1311} + \overline{R}_{2312} + \overline{R}_{3313} + \overline{R}_{4314} \\ &= \alpha - \alpha\beta + \alpha - \alpha\beta + \alpha \\ &= 3\alpha - 2\alpha\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_1, e_3) &= \overline{R}_{0130} + \overline{R}_{1131} + \overline{R}_{2132} + \overline{R}_{3133} + \overline{R}_{4134} \\ &= \alpha - \alpha\beta + \alpha - \alpha\beta + \alpha \\ &= 3\alpha - 2\alpha\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(e_4, e_2) &= \overline{R}_{0420} + \overline{R}_{1421} + \overline{R}_{2422} + \overline{R}_{3423} + \overline{R}_{4424} \\ &= \alpha - \alpha\beta + \alpha - \alpha\beta + \alpha \\ &= 3\alpha - 2\alpha\beta\end{aligned}$$

O halde elde edilen eşitlikler düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{00} &= 4(\beta - 1), \\
\overline{Ric}_{11} &= \overline{Ric}_{22} = \overline{Ric}_{33} = \overline{Ric}_{44} = \beta^2 - \beta - 3\alpha^2, \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{24} = 3\alpha - 2\alpha\beta
\end{aligned} \tag{5.23}$$

eşitlikleri bulunur. (5.23) eşitlikleri yardımıyla da aşağıdaki gibi skaler eğriliği hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \overline{Ric}_{00} + \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} \\
&= 4(\beta - 1) + 4(\beta^2 - \beta - 3\alpha^2) \\
&= 4(\beta^2 - 3\alpha^2 - 1)
\end{aligned}$$

$\overline{\mathcal{L}}_\xi g$, $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık g nin ξ yönünde Lie türevinin simetrikler dışındaki sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_1, e_1) &= g(\overline{\nabla}_{e_1} e_0, e_1) + g(e_1, \overline{\nabla}_{e_1} e_0) = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_2, e_2) &= g(\overline{\nabla}_{e_2} e_0, e_2) + g(e_2, \overline{\nabla}_{e_2} e_0) = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_3, e_3) &= g(\overline{\nabla}_{e_3} e_0, e_3) + g(e_3, \overline{\nabla}_{e_3} e_0) = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_4, e_4) &= g(\overline{\nabla}_{e_4} e_0, e_4) + g(e_4, \overline{\nabla}_{e_4} e_0) = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_1, e_3) &= g(\overline{\nabla}_{e_1} e_0, e_3) + g(e_3, \overline{\nabla}_{e_1} e_0) = 2(1 - \beta) \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g(e_2, e_4) &= g(\overline{\nabla}_{e_2} e_0, e_4) + g(e_4, \overline{\nabla}_{e_2} e_0) = 2(1 - \beta)
\end{aligned}$$

Elde edilen sonuçlar düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{11} &= (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{22} = (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{33} = (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{44} = -2\alpha, \\
(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{13} &= (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{24} = 2(1 - \beta)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.23) ve (5.24) eşitlikleri kullanılarak (G, ϕ, ξ, η, g) nin aşağıda verilen (λ, μ, ν) sabitleri ile para-Einstein benzeri manifold ise (5.2) eşitliğini sağlayacağından

$$\begin{aligned}
Ric_{00} &= 4(\beta - 1) = \lambda + \mu + \nu \\
Ric_{11} &= \beta(\beta - 1) - 3\alpha^2 = \lambda \\
Ric_{13} &= 3\alpha - 2\alpha\beta = \mu
\end{aligned}$$

eşitliklerinden (λ, μ, ν) sabitlerinin

$$\begin{aligned}\lambda &= \beta^2 - \beta - 3\alpha^2, \\ \mu &= -2\alpha\beta + 3\alpha, \\ \nu &= 3\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\alpha + 5\beta - \beta^2 - 4\end{aligned}\tag{5.25}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca (G, ϕ, ξ, η, g) aşağıda verilen (λ, μ, ν) sabitleri ve ξ potansiyeli ile para-Ricci benzeri soliton kabul ediyorsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(e_1, e_1) + \text{Ric}(e_1, e_1) + \lambda g(e_1, e_1) + \mu\tilde{g}(e_1, e_1) + \nu\eta(e_1)\eta(e_1) &= 0 \\ \frac{1}{2}(-2\alpha) + \beta^2 - \beta - 3\alpha^2 + \lambda &= 0 \\ \lambda &= \alpha - \beta^2 + \beta + 3\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(e_1, e_3) + \text{Ric}(e_1, e_3) + \lambda g(e_1, e_2) + \mu\tilde{g}(e_1, e_3) + \nu\eta(e_1)\eta(e_3) &= 0 \\ \frac{1}{2}(2(1 - \beta)) + 3\alpha - 2\alpha\beta + \mu &= 0 \\ \mu &= \beta - 1 - 3\alpha + 2\alpha\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(e_0, e_0) + \text{Ric}(e_0, e_0) + \lambda g(e_0, e_0) + \mu\tilde{g}(e_0, e_0) + \nu\eta(e_0)\eta(e_0) &= 0 \\ 4(\beta - 1) + \lambda + \mu + \nu &= 0 \\ \nu &= 4(1 - \beta) - \beta + 1 + 3\alpha - 2\alpha\beta - 3\alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\lambda &= 3\alpha^2 + \alpha - \beta^2 + \beta, \\ \mu &= 2\alpha\beta + \beta - 3\alpha - 1, \\ \nu &= \beta^2 - 3\alpha^2 - 2\alpha\beta - 6\beta + 2\alpha + 5\end{aligned}\tag{5.26}$$

olması gerektiği bulunur. Dolayısıyla elde edilen (G, ϕ, ξ, η, g) manifoldu için (5.25) ve (5.26) eşitlikleri Teorem (5.0.1) ve (5.0.2) yi destekler.

6. PARA-SASAKİ BENZERİ RIEMANN MANİFOLDLARIN D–HOMOTETİK DEFORMASYONLARI

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold ve $\lambda > 0$ olmak üzere

$$\hat{\eta} = \lambda\eta, \quad \hat{\xi} = \frac{1}{\lambda}\xi, \quad \hat{\phi} = \phi, \quad \hat{g} = \lambda g + \lambda(\lambda - 1)\eta \otimes \eta, \quad (6.1)$$

eşitlikleri ile M üzerinde $(\hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ yapısını düşünelim.

Teorem 6.0.1. M üzerinde $(\hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ yapısı için

$$\begin{aligned} i. \text{ Ker } \hat{\eta} &= \text{Ker } \eta, & ii. \hat{g}(\hat{\xi}, x) &= \hat{\eta}(x), \\ iii. \hat{g}(x, \xi) &= \lambda^2 g(x, \xi) = \lambda^2 \eta(x), & iv. \hat{g}(\hat{\phi}x, \hat{\phi}y) &= \hat{g}(x, y) - \hat{\eta}(x)\hat{\eta}(y), \end{aligned} \quad (6.2)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. i. $\lambda > 0$ sabit olduğu için $\text{Ker } \hat{\eta} = \text{Ker } \lambda\eta = \text{Ker } \eta$

ii. (6.1) de $x = \hat{\xi}$ konulduğunda (3.1)(i), (3.10) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{\xi}, x) &= \lambda g(\hat{\xi}, x) + \lambda(\lambda - 1)\eta(\hat{\xi})\eta(x) \\ \hat{g}(\hat{\xi}, x) &= \lambda g\left(\frac{1}{\lambda}\xi, x\right) + \lambda(\lambda - 1)\eta\left(\frac{1}{\lambda}\xi\right)\eta(x) \\ \hat{g}(\hat{\xi}, x) &= \eta(x) + (\lambda - 1)\eta(x) = \lambda\eta(x) = \hat{\eta}(x) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

iii. (i) ve (ii) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{\xi}, x) &= \hat{\eta}(x) \\ \hat{g}(\xi, x) &= \lambda\hat{g}(\hat{\xi}, x) = \lambda\hat{\eta}(x) = \lambda^2\eta(x) \end{aligned}$$

iv. (6.1) ,(3.3)(ii), (3.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x, y) - \hat{\eta}(x)\hat{\eta}(y) &= \lambda g(x, y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(x)\eta(y) - (\lambda\eta(x))(\lambda\eta(y)) \\
&= \lambda g(x, y) + \lambda^2\eta(x)\eta(y) - \lambda\eta(x)\eta(y) - \lambda^2\eta(x)\eta(y) \\
&= \lambda(g(x, y) - \eta(x)\eta(y)) \\
&= \lambda g(\phi x, \phi y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\phi}x, \hat{\phi}y) &= \hat{g}(\phi x, \phi y) \\
&= \lambda g(\phi x, \phi y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(\phi x)\eta(\phi y) \\
&= \lambda g(\phi x, \phi y)
\end{aligned}$$

olduğundan istenilen eşitlik elde edilir. □

Teoremden ispatlanan eşitliklerden dolayı M üzerindeki $(\hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ yapısı bir apapR yapısıdır. Dolayısıyla $(M, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ apapR manifolddur. Bu şekilde tanımlanan $(M, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ apapR manifolduna (M, ϕ, ξ, η, g) 'nin \mathcal{D} -Homotetik deformasyonu denir. Böylece \mathcal{D} -homotetik deformasyon kullanılarak yeni apapR manifoldları inşa edilebilir.

$c^2 = a + b$ olmak üzere deformasyonu

$$\hat{\eta} = c\eta, \quad \hat{\xi} = \frac{1}{c}\xi, \quad \hat{\phi} = \phi, \quad \hat{g} = ag + b\eta \otimes \eta, \quad a, b > 0 \quad (6.3)$$

şeklinde aldığımızda M üzerinde yine bir apapR yapısı elde edilir.

(6.1) deformasyonu için Kozsul formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(\hat{\nabla}_x y, z) &= g(\nabla_x y, z) + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\eta(z)[g(y, \nabla_x \xi) + g(x, \nabla_y \xi)] \\
&\quad + \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda}\eta(z)[\eta(x)g(y, \nabla_\xi \xi) + \eta(y)g(x, \nabla_\xi \xi)] \\
&\quad + \frac{\lambda-1}{2}[\eta(x)(g(z, \nabla_y \xi) - g(y, \nabla_z \xi)) \\
&\quad \quad + \eta(y)(g(z, \nabla_x \xi) - g(x, \nabla_z \xi))]
\end{aligned} \quad (6.4)$$

eşitliği bulunur.

ξ paralel karakteristik vektör alanı yani her $x \in \chi(M)$ için $\nabla_x \xi = 0$ ise \hat{g} metriğine karşılık gelen $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ile g Riemann metriğine karşılık gelen ∇ Levi-Civita konneksiyonu örtüşür. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_{10}$ sınıflarına ait olması durumunda yine ∇ ve $\hat{\nabla}$ konneksiyonları örtüşür.

(6.4)'te verilen eşitlik kullanılarak $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna karşılık gelen (0, 3) tipindeki \hat{F} tensörü

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, y, z) &= \lambda F(x, y, z) + \lambda(\lambda - 1)\eta(z)g(x, \nabla_{\phi y}\xi) \\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}[g(z, \nabla_{\phi y}\xi - \phi\nabla_y\xi) + g(y, \nabla_{\phi z}\xi - \phi\nabla_z\xi)] \\ &+ \eta(y)[g(\phi z, \nabla_x\xi) - g(x, \nabla_{\phi z}\xi)] \end{aligned} \quad (6.5)$$

şeklinde bulunur. ξ paralel karakterislik vektör alanı için $\hat{F}(x, y, z) = \lambda F(x, y, z)$ olduğu görülür.

$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \{0, 1, \dots, 2n\}$ olmak üzere $\{e_0 = \xi, e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = \phi e_1, \dots, e_{2n} = \phi e_n\}$ (ϕ, ξ, η, g) yapısına göre lokal ortonormal tabanı ise $i \in \{1, \dots, 2n\}$ için $\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i$ ve $\hat{\xi} = \frac{1}{\lambda}\xi$ alındığında $\{\hat{\xi}, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{2n}\}$ tabanı da $(\hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ yapısı için bir lokal ortonormal tabandır.

(M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu olması durumunda (3.23) eşitliği kullanılarak (6.5) eşitliği

$$\hat{F}(x, y, z) = \lambda F(x, y, z) + \lambda(\lambda - 1)\eta(z)[g(x, y) - \eta(x)\eta(y)] \quad (6.6)$$

eşitliğine indirgenir.

Teorem 6.0.2. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifold, \hat{g} metriğine karşılık gelen $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ile g metriğine karşılık gelen ∇ Levi-Civita konneksiyonu arasındaki ilişki

$$\hat{\nabla} = \nabla + \frac{\lambda - 1}{\lambda}(\tilde{g} - \eta \otimes \eta) \otimes \xi \quad (6.7)$$

şeklindedir.

Kanıt. (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.24)(i) ve (6.4) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned}
g(\hat{\nabla}_x y, z) &= g(\nabla_x y, z) + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\eta(z)[g(y, \nabla_x \xi) + g(x, \nabla_y \xi)] \\
&\quad + \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda}\eta(z)[\eta(x)g(y, \nabla_\xi \xi) + \eta(y)g(x, \nabla_\xi \xi)] \\
&\quad + \frac{\lambda-1}{2}[\eta(x)(g(z, \nabla_y \xi) - g(y, \nabla_z \xi)) \\
&\quad + \eta(y)(g(z, \nabla_x \xi) - g(x, \nabla_z \xi))] \\
&= g(\nabla_x y, z) + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\eta(z)2g(x, \phi y) \\
&= g(z, \nabla_x y + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y)\xi)
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ ve sol tarafı birleştirildiğinde

$$g(z, \hat{\nabla}_x y - \nabla_x y - \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y)\xi) = 0$$

olur. Her $z \in \chi(M)$ için non dejenere olduğundan

$$\hat{\nabla}_x y = \nabla_x y + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y)\xi \quad (6.8)$$

elde edilir. □

Teorem 6.0.3. *M para-Sasaki benzeri Riemann manifold üzerinde (6.1) de verilen \mathcal{D} -homotetik deformasyon ele alındığında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

Her $x, y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
i. \hat{\nabla}_x \xi &= \nabla_x \xi = \phi x \\
ii. (\hat{\nabla}_x \eta)y &= \frac{1}{\lambda}g(x, \phi y) \\
iii. (\hat{\nabla}_x \phi)y &= -\frac{1}{\lambda}g(x, y)\xi + \frac{\lambda+1}{\lambda}\eta(x)\eta(y)\xi - \eta(y)x
\end{aligned} \quad (6.9)$$

dir.

Kanıt. i. (6.8) da $y = \xi$ koyduğumuzda (3.24)(i) ve (3.3)(i) eşitliklerinden

$$\hat{\nabla}_x \xi = \nabla_x \xi + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi \xi)\xi = \phi x$$

bulunur.

ii. (2.1), (3.24)(ii), (3.1)(i), (6.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_x \eta)y &= x(\eta(y)) - \eta(\hat{\nabla}_x y) \\
&= x(\eta(y)) - \eta(\nabla_x y + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y)\xi) \\
&= (\nabla_x \eta)y - \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y) \\
&= g(x, \phi y) - \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y) \\
&= \frac{1}{\lambda}g(x, \phi y)
\end{aligned}$$

bulunur.

iii. (2.2), (6.8), (3.2), (3.3)(i), (3.10), (3.23) eşitlikleriyle

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_x \phi)y &= \hat{\nabla}_x(\phi y) - \phi(\hat{\nabla}_x y) \\
&= \nabla_x \phi y + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi^2 y)\xi + \phi(\nabla_x y + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi y)\xi) \\
&= (\nabla_x \phi)y + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, y - \eta(y)\xi)\xi \\
&= (\nabla_x \phi)y + \frac{\lambda-1}{\lambda}(g(x, y) - \eta(y)\eta(x))\xi \\
&= -g(x, y)\xi - \eta(y)x + 2\eta(x)\eta(y)\xi + \frac{\lambda-1}{\lambda}(g(x, y) - \eta(y)\eta(x))\xi \\
&= -\frac{1}{\lambda}g(x, y)\xi + \frac{\lambda+1}{\lambda}\eta(x)\eta(y)\xi - \eta(y)x
\end{aligned}$$

bulunur.

□

M manifoldu para-Sasaki benzeri Riemann manifold olmak üzere M nin \mathcal{D} -homotetik deformasyonu $\lambda \neq 1$ durumunda para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu değildir. Çünkü (6.9)(iii) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_x \hat{\phi})y &= -\frac{1}{\lambda}g(x, y)\xi - \eta(y)x + \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)\eta(x)\eta(y)\xi \\
&= \frac{1}{\lambda}(-\hat{g}(x, y)\hat{\xi} - \hat{\eta}(y)x + 2\hat{\eta}(x)\hat{\eta}(y)\hat{\xi})
\end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilir.

$\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna karşılık gelen eğrilik tensörü \hat{R}

$$\hat{R}(x, y)z = \hat{\nabla}_x \hat{\nabla}_y z - \hat{\nabla}_y \hat{\nabla}_x z - \hat{\nabla}_{[x, y]}z$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem (6.0.2) de verilen ∇ ve $\hat{\nabla}$ konneksiyonları arasındaki ilişki ve (3.24) de verilen eşitlikler kullanılarak \hat{R} ve R eğrilik tensörleri arasındaki

$$\begin{aligned} \hat{R}(x, y)z &= R(x, y)z + \frac{\lambda-1}{\lambda}[-g(x, z)\eta(y)\xi + g(y, z)\eta(x)\xi \\ &\quad + g(y, \phi z)\phi x - g(x, \phi z)\phi y] \end{aligned} \quad (6.11)$$

ilişkisi elde edilir. (6.11) eşitliğinde $x = \xi$ yazılırsa

$$\hat{R}(\xi, y)z = R(\xi, y)z + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(\phi y, \phi z) \quad (6.12)$$

eşitliği elde edilir. Yine $i \neq 0$ olmak üzere $x = e_i$ yazılırsa

$$\hat{R}(e_i, y)z = R(e_i, y)z + \frac{\lambda-1}{\lambda}[-g(e_i, z)\eta(y)\xi + g(y, \phi z)\phi e_i - g(e_i, \phi z)\phi y] \quad (6.13)$$

bulunur. (6.11) eşitliğinde $y = \xi$ yazılırsa

$$\hat{R}(x, \xi)z = R(x, \xi)z + \frac{1-\lambda}{\lambda}g(\phi x, \phi z)\xi$$

elde edilir. (6.11) eşitliğinde $z = \xi$ yazılırsa

$$\hat{R}(x, y)\xi = R(x, y)\xi = \eta(x)y - \eta(y)x$$

elde edilir.

(2.6), (6.1), (6.12) ve (6.13) eşitlikleri yardımıyla $\hat{R}ic$ ve Ric eğrilik tensörlerinin

eşitliği

$$\begin{aligned}
\hat{Ric}(x, y) &= \sum_{i=0}^{2n} \hat{g}(\hat{R}(\hat{e}_i, x)y, \hat{e}_i) \\
&= \hat{g}(\hat{R}(\hat{\xi}, x)y, \hat{\xi}) + \sum_{i=1}^{2n} \hat{g}(\hat{R}(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i, x)y, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \hat{g}(\hat{R}(\xi, x)y, \xi) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{2n} \hat{g}(\hat{R}(e_i, x)y, e_i) \\
&= g(R(\xi, x)y, \xi) + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(\phi x, \phi y) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^{2n} \lambda g(R(e_i, x)y, e_i) + (1-\lambda)g(e_i, \phi y)g(\phi x, e_i) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{2n} g(R(e_i, x)y, e_i) + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(\phi x, \phi y) + \frac{1-\lambda}{\lambda} g\left(\sum_{i=0}^{2n} g(\phi x, e_i)e_i, \phi y\right) \\
&= Ric(x, y) + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(\phi x, \phi y) + \frac{1-\lambda}{\lambda} g(\phi x, \phi y) \\
&= Ric(x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\hat{Ric} = Ric \quad (6.14)$$

olur.(2.7) eşitliği ile \hat{scal} ve $scal$ eğrilik tensörleri arasında aşağıdaki ilişki geçerlidir:

$$\begin{aligned}
\hat{scal} &= \sum_{i=0}^{2n} \hat{Ric}(\hat{e}_i, \hat{e}_i) \\
&= \sum_{i=0}^{2n} \hat{Ric}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i\right) = \sum_{i=0}^{2n} Ric\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_i\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{2n} Ric(e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{\lambda} scal
\end{aligned}$$

Böylece skaler eğrilik tensörleri için

$$\hat{scal} = \frac{1}{\lambda} scal \quad (6.15)$$

eşitliği vardır.

Teorem 6.0.4. $f \in C^\infty(M)$ için \hat{g} ye karşılık gelen Hessian, gradyan, diverjans ve

Laplace operatörleri

$$\begin{aligned}
i. \hat{g}radf &= \frac{1}{\lambda}gradf + \frac{1-\lambda}{\lambda^2}\xi(f)\xi, \\
ii. \hat{H}essf &= Hessf + \frac{1-\lambda}{\lambda}\xi(f)(\tilde{g} - \eta \otimes \eta), \\
iii. \hat{d}iv &= div, \\
iv. \hat{\Delta}(f) &= \frac{1}{\lambda}\Delta f + \frac{1-\lambda}{\lambda^2}\xi(f).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

eşitlikleri ile verilir.

Kanıt. i. (6.1), (6.8) eşitlikleri ve (2.8) tanımı ile

$$\hat{g}(gradf, x) = xf, \tag{6.17}$$

$$\lambda g(gradf, x) + \lambda(\lambda - 1)\eta(gradf)\eta(x) = xf \tag{6.18}$$

bulunur. (6.17) de $x = \xi$ koyarak $\eta(gradf) = \frac{1}{\lambda^2}\xi(f)$ elde edilir. Bulduğumuz eşitlik (6.18) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\lambda g(gradf, x) + \frac{\lambda-1}{\lambda}\xi(f)\eta(x) &= xf = g(gradf, x) \\
g(\lambda gradf + \frac{\lambda-1}{\lambda}\xi(f)\xi - gradf, x) &= 0
\end{aligned}$$

olur. g non-dejenere olduğundan

$$\lambda gradf + \frac{\lambda-1}{\lambda}\xi(f)\xi - gradf = 0$$

olup istenilen gösterilmiş olur.

ii. \hat{g} yerine (6.1)'deki eşitlik yazılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{H}essf(x, y) &= \hat{g}(\hat{\nabla}_x gradf, y) \\
&= \lambda g(\hat{\nabla}_x gradf, y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(\hat{\nabla}_x gradf)\eta(y)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

bulunur. (6.8) eşitliği kullanılırsa

$$\hat{\nabla}_x gradf = \nabla_x gradf + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x, \phi gradf)\xi$$

olur. (i) de verilen eşitlik yukarıda yerine yazılırsa

$$\hat{\nabla}_x \hat{grad} f = \frac{1}{\lambda} \nabla_x grad f + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} \nabla_x (\xi(f)\xi) + \frac{\lambda-1}{\lambda^2} g(x, \phi grad f) \xi$$

bulunur. Bu eşitlik (6.19) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \hat{Hess} f(x, y) &= \lambda \left[\frac{1}{\lambda} g(\nabla_x grad f, y) - \frac{\lambda-1}{\lambda^2} (x(\xi(f))\eta(y) + \xi(f)g(\phi x, y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda-1}{\lambda^2} g(\phi x, grad f)\eta(y) \right] + \lambda(\lambda-1) \left[\frac{1}{\lambda} \eta(\nabla_x grad f)\eta(y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda-1}{\lambda^2} x(\xi f)\eta(y) + \frac{\lambda-1}{\lambda^2} g(\phi x, grad f)\eta(y) \right] \\ &= Hess f(x, y) - (\lambda-1)x(\xi f)\eta(y) - \frac{\lambda-1}{\lambda} \xi(f)g(\phi x, y) \\ &\quad + (\lambda-1)g(\phi x, grad f)\eta(y) + (\lambda-1)\eta(\nabla_x grad f)\eta(y) \\ &= Hess f(x, y) - (\lambda-1)x(\xi f)\eta(y) - \frac{\lambda-1}{\lambda} \xi(f)g(\phi x, y) \\ &\quad + (\lambda-1)\eta(y)(g(\phi x, grad f) + g(\nabla_x grad f, \xi)) \\ &= Hess f(x, y) - \frac{\lambda-1}{\lambda} \xi(f)g(\phi x, y) \end{aligned}$$

olup istenilen gösterilmiş olur.

iii. (2.9), (6.1), (6.7) ve (i.) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \hat{div} x &= \sum_{i=0}^{2n} \hat{g}(\hat{\nabla}_{\hat{e}_i} x, \hat{e}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{2n} (\lambda g(\hat{\nabla}_{\hat{e}_i} x, \hat{e}_i) + \lambda(\lambda-1)\eta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_i} x)\eta(\hat{e}_i)) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{2n} g(\nabla_{\hat{e}_i} x + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(\hat{e}_i, \phi x), \hat{e}_i) + (\lambda-1)\eta(\hat{\nabla}_{\hat{e}_0} x) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{2n} (g(\nabla_{\hat{e}_i} x, \hat{e}_i) + (\lambda-1)g(\hat{e}_i, \phi x)\eta(\hat{e}_i) \\ &\quad + \frac{\lambda-1}{\lambda} \eta(\nabla_{\hat{e}_0} x) + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(e_0, \phi y)\eta(\xi)) \\ &= [\lambda g(\nabla_{e_0} x, e_0) + \lambda \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_{\hat{e}_i} x, \hat{e}_i)] + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(\nabla_{e_0} x, e_0) \\ &= \frac{1}{\lambda} g(\nabla_{e_0} x, e_0) + \sum_{i=1}^{2n} g(\nabla_{e_i} x, e_i) + \frac{\lambda-1}{\lambda} g(\nabla_{e_0} x, e_0) \\ &= \sum_{i=0}^{2n} g(\nabla_{e_i} x, e_i) = div x \end{aligned}$$

elde edilir.

iv. (2.11) (i.) ve (iii.) yardımı ile $\hat{\Delta}$ operatörü

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(f) &= \hat{div}(\hat{grad}f) = div(\hat{grad}f) \\
&= \sum_{i=0}^{2n} g(\nabla_{e_i} \hat{grad}f, e_i) \\
&= \sum_{i=0}^{2n} g(\nabla_{e_i} (\frac{1}{\lambda} gradf + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} \xi(f)\xi), e_i) \\
&= \sum_{i=0}^{2n} (\frac{1}{\lambda} g(\nabla_{e_i} gradf, e_i) + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} \xi(f)\eta(e_i)) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{2n} g(\nabla_{e_i} gradf, e_i) + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} \xi(f) \\
&= \frac{1}{\lambda} \Delta f + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} \xi(f)
\end{aligned}$$

bulunur.

□

Teorem 6.0.5. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifold ve (a, b, c) sabitleri ile para-Einstein benzeri manifold olmak üzere M nin \mathcal{D} -homotetik deformasyonu $(M, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ yine para-Einstein benzeri manifolddur öyle ki sabitleri

$$\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}, \frac{(1-\lambda)(a+b)+c}{\lambda^2} \right)$$

şeklindedir.

Kanıt. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Einstein benzeri manifold ise (5.1) özdeşliği sağlanır. (6.14) eşitliğinden dolayı (5.1) eşitliğinde Ric yerine $\hat{R}ic$, g yerine (6.1) ve \tilde{g} yerine

$$\tilde{g} = \frac{1}{\lambda} \hat{g} - (\lambda - 1)\eta \otimes \eta \tag{6.20}$$

eşitliği yazılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{R}ic = Ric &= a(\frac{1}{\lambda} \hat{g} + (1-\lambda)\eta \otimes \eta) + b(\frac{1}{\lambda} \tilde{g} - (\lambda-1)\eta \otimes \eta) + c\eta \otimes \eta \\
&= \frac{a}{\lambda} \hat{g} + \frac{b}{\lambda} \tilde{g} + (a(1-\lambda) + b(1-\lambda) + c)\eta \otimes \eta
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\eta \otimes \eta$ yerine $\frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta} \otimes \hat{\eta}$ konulursa

$$\hat{Ric} = \frac{a}{\lambda} \hat{g} + \frac{b}{\lambda} \tilde{g} + \frac{(a+b)(1-\lambda) + c}{\lambda^2} \hat{\eta} \otimes \hat{\eta}$$

olup ispat tamamlanır. □

Tanım 6.0.6. M apapR manifoldu olmak üzere $f \in C^\infty(M)$ ve α 1-formu için

$$\nabla_x \xi = fx + \alpha(x)\xi$$

eşitliği geçerli ise ξ ye burulmalı vektör alanı denir.

$\eta(\nabla_x \xi) = 0$ olduğundan

$$0 = \eta(\nabla_x \xi) = \eta(fx + \alpha(x)\xi) = f\eta(x) + \alpha(x) = (\alpha + f\eta)(x)$$

eşitliği ile M üzerindeki α 1-formu $\alpha = -f\eta$ ile belirlidir. Bu durumda

$$\nabla_x \xi = fx + \alpha(x)\xi = fx - f\eta(x)\xi = f(x - \eta(x)\xi) = f\phi^2 x \quad (6.21)$$

eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned} (\nabla_x \eta)y &= x\eta(y) - \eta(\nabla_x y) \\ &= xg(y, \xi) - g(\nabla_x y, \xi) \\ &= g(y, \nabla_x \xi) \\ &= g(y, f\phi^2 x) \\ &= fg(\phi x, \phi y) \end{aligned}$$

(6.4) kullanarak y gördüğümüz yere ξ koyarsak

$$\begin{aligned}
g(\hat{\nabla}_x \xi, z) &= g(\nabla_x \xi, z) + \frac{\lambda-1}{2\lambda} \eta(z) [g(\xi, \nabla_x \xi) + g(x, \nabla_\xi \xi)] \\
&\quad + \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} \eta(z) [\eta(x)g(\xi, \nabla_\xi \xi) + \eta(\xi)g(x, \nabla_\xi \xi)] \\
&\quad + \frac{\lambda-1}{2} [\eta(x)(g(z, \nabla_\xi \xi) - g(\xi, \nabla_z \xi)) \\
&\quad + \eta(\xi)(g(z, \nabla_x \xi) - g(x, \nabla_z \xi))] \\
&= g(\nabla_x \xi, z) + \frac{\lambda-1}{2\lambda} g(x, \nabla_\xi \xi) \\
&\quad + \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} \eta(z) g(x, \nabla_\xi \xi) \\
&\quad + \frac{\lambda-1}{2} [\eta(x)g(z, \nabla_\xi \xi) + g(z, \nabla_x \xi) - g(x, \nabla_z \xi)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (6.21) eşitliğini son bulduğumuz eşitlikte yerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}
g(\hat{\nabla}_x \xi, z) &= g(f\phi^2 x, z) + \frac{\lambda-1}{2\lambda} g(x, f\phi^2 \xi) \\
&\quad + \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} \eta(z) g(x, f\phi^2 \xi) \\
&\quad + \frac{\lambda-1}{2} [\eta(x)g(z, f\phi^2 \xi) + g(z, f\phi^2 x) - g(x, f\phi^2 z)] \\
&= g(f\phi^2 x, z) \\
&= g(\nabla_x \xi, z)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\lambda \hat{\nabla}_x \hat{\xi} &= fx - f\hat{\eta}\hat{\xi} \\
&= fx - f\lambda\eta\frac{1}{\lambda}\xi \\
&= fx - f\eta(x)\xi \\
&= f\phi^2 x
\end{aligned}$$

olduğundan yine burulma vektör alanı olduğu görülür.

Teorem 6.0.7. M para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, ξ potansiyeli ve (α, β, γ) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul ediyorsa $(M, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ \mathcal{D} -homothetik deformasyonu, $\hat{\xi}$ potansiyeli ve $(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma+(1-\lambda)(\alpha+\beta)}{\lambda^2})$ sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul eder.

Kanıt. M para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, ξ potansiyeli ve (α, β, γ) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul etsin. O halde (5.4) eşitliği sağlanır. $\hat{\mathcal{L}}_{\hat{\xi}}\hat{g}$ Lie türevi

hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}}_{\hat{\xi}}\hat{g}(x, y) &= \hat{g}(\hat{\nabla}_x\hat{\xi}, y) + \hat{g}(x, \hat{\nabla}_y\hat{\xi}) \\
&= \frac{1}{\lambda}\hat{g}(\phi x, y) + \frac{1}{\lambda}\hat{g}(x, \phi y) \\
&= g(\phi x, y) + g(x, \phi y) \\
&= 2g(\phi x, y) \\
&= \mathcal{L}_{\xi}g(x, y)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

bulunur. (6.1), (6.22), (6.14) eşitliklikleri (5.4)'de yerine yazılırsa,

$$\hat{Ric} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{\hat{\xi}}\hat{g} + \alpha\left[\frac{1}{\lambda}\hat{g} - (\lambda - 1)\eta \otimes \eta\right] + \beta\left[\frac{1}{\lambda}\tilde{g} - (\lambda - 1)\eta \otimes \eta\right] + \gamma\eta \otimes \eta = 0 \tag{6.23}$$

eşitliği bulunur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafını λ ile çarpıp yeniden düzenlenirse

$$Ric + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{\hat{\xi}}\hat{g} + \frac{\alpha}{\lambda}\hat{g} + \frac{\beta}{\lambda}\tilde{g} + \left(\frac{\gamma + (1 - \lambda)(\alpha + \beta)}{\lambda^2}\right)\hat{\eta} \otimes \hat{\eta} = 0 \tag{6.24}$$

elde edilir. \square

Teorem 6.0.8. *M para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, $\nu \in Ker\eta$ potansiyeli ve (α, β, γ) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul etsin. Bu durumda $(M, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ \mathcal{D} -homotetik deformasyonu, $\hat{\nu} = \frac{1}{\lambda}\nu$ potansiyeli ve $(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma + (1 - \lambda)(\alpha + \beta)}{\lambda^2})$ sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul eder.*

Kanıt. *M para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, $\nu \in Ker\eta$ potansiyeli ve (α, β, γ) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton ediyorsa (5.8) eşitliği sağlanır. $\nu \in Ker\eta$ ve*

$\eta(\nu) = 0$ olduğundan $\hat{\mathcal{L}}_{\nu}\hat{g} = \lambda\mathcal{L}_{\nu}g$ eşitliği (6.1),(6.8),(2.1) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}}_{\nu}\hat{g}(x, y) &= \hat{g}(\hat{\nabla}_x\hat{\nu}, y) + \hat{g}(x, \hat{\nabla}_y\hat{\nu}) \\
&= \lambda g(\hat{\nabla}_x\hat{\nu}, y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(\hat{\nabla}_x\hat{\nu})\eta(y) + \lambda g(x, \hat{\nabla}_y\hat{\nu}) + \lambda(\lambda - 1)\eta(x)\eta(\hat{\nabla}_y\hat{\nu}) \\
&= \lambda g(\nabla_x\hat{\nu} + \frac{\lambda}{\lambda-1}g(x, \phi\hat{\nu})\xi, y) + \lambda(\lambda - 1)[\eta(y)\eta(\nabla_x\hat{\nu} + \frac{\lambda}{\lambda-1}g(x, \phi\hat{\nu})\xi)] \\
&\quad + \lambda g(x, \nabla_y\hat{\nu} + \frac{\lambda}{\lambda-1}g(y, \phi\hat{\nu})\xi) + \lambda(\lambda - 1)[\eta(x)\eta(\nabla_y\hat{\nu} + \frac{\lambda}{\lambda-1}g(y, \phi\hat{\nu})\xi)] \\
&= \lambda g(\nabla_x\hat{\nu}, y) + (\lambda - 1)g(x, \phi\hat{\nu})\eta(y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(y)\eta(\nabla_x\hat{\nu}) \\
&\quad + (\lambda - 1)^2\eta(y)g(x, \phi\hat{\nu}) + \lambda g(x, \nabla_y\hat{\nu}) + (\lambda - 1)g(y, \phi\hat{\nu})\eta(x) \\
&\quad + \lambda(\lambda - 1)\eta(x)\eta(\nabla_y\hat{\nu}) + (\lambda - 1)^2\eta(x)g(y, \phi\hat{\nu}) \\
&= \lambda g(\nabla_x\hat{\nu}, y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(y)g(x, \phi\hat{\nu}) + \lambda(\lambda - 1)\eta(y)\eta(\nabla_x\hat{\nu}) \\
&\quad + \lambda g(x, \nabla_y\hat{\nu}) + \lambda(\lambda - 1)\eta(x)g(y, \phi\hat{\nu}) + \lambda(\lambda - 1)\eta(x)\eta(\nabla_y\hat{\nu}) \\
&= \lambda(\mathcal{L}_{\nu}g)(x, y) + \lambda(\lambda - 1)\eta(y)x\eta(\hat{\nu}) + \lambda(\lambda - 1)\eta(x)y\eta(\hat{\nu}) \\
&= \lambda(\mathcal{L}_{\nu}g)(x, y)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak önceki ispat yöntemleri ile teoremi istenilen şekilde sonuçlandırırız. \square

(M, ϕ, ξ, η, g) bir apapR manifoldu için

$$\text{Hess } f + \text{Ric} + \alpha g + \beta\tilde{g} + \gamma\eta \otimes \eta = 0 \quad (6.25)$$

eşitliği sağlanıyorsa $v = \text{grad } f$ potansiyeli ve (α, β, γ) sabitleri ise bir gradyan Ricci soliton kabul eder, denir. Burada *Hess* terimi, g 'ye göre Hessian operatörünü ifade eder, yani, operatör aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\text{Hess } f)(x, y) = (\nabla_x df)y = g(\nabla_x \text{grad } f, y) \quad (6.26)$$

Eğer α, β, γ M üzerinde fonksiyonlarsa buna gradyan hemen hemen para-Ricci benzeri soliton denir.

(6.26) eşitliği (6.25) eşitliği yerine konulursa

$$\nabla_x v = -Qx - \alpha x - \beta\phi x - (\beta + \gamma)\eta(x)\xi \quad (6.27)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte Q Ricci operatörünü ve $v = \text{grad } f$ 'yi ifade eder.

Teorem 6.0.9. (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$ -boyutlu para-Sasaki benzeri Riemann manifold olsun. Eğer M , $v = \text{grad}f$ potansiyeli ve (α, β, γ) fonksiyonları ile gradyan hemen hemen Ricci benzeri solitonu kabul ediyorsa M 'nin deformasyonu da $\hat{v} = \hat{\text{grad}} f$ potansiyeli ve $(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta\lambda + (\lambda-1)\xi f}{\lambda^2}, \frac{(1-\lambda)(\alpha + \beta + \xi(f)) + \gamma}{\lambda^2})$ fonksiyonları ile gradyan hemen hemen Ricci benzeri soliton kabul eder.

Kanıt. M , $v = \text{grad}f$ potansiyeli ve (α, β, γ) fonksiyonları olan gradyan hemen hemen Ricci benzeri solitonu kabul ediyorsa (6.25) eşitliği sağlanır. Ayrıca (6.16)(ii) eşitliğinden

$$\text{Hess}f(x, y) = \hat{\text{Hess}}f(x, y) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \xi(f)g(\phi x, y) \quad (6.28)$$

olur. (6.1)'deki g eşitliği ile (6.20) eşitliği elde edilir. (6.25) denkleminde (6.14), (6.28), (6.20), (6.1) ve (3.14) eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned} \text{Hess} f + \text{Ric} + \alpha g + \beta \tilde{g} + \gamma \eta \otimes \eta &= 0 \\ \hat{\text{Hess}}f(x, y) - \frac{1-\lambda}{\lambda} \xi(f)g(\phi x, y) + \hat{\text{Ric}}(x, y) + \alpha(\frac{1}{\lambda} \hat{g}(x, y) - (\lambda - 1) \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y)) \\ + \beta(\frac{1}{\lambda} \tilde{g}(x, y) - (\lambda - 1) \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y)) + \gamma \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y) &= 0 \\ \hat{\text{Hess}}f(x, y) - \frac{1-\lambda}{\lambda} \xi(f)(\frac{1}{\lambda} \tilde{g}(x, y) - (\lambda - 1) \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y) - \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y)) \\ \hat{\text{Ric}}(x, y) + \alpha(\frac{1}{\lambda} \hat{g}(x, y) - (\lambda - 1) \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y)) \\ + \beta(\frac{1}{\lambda} \tilde{g}(x, y) - (\lambda - 1) \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y)) + \gamma \frac{1}{\lambda^2} \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(y) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\hat{\text{Hess}}f + \hat{\text{Ric}} + \frac{\alpha}{\lambda} \hat{g} + \left(\frac{\beta\lambda + (\lambda-1)\xi f}{\lambda^2} \right) \tilde{g} + \left(\frac{(1-\lambda)(\alpha + \beta + \xi(f)) + \gamma}{\lambda^2} \right) \hat{\eta} \otimes \hat{\eta} = 0$$

bulunur. □

6.1. ÖRNEK-3

Örnek-2 de (G, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu incelenmiştir ve $(0, 0, -4)$ sabitleri ile η -Einstein manifold olduğu gösterilmiştir. G nin $(G, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ \mathcal{D} -homotetik deformasyonu $\lambda \neq 1$ için para-Sasaki benzeri Riemann manifold değildir. Teorem 6.0.5 kullanılarak $(G, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ manifoldu için $a = \frac{0}{\lambda}$, $b = \frac{0}{\lambda}$ ve $c = \frac{(1-\lambda)(0+0)+(-4)}{\lambda^2} = -\frac{4}{\lambda^2}$ olacağından $(0, 0, -\frac{4}{\lambda^2})$ sabitleri ile η -Einstein manifolddur. Deforme edilmiş yapının $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun sıfırdan farklı

bileşenleri

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{e_0}e_1 &= pe_2 + qe_4, & \hat{\nabla}_{e_1}e_0 &= e_3, & \hat{\nabla}_{e_0}e_2 &= -pe_1 - qe_3, & \hat{\nabla}_{e_2}e_0 &= e_4, \\ \hat{\nabla}_{e_0}e_3 &= qe_2 + pe_4, & \hat{\nabla}_{e_3}e_0 &= e_1, & \hat{\nabla}_{e_0}e_4 &= -qe_1 - pe_3, & \hat{\nabla}_{e_4}e_0 &= e_2, \\ \hat{\nabla}_{e_1}e_3 &= \hat{\nabla}_{e_2}e_4 = \hat{\nabla}_{e_3}e_1 = \hat{\nabla}_{e_4}e_2 &= -\frac{1}{\lambda}e_0\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $(G, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ ' nin Ricci eğriliği Örnek-2 den $Ric_{00} = -4$ ve (6.14) kullanılırsa

$$\hat{Ric} = -\frac{4}{\lambda^2}\hat{\eta} \otimes \hat{\eta} \quad (6.29)$$

eşitliği elde edilir. (6.29) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\hat{scal} &= \sum_{i=0}^{2n} \hat{Ric}(\hat{e}_i, \hat{e}_i) \\ &= -\frac{4}{\lambda}[\lambda\eta(e_0)\lambda\eta(e_0) + \sum_{i=1}^{2n} (\lambda\eta(e_i)\lambda\eta(e_i))]\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (3.1)(i) eşitliği ve $\eta(e_i) = 0$ ile

$$\hat{scal} = -4\lambda$$

bulunur. $\hat{\mathcal{L}}_{\xi}g$ 'nın sıfırdan farklı bileşenleri

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}g)_{13} = (\hat{\mathcal{L}}_{\xi}g)_{24} = (\hat{\mathcal{L}}_{\xi}g)_{31} = (\hat{\mathcal{L}}_{\xi}g)_{42} = 2\lambda \quad (6.30)$$

bulunur. $(G, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$ \mathcal{D} -homotetik deformasyonu, $\hat{\xi}$ potansiyeli ve $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, -\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda+4}{\lambda^2})$ sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton kabul eder.

Sonuç olarak, $(G, \hat{\phi}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g})$, \mathcal{D} -homotetik olarak deformasyonu (6.29), (6.30) eşitlikleri ile Teorem (6.0.7)'i destekler.

7. \mathcal{D} -HOMOTETİK WARPİNG

(M, ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontakt hemen hemen para kompleks yapı olsun. $\mathbb{R} \times M$ manifoldu üzerinde

$$J(a\partial_t, x) = (f\eta(x)\partial_t, \phi x + \frac{a}{f}\xi) \quad (7.1)$$

şeklinde parakompleks bir yapı tanımlanır. Burada a fonksiyon, f pozitif fonksiyon, ∂_t ile $(a\partial_t, x)$ sırasıyla \mathbb{R} 'nin birim teğet vektör alanı ve $\mathbb{R} \times M$ üzerindeki vektör alanını gösterir. $J^2 = I$ olduğu (3.3)(ii), (3.1)(i), (3.2) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned} J(J(a\partial_t, x)) &= J(f\eta(x)\partial_t, \phi x + \frac{a}{f}\xi) \\ &= (fn(\phi x, \frac{a}{f}\xi)\partial_t, \phi(\phi x + \frac{a}{f}\xi) + \frac{f\eta(x)}{f}\xi) \\ &= (f\frac{a}{f}\partial_t, x - \eta(x)\xi + \eta(x)\xi) \\ &= (a\partial_t, x) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

Herhangi bir f pozitif fonksiyon için $\mathbb{R} \times M$ manifoldu üzerinde

$$\hat{g} = dt^2 + fg + f(f-1)\eta \otimes \eta \quad (7.2)$$

şeklinde \hat{g} metriğini tanımlayabiliriz. Buna \mathcal{D} -Homothetik Warping denir. $(a\partial_t, x)$ ve $(b\partial_t, y)$ vektör alanları için \hat{g} metriği

$$\hat{g}((a\partial_t, x), (b\partial_t, y)) = ab + f g(x, y) + f(f-1)\eta(x)\eta(y) \quad (7.3)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\hat{g}(J(a\partial_t, x), J(b\partial_t, y)) = \hat{g}((a\partial_t, x), (b\partial_t, y)) \quad (7.4)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(J(a\partial_t, x), J(b\partial_t, y)) &= \hat{g}((f\eta(x)\partial_t, \phi x + \frac{a}{f}\xi), (f\eta(y)\partial_t, \phi y + \frac{b}{f}\xi)) \\
&= f\eta(x)f\eta(y) + fg(\phi x + \frac{a}{f}\xi, \phi y + \frac{b}{f}\xi) \\
&\quad + f(f-1)\eta(\phi x + \frac{a}{f}\xi)\eta(\phi y + \frac{b}{f}\xi) \\
&= f^2\eta(x)\eta(y) + f(g(\phi x, \phi y) + f\frac{ab}{f^2} + (f-1)\frac{ab}{f}) \\
&= ab + fg(x, y) + f(f-1)\eta(x)\eta(y) \\
&= \hat{g}((a\partial_t, x), (b\partial_t, y))
\end{aligned}$$

olup (7.4) sağlanır. Dolayısıyla $(\mathbb{R} \times M, J, \hat{g})$ bir Riemann hemen hemen çarpım manifoldu olur.

(M, ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. $\mathbb{R} \times M$ çarpım manifoldu üzerinde (7.1) de verilen J parakompleks yapısı ve f pozitif fonksiyonu için

$$\hat{g} = -dt^2 - fg + f(f+1)\eta \otimes \eta \quad (7.5)$$

\hat{g} metriği kullanılarak parakompleks metrik yapı inşa edilebilir. $(a\partial_t, x)$ ve $(b\partial_t, y)$ vektör alanları için \hat{g} metriği

$$\hat{g}((a\partial_t, x), (b\partial_t, y)) = -ab - fg(x, y) + f(f+1)\eta(x)\eta(y) \quad (7.6)$$

şeklinde yazılır. Şimdi

$$\hat{g}(J(a\partial_t, x), J(b\partial_t, y)) = -\hat{g}((a\partial_t, x), (b\partial_t, y)). \quad (7.7)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(J(a\partial_t, x), J(b\partial_t, y)) &= -\hat{g}((f\eta(x)\partial_t, \phi x + \frac{a}{f}\xi), (f\eta(y)\partial_t, \phi y + \frac{b}{f}\xi)) \\
&= -f\eta(x)f\eta(y) - fg(\phi x + \frac{a}{f}\xi, \phi y + \frac{b}{f}\xi) \\
&\quad + f(f+1)\eta(\phi x + \frac{a}{f}\xi)\eta(\phi y + \frac{b}{f}\xi) \\
&= -f^2\eta(x)\eta(y) - f(g(\phi x, \phi y) + f\frac{ab}{f^2} + (f+1)\frac{ab}{f}) \\
&= ab + fg(x, y) - f(f+1)\eta(x)\eta(y) \\
&= -\hat{g}((a\partial_t, x), (b\partial_t, y))
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $(\mathbb{R} \times M, J, \hat{g})$ hemen hemen parahermityen manifold olur.

8. SONUÇ

Bu tezde apapR manifoldları üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu tanımlanmıştır. Para-Sasaki benzeri Riemann manifoldları üzerinde $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile ∇ Levi-Civita konneksiyonu arasında bir ilişki elde edilmiştir. Bundan hareketle $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık gelen \bar{R} eğrilik tensörü, \bar{Ric} Ricci tensörü, \bar{scal} skaler eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu para-Einstein benzeri ise $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile donatılmış M manifoldu da para-Einstein benzeri manifold olduğu ispatlanmıştır. M para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, para-Ricci benzeri soliton kabul ediliyorsa $\bar{\nabla}$ konneksiyonu ile M manifoldunun da para-Ricci soliton kabul ettiği ispatlanmıştır. Düşük boyutlarda örnekler verilerek teoremler doğrulanmıştır.

Para-Sasaki benzeri Riemann manifoldlarının \mathcal{D} -homotetik deformasyonu tanımlanmıştır. M nin ∇ Levi-Civita konneksiyonu ile deformasyonun $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu arasındaki ilişki verilmiştir. Para-Einstein benzeri manifoldunun \mathcal{D} -homotetik deformasyonunun yine para-Einstein benzeri manifold olduğu gösterilmiştir. M para-Sasaki benzeri Riemann manifoldu, para-Ricci benzeri soliton kabul ediyorsa \mathcal{D} -homotetik deformasyonun da para-Ricci benzeri soliton kabul ettiği gösterilmiştir. M para-Sasaki benzeri Riemann manifold gradient Ricci benzeri soliton kabul ediyorsa M nin deformasyonunun da gradient Ricci benzeri solitonun kabul ettiği ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçları destekleyen 5 boyutlu örnek verilmiştir. Elde edilen sonuçlar makaleye dönüştürülerek yayınlanmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] Adati, T. ve Miyazawa, T. (1977). On paracontact Riemannian manifolds, *TRU Math.*, 13, 27-39.
- [2] Ali, A., Mofarreh, F. ve Patra, D.S. (2022). Geometry of almost Ricci solitons on paracontact metric manifolds, *Quaestiones Mathematicae*, 45(8), 1167-1180.
- [3] Bahadır, O. ve Chaubey, S.K. (2020). Some Notes On LP –Sasakian Manifolds With Generalized Symmetric Metric Connection, *Honam Mathematical J.*, 42.
- [4] Bahadır, O., Choudhary, M. A. ve Pandey, S. (2021). LP –Sasakian manifolds with generalized symmetric metric connection, *Novi Sad J. Math.* , 51(2), 75-87.
- [5] Blaga, A. M. (2015). η –Ricci solitons on para-Kenmotsu manifolds, *Balkan J. Geom. Appl.*, 20, 1-13.
- [6] Bulut, Ş. (2019). A quarter-symmetric metric connection on almost contact B –metric manifolds, *Filomat*, 33 (16), 5181–5190.
- [7] Bulut, Ş. (2021). A semi-symmetric metric connection on almost contact B -metric manifolds, *Turkish J. Math.* , 45 (6), 2455–2465.
- [8] Bulut, Ş. (2019). \mathcal{D} –homotetic deformation on almost contact B –metric manifolds, *Journal of Geometry*, 110(2), 23.
- [9] Bulut, Ş. ve İnelöz, P. (2024). Para-Sasaki-like Manifolds with Generalized Symmetric Metric Connection, *Filomat*, 38(11).
- [10] Bulut, Ş. ve İnelöz, P. (2023). \mathcal{D} –homotetic deformation on para-Sasaki-like Riemannian manifolds, *Journal of Geometry*, 114(1), 7.
- [11] Cao, H. D. (2009). Recent progress on Ricci solitons, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 11, 1-38.
- [12] Ivanov, S., Manev, H. ve Manev, M. (2021). Para-Sasaki-like Riemannian manifolds and new Einstein metrics, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* , 115(3), 112.
- [13] Kaneyuki, S. ve Williams, F. L. (1985). Almost paracontact and parahodge structures on manifolds, *Nagoya Math. J.*, 99, 173-187.
- [14] Lee, J.M. (2003). Introduction to smooth manifolds, *Springer-Verlag*.
- [15] Choudhary M.A., Khedher K.M., Bahadır O. ve Siddiqi M.D. (2021). On Golden Lorentzian Manifolds Equipped with Generalized Symmetric Metric Connection, *Mathematics*, 9(19), 2430.
- [16] Manev, H. ve Manev M. (2021). Para-Ricci-like solitons on Riemannian manifolds with almost paracontact structure and almost paracomplex structure, *Mathematics* , 9(14), 1704.

- [17] Manev, H. (2021). Para-Ricci-like solitons with vertical potential on para-Sasaki-like Riemannian Π –manifolds, *Symmetry*, 13, 2267.
- [18] Manev, H. and Manev M. (2022). Para-Ricci-like solitons with arbitrary potential on para-Sasaki-like Riemannian Π –manifolds, *Mathematics* , 10(4), 651.
- [19] Manev, M. (2020). Ricci-like solitons on almost contact B-metric manifolds, *J. Geom. Phys.*, 154 , 103734.
- [20] Manev, M. and Staikova, M. (2001). On almost paracontact Riemannian manifolds of type (n, n) , *J. Geom.* 72 (1-2), 108-114.
- [21] Manev, M.H. and Tavkova, V. R. (2018). On Almost Paracontact Almost Para-complex Riemannian Manifolds, *Facta Universitatis- Ser. Math.Inform.*, 5, 637-657.
- [22] Manev, M.H. and Tavkova, V. (2019). Lie groups as 3-dimensional almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds, *J. Geom* , 110, 43.
- [23] Mishra, R. S., Pandey, S. N. (1980). On quarter-symmetric metric F-connections, *Tensor N.S.*, 34, 1–7.
- [24] Mondal, A. K., De U. C. (2009). Some properties of a quarter-symmetric metric connection on a Sasakian manifold, *Bull. Math. Anal. Appl.*, 99–108.
- [25] Nagaraja,H.G., Premalatha, C.R. (2012). Ricci solitons in Kenmotsu manifolds, *J. Math. Anal.*, 3(2), 18–24.
- [26] Rastogi, S. C. (1978). On quarter-symmetric metric connection, *C. R. Acad. Sci. Bulgar*, 31, 811–814.
- [27] Rastogi, S. C. (1987). On quarter-symmetric metric connection, *Tensor*, 44(2), 133-141.
- [28] O’Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry, *Academic Press*.
- [29] Sasaki, S. (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, *J. Tohoku Math.*, 12, 456-476.
- [30] Sasaki, S. (1980). On paracontact Riemannian manifolds, *TRU Mathematics*, 16, 75-86.
- [31] Sato, I. (1976). On a structure similar to the almost contact structure, *Tensor (N.S.)* 30, 219-224.
- [32] Sato, I. (1977). On a structure similar to the almost contact structure II, *Tensor (N.S.)*, 31, 199-205.
- [33] Sato, I. and Matsumoto, K. (1979). On Para-Sasakian manifolds satisfying certain conditions, *Tensor (N.S.)* 33, 173-178.
- [34] Sharfuddin,S., Husain, S. I. (1976). Semi-symmetric metric connexions in almost contact manifolds, *Tensor*, 30, 133–139.

- [35] Siddiqi, M. D., Bahadır, O. (2020). η -Ricci solitons on Kenmotsu manifold with generalized symmetric metric connection, *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* 35 (2), 295-310.
- [36] Tripathi, M.M. (1999). On a semi-symmetric metric connection in a Kenmotsu manifold, *J. Pure Math.*, 16, 67-71.
- [37] Yano, K., Imai T. (1982). Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors, *Tensor N.S.* 38, 13-18.
- [38] Zamkovoy S. (2009). Canonical connections on paracontact manifolds, *Ann Glob Anal Geom.*, 36, 37-60.



ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO : 0000-0002-7835-4787
Adı-Soyadı : Pınar İnelöz
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum yeri ve yılı :
E-Posta :

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2000-2004 : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü ,
- 2005-2007 : Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü,Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Matematik Matematik Eğitimi/öğretmenliği, Tezsiz Yüksek Lisans Programı
- 2010- , Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı